T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BAZI DİZİ UZAYLARININ SPEKTRUMU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ramazan KAMA**

| | | |
|---|---|---|
| **Enstitü Anabilim Dalı** | **:** | **MATEMATİK** |
| **Tez Danışmanı** | **:** | **Prof. Dr. Metin BAŞARIR** |

**Haziran 2009**

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BAZI DİZİ UZAYLARININ SPEKTRUMU

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ramazan KAMA**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Bu tez 08 / 06 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.**

| | | |
|---|---|---|
| **Prof. Dr. Metin Başarır** | **Prof. Dr. Abdullah Yıldız** | **Doç. Dr. Elman Aliyev** |
| **Jüri Başkanı** | **Üye** | **Üye** |

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışmanın her aşamasında bana zaman ayırıp ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yardımlarından dolayı Araş. Gör. Selma ALTUNDAĞ' a, Emrah Evren KARA' ya, Şenay AYMAN' a ve her zaman yanımda olup bana destek olan eniştem Oğuz IŞIK' a, ablam Amine IŞIK' a ve Değerli Aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ramazan KAMA

# İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}_+$ | : Pozitif reel sayılar kümesi |
| $B(X)$ | : $X$ uzayının kapalı birim yuvarı |
| $S(X)$ | : X uzayının birim küresi |
| Çek$A$ | : $A$ operatörünün sıfır uzayı(çekirdeği) |
| $w$ | : Bütün dizilerin uzayı |
| $L(X,Y)$ | : $X$’ den $Y$’ ye bütün lineer operatörlerin kümesi |
| $B(X,Y)$ | : $X$ ‘ den $Y$ ‘ ye bütün sınırlı-lineer operatörlerin kümesi |
| $L(X,K)$ | : $X$ üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerin kümesi |
| $B(X,K)$ | : $X$ üzerinde tanımlı bütün sınırlı-lineer fonksiyonellerin kümesi |
| $X^*$ | : $X$ uzayının sürekli duali |
| $X^t$ | : $X$ uzayının cebirsel duali |
| $l^0$ | : Reel sayı dizilerinin uzayı |
| $\mathcal{F}$ | : $\mathbb{N}$’ nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi |
| $A^*$ | : $A$ operatörünün adjoint operatörü |
| $I$ | : Özdeşlik operatörü(matrisi) |
| $\Delta^1$ | : Fark matrisi |
| $\Delta^{(1)}$ | : Fark matrisi |
| $\Delta^{(m)}$ | : $m.$ mertebeden fark matrisi |

| | |
|---|---|
| $\Delta_v$ | : Genelleştirilmiş fark matrisi |
| $C_1$ | : 1. Mertebeden Cesàro ortalaması |
| $C_r$ | : r. Mertebeden Cesàro ortalaması |
| $R_a$ | : Rhaly operatörü |
| $M$ | : Kompakt Rhaly operatörü |
| $A_\lambda^{-1}$ | : $A$ operatörünün çözücü operatörü |
| $\rho(A)$ | : $A$ operatörünün çözücü kümesi |
| $\sigma(A)$ | : $A$ operatörünün spektrumu |
| $\sigma_p(A)$ | : $A$ operatörünün nokta spektrumu |
| $\sigma_c(A)$ | : $A$ operatörünün sürekli spektrumu |
| $\sigma_r(A)$ | : $A$ operatörünün artık spektrumu |
| $r_\sigma(A)$ | : $A$ operatörünün spektral yarıçapı |
| $\mathfrak{D}(A)$ | : $A$ operatörünün tanım kümesi |
| $\mathcal{R}(A)$ | : $A$ operatörünün değer kümesi |
| $p = (p_k)$ | : Pozitif reel sayıların sınırlı dizisi |
| $(\lambda:\mu)_s$ | : $s$-çarpımsal matrislerin sınıfı |

# ÖZET

Anahtar kelimeler: Spektrum, Bir operatörün spektrumu, Matris dönüşümleri, $c$ ve $c_0$ dizi uzayları, $\ell_p$ Dizi Uzayı, $\ell_1$ ve $b_v$ Dizi Uzayları, $bv_p$ Dizi Uzayı, $bv_0$ Dizi Uzayı, $\Delta$ fark operatörü, Cesàro operatörü, Rhaly operatörü.

"Bazı dizi uzaylarının spektrumu" isimli bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, bazı dizi uzayları üzerinde $\Delta$ fark operatörü ve $\Delta_v$ genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumu verildi.

Üçüncü bölümde, bazı dizi uzayları üzerinde $C_1$-Cesàro operatörü ve $C_r$ operatörünün spektrumu verildi.

Dördüncü bölümde, bazı dizi uzayları üzerinde Rhaly operatörünün ve Kompakt Rhaly operatörünün spektrumu verildi.

Son bölümde ise, elde edilen bazı genel sonuçlar verilmiştir.

# THE SPECTRUM OF SOME SEQUENCE SPACES


## SUMMARY

Key Words: Spectrum, Spectrum of an operator, Matrix Transformations, The sequences spaces $c$ and $c_0$, The sequence space $\ell_p$, The sequences spaces $\ell_1$ and $b_v$, The sequence space $bv_p$, The sequence space $bv_0$, The difference operator $\Delta$, Cesàro operator, Rhaly operator.

This study which is entitled “The spectrum of Some Sequence Spaces” contains five chapters.

In the first chapter, some basic definitions and theorems which are used in the following chapters, are given.

In the second chapter, The spectrum of the difference operator $\Delta$ and The generalized difference operator $\Delta_v$ on some sequences spaces are given.

In the third chapter, The spectrum of the $C_1$-Cesàro operator and $C_r$ operator on some sequences spaces are given.

In the fourth chapters, The spectrum of The Rhaly operator and The Compact Rhaly operator on some sequences spaces are given.

The last chapter gives some general results which are obtained.

# BÖLÜM 1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

## 1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ ve $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$+: X \times X \to X \qquad\qquad .: K \times X \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \to \lambda . x$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

1) $x + y = y + x$
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
3) $\forall x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır.
4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.
5) $1.x = x$
6) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
7) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
8) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne, $K$ üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

Tanım 1.1.2. $X$, $K$ cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ) üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}_+ , \quad x \to \| x \|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

(N1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$

(N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $X$ üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir [28].

Tanım 1.1.3. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi $X$ içinde bir limite sahipse, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. $X$ bir normlu uzay olmak üzere,

$$B(X) = \{x \in X: \ \| x \| \leq 1\}$$

kümesine $X$ uzayının kapalı birim yuvarı,

$$S(X) = \{x \in X: \ \| x \| = 1\}$$

kümesine ise, $X$ uzayının birim küresi denir.

Tanım 1.1.4. $X$ ve $Y$ bir $K$ cismi ( $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ) üzerinde tanımlı normlu uzaylar olsun. $A: X \to Y$ fonksiyonu; $\forall \, x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \, \lambda, \mu \in K$ için,

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

koşulunu sağlıyorsa bir lineer dönüşüm yada bir lineer operatör adını alır.

$X$ ‘ den $Y$ ‘ ye bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X,Y)$ ile gösterilir [25].

Tanım 1.1.5. $X$ bir $K$ cismi ( $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ) üzerinde bir normlu uzay olsun. $A: X \rightarrow K$ lineer bir operatör ise, $A$ operatörüne $X$ üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. Yani; bir lineer fonksiyonel kompleks değerli bir lineer operatördür [25].

Tanım 1.1.6. $X$ bir $K$ cismi ( $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ) üzerinde bir normlu uzay olsun. $X$ üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerden oluşan $L(X,K)$ uzayına $X$ uzayının cebirsel duali denir ve $X^{\#}$ ile gösterilir [25].

Tanım 1.1.7. $A: X \rightarrow Y$ lineer operatörü verilsin.

$$\text{Çek}A = \{x \in X : Ax = 0\}$$

kümesine $A$ operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir [43].

Teorem 1.1.8. $A$ lineer operatörünün bire bir olması için gerek yeter şart $Çek A = \{0\}$ olmasıdır [43].

Tanım 1.1.9. . $X$ ve $Y$ bir $K$ cismi ( $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ) üzerinde tanımlı normlu uzaylar ve $A: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer; $\forall\, x \in X$ için,

$$\|A(x)\| \leq M\|x\|$$

olacak şekilde sabit bir $M$ sayısı mevcut ise, $A$ operatörüne sınırlı-lineer bir operatör denir.

$X$ ‘ den $Y$ ‘ ye bütün sınırlı-lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir [25].

Tanım 1.1.10. . $X$ ve $Y$ bir $K$ cismi ( $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ ) üzerinde tanımlı normlu uzaylar ve $A: X\to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer; $\forall\, x\in X$ için,

$$\|A(x)\| \geq k\|x\|$$

olacak şekilde $k>0$ sayısı mevcut ise, $A$ operatörüne alttan sınırlı operatör denir [9].

Tanım 1.1.11. $X$ bir $K$ cismi ( $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ ) üzerinde tanımlı bir normlu uzay olsun. $A: X\to K$ sınırlı-lineer bir operatör ise, $A$ operatörüne $X$ üzerinde sınırlı-lineer bir fonksiyonel denir. $X$ üzerinde tanımlı bütün sınırlı-lineer fonksiyonellerin kümesi $B(X,K)$ ile gösterilir [25].

Tanım 1.1.12. $X$ bir $K$ cismi ( $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ ) üzerinde tanımlı bir normlu uzay olsun. $X$ üzerinde tanımlı bütün sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X,K)$ uzayına $X$ uzayının sürekli duali denir ve $X^*$ ile gösterilir [25].

Tanım 1.1.13. $X$ bir Banach uzayı ve $A\in B(X)$ olsun.$\forall f\in X^*$ ve $\forall x\in X$ için,

$$(A^*f)(x) = f(Ax)$$

şeklinde tanımlı $A^*$ operatörüne $A$ operatörünün adjoint operatörü denir ve $X^*$ üzerinde sınırlı-lineer bir operatördür [11].

Tanım 1.1.14. $T: c \to c$ bir $A$ matrisi olarak verilen sınırlı-lineer bir operatör ise, $T^*: c^* \to c^*$ adjoint operatörü $\mathbb{C} \oplus \ell_1$ üzerinde tanımlı ve

$$\begin{bmatrix} \chi & 0 \\ b & A^t \end{bmatrix}$$

şeklindeki matris formuna sahiptir ve burada;

$\chi$ : $A$ matrisinin satır toplamlarının dizisinin limiti $-$ $A$ matrisinin sütunlarının limitinin toplamı,

$b$ : $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için, $A$ matrisinin $k.$ sütununun limiti olarak tanımlanan $k.$ girişe ait sütun vektörüdür [45].

Örnek 1.1.15. Kullandığımız bazı matris operatörlerinin adjoint operatörlerini verelim:

$\Delta: c \to c$ ve $\Delta: b_v \to b_v$ sınırlı bir operatör olduğundan;

$$\Delta^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta^t \end{bmatrix},$$

$\Delta: c_0 \to c_0$ , $\Delta: \ell_1 \to \ell_1$ , $\Delta: \ell_p \to \ell_p$ ve $\Delta: bv_p \to bv_p$ sınırlı bir operatör olduğundan;

$$\Delta^* = \Delta^t.$$

$\Delta_v: c_0 \to c_0$ sınırlı bir operatör olduğundan;

$$\Delta_v^* = \Delta_v^t.$$

$C_1: c_0 \to c_0$ ve $C_1: bv_p \to bv_p$ sınırlı bir operatör olduğundan;

$$C_1^* = C_1^t.$$

$C_r: c \to c$ sınırlı bir operatör olduğundan;

$$C_r^* = C_r^t.$$

$R_a: c_0 \to c_0$ ve $R_a: bv_0 \to bv_0$ sınırlı bir operatör olduğundan;

$$R_a^* = R_a^t.$$

$R_a: c \to c$ sınırlı bir operatör olduğundan;

$$R_a^* = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & R_a^t \end{bmatrix}.$$

Teorem 1.1.16. $A$ lineer operatörü yoğun bir görüntü kümesine sahiptir $\Leftrightarrow$ $A^*$ operatörü 1-1dir [17].

Teorem 1.1.17. $A^*$ adjoint operatörü örtendir$\Leftrightarrow$ $A^{-1}$ sınırlıdır [17].

Tanım 1.1.18. $X$ ve $Y$ normlu vektör uzayları olsun. $A: X \to Y$ operatörü $X$ uzayındaki sınırlı kümeleri $Y$ uzayında göreceli kompakt (kapanışı kompakt) kümelere dönüştürüyorsa bir kompakt operatör adını alır [38].

Tanım 1.1.19. $X$ bir vektör uzayı ve $x \in X$ olsun. Bir $I: X \to X$ dönüşümü, $\forall\, x$ vektörü için, $Ix = x$ ise; $I$ dönüşümüne özdeşlik dönüşümü veya birim operatör denir [38].

Tanım 1.1.20. $A: X \to Y$ sınırlı-lineer bir operatör olsun.

$$\|A\| = inf\{M > 0 : \ \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X\}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük $M$ sayısına $A$ operatörünün normu denir [38].

Tanım 1.1.21. $A: X \to X$ bir $K$ cismi ( $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ) üzerinde tanımlanmış bir bir lineer operatör olsun. $Ax = \lambda x$ denkleminin $\lambda \in K$, $x \in X$, $x \neq 0$ olacak şekilde bir çözümü bulunabiliyorsa $\lambda$ skalerine $A$ operatörünün özdeğeri, sıfır olmayan $x$ vektörüne de bir özvektörü denir [38].

**1.2. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri**

Tanım 1.2.1. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w = \{x = (x_k) \in w: \ x: \mathbb{N} \to K, k \to x_k = (x_k)\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir. $w$ kümesi,

$$((x_k), (y_k)) \to (x_k + y_k) \text{ ve } (\lambda, (x_k)) \to (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile $K$ üzerinde bir vektör uzayıdır. $w$' nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir [14].

Örnek 1.2.2.

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in w: \sup_k |x_k| < \infty\right\},$$

$$c = \left\{x = (x_k) \in w : (x_k) \text{ yakınsak yani } \lim_{k\to\infty} x_k \text{ mevcut}\right\},$$

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\},$$

$$bs = \left\{x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in \ell_\infty\right\},$$

$$cs = \left\{x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c\right\},$$

$$\ell_p = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty\right\}, \qquad (1 \le p < \infty)$$

$$bv_p = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty\right\}, \qquad (1 \le p < \infty)$$

$$bv = \left\{x = (x_k) \in w : |x_0| + \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty\right\}$$

uzayları birer dizi uzayıdır [14].

Tanım 1.2.3. ( $K$-, $FK$-, $BK$-Uzayları ) $\lambda$ bir lineer topolojik uzay olsun. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $p_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $p_i : \lambda \to \mathbb{C}$ dönüşümü sürekliyse $\lambda$' ya bir $K$-uzayı denir. Tam lineer metrik bir $K$-uzayına bir $FK$-uzayı, normlu $FK$-uzayına da bir $BK$-uzayı denir [12].

Örnek 1.2.4. $\ell_\infty, c$ ve $c_0$ uzayları $\| x \|_\infty = \sup_k |x_k|$ normuna göre, $1 \le p < \infty$ için $\ell_p$ uzayı da $\| x \|_p = \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ normuna göre birer $BK$-uzayıdırlar [27].

Teorem 1.2.5. $BK$-uzayları arasında tanımlanan lineer dönüşümler süreklidirler [45].

Tanım 1.2.6. $\lambda$ ve $\mu$ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0,1,2, \ldots)$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in \lambda$ iken $Ax = (A_n(x)) \in \mu$ ise o zaman $A$' ya $\lambda$ dizi uzayından $\mu$ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve bu durum $A: \lambda \to \mu$ olarak gösterilir. $Ax$ dizisine de $x$' in $A$-dönüşümü denir.

$(\lambda: \mu)$ ile $A: \lambda \to \mu$ olan bütün $A$ matrislerinin kümesini, $(\lambda: \mu; p)$ ile de limit ya da toplamı koruyan $A: \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün $A$ matrislerinin kümesi gösterilir $(\lambda: \mu; p) \subset (\lambda: \mu)$ olduğu açıktır [29].

Tanım 1.2.7. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall n = 0,1,2,\dots$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ mevcut ve $\lim_n A_n(x) = l \in \mathbb{C}$ ise $x = (x_n)$ dizisine $l$ sayısı için $A$-toplanabilirdir denir. Bu durum $x$' in $A$-limiti $l$' dir diye ifade edilir ve $A - \lim_n x_n = l$ olarak gösterilir [27].

Tanım 1.2.8. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k > n$ olan $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine alt üçgensel matris, $k < n$ olan $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üst üçgensel matris denir. $A = (a_{nk})$ üçgensel matrisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise $A$' ya normal matris denir [14].

Teorem 1.2.9. $A \in (c: c)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) Bazı $\alpha \in \mathbb{C}$' ler için $\lim_{n \to \infty} \sum_k a_{nk} = \alpha$

iii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k$

olmasıdır [29].

Teorem 1.2.10. $A \in (c: c; p)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k} |a_{nk}| < \infty$

ii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k} a_{nk} = 1$

olmasıdır [29].

Tanım 1.2.11. Teorem 1.2.10. daki şartları sağlayan bir matrise Toeplitz matrisi veya regüler matris denir. Bu tip matrisler kısaca $T$-matrisi olarak gösterilirler.

Tanım 1.2.12. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ $için$

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ matrisine 1. mertebeden Cesàro ortalaması denir [40].

Tanım 1.2.13. $r \in \mathbb{R}$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^r} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_r = (c_{nk})$ matrisine *r*-Cesàro matrisi denir [1].

Teorem 1.2.14. $C_r : c \to c$ bir operatör olsun. Bu takdirde; $C_r$ operatörü kompakttır [1].

Tanım 1.2.15. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & (n-1 \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < n-1 \text{ yada } k > n) \end{cases}$$

ve

$$d_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & (n \leq k \leq n+1) \\ 0 & (0 \leq k < n \text{ yada } k > n+1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(1)} = (\delta_{nk})$ ve $\Delta^1 = (d_{nk})$ matrislerine fark matrisleri denir [40].

Tanım 1.2.16. Herhangi bir sabit $m \in \mathbb{N}$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_{nk}^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \binom{m}{n-k} & (\max\{0, n-m\} \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < \max\{0, n-m\} \text{ yada } k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(m)} = (\delta_{nk}^{(m)})$ matrisine $m$. mertebeden fark matrisi denir [40].

Tanım 1.2.17. $v = (v_k)$ dizisi;

$$\lim_{k\to\infty} v_k = L > 0 \text{ ve } \sup_k v_k \leq 2L$$

özelliklerini sağlayan ya sabit yada kesin azalan pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$ için;

$$\delta_{nk} = \begin{cases} v_k(-1)^{n-k} & (n-1 \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < n-1 \text{ yada } k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta_v = (\delta_{nk})$ matrisine genelleştirilmiş $\Delta_v$ fark matrisi denir [41].

Tanım 1.2.18. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

i) $L = \lim_n (n+1)a_n$ mevcut, sonlu ve sıfırdan farklı

ii)$\forall$ $n$ için; $a_n > 0$

iii) $i \neq j$ için; $a_i \neq a_j$

iv) $a = (a_n)$ dizisi monoton azalan

koşullarını sağlayan,

$$r_{nk} = \begin{cases} a_{nk} = a_n & , \quad (k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $R_a = (r_{nk})$ matrisine Rhaly matrisi denir [49].

Teorem 1.2.19. Eğer; $L = \lim_n (n+1)a_n = 0$ ise; $R_a$ matrisi $c_0$ ve $c$ uzayları üzerinde kompakt bir operatördür ve $M = R_a$ olarak gösterilir [48].

Teorem 1.2.20. Eğer; $\{(n+1)a_n\}$ sınırlı ise, $M = R_a$ matrisi $c_0$ ve $c$ uzayları üzerinde sınırlıdır [23].

Teorem 1.2.21. $0 < \lim_n (n+1)a_n = L < \infty$ ve

$$Z_n := \prod_{\vartheta=0}^{n} \left|1 - \frac{a_\vartheta}{\lambda}\right| \ , \ (\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C})$$

olsun. Bu takdirde; $\sum_{\vartheta=1}^{\infty} Z_n$ serisini kısmi toplamının sınırlı olması için gerek ve yeter şart $LRe\left(\frac{1}{\lambda}\right) \geq 1$ ve $\lambda \neq L$ olmasıdır [47].

Teorem 1.2.22. Eğer; $Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha$ ise; $N \to \infty$ için,

$$\prod_{k=0}^{N-1} \left|1 - \frac{\alpha_k}{\lambda}\right| \simeq \frac{1}{N^{\alpha L}}$$

olur. Burada, $\left(\frac{\alpha_n}{b_n}\right)$ ve $\left(\frac{b_n}{\alpha_n}\right)$ ifadelerinin her ikisi de sınırlı olduğundan, $\alpha_n \simeq b_n$ notasyonu kullanılır [50].

Teorem 1.2.23. Eğer; $\{(n+1)a_n\}$ monoton ve $\lim_n (n+1)a_n = L < \infty$ ise, $R_a \in B(bv_0)$ olur [47].

Teorem 1.2.24. $A = (a_{nk})$ matrisinin $T \in B(\ell_1)$ sınırlı lineer operatörünü üretir $\Leftrightarrow$ $A$ matrisinin sütunlarının $\ell_1$ normlarının supremumu sınırlıdır [19].

Sonuç 1.2.25. $\Delta: \ell_1 \to \ell_1$ sınırlı-lineer bir operatördür ve $\|\Delta\|_{(\ell_1:\ell_1)} = 2$ dir [19].

Teorem 1.2.26. $A = (a_{nk})$ matrisinin $T \in B(bv_0)$ sınırlı lineer operatörünü üretir$\Leftrightarrow$

(i) $\forall\, k$ için; $\lim_n a_{nk} = 0$,

(ii) $\|A\|_{bv_0} := \sup_N \sum_n \left|\sum_{k=0}^{N} (a_{nk} - a_{n-1,k})\right| < \infty$

olmasıdır [47].

Teorem 1.2.27. $A = (a_{nk})$ matrisinin $T \in B(b_v)$ sınırlı lineer operatörünü üretir$\Leftrightarrow$

$$\sup_l \sum_n \left| \sum_{k=l}^{\infty} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| < \infty$$

özelliğini sağlar [19].

Sonuç 1.2.28. $\Delta: b_v \to b_v$ sınırlı-lineer bir operatördür ve $\|\Delta\|_{(b_v:b_v)} = 2$ dir [19].

Teorem 1.2.29. $A = (a_{nk})$ matrisinin $T \in B(c)$ sınırlı lineer operatörünü üretir$\Leftrightarrow$

(i) $A$ matrisinin satırları $\ell_1$ üzerinde ve onların $\ell_1$ normları sınırlı,

(ii) $A$ matrisinin sütunları $c$ üzerinde,

(iii) $A$ matrisinin satır toplamlarının dizisi $c$ üzerindedir.

$T$ operatörünün normu satırların $\ell_1$ normlarının supremumuna eşittir [11].

Sonuç 1.2.30. $\Delta: c \to c$ sınırlı-lineer bir operatördür ve $\|\Delta\|_{(c:c)} = 2$ dir [11].

Teorem 1.2.31. $A = (a_{nk})$ matrisinin $T \in B(c_0)$ sınırlı lineer operatörünü üretir$\Leftrightarrow$

(i) $A$ matrisinin satırları $\ell_1$ üzerinde ve onların $\ell_1$ normları sınırlı,

(ii) $A$ matrisinin sütunları $c_0$ üzerindedir.

$T$ operatörünün normu satırların $\ell_1$ normlarının supremumuna eşittir [11].

Sonuç 1.2. 32. $\Delta: c_0 \to c_0$ sınırlı-lineer bir operatördür ve $\|\Delta\|_{(c_0:c_0)} = 2$ dir [11].

Sonuç 1.2.33. $C_1 : c_0 \rightarrow c_0$ sınırlı-lineer bir operatördür ve $\|C_1\|_{(c_0:c_0)} = 1$ dir [5].

Teorem 1.2.34. $[Weierstrass\ Kriteri]$ $A_n$ sınırlı olmak üzere;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{b}{n} - \frac{A_n}{n^d}$$

için, kompleks terimlerin bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter şart $Re(b) > 1$ olmasıdır; burada, $b$ kompleks bir sayı, $d > 1$ ve $Re(b)$ , $b$ kompleks sayılarının reel kısmı olarak tanımlanmıştır. $Re(b) \leq 0$ için; verilen seri her zaman ıraksaktır. Eğer; $0 < Re(b) \leq 1$ ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

serilerinin ikisi de yakınsaktır [21].

Tanım 1.2.35. $\lambda$ bir dizi uzayı olmak üzere bir $A$ sonsuz matrisinin $\lambda$ uzayındaki matris toplanabilme bölgesi olan $\lambda_A$ kümesi; $\lambda_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda\}$ olarak tanımlanır [12].

### 1.3. Spektrum

Tanım 1.3.1. $X \neq \{\theta\}$ kompleks normlu bir uzay, $A : \mathfrak{D}(A) \rightarrow X$ $(\mathfrak{D}(A) \subset X)$ lineer bir operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. $A_\lambda = A - \lambda I$ şeklinde tanımlanır ve $A_\lambda^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne $A$ operatörünün çözücü operatörü denir [11].

Tanım 1.3.2. $X \neq \{\theta\}$ kompleks normlu bir uzay, $A : \mathfrak{D}(A) \rightarrow X$ $(\mathfrak{D}(A) \subset X)$

lineer bir operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde;

i) $A_\lambda^{-1}$ operatörü mevcut

ii) $A_\lambda^{-1}$ operatörü sınırlı

iii) $A_\lambda^{-1}$ operatörü $X$ üzerinde yoğun olan bir küme üzerinde tanımlı

şartlarını sağlayan $\lambda$ skalerine $A$ ’nın regüler elemanı denir [11].

Tanım 1.3.3. $X \neq \{\theta\}$ kompleks normlu bir uzay ve $A : \mathfrak{D}(A) \to X \quad (\mathfrak{D}(A) \subset X)$ lineer bir operatör olsun. $A$ ’nın bütün regüler elemanlarını içeren kümeye $A$ operatörünün çözücü kümesi denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir [11].

Tanım 1.3.4. $X \neq \{\theta\}$ kompleks normlu bir uzay ve $A : \mathfrak{D}(A) \to X \quad (\mathfrak{D}(A) \subset X)$ lineer bir operatör olsun. $\rho(A)$ kümesinin □ ‘ye göre tümleyeni olan

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine $A$ operatörünün spektrumu denir [11].

Tanım 1.3.5. $X \neq \{\theta\}$ kompleks normlu bir uzay ve $A : \mathfrak{D}(A) \to X \quad (\mathfrak{D}(A) \subset X)$ lineer bir operatör olmak üzere;

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ A_\lambda^{-1} \text{ mevcut değil}\}$$

kümesine nokta spektrum denir ve bu kümenin elemanları öz değerlerden oluşur [43].

Tanım 1.3.6. $X \neq \{\theta\}$ kompleks normlu bir uzay ve $A : \mathfrak{D}(A) \to X \quad (\mathfrak{D}(A) \subset X)$ lineer bir operatör olsun.

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ A_\lambda^{-1} \text{ mevcut ve süreksiz }, \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = X\}$$

kümesine sürekli spektrum denir [43].

Tanım 1.3.7. $X \neq \{\theta\}$ kompleks normlu bir uzay ve $A : \mathfrak{D}(A) \to X \quad (\mathfrak{D}(A) \subset X)$ lineer bir operatör olsun.

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ A_\lambda^{-1} \text{ mevcut }, \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} \neq X\}$$

kümesine artık (residual) spektrum denir [43]**.**

Tanım 1.3.8. $X$ bir banach uzayı ve $A \in B(X)$ olsun. Bu takdirde;
$\mathcal{R}(A)$ ve $A^{-1}$ için üç tane olasılık vardır:

(I) $\mathcal{R}(A) = X$ ,

(II) $\mathcal{R}(A) \neq \overline{\mathcal{R}(A)} = X$,

(III) $\overline{\mathcal{R}(A)} \neq X$ ,

ve

(1) $A^{-1}$ mevcut ve sürekli,

(2) $A^{-1}$ mevcut fakat sürekli değil,

(3) $A^{-1}$ mevcut değil.

$A_\lambda$ ve $A_\lambda^{-1}$ için de üç tane olasılık vardır:

(I) $\mathcal{R}(A_\lambda) = X$,

(II) $\mathcal{R}(A_\lambda) \neq \overline{\mathcal{R}(A_\lambda)} = X$ ,

(III) $\overline{\mathcal{R}(A_\lambda)} \neq X$,

ve

(1) $A_\lambda$ bire-bir ve $A_\lambda^{-1}$ sürekli,

(2) $A_\lambda$ bire-bir fakat $A_\lambda^{-1}$ sürekli değil,

(3) $A_\lambda$ bire-bir değil.

Yukarıda yapılan sınıflandırma Golberg' in $A_\lambda = A - \lambda I$ operatörünü sınıflandırmasıdır. Yukarıdaki bütün mümkün olan olasılıklar hesaplanırsa dokuz farklı durum ortaya çıkar. Bunlar;
$I_1$ , $I_2$, $I_3$, $II_1$ , $II_2$ , $II_3$ , $III_1$ , $III_2$ ve $III_3$ olur. Örneğin; $\lambda \in II_2\ \sigma(A, X)$ yazılırsa, bu $A_\lambda \in II_2$ demektir. Yani;
$\mathcal{R}(A_\lambda) \neq \overline{\mathcal{R}(A_\lambda)} = X$ ve $A_\lambda$ bire-bir fakat $A_\lambda^{-1}$ sürekli değildir. Eğer;

$A_\lambda \in I_1$ veya $A_\lambda \in II_1$ ise; $\lambda \in \rho(A)$,

$A_\lambda \in I_3$ , $A_\lambda \in II_3$ veya $A_\lambda \in III_3$ ise; $\lambda \in \sigma_p(A)$,

$A_\lambda \in I_2$ veya $A_\lambda \in II_2$ ise; $\lambda \in \sigma_c(A)$,

$A_\lambda \in III_1$ veya $A_\lambda \in III_2$ ise; $\lambda \in \sigma_r(A)$ olur.

Tanım 1.3.9. $X$ kompleks bir Banach uzayı ve $A \in B(X)$ olsun. $A$ operatörünün spektral yarıçapı $r_\sigma(A)$, kompleks $\lambda$ bölgesini içeren en küçük kapalı çemberin yarıçapıdır. Yani,

$$r_\sigma(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A,X)} |\lambda|$$

sayısına eşittir ve $\sigma(A,X)$ bölgesini içerir. Buradan hareketle; kompleks bir Banach uzayı üzerindeki sınırlı-lineer bir $A$ operatörünün spektral yarıçapı için

$$r_\sigma(A) \leq \|A\|$$

eşitsizliği elde edilir [22].

# BÖLÜM 2. BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE $\Delta$ FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

## 2.1. $c$ ve $c_0$ Dizi Uzayları Üzerinde $\Delta$ Fark Operatörünün Spektrumu

Teorem 2.1.1. $\sigma(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı için; $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünün mevcut ve $\lambda \notin \sigma(\Delta, c_0)$ için; $(\Delta - \lambda I)^{-1} \in (c_0, c_0)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\Delta - \lambda I$ üçgensel olduğundan; $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ mevcuttur ve $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminin y 'ye bağlı olarak x için çözümü $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünü verir. Bu çözümden; $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için,

$$(\Delta - \lambda I)^{-1} = \begin{cases} \frac{(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^{n+1}} & k \leq n \\ 0 & n > k \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buradan ;

$$\|(\Delta - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0, c_0)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^{n+1}} < \infty \qquad (2.1.1.1)$$

yani, $(\Delta - \lambda I)^{-1} \in (c_0 : c_0)$ olur. Buna ek olarak, ne zaman $\lambda \in \sigma(\Delta, c_0)$ olursa

$$\|(\Delta - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0, c_0)} = \infty$$

olduğu $(2.1.1.1)$' den görülür.

Teorem 2.1.2. $\sigma_p(\Delta, c_0) = \emptyset$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $x \neq \theta = (0,0,0, \dots) \in c_0$ için, $\Delta x = \lambda x$ olsun. Buradan;

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_0 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_1 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (2.1.2.1)$$

denklem sistemi elde edilir. Kabul edelim ki; $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk elemanı $x_{n_0}$ olsun. Öyle ise; $\lambda = 1$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{n_0+k} = 0$$

olur. Bu da, $x_{n_0} \neq 0$ kabulüne ters olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.3. $\sigma_p(\Delta^*, c_0{}^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $x \neq \theta = (0,0,0, \dots) \in c_0{}^* \cong \ell_1$ için, $\Delta^* x = \lambda x$ olsun. $\Delta^* x = \lambda x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (2.1.3.1)$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan,

$$x_n = (1-\lambda)^n x_0$$

olur. Bu da gösterir ki; $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| < 1$ olmasıdır.

Teorem 2.1.4. $\sigma_r(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$ dir.

İspat: $|\lambda - 1| < 1$ için, $\Delta - \lambda I$ operatörü 1-1 olduğundan dolayı tersi mevcuttur. Fakat, Teorem 2.1.3. den; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 değildir. Buradan da, Teorem 1.1.16 dan; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} \neq c_0$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.5. $\sigma_c(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\}$ dir.

İspat: $\lambda \neq 1$ olduğu için, $\Delta - \lambda I$ operatörü üçgenseldir ve böylece tersi vardır. Buradan, Teorem 1.1.16 dan; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.6. $\sigma(\Delta, c) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: Teorem 2.1.1' in ispatında kullanılan yöntem ile benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.1.7. $\sigma_p(\Delta, c) = \emptyset$ dir.

İspat: Teorem 2.1.2' nin ispatında kullanılan yöntem ile benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.1.8. $\sigma_p(\Delta^*, c^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: Kabul edelim ki; $x \neq \theta = (0,0,0,\dots) \in c^* \cong \ell_1$ için, $\Delta^* x = \lambda x$ olsun.

$\Delta^* x = \lambda x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (2.1.8.1)$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan;

$$x_n = (1-\lambda)^{n-1} x_1; (n \geq 2) \qquad (2.1.8.2)$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer; $x_0 \neq 0$ ise, $\lambda = 0$ olur. Bu yüzden; $\lambda = 0$, $x = (x_0, 0, 0, \dots)$ özvektörüne karşılık gelen bir özdeğerdir. Eğer; $\lambda \neq 0$ ise, $x_0 = 0$ olur ve $(2.1.8.2)$'den görülür ki; $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| < 1$ olmasıdır.

Teorem 2.1.9. $\sigma_r(\Delta, c) = \sigma_p(\Delta^*, c^*)$ dir.

İspat: Teorem 2.1.4' ün ispatında kullanılan yöntem ile benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.1.10. $\sigma_c(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\} \setminus \{0\}$ dır.

İspat: $\lambda \neq 0$ şartı eklenerek, Teorem 2.1.5' in ispatında kullanılan yöntem ile benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.1.11. $\sigma(\Delta, \ell_\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$.

İspat: $A$ matris operatörü $c$ üzerinde sınırlı ise; $\sigma(A, c) = \sigma(A, \ell_\infty)$ olur [15]. Öyle ise; $A = \Delta$ alınarak, Teorem 2.1.6' nın ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 2.1.12. $T: X \to X$ operatörü $X$ banach uzayı üzerinde kompakt-lineer bir operatör olsun. Bu takdirde; $T$ operatörünün mevcut ve sıfırdan farklı olan

$\forall \lambda$ spektral elemanı $T$ operatörünün bir özdeğeridir.

Sonuç 2.1.13. Lemma 2.1.12 ile Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.10'dan $\Delta$ operatörü kompakt değildir.

Teorem 2.1.14. Kabul edelim ki; $|\lambda - 1| < 1$ olsun. Bu takdirde; $A = \lambda I + (1-\lambda)\Delta$ operatörünün yakınsaklık bölgesi $c$ dizi uzayıdır.

İspat: $\lambda = 1$ ise; ispatlanacak bir şey yoktur. Kabul edelim ki; $\lambda \neq 1$ olsun. O zaman, Teorem 2.1.6'dan ve $\lambda$' nın seçiminden; $\lambda - [\lambda / (1-\lambda)]I$ operatörünün $B(c)$ üzerinde tersi mevcuttur. Bu da

$$A^{-1} = \frac{1}{1-\lambda}(\lambda - \frac{\lambda}{1-\lambda}I)^{-1} \in B(c)$$

demektir. $A$ operatörü üçgensel ve $B(c)$' nin üzerinde olduğundan dolayı; $A^{-1}$ konservatiftir. Bu da; $c = c_A$ olduğunu gösterir [45].

## 2.2. $\ell_1$ ve $b_v$ Dizi Uzayları Üzerinde $\Delta$ Fark Operatörünün Spektrumu

Teorem 2.2.1. $\sigma(\Delta, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: $\Delta - \lambda I$ operatörü üçgensel olduğu için, $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ mevcuttur. $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminin y 'ye bağlı olarak x için çözümü $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünü verir. Bu çözümden; $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için,

$$(\Delta - \lambda I)^{-1} = \begin{cases} \frac{(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^{n+1}} & k \leq n \\ 0 & n > k \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buradan, $(\Delta - \lambda I)^{-1} \in (\ell_1 : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\lambda)^n} < \infty$$

dur. $|\lambda - 1| \leq 1$ olduğunda

$$(\Delta - \lambda I)^{-1} \notin (\ell_1 : \ell_1)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.2. $\sigma_p(\Delta, \ell_1) = \emptyset$ dir.

İspat: $\ell_1 \subset c_0$ olduğundan dolayı, bu teoremin ispatı Teorem 2.1.3'ün ispatı gibi yapılır.

Teorem 2.2.3. $\sigma_p(\Delta^*, {\ell_1}^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1\}$.

İspat: Kabul edelim ki; $f \neq \theta = (0,0,0,\ldots) \in {\ell_1}^* \cong \ell_\infty$ için, $\Delta^* f = \lambda f$ olsun. $\Delta^* f = \lambda f$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} f_0 - f_1 &= \lambda f_0 \\ f_1 - f_2 &= \lambda f_1 \\ f_2 - f_3 &= \lambda f_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $k \in \mathbb{N}$ için,

$$f_k = (1-\lambda)^k f_0$$

olur. Bu da gösterir ki; $f = (f_k) \in \ell_1^*$ olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| \leq 1$ olmasıdır. Bunun anlamı; $f_0 \neq 0$ ve $|\lambda - 1| \leq 1$ ise, $f \in \ell_1^*$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.4. $\sigma_r(\Delta, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: $|\lambda - 1| \leq 1$ için, $\Delta - \lambda I$ operatörü 1-1 olduğundan dolayı tersi mevcuttur. Fakat, Teorem 2.2.3 den; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 değildir. Buradan da, Teorem 1.1.16 dan; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} \neq \ell_1$ olduğu elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.5. $\sigma_c(\Delta, \ell_1) = \emptyset$ dir.

İspat: $\sigma(T,X) = \sigma_p(T,X) \cup \sigma_r(T,X) \cup \sigma_c(T,X)$ olduğundan; $\sigma_c(\Delta, \ell_1) = \emptyset$ olmak zorundadır.

Teorem 2.2.6. $\sigma(\Delta, b_v) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminin y ‘ye bağlı olarak x için çözümü $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünü verir. Bu çözümden; $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için,

$$(\Delta - \lambda I)^{-1} = \begin{cases} \frac{(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^{n+1}} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad n > k \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$x_k - x_{k-1} = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j - y_{j-1}}{(1-\lambda)^{k-j+1}}, (k \in \mathbb{N})$$

olur ve $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ sınırlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| > 1$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.7. $\|\Delta\|_{(bv,bv)} = 2$ normu ile $\Delta \in B(bv)$ olur.

İspat: $\Delta$ operatörünün lineerliğini göstermek kolaydır. Bu yüzden detaylı olarak verilmeyecektir. Herhangi bir $x = (x_k) \in bv$ dizisini alalım. Buradan;

$$\|\Delta\|_{bv} = \left( \sum_k |x_k - x_{k-1} - (x_{k-1} - x_{k-2})| \right)$$

$$\leq \sum_k |x_k - x_{k-1}| + \sum_k |x_{k-1} - x_{k-2}| = 2\|x\|_{bv}$$

olduğundan dolayı;

$$\|\Delta\|_{(bv,bv)} \leq 2 \qquad (2.2.7.1)$$

olur. Diğer taraftan; Teorem 2.2.6’ dan,

$$2 \leq \|\Delta\|_{(bv,bv)} \qquad (2.2.7.2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sonuç olarak; $(2.2.7.1)$ ve $(2.2.7.2)$ eşitsizliklerinden,

$$\|\Delta\|_{(bv,bv)} = 2$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.8. $\sigma_p(\Delta, bv) = \emptyset$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $x \neq \theta = (0,0,0,\dots) \in bv$ için, $\Delta x = \lambda x$ olsun. $\Delta x = \lambda x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_0 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_1 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Kabul edelim ki; $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk elemanı $x_{n_0}$ olsun. Öyle ise; $\lambda = 1$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{n_0+1} - x_{n_0} = x_{n_0+1}$$

olur ve bu da $x_{n_0} = 0$ demektir. Sonuç olarak; $x_{n_0} \neq 0$ kabulüne ters olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.9. $\sigma_p(\Delta^*, bv^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $f \neq \theta = (0,0,0,\dots) \in bv^* = \mathbb{C} \oplus bs$ için, $\Delta^* x = \lambda x$ olsun. $\Delta^* x = \lambda x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda f_0 \\ f_1 - f_2 &= \lambda f_1 \\ f_2 - f_3 &= \lambda f_2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (2.2.9.1)$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan;

$$f_k = (1-\lambda)^k f_1; \ (k \in \mathbb{N}) \qquad (2.2.9.2)$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer; $f_0 \neq 0$ ise, $\lambda = 0$ olur. Bu yüzden; $\lambda = 0,$

$f = (f_0, 0,0, \dots)$ özvektörüne karşılık gelen bir özdeğerdir. Eğer; $\lambda \neq 0$ ise, $f_0 = 0$ olur ve $(2.2.9.1)$' deki denklem sistemini çözersek;

$$f_n = (1-\lambda)^{n-1} f_1; (n \geq 2)$$

olur. Buradan;

$$\sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda)^k \right| < \infty$$

ya da

$$\sup_n \frac{1-(1-\lambda)^{n+1}}{1-(1-\lambda)} < \infty$$

olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| \leq 1$ olmasıdır. Bunun anlamı; $f_0 \neq 0$ ve $|\lambda - 1| \leq 1$ ise, $f \in bv^* = \mathbb{C} \oplus bs$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.10. $\sigma_r(\Delta, bv) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: $|\lambda - 1| \leq 1$ için, $\Delta - \lambda I$ operatörü 1-1 olduğundan dolayı tersi mevcuttur. Fakat, Teorem 2.2.9 dan; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 değildir. Buradan da, Teorem 1.1.16'yı kullanırsak; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} \neq bv$ olduğu elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.11. $\sigma_c(\Delta, bv) = \emptyset$ dir.

İspat: $\sigma(T,X) = \sigma_p(T,X) \cup \sigma_r(T,X) \cup \sigma_c(T,X)$ olduğundan; $\sigma_c(\Delta, bv) = \emptyset$ olur.

## 2.3. $\ell_p$ Dizi Uzayı Üzerinde $\Delta$ Fark Operatörünün Spektrumu

Teorem 2.3.1. $C = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ olarak tanımlanan bir küme olsun. Bu takdirde; $\sigma(\Delta, \ell_p) = C$ olur.

İspat: İlk olarak; $\sigma(\Delta, \ell_p) \subset C$ olduğunu gösterelim. $y = (y_k) \in \ell_p$ alalım ve $(\Delta - \lambda I)x = y$ denklemini çözelim. Bu denklemin çözümünden;

$$x_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j}{(1-\lambda)^{k-j+1}}, (k \in \mathbb{N})$$

olarak hesaplanır. Buradan, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|x_k|^p \leq \frac{(k+1)^{p-1}}{(1-\lambda)^p} \sum_{j=0}^{k} \frac{|y_j|^p}{|1-\lambda|^{p(k-j)}}, (k \in \mathbb{N})$$

olur. Buradan da;

$$\begin{aligned} \sum_k |x_k|^p &\leq \frac{1}{(1-\lambda)^p} \sum_k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(j+1)^{p-1}}{|1-\lambda|^{pj}} |y_k|^p \\ &\leq \frac{1}{(1-\lambda)^p} \left(1 + \frac{2^{p-1}}{(1-\lambda)^p} + \frac{3^{p-1}}{(1-\lambda)^{2p}} + \cdots + \frac{(k+1)^{p-1}}{|1-\lambda|^{pk}} + \cdots \right) \\ &\quad \times (|y_0|^p + |y_1|^p + |y_2|^p + \cdots) \end{aligned}$$

olur. Şimdi;

$$\sum_k a_k = \sum_k \frac{(k+1)^{p-1}}{|1-\lambda|^{pk}} \tag{2.3.1.1}$$

serisinin yakınsaklığını araştıralım. D’ Alembert oran testinden;

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(1-\lambda)^p}$$

olur. Öyle ise, $|\lambda - 1| > 1$ olması durumunda; $(2.3.1.1)$’ deki seri yakınsaktır. Bundan dolayı, $|\lambda - 1| > 1$ ise; $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminin $\ell_p$ dizi uzayı üzerinde tek bir çözümü vardır. Sonuç olarak; $\lambda \notin C$, yani, $\lambda \notin \sigma(\Delta, \ell_p)$ olur. Buradan;

$$\sigma(\Delta, \ell_p) \subset C \tag{2.3.1.2}$$

olduğu görülür. Tersine; kabul edelim ki, $\lambda \notin \sigma(\Delta, \ell_p)$ olsun. Bu yüzden, $e_1 = (1,0,0, \dots ,0, \dots)$ dizisinin $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörü altındaki görüntüsü $\ell_p$ üzerindedir. O zaman, $|\lambda - 1| > 1$ eşitsizliği elde edilir. Öyle ise

$$C \subset \sigma(\Delta, \ell_p) \tag{2.3.1.3}$$

olur. Sonuç olarak; $(2.3.1.2)$ ve $(2.3.1.3)$’ den,

$$C = \sigma(\Delta, \ell_p)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.2. $\|\Delta\|_{(\ell_p, \ell_p)} = 2$ normu ile $\Delta \in B(\ell_p)$ olur.

İspat: $\Delta$ operatörünün lineerliğini göstermek kolaydır. Bu yüzden detaylı olarak verilmeyecektir. Herhangi bir $x = (x_k) \in \ell_p$ dizisini alalım. Buradan;

$$\|\Delta\|_{\ell_p}^p \leq 2\|x\|_{\ell_p}^p$$

olduğundan dolayı;

$$\|\Delta\|_{(\ell_p,\ell_p)} \leq 2 \qquad (2.3.2.1)$$

olur. Diğer taraftan; Teorem 2.3.1' den $r_\sigma(\Delta) = 2$ olduğu için

$$2 \leq \|\Delta\|_{(\ell_p,\ell_p)} \qquad (2.3.2.2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sonuç olarak; $(2.3.2.1)$ ve $(2.3.2.2)$ eşitsizliklerinden,

$$\|\Delta\|_{(\ell_p,\ell_p)} = 2$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.3. $\sigma_p(\Delta, \ell_p) = \emptyset$ dir.

İspat: $\ell_p \subset c_0$ olduğundan; Teorem 2.1.2'nin ispatı gibi yapılır.

Teorem 2.3.4. $\sigma_p(\Delta^*, \ell_p{}^*) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}, & (1 < p < \infty) \\ \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}, & (p = 1) \end{cases}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $f \neq \theta = (0,0,0,\dots) \in \ell_p{}^*$ için, $\Delta^* f = \lambda f$ olsun; burada $1 < p < \infty$ ise, $\ell_p{}^* \cong \ell_q$ ve $\mathrm{p} = 1$ ise, $\ell_1{}^* \cong \ell_\infty$ dur. $\Delta^* f = \lambda f$ denkleminin çözümünden;

$$f_0 - f_1 = \lambda f_0$$
$$f_1 - f_2 = \lambda f_1$$
$$f_2 - f_3 = \lambda f_2$$
$$\vdots$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $k \in \mathbb{N}$ için,

$$f_k = (1-\lambda)^k f_0, \quad (k \in \mathbb{N})$$

olur. Buradan; $f = (f_k) \in \ell_p{}^*$ olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| < 1$ ve $f = (f_k) \in \ell_1{}^*$olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| \leq 1$ olmasıdır. Bunun anlamı; $f_0 \neq 0$ ve $|\lambda - 1| \leq 1$ ya da $|\lambda - 1| < 1$ ise, $f \in \ell_p{}^*$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.5. $\sigma_r(\Delta, \ell_p) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}, & (1 < p < \infty) \\ \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}, & (\mathrm{p} = 1) \end{cases}$ dir.

İspat: $|\lambda - 1| < 1$ için, $\Delta - \lambda I$ operatörü 1-1 olduğundan dolayı tersi mevcuttur. Fakat, teorem 2.2.4. den; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 değildir. Buradan da, Teorem 1.1.16 dan; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} \neq \ell_p$ olduğu elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. $\mathrm{p} = 1$ içinde aynı şekilde yapılır.

Teorem 2.3.6. $1 \in III_1\ \sigma(\Delta, \ell_p)$.

İspat: Teorem 2.3.4 ve Teorem 1.1.16' dan; $\Delta - I \in III$ olur. Buna ek olarak, Teorem 2.3.3 den; $1 \notin \sigma_p(\Delta, \ell_p)$' dir. Böylece $\Delta - I$ operatörünün tersi mevcuttur. Bundan dolayı; $\Delta - I \in 1 \cup 2$ olur.

$\Delta - I \in 1$ olduğunu göstermek için, Teorem 1.1.17' yi kullanarak $\Delta^* - I$ operatörünün örten olduğunu göstermemiz yeterlidir. Yani; verilen bir$y = (y_k) \in \ell_q$

dizisi için, $(\Delta^* - I)x = y$ olacak şekilde bir $x = (x_k) \in \ell_q$ dizisi bulmalıyız. $(\Delta^* - I)x = y$ denkleminden direk bir hesaplama yapılırsa; $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_n = -y_{n-1}$$

bulunur. Buda, $\Delta^* - I$ operatörünün örten olması demektir.

Teorem 2.3.7. $1 \in III_1\ \sigma(\Delta, \ell_p)$ dir.

İspat: $\lambda \neq 1$ için, $\Delta - \lambda I$ üçgenseldir. Bu yüzden, tersi vardır. $e^{(0)} = (1,0,0,\ldots) \in \ell_p$ dizisini alalım. $e^{(0)}$ dizisinin $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörü altındaki görüntüsü olan $y = ((1-\lambda)^{-1}, (1-\lambda)^{-2}, (1-\lambda)^{-3}, \ldots)$ dizisi $\ell_p$ üzerinde değildir ve bu yüzden $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörü süreksizdir. Böylece, $\Delta - \lambda I \in 2$ olur. Diğer taraftan, Teorem 2.3.5' den; $\lambda \in III$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.8. $\sigma_c(\Delta, \ell_p) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\}, & (1 < p < \infty) \\ \emptyset \quad , & (p = 1) \end{cases}$ dir.

İspat: $\sigma(T,X) = \sigma_p(T,X) \cup \sigma_r(T,X) \cup \sigma_c(T,X)$ olduğundan; Teorem 2.3.1, Teorem 2.3.3 ve Teorem 2.3.5' den kolayca elde edilir.

Teorem 2.3.9. $\lambda \in \sigma_c(\Delta, \ell_p)$ ise; $\lambda \in II_2$ dir.

İspat: $\lambda \in \sigma_c(\Delta, \ell_p)$ olarak alalım. $\lambda \in II_2$ olduğunu göstermek için; $\Delta - \lambda I$ operatörünün örten, $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} = \ell_p$ ve $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünün sürekli olmadığını göstermeliyiz.

$\lambda \neq 0$ olması durumunda; $y = (1,0,0,\ldots)$ dizisi alınırsa, $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $\ell_p$ üzerinde olmayan $x_k = 1 / (1-\lambda)^{k+1}$ dizisi elde edilir. $\lambda = 0$ olursa; $y = ((k+1)^{-1})$ dizisi alınırsa, $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $\ell_p$ üzerinde olmayan $x_k = \sum_{j=0}^{k} 1/(j+1)$ dizisi elde edilir. Buda; $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünün süreksiz ve $\Delta - \lambda I$ operatörünün örten olmadığını gösterir. Bundan dolayı; $\Delta - \lambda I \in 2$ fakat $\Delta - \lambda I \notin I$ olur. Diğer taraftan; Teorem 2.3.8' den; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} = \ell_p$ olur.

## 2.4. $bv_p$ Dizi Uzayı Üzerinde $\Delta$ Fark Operatörünün Spektrumu

Teorem 2.4.1. $\sigma(\Delta, bv_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$ dir.

İspat: $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminin y 'ye bağlı olarak x için çözümü $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünü verir. Bu çözümden; $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için,

$$(\Delta - \lambda I)^{-1} = \begin{cases} \frac{(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^{n+1}} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad n > k \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\|(\Delta - \lambda I)^{-1}\|_{(bv_1, bv_1)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^{n+1}} < \infty$$

olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| > 1$ olmasıdır. Buradan,

$$x_k - x_{k-1} = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j - y_{j-1}}{(1-\lambda)^{k-j+1}}, (k \in \mathbb{N})$$

olur ve $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ sınırlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda - 1| > 1$ olmasıdır. Yani,

$$\sigma(\Delta, bv_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}.$$

$y = (y_k) \in bv_p$ ve $p > 1$ olsun. $(\Delta - \lambda I)x = y$ denklemi çözülürse;

$$x_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j}{(1-\lambda)^{k-j+1}}, (k \in \mathbb{N})$$

olarak hesaplanır. Buradan, $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$|x_k - x_{k-1}|^p \leq (k+1)^{p-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{|y_j - y_{j-1}|^p}{|1-\lambda|^{p(k+1-j)}}, (k \in \mathbb{N})$$

olur. Buradan da; d' Alembert oran testinden $|\lambda - 1| > 1$ ise,

$$\sum_k \frac{(k+1)^{p-1}}{|1-\lambda|^{pk}}$$

serisi yakınsak olur. Bundan dolayı, $|\lambda - 1| > 1$ ise; $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminin $bv_p$ dizi uzayı üzerinde tek bir çözümü vardır ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.2. $\|\Delta\|_{(bv_p, bv_p)} = 2$ normu ile $\Delta \in B(bv_p)$ olur.

İspat: $\Delta$ operatörünün lineerliğini göstermek kolaydır. Bu yüzden detaylı olarak verilmeyecektir. Şimdi, herhangi bir $x = (x_k) \in bv_p$ dizisini alalım. Buradan;

$$\|\Delta\|_{bv_p} = \left(\sum_k |x_k - x_{k-1} - (x_{k-1} - x_{k-2})|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\sum_k |x_k - x_{k-1}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_k |x_{k-1} - x_{k-2}|^p\right)^{1/p}$$

$$= 2\|x\|_{bv_p}$$

olduğundan dolayı;

$$\|\Delta\|_{(bv_p, bv_p)} \leq 2 \tag{2.4.2.1}$$

olur. Diğer taraftan, Teorem 2.4.1' den; $r_\sigma(\Delta) = 2$ olduğundan dolayı;

$$2 \leq \|\Delta\|_{(bv_p, bv_p)} \tag{2.4.2.2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sonuç olarak; $(2.4.2.1)$ ve $(2.4.2.2)$ eşitsizliklerinden,

$$\|\Delta\|_{(bv_p, bv_p)} = 2$$

olduğu görülür.

Teorem 2.4.3. $\sigma_p(\Delta, bv_p) = \emptyset$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $x \neq \theta = (0,0,0,\dots) \in bv_p$ için, $\Delta x = \lambda x$ olsun. $\Delta x = \lambda x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_0 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_1 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Kabul edelim ki; $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk elemanı $x_{n_0}$ olsun. Öyle ise; $\lambda = 1$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{n_0+1} - x_{n_0} = x_{n_0+1}$$

olur ve bu da $x_{n_0} = 0$ demektir. Sonuç olarak; $x_{n_0} \neq 0$ kabulüne ters olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.4. $\sigma_p\left(\Delta^*, bv_p{}^*\right) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $f \neq \theta = (0,0,0,\dots) \in bv_p{}^* \cong d_q$ için, $\Delta^* f = \lambda f$ olsun. $\Delta^* f = \lambda f$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} f_0 - f_1 &= \lambda f_0 \\ f_1 - f_2 &= \lambda f_1 \\ f_2 - f_3 &= \lambda f_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $k \in \mathbb{N}$ için,

$$f_k = (1-\lambda)^k f_0$$

olur. Buda gösterir ki; $|\lambda - 1| < 1$ ise,

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right|^q = |f_0|^q \left|\sum_{j=0}^{\infty} (1-\lambda)^j\right|^q = |f_0|^q \, |1-\lambda|^{kq} \left|\sum_{j} (1-\lambda)^j\right|^q$$

$$\leq \left|\frac{f_0 (1-\lambda)^k}{\lambda}\right|$$

olur. Buradan da; $|\lambda - 1| < 1$ ise,

$$\sum_k \left|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right|^q \leq \left|\frac{f_0}{\lambda}\right|^q \sum_k |1-\lambda|^{kq} < \infty$$

olduğu görülür. Bunun anlamı da; $f_0 \neq 0$ ve $|\lambda - 1| < 1$ ise, $f \in bv_p{}^*$ olmasıdır.

$p = 1$ durumu için de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.4.5. $\sigma_r(\Delta, bv_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$ dir.

İspat: $|\lambda - 1| < 1$ için, $\Delta - \lambda I$ operatörü 1-1 olduğundan dolayı tersi mevcuttur. Fakat, Teorem 2.4.4. den; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 değildir. Öyle ise, Teorem 1.1.16 dan; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} \neq bv_p$ olduğu elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.6. $1 \in III_1\ \sigma(\Delta, bv_p)$ dir.

İspat: Teorem 2.4.5' den; $\Delta - I \in III$ olur. Diğer taraftan; Teorem 2.4.3 den, $1 \notin \sigma_p(\Delta, \ell_p)$' dir. Böylece $\Delta - I$ operatörünün tersi mevcuttur. Bundan dolayı; $\Delta - I \in 1 \cup 2$ olur.

$\Delta - I \in 1$ olduğunu göstermek için, Teorem 1.1.17' yi kullanarak $\Delta^* - I$ operatörünün örten olduğunu göstermemiz yeterlidir. Yani; verilen bir $g = (g_k) \in bv_p{}^*$ dizisi için, $(\Delta^* - I)x = y$ olacak şekilde bir $f = (f_k) \in bv_p{}^*$ dizisi bulmalıyız. $(\Delta^* - I)x = y$ denkleminden direk bir hesaplama yapılırsa; $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$f_n = -g_{n-1}$$

bulunur. Bu da, $\Delta^* - I$ operatörünün örten olması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.7. $\lambda \neq 1$ ve $\lambda \in \sigma_r(\Delta, bv_p)$ ise; $\lambda \in III_2\ \sigma(\Delta, bv_p)$ olur.

İspat: $\lambda \neq 1$ için, $\Delta - \lambda I$ üçgenseldir. Öyle ise, tersi vardır. $e^{(0)} = (1,0,0,\ldots) \in bv_p$ dizisini alalım. $e^{(0)}$ dizisinin $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörü altındaki görüntüsü olan $y = ((1-\lambda)^{-1}, (1-\lambda)^{-2}, (1-\lambda)^{-3}, \ldots)$ dizisi $bv_p$ üzerinde değildir. Bu da gösterir ki; $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörü süreksizdir. Böylece, $\Delta - \lambda I \in 2$ olur. Diğer taraftan, Teorem 2.4.4' den; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 değildir ve Teorem 1.1.16' dan; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} \neq bv_p$ olduğu görülür. Böylece, $\Delta - \lambda I \in III$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.8. $\sigma_c(\Delta, bv_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\}$ dir.

İspat: $\lambda \neq 1$ için, $\Delta - \lambda I$ üçgenseldir. Öyle ise, tersi vardır. Teorem 1.1.16' dan; $\Delta^* - \lambda I$ operatörü 1-1 olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.9. $\lambda \in \sigma_c(\Delta, bv_p)$ ise; $\lambda \in II_2$ olur.

İspat: $\lambda \in \sigma_c(\Delta, \ell_p)$ olarak alalım. $\lambda \in II_2$ olduğunu göstermek için; $\Delta - \lambda I$ operatörünün örten, $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} = bv_p$ ve $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörünün sürekli olmadığını göstermeliyiz.

$\lambda \neq 0$ olması durumunda; Teorem 2.4.7' nin ispatına benzer şekilde yapılır. Bu yüzden detaylı verilmeyecektir. $\lambda = 0$ olması durumunda; $e = (1,1,1,\ldots)$ dizisi alınırsa, $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $bv_p$ üzerinde olmayan $y = (k+1)$ dizisi elde edilir. Bu da gösterir ki; $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ operatörü süreksiz ve $\Delta - \lambda I$ operatörü örten değildir.

Bundan dolayı; $\Delta - \lambda I \in 2$ fakat $\Delta - \lambda I \notin I$ olur. Diğer taraftan; Teorem 2.3.8' den; $\overline{\mathcal{R}(\Delta - \lambda I)} = bv_p$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

## 2.5. $c_0$ Dizi Uzayı Üzerinde $\Delta_v$ Fark Operatörünün Spektrumu

Teorem 2.5.1. $\Delta_v: c_0 \to c_0$ sınırlı-lineer bir operatör ve $\|\Delta_v\|_{(c_0, c_0)} = 2\ \sup_k v_k$' dır.

İspat: Teoremin ispatı basittir. Bu yüzden detaylı olarak verilmeyecektir.

Teorem 2.5.2. $\sigma(\Delta_v, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| \leq 1\right\}$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatını iki kısımda yapalım. İlk kısımda, $\sigma(\Delta_v, c_0) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| \leq 1\right\}$ olduğunu gösterelim. Yani, $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| > 1$ iken; $\lambda \notin \sigma(\Delta_v, c_0)$ olduğunu gösterelim. 2. kısımda, $\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| \leq 1\right\} \subseteq \sigma(\Delta_v, c_0)$ olduğunu gösterelim.

$\lambda \in \mathbb{C}$ için, $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| > 1$ olsun. Açık bir şekilde, $\lambda = v_k$, yani $\lambda = L$ $\forall$ k için sağlanmaz. Öyle ise; $\forall$ k için, $\lambda \neq v_k$ yani $\lambda \neq L$ olsun. $\Delta_v - \lambda I = (a_{nk})$ üçgenseldir ve böylece tersi vardır. Buradan, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1} = (b_{nk})$ dersek;

$$(b_{nk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(v_0-\lambda)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{v_0}{(v_0-\lambda)(v_1-\lambda)} & \frac{1}{(v_1-\lambda)} & 0 & \cdots \\ \frac{v_0 v_1}{(v_0-\lambda)(v_1-\lambda)(v_2-\lambda)} & \frac{v_1}{(v_1-\lambda)(v_2-\lambda)} & \frac{1}{(v_2-\lambda)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olur. Buradan, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1} \in (c_0, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart;

(1) $\forall$ bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}|$ serisinin yakınsak ve $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}| < \infty$,

(2) $\forall$ bir $k \in \mathbb{N}$ için, $\lim_{n\to\infty}|b_{nk}| = 0$

olduğu biliniyor. Şimdi, $\forall$ bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}|$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. $S_n = \sum_{k=0}^{n}|b_{nk}|$ olsun. Bu takdirde,

$$S_n = \left|\frac{v_0 v_1 \dots v_{n-1}}{(v_0-\lambda)(v_1-\lambda)\dots(v_n-\lambda)}\right| + \cdots + \left|\frac{v_{n-1}}{(v_{n-1}-\lambda)(v_n-\lambda)}\right| + \left|\frac{1}{(v_n-\lambda)}\right|$$

olur. Açık bir şekilde, $\forall$ bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}|$ serisi yakınsak olur. Şimdi de, $\sup_n S_n$' in sonlu olduğu gösterilecek. $\beta = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n-1}}{(v_n-\lambda)}\right|$ olsun. Mutlak değer fonksiyonu sürekli olduğundan dolayı,

$$\beta = \frac{1}{\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|} \tag{2.5.2.1}$$

olur. Buda $0 < \beta < 1$ olduğunu gösterir ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|v_n-\lambda|} = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{v_{n-1}}{v_n-\lambda}\right|\left|\frac{1}{v_{n-1}}\right|\right) = \frac{\beta}{L} \tag{2.5.2.2}$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$S_n = \left|\frac{v_{n-1}}{v_n-\lambda}\right| S_{n-1} + \left|\frac{1}{v_n-\lambda}\right|$$

eşitliği biliniyor. Bu eşitliğin her iki tarafından limit alınıp , $(2.5.2.1)$ ve $(2.5.2.2)$ denklemleri kullanılırsa;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\beta}{L}\left(\frac{1}{1-\beta}\right) < \infty$$

olduğu görülür. Öyle ise, $(S_n)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $\lim_{n\to\infty} S_n < \infty$ olduğu için; $\sup_n S_n < \infty$ olur. Buradan, $\beta = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n-1}}{(v_n-\lambda)}\right| < 1$ olduğundan dolayı yeterince büyük $n$ için, $\left|\frac{v_{n-1}}{v_n-\lambda}\right| < 1$ ve sonuç olarak;

$$\lim_{n\to\infty} |b_{n0}| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_0 v_1 \dots v_{n-1}}{(v_0-\lambda)(v_1-\lambda)\dots(v_n-\lambda)}\right| = 0$$

olur. Benzer şekilde, $k = 1,2,3,\dots$ için; $\lim_{n\to\infty} |b_{nk}| = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu takdirde;

$$\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| > 1 \text{ için, } (\Delta_v - \lambda I)^{-1} \in B(c_0) \qquad (2.5.2.3)$$

olur. Şimdi, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ operatörünün tanım kümesinin $c_0$ üzerinde yoğun olduğunu göstermeliyiz. Bunu sağlaması için, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün görüntüsü $c_0$ üzerinde yoğun olmalıdır. Bu takdirde, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1} \in (c_0, c_0)$ olduğundan dolayı; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün görüntüsü $c_0$ üzerinde yoğun olur. Bu da;

$$\sigma(\Delta_v, c_0) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1-\frac{\lambda}{L}\right| \leq 1\right\} \qquad (2.5.2.4)$$

olduğunu gösterir. Şimdi de;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1-\frac{\lambda}{L}\right| \leq 1\right\} \subseteq \sigma(\Delta_v, c_0) \qquad (2.5.2.5)$$

olduğunu gösterelim. Buradan, $\forall\, k$ için $\lambda \neq v_k$ yani $\lambda \neq L$ şartı altında $(2.5.2.5)$' in sağlandığını gösterelim. Yani; Tanım 1.3.2' deki şartlardan herhangi birinin sağlanmadığını gösterelim. $\lambda \in \mathbb{C}$ için, $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| \leq 1$ olsun. Bu takdirde, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü üçgensel ve böylece $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ operatörü mevcuttur. Buradan, Tanım 1.3.2' deki (i) şartının sağlandığını fakat (ii) şartının sağlanmadığını gösterelim. Kabul edelim ki; $\lambda \in \mathbb{C}$ için, $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1$ olsun. Bu takdirde, $\beta = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n-1}}{(v_n-\lambda)}\right| > 1$ olur. Bu da yeterince büyük n için $\left|\frac{v_{n-1}}{v_n-\lambda}\right| > 1$ demektir ve sonuç olarak;

$$\lim_{n\to\infty}|b_{n0}| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_0 v_1 \dots v_{n-1}}{(v_0-\lambda)(v_1-\lambda)\dots(v_n-\lambda)}\right| \neq 0$$

olur. Böylece;

$$\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1 \text{ için, } (\Delta_v - \lambda I)^{-1} \notin B(c_0) \qquad (2.5.2.6)$$

olur. Şimdi, $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| = 1$, yani, $|L-\lambda| = L$ olsun. Bu da, $\forall\, k$ için $|v_k - \lambda| \leq |v_k|$ demektir ve böylece $\frac{1}{|v_k|} \leq \frac{1}{|v_k-\lambda|}$ olur. Bu eşitsizliği kullanarak;

$$S_n = \left|\frac{v_0 v_1 \dots v_{n-1}}{(v_0-\lambda)(v_1-\lambda)\dots(v_n-\lambda)}\right| + \dots + \left|\frac{v_{n-1}}{(v_{n-1}-\lambda)(v_n-\lambda)}\right|$$

$$+\left|\frac{1}{(v_n-\lambda)}\right| \geq \frac{(n+1)}{v_n}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu takdirde; $\sup_n S_n \geq \sup_n \left[\frac{(n+1)}{v_n}\right] = \infty$ olur. Buda, Tanım 1.3.2 deki (ii) şartının sağlanmaması demektir. Böylece;

$$\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| = 1 \text{ için, } (\Delta_v - \lambda I)^{-1} \notin B(c_0) \tag{2.5.2.7}$$

olur. Şimdi de; $\forall\, k$ için, $\lambda = v_k$ yani $\lambda = L$ şartı altında $(2.5.2.5)$' in sağlandığını gösterelim. Buradan,

$$(\Delta_v - v_k I)x = \begin{pmatrix} (v_0 - v_k)x_0 \\ -v_0x_0 + (v_1 - v_k)x_1 \\ -v_1x_1 + (v_2 - v_k)x_2 \\ \vdots \\ -v_{k-2}x_{k-2} + (v_{k-1} - v_k)x_{k-1} \\ -v_{k-1}x_{k-1} \\ -v_kx_k + (v_{k+1} - v_k)x_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Eğer, $(v_k = L)$ sabit bir dizi ise;

$$(\Delta_v - v_k I)x = \theta \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots$$

olarak bulunur. Bu da, $\Delta_v - \lambda I$ operatörünün 1-1 olduğunu fakat; $R(\Delta_v - \lambda I)$' nın $c_0$ üzerinde yoğun olmadığını gösterir. Böylece, Tanım 1.3.2' deki; (iii) şartı sağlanmaz. Bu takdirde, $L \in \sigma(\Delta_v, c_0)$ olur. Diğer taraftan; sabit $k$ için $(v_k)$ kesin azalan bir dizi ise, $\forall k$ için,

$$(\Delta_v - v_k I)x = \theta \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = 0, \ldots, x_{k-1} = 0, x_{n+1} = \left(\frac{v_n}{v_{n+1} - v_k}\right)x_n$$

olur. Bu da bize gösterir ki; $(\Delta_v - v_k I)$ 1-1 değildir. Öyle ise, Tanım 1.3.2 deki (i) şartı sağlanmaz. Böylece, $\forall\, k$ için $v_k \in \sigma(\Delta_v, c_0)$ olur. Buradan, $\lambda = L$ olduğu zaman; $\forall\, k$ için, $|v_k - \lambda| < |v_k|$ ve böylece

$$\frac{1}{|v_k|} < \frac{1}{|v_k - \lambda|}$$

olur. Bu takdirde;

$$S_n = \left|\frac{v_0 v_1 \dots v_{n-1}}{(v_0 - \lambda)(v_1 - \lambda)\dots(v_n - \lambda)}\right| + \cdots + \left|\frac{v_{n-1}}{(v_{n-1} - \lambda)(v_n - \lambda)}\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{(v_n - \lambda)}\right| > \frac{(n+1)}{v_n}$$

olur. Buradan, $\sup_n S_n > \sup_n \left[\frac{(n+1)}{v_n}\right] = \infty$ olur ve böylece Tanım 1.3.2 deki (ii) şartı sağlanmaz. Bu takdirde;

$$\lambda = L \text{ için, } (\Delta_v - \lambda I)^{-1} \notin B(c_0) \qquad (2.5.2.8)$$

olur. Bu aynı zamanda; $\forall\, k$ için $v_k \in \sigma(\Delta_v, c_0)$ ve $L \in \sigma(\Delta_v, c_0)$ olması demektir. Bu da;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| \le 1\right\} \subseteq \sigma(\Delta_v, c_0) \qquad (2.5.2.9)$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak; $(2.5.2.4)$ ve $(2.5.2.9)$' dan;

$$\sigma(\Delta_v, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| \le 1\right\}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.3. $\sigma_p(\Delta_v, c_0) = \begin{cases} \emptyset \quad , & (v_k) \text{ sabit bir dizi ise} \\ \{v_0, v_1, v_2, \dots\}, & (v_k) \text{ kesin azalan bir dizi ise} \end{cases}$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı iki aşamada yapalım.

1.Durum: Kabul edelim ki; $(v_k)$ sabit bir dizi olsun. $x \neq \theta = (0,0,\dots) \in c_0$ dizisi için; $\Delta_v x = \lambda x$ denklemini düşünelim. Buradan;

$$\begin{aligned} v_0x_0 &= \lambda x_0 \\ -v_0x_0 + v_1x_1 &= \lambda x_1 \\ -v_1x_1 + v_2x_2 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ -v_{k-1}x_{k-1} + v_kx_k &= \lambda x_k \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (2.5.3.1)$$

denklemlerini elde ederiz. $x_t$, $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk elemanı olsun. Buradan, $-v_{t-1}x_{t-1} + v_tx_t = \lambda x_t$ denkleminden; $\lambda = v_t$ olur ve

$$-v_tx_t + v_{t+1}x_{t+1} = \lambda x_{t+1}$$

denkleminden; $x_t = 0$ bulunur. Bu da bizim kabulümüze terstir ve böylece

$$\sigma(\Delta_v, c_0) = \emptyset$$

olarak bulunur.

2.Durum: Kabul edelim ki; $(v_k)$ kesin artan bir dizi olsun. $x \neq \theta = (0,0,\dots) \in c_0$ dizisi için; $\Delta_v x = \lambda x$ denklemini düşünelim. Bu denklem $(2.5.3.1)$' deki denklem sistemini verir. Kabul edelim ki; $\lambda = v_0$ olsun. Bu takdirde; $\forall\, k \geq 1$ için,

$$x_k = \left(\frac{v_{k-1}}{v_k - v_0}\right) x_{k-1} = \left[\frac{v_{k-1}v_{k-2}\dots v_0}{(v_k - v_0)(v_{k-1} - v_0)\dots(v_1 - v_0)}\right] x_0$$

olarak bulunur.

Eğer, $x_0 \neq 0$ olarak alınırsa; $(\Delta_v - v_0 I)x = \theta$ denkleminin sıfır olmayan bir çözümü bulunur. Benzer şekilde, $k > 1$ için; $\lambda = v_k$ ise, $x_{k-1} = 0$, $x_{k-2} = 0$, … , $x_0 = 0$ ve $\forall\, n \geq k$ için,

$$x_{n+1} = \left(\frac{v_n}{v_{n+1} - v_k}\right) x_n = \left[\frac{v_n v_{n-1}\dots v_k}{(v_{n+1} - v_k)(v_n - v_k)\dots(v_{k+1} - v_k)}\right] x_k$$

olur. Eğer, $x_k \neq 0$ olarak alınırsa; $(\Delta_v - v_k I)x = \theta$ denkleminin sıfır olmayan bir çözümü bulunur. Sonuç olarak;

$$\sigma(\Delta_v, c_0) = \{v_0, v_1, v_{2,} \dots\}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.4. $\sigma_p(\Delta_v^*, c_0^*) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| < 1\right\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $f \neq \theta = (0,0,0,\dots) \in c_0^* \cong \ell_1$ için, $\Delta^* f = \lambda f$ olsun, burada

$$\Delta_v^* = \begin{bmatrix} v_0 & -v_0 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & -v_1 & \cdots \\ 0 & 0 & v_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdırlar. $\Delta^* f = \lambda f$ denkleminin çözümünden; $\forall\, k \geq 1$ için,

$$f_k = \left(\frac{v_{k-1} - \lambda}{v_{k-1}}\right) f_{k-1}$$

olarak bulunur. Buradan; $\forall\, k \geq 1$ için,

$$|f_k| = \left|\frac{v_{k-1} - \lambda}{v_{k-1}}\right| |f_{k-1}| \qquad (2.5.4.1)$$

olur. Fakat, $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| < 1$ eşitsizliğini sağlayan; $\forall\, k = 1,2,3,\ldots$ için,

$$|v_{k-1} - \lambda| \leq v_{k-1} - L + |L - \lambda| \Rightarrow \left|\frac{v_{k-1} - \lambda}{v_{k-1}}\right| < 1$$

olur. $(2.5.4.1)$' deki denklem kullanılırsa; $k = 1,2,3,\ldots$ için,

$$|f_k| < |f_{k-1}|$$

olur ve sonuç olarak;

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|f_k|}{|f_{k-1}|} < 1$$

olarak bulunur. Buradan da,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty$$

olur. Böylece;

$$\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}|f_k|<\infty \qquad (2.5.4.2)$$

olarak elde edilir. Bu sonucun tersini gösterelim:

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|<\infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{|f_k|}{|f_{k-1}|}<1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{v_{k-1}-\lambda}{v_{k-1}}\right|<1 \Rightarrow \left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1$$

olur. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|<\infty \;\Rightarrow \left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1 \qquad (2.5.4.3)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak; $(2.5.4.2)$ ve $(2.5.4.3)$' den,

$$\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}|f_k|<\infty$$

olur. Bunun anlamı, $f \in {c_0}^*$ olması için gerek ve yeter şart $f_0 \neq 0$ ve $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1$ olmasıdır. Böylece,

$$\sigma_p({\Delta_v}^*, {c_0}^*) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1\right\}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.5.

$$\sigma_r(\Delta_v, c_0) = \begin{cases} \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1\right\} & , \ (v_k) \text{ sabit bir dizi} \\ \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1\right\} \setminus \{v_0, v_1, v_2, \dots\}, & (v_k) \text{ kesin azalan bir dizi} \end{cases} \text{ dir.}$$

İspat: Bu teoremin ispatı iki aşamada yapalım.

1.Durum: Kabul edelim ki; $(v_k)$ sabit bir dizi olsun. $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1$ için; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü $\lambda = L$ olması dışında üçgenseldir. Bu yüzden tersi mevcuttur. Diğer taraftan, Teorem 2.5.3' den; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü $\lambda = L$ için 1-1'dir ve böylece tersi vardır. Fakat, Teorem 2.5.4'den; $(\Delta_v{}^* - \lambda I)$ operatörü $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1$ için, 1-1 değildir. Bu takdirde; Teorem 1.1.16'dan; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü $c_0$ üzerinde yoğun değildir. Böylece;

$$\sigma_r(\Delta_v, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1\right\}$$

olarak bulunur.

2.Durum: Kabul edelim ki; $(v_k)$, $\lim_{k\to\infty} v_k = L$ olacak şekilde kesin azalan bir dizi olsun. $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1$ için, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü; bazı $k \in \mathbb{N}$ için, $\lambda = v_k$ olması dışında üçgenseldir ve böylece tersi mevcuttur. Diğer taraftan, Teorem 2.5.3' den; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü bazı $k \in \mathbb{N}$ için, $\lambda = v_k$ olduğu durumlarda 1-1 değildir. Bu yüzden, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün tersi mevcut değildir. Buradan, Teorem 2.5.4' den; $(\Delta_v{}^* - \lambda I)$ operatörü $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1$ için, 1-1 değildir. Bu takdirde; Teorem 1.1.16'dan, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü $c_0$ üzerinde yoğun değildir. Böylece;

$$\sigma_r(\Delta_v, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1-\frac{\lambda}{L}\right| < 1\right\} \setminus \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.6.

$$\sigma_c(\Delta_v, c_0) = \begin{cases} \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1\right\} & , \quad (v_k) \text{ sabit bir dizi} \\ \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1\right\} \setminus \{v_0\}, & (v_k) \text{ kesin azalan bir dizi} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

İspat: Bu teoremin ispatı iki aşamada yapılacak.

1.Durum: Kabul edelim ki; $(v_k)$ sabit bir dizi olsun. $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1$ için; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü üçgenseldir. Bu yüzden tersi mevcuttur. $(2.5.2.7)$'deki ifadeden dolayı, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün tersi sürekli değildir. Yani, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ sınırlı değildir. Fakat, Teorem 2.5.4'den; $(\Delta_v{}^* - \lambda I)$ operatörü $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1$ için, 1-1'dir. Bu takdirde; Teorem 1.1.16'dan; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü $c_0$ üzerinde yoğundur. Sonuç olarak;

$$\sigma_c(\Delta_v, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1\right\}$$

olarak bulunur.

2.Durum: Kabul edelim ki; $(v_k)$, $\lim_{k\to\infty} v_k = L$ olacak şekilde kesin azalan bir dizi olsun. $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1$ için, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü; $\lambda = v_0$ olması dışında üçgenseldir ve böylece tersi mevcuttur. Diğer taraftan, Teorem 2.5.3' den; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü, $\lambda = v_0$ olduğu durumda 1-1 değildir. Bu yüzden, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün tersi mevcut değildir. $(2.5.2.7)$'deki ifadeden dolayı, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ sınırlı değildir. Fakat, Teorem 2.5.4'den; $(\Delta_v{}^* - \lambda I)$ operatörü $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1$ için, 1-1'dir. Öyle ise; Teorem 1.1.16' dan; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü $c_0$ üzerinde yoğundur. Sonuç olarak;

$$\sigma_c(\Delta_v, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1\right\} \setminus \{v_0\}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.7. $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| > 1$ ise; $(\Delta_v - \lambda I) \in I_1$ dir.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün 1-1, örten ve $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| > 1$ için, tersinin sürekli olduğunu göstermeliyiz. $\lambda \neq v_k$ için; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü üçgenseldir ve böylece tersi mevcuttur. $(2.5.2.3)$' deki ifadeden dolayı, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ süreklidir. Aynı zamanda; $(\Delta_v - \lambda I)\, x = y$ denklemi bize $x = (\Delta_v - \lambda I)^{-1}\, y$ denklemini verir. Yani; $n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_n = ((\Delta_v - \lambda I)^{-1} y)_n$$

olur. Buradan, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1} \in (c_0, c_0)$ olduğundan dolayı; $\forall\, y \in c_0$ için, $(\Delta_v - \lambda I)x = y$ olacak şekilde bir $x \in c_0$ dizisi bulabiliriz. Bu da bize gösterir ki, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü örtendir, yani, $R(\Delta_v - \lambda I) = c_0$ olur ve böylece $(\Delta_v - \lambda I) \in I_1$ olarak elde edilir.

Teorem 2.5.8. $(v_k)$ sabit bir dizi, $v_k = L$ ve $\lambda = L$ olsun. Bu takdirde; $\lambda \in III_1\sigma(\Delta_v, c_0)$ olur.

İspat: Teorem 2.5.4' den;

$$\sigma_p(\Delta_v^*, c_0^*) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| < 1\right\}$$

dir. $\lambda = L$ için; $(\Delta_v^* - \lambda I)$ operatörü 1-1 değildir. Teorem 1.1.16' dan; $\overline{R(\Delta_v - \lambda I)} \neq c_0$ olur. Teorem 2.5.3' den; $\lambda = L$ , $\sigma_p(\Delta_v, c_0)$ kümesine ait değildir. Bundan dolayı, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün tersi mevcuttur. Şimdi, $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ operatörünün sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için; Teorem 1.1.17' den, $(\Delta_v^* - \lambda I)$ operatörünün örten olduğunu göstermeliyiz. Yani, verilen bir $y = (y_n) \in \ell_1$ dizisi için, $(\Delta_v^* - \lambda I)x = y$ olacak şekilde $x = (x_n) \in \ell_1$ dizisi bulunmalıdır. Buradan, $(\Delta_v^* - \lambda I)x = y$ denkleminden,

$$\begin{aligned} -vx_1 &= y_0 \\ -vx_2 &= y_1 \\ -vx_3 &= y_2 \\ &\vdots \\ -vx_n &= y_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden; $\forall\, n \geq 1$ için, $-vx_n = y_{n-1}$ olarak elde edilir. $y \in \ell_1$ olduğundan dolayı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty$$

olur. Bu da, $(\Delta_v^* - \lambda I)$ örten olduğunu gösterir ve böylece $\lambda \in III_1\sigma(\Delta_v, c_0)$ olur.

Teorem 2.5.9. $(v_k)$ sabit bir dizi, $v_k = L$ , $\lambda \neq L$ ve $\lambda \in \sigma_r(\Delta_v, c_0)$ olsun. Bu takdirde; $\lambda \in III_2\sigma(\Delta_v, c_0)$ dır.

İspat: $\lambda \neq L$ için; $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü üçgenseldir. Bundan dolayı, tersi mevcuttur. $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| < 1$ olmak üzere; $\lambda \neq L$ için,(2.5.2.6)' da bulunan ifadeden $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ sürekli değildir. Böylece, $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörü 1-1 ve $(\Delta_v - \lambda I)^{-1}$ operatörü sürekli değildir. Diğer taraftan; Teorem 2.5.4' den $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1$ için, $(\Delta_v{}^*-\lambda I)$ operatörü 1-1 değildir ve böylece Teorem 1.1.16'dan, $\overline{R(\Delta_v-\lambda I)}\neq c_0$ olur. Sonuç olarak; $\lambda\in III_2\sigma(\Delta_v,c_0)$ olur.

Teorem 2.5.10. $(v_k)$ pozitif reel sayıların kesin azalan bir dizisi ve $\lambda\in\sigma_r(\Delta_v,c_0)$ olsun. Bu takdirde; $\lambda\in III_2\sigma(\Delta_v,c_0)$ dır.

İspat: Teorem 2.5.5' den ; $\sigma_r(\Delta_v,c_0)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1\right\}\setminus\{v_0,v_1,v_{2,}\ldots\}$ dir. $\lambda\neq v_k$ için; $(\Delta_v-\lambda I)$ operatörü üçgenseldir. Bu takdirde, tersi mevcuttur. $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1$ olmak üzere; $\lambda\neq v_k$ için, (2.5.2.6) ve (2.5.2.8)' den $(\Delta_v-\lambda I)^{-1}$ sürekli değildir. Böylece, $(\Delta_v-\lambda I)$ operatörü 1-1 ve $(\Delta_v-\lambda I)^{-1}$ operatörü sürekli değildir. Diğer taraftan; Teorem 2.5.4' den $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|<1$ için, $(\Delta_v{}^*-\lambda I)$ operatörü 1-1 değildir ve böylece Teorem 1.1.16'dan, $\overline{R(\Delta_v-\lambda I)}\neq c_0$ olur. Sonuç olarak; $\lambda\in III_2\sigma(\Delta_v,c_0)$ olur.

Teorem 2.5.11. $(v_k)$ sabit bir dizi, $v_k=L$ ve $\lambda\in\sigma_c(\Delta_v,c_0)$ olsun. Bu takdirde; $\lambda\in II_2\sigma(\Delta_v,c_0)$ dır.

İspat: $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|=1$ için; $(\Delta_v-\lambda I)$ operatörü üçgenseldir ve böylece tersi mevcuttur. (2.5.2.7)' den, $(\Delta_v-\lambda I)^{-1}$ operatörü sürekli değildir. Bu yüzden, $(\Delta_v-\lambda I)^{-1}$ operatörü sınırlı değildir. Diğer taraftan; Teorem 2.5.4' den, $\left|1-\frac{\lambda}{L}\right|=1$ için, $(\Delta_v{}^*-\lambda I)$ operatörü 1-1' dir ve böylece Teorem 1.1.16'dan, $\overline{R(\Delta_v-\lambda I)}=c_0$ olur.

Şimdi, $(\Delta_v-\lambda I)$ operatörünün örten olmadığı gösterelim. Bunun için; bazı $y\in c_0$

dizileri için; $(\Delta_v - \lambda I)x = y$ olacak şekilde bir $x \in c_0$ dizisi olmadığını göstermek yeterlidir. Buradan, $y = (1,0,0,\ldots) \in c_0$ dizisini alalım. $\forall\, n \geq 0$ için;

$$(\Delta_v - \lambda I)x = y \Rightarrow x_n = \frac{L^n}{(L-\lambda)^{n+1}}$$

olur. Böylece, $\left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1$ olduğundan dolayı, $\forall\, n \geq 0$ için; $x_n = \frac{1}{L}$ olur. Sonuç olarak; $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \frac{1}{L} \neq 0$ olur. Bu da, $x \notin c_0$ olduğunu gösterir ve böylece $(\Delta_v - \lambda I)$ operatörünün örten olmadığı görülür.

# BÖLÜM 3. BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE CESÀRO OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

## 3.1. $c_0$ Dizi Uzayı Üzerinde $C_1$ Cesàro Operatörünün Spektrumu

Lemma 3.1.1. $\sigma(C_1, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$ dir [33].

Lemma 3.1.2. $\sigma_p(C_1, c_0) = \emptyset$ dir [36].

Teorem 3.1.3. $\sigma_p(C_1{}^*, c_0{}^*) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \neq \theta \in c_0{}^* \cong \ell_1$ için, $C_1{}^* f = \lambda f$ olsun. $\Delta^* f = \lambda f$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} f_0 + \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{4}f_3 + \cdots &= \lambda f_0 \\ \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{4}f_3 + \cdots &= \lambda f_1 \\ \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{4}f_3 + \cdots &= \lambda f_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $n \geq 1$ için,

$$f_n = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)\right] f_0$$

elde edilir.

1.Durum: $m$, $f_m \neq 0$ olan ilk tam sayı ise; $\lambda = 1 / (m+1)$ olur. Bu takdirde; $\lambda = 1 / (m+1)$ sayısı

$$f = \left[ \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{(k)} \right] f_0 \in \ell_1$$

öz vektörüne karşılık gelen bir öz değerdir; burada, $e^{(k)}$ $k$. elemanı 1, diğerleri sıfır olan bir dizidir.

2.Durum: $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $f_n \neq 0$ ise; $A_n = -n / \lambda(n+1)$ olmak üzere,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 - \frac{1/\lambda}{n} - \frac{A_n}{n^2}$$

olur. $A_n$ sınırlı bir dizi olduğundan dolayı, Teorem 1.2.34'den; $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $Re(1/\lambda) > 1$ olmasıdır.

3.Durum: $\lambda = 1$ ise; $f = (f_0, 0, 0, \ldots) \in \ell_1$ öz vektörüne karşılık gelen bir öz değer olur.

Sonuç olarak; bu üç durum göz önüne alınırsa,

$$\sigma_p(C_1{}^*, c_0{}^*) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 1 \right\} \cup \{1\}$$

$$= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\} \cup \{1\}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.4. $\sigma_r(C_1, c_0) = \sigma_p(C_1^*, c_0^*)$ dir.

İspat: $\forall\, m \in \mathbb{N}$ için; $\lambda \neq 1 / (m+1)$ ise, $C_1 - \lambda I$ üçgensel bir matristir. Böylece tersi mevcuttur. $\lambda = 1 / (m+1)$ olması durumunda, $(C_1 - \lambda I)x = \theta$ olacağından

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-1} = 0 \text{ ve } \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ için; } x_{m+k} = \binom{m+k}{m} x_m$$

olur. Bu takdirde; $x = (x_m) \in c_0 \Leftrightarrow (x_m) = 0$ olur. Bu da, $x = \theta$ anlamına gelir. Bundan dolayı; $C_1 - \lambda I$ operatörü $c_0$ üzerinde 1-1 operatördür ve böylece tersi mevcuttur. Sonuç olarak; $\lambda \in \sigma_p(C_1^*, c_0^*)$ için, $C_1 - \lambda I$ operatörünün tersi mevcuttur. Teorem 3.1.3' den; $C_1^* - \lambda I$ operatörü 1-1 olmadığından, Teorem 1.1.16 yı kullanarak $\overline{R(C_1 - \lambda I)} \neq c_0$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. $\sigma_c(C_1, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},\ \lambda \neq 1\right\}$ dir.

İspat: $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere; $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ve $\lambda \neq 1$ olsun. $\forall\, m \in \mathbb{N}$ için; $\lambda \neq 1 / (m+1)$ olduğunda, $C_1 - \lambda I$ üçgensel ve böylece tersi vardır. Buradan, $(C_1^* - \lambda I)f = \theta$ lineer denklem sistemini çözdüğümüzde; $\forall\, n \geq 1$ için,

$$f_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)\lambda}\right)\right] f_0$$

olarak bulunur. $Re(1/\lambda) = 1$ olduğu için;

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \in \ell_1 \Leftrightarrow f = \theta$$

olur. Sonuç olarak; $C_1{}^* - \lambda I$ operatörü 1-1 olur ve Teorem 1.1.16' dan; $\overline{R(C_1 - \lambda I)} = c_0$ olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7. Kabul edelim ki; $\lambda$ sayısı

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda + 1| > |\lambda - 1|\} = \{\lambda \in \mathbb{C}: Re(\lambda) > 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümenin elemanı olsun. Bu takdirde; $A = \lambda I + (1 - \lambda)C_1$ operatörünün yakınsaklık bölgesi $c$ dizi uzayıdır.

İspat: $\beta = \lambda \setminus (\lambda - 1)$ olmak üzere; $A = (\beta I - C_1) \setminus (\beta - 1)$ olarak yazalım. Öyle ise; $A = (\beta I - C_1) \setminus (\beta - 1)$ operatörünün tersi mevcut ve ne zaman $\beta \in \rho(C_1, c)$ olursa, sürekli olur. $|\lambda + 1| > |\lambda - 1|$ olduğundan dolayı ispat tamamlanır.

## 3.2. $bv_p$ Dizi Uzayı Üzerinde $C_1$ Cesàro Operatörünün Spektrumu

Teorem 3.2.1. $C_1 : bv_p \to bv_p$ sınırlı-lineer bir operatör ve $\|C_1\|_{(bv_p : bv_p)} = 1$ dir.

İspat: $C_1$ operatörünün lineerliğini göstermek kolaydır. Bu yüzden detaylı olarak verilmeyecektir. Herhangi bir $x = (x_k) \in bv_p$ dizisini alalım. Buradan;

$$\left|\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_k}{(k+1)} - \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}}{k}\right|^p$$

$$= \left|\frac{(x_k - x_0) + (x_k - x_1) + \cdots + (x_k - x_{k-1})}{k(k+1)}\right|^p$$

ve

$$
\begin{aligned}
|x_k - x_0| \quad &\leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \cdots + |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| \\
|x_k - x_1| \quad &\leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \cdots + |x_2 - x_1| \\
&\vdots \\
|x_k - x_{k-2}| &\leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}|
\end{aligned}
$$

eşitsizliklerini yazalım. Buradan,

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |a_n|\right)^p \leq k^{p-1} \sum_{n=1}^{k} |a_n|^p \; ; \; (p \geq 1)$$

ve

$$\frac{n^p}{(k+1)^p} \leq \frac{k}{k+1} \quad ; (p \geq 1, 1 \leq n \leq k)$$

eşitsizliklerini kullanırsak;

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_k}{(k+1)} - \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}}{k}\right|^p \\
&\leq \frac{(k|x_k - x_{k-1}| + (k-1)|x_{k-1} - x_{k-2}| + \cdots + 2|x_2 - x_1| + |x_1 - x_0|)^p}{k^p (k+1)^p} \\
&\leq \frac{k^{p-1}(k^p |x_k - x_{k-1}|^p + (k-1)^p |x_{k-1} - x_{k-2}|^p + \cdots + 2^p |x_2 - x_1|^p + |x_1 - x_0|^p)}{k^p (k+1)^p} \\
&\leq \frac{k^p |x_k - x_{k-1}|^p + (k-1)^p |x_{k-1} - x_{k-2}|^p + \cdots + 2^p |x_2 - x_1|^p + |x_1 - x_0|^p}{k (k+1)^p} \\
&\leq \frac{k|x_k - x_{k-1}|^p + (k-1)|x_{k-1} - x_{k-2}|^p + \cdots + 2|x_2 - x_1|^p + |x_1 - x_0|^p}{k(k+1)}
\end{aligned}
$$

olarak elde ederiz. Buradan;

$$\|C_1x\|_{bv_p}^p \leq |x_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} j|x_j - x_{j-1}|^p}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k} |x_k - x_{k-1}|^p = \|x\|_{bv_p}^p$$

olur. Bu takdirde;

$$\|C_1x\|_{bv_p}^p \leq \|x\|_{bv_p}^p \Rightarrow \|C_1\|_{(bv_p:bv_p)} \leq 1 \qquad (3.2.1.1)$$

olarak bulunur. Şimdi, $b^{(0)} = (1,1,1,\dots)$ dizisini alalım. Buradan, $C_1b^{(0)} = b^{(0)}$ ve $\left\|b^{(0)}\right\|_{bv_p} = 1$ olduğu açıktır. Böylece,

$$\|C_1\|_{(bv_p:bv_p)} \geq \left\|C_1b^{(0)}\right\|_{bv_p} = \left\|b^{(0)}\right\|_{bv_p} = 1$$

olur. Bu takdirde;

$$\|C_1\|_{(bv_p:bv_p)} \geq 1 \qquad (3.2.1.2)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak; $(3.2.1.1)$ ve $(3.2.1.2)$’ den,

$$\|C_1\|_{(bv_p:bv_p)} = 1$$

olur.

Teorem 3.2.2. $C_1: d_q \to d_q$ $(1 < q < \infty)$ sınırlı-lineer operatör ve $\|C_1{}^*\|_{(d_q:d_q)} = 1$ dir.

İspat: $d_1 \cong bv_1^*$ , $d_q \cong bv_p^*$ ve $\|C_1^*\|_{(d_q:d_q)} = \|C_1\|_{(bv_p:bv_p)}$ olduğundan dolayı; Teorem 3.2.1' den,

$$\|C_1^*\|_{(d_q:d_q)} = 1;\ (1 < q < \infty)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.3. $\sigma(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$ dir.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için; $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayan bütün $\lambda$' lar için, $(C_1 - \lambda I)^{-1}$ operatörünün sınırlı olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki; $y = (y_k) \in bv_p$ olsun. $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminin y 'ye bağlı olarak x için çözümü;

$$x_0 = \frac{1}{1-\lambda} y_0$$

$$x_1 = \frac{-1}{(1-\lambda)(1-2\lambda)} y_0 + \frac{2}{1-2\lambda} y_1$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \left( \prod_{j=k+1}^{n+1} \frac{j}{1-j\lambda} \right) \lambda^{n-k-1} y_k + \frac{n+1}{1-(n+1)\lambda} y_n$$

denklemlerini verir. Buradan, $(C_1 - \lambda I)^{-1} = (e_{nk})$ olarak tanımlarsak;

$$e_{nk} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-k}}{n+1} \left( \prod_{j=k+1}^{n+1} \frac{j}{1-j\lambda} \right) \lambda^{n-k-1} & , \quad (0 \leq k \leq n-1) \\ \frac{k+1}{1-(k+1)\lambda} & , \quad (k = n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

olur. Buradan, $Re(1 / \lambda) < 1$ eşitsizliğine denk olan $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ ise,

$$\|C_1 - \lambda I\|_{(bv_1:bv_1)} < \infty$$

olur [42].Diğer taraftan; $p > 1$ ise,

$$|x_n - x_{n-1}|^p = |x_n - x_{n-1}|^{p-1}|x_n - x_{n-1}| \qquad (3.2.3.1)$$

olur. Bu takdirde; $Re(1 / \lambda) < 1$ ise,

$$|x_n - x_{n-1}| \to 0\ ;\ (n \to \infty), \qquad (3.2.3.2)$$

olduğu gösterilebilir. Buradan;

$$x_n - x_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{k}{1-k\lambda}\lambda^{n-1}y_0$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{k}{1-kn+1\lambda}\lambda^{n-2}y_1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{1-k\lambda}\lambda^{n-2}y_0$$

$$+\cdots+\left[\frac{n+1}{1-(n+1)\lambda}y_n - \frac{n}{1-n\lambda}y_{n-1}\right]$$

olur. Bu takdirde; bu denklemde Lemma 7 $[33, \text{syf.} 266]$ kullanılırsa, $(3.2.3.2)$' de bulunan denklem elde edilir. Sonuç olarak; $Re(1 / \lambda) < 1$ ise,

$$\|C_1 - \lambda I\|_{(bv_p:bv_p)} < \infty$$

olarak elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4. $\sigma_p(C_1, bv_p) = \{1\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $x \neq \theta = (0,0,0, \dots) \in bv_p$ için, $C_1 x = \lambda x$ olsun. $C_1 x = \lambda x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda x_0 \\ \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.2.4.1}$$

denklem sistemi elde edilir. Eğer; $x_0$, $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk elemanı olursa, $\lambda = 1$ ve $(3.2.4.1)$ denklem sisteminden; $\forall\, k \geq 1$ için, $x_k = x_0$ elde edilir. Böylece; $p \geq 1$ için, $x \neq \theta$ olmak üzere $x = (x_n) \in bv_p$ bulunur.

Eğer; $x_{n_0}$, $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk elemanı olursa, $(3.2.4.1)$' den,

$$\frac{1}{n_0 + 1} x_{n_0} = \lambda x_{n_0}$$

denklemi bulunur ve buradan, $\lambda = 1 \,/\, (n_0 + 1)$ olur. $(3.2.4.1)$ denklem sisteminden; herhangi bir $k \geq 1$ için,

$$x_{n_0+k} = \frac{(n_0 + 1)(n_0 + 2) \dots (n_0 + k)}{k!} x_{n_0}$$

olur. Buradan da;

$$\left|x_{n_0+k} - x_{n_0+k-1}\right|^p = \frac{{n_0}^p (n_0 + 1)^p \dots (n_0 + k - 1)^p}{(k!)^p} \left|x_{n_0}\right|^p$$

$$= \frac{1}{|(n_0-1)!|^p}(k+1)^p(k+2)^p \ldots (n_0+k-1)^p \left|x_{n_0}\right|^p$$

olur. Bu da, $x \notin bv_p$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.5. $\sum_n n^{-\lambda}$ harmonik serileri; $\lambda \leq 1$ olduğunda ıraksak ve $\lambda > 1$ olduğunda ise, yakınsak olur [21].

Teorem 3.2.6. $\sigma_p\left(C_1{}^*, bv_p{}^*\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \neq \theta \in bv_p{}^*$ için, $C_1{}^* f = \lambda f$ olsun. $\Delta^* f = \lambda f$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned}
f_0 + \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{4}f_3 + \cdots &= \lambda f_0 \\
\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{4}f_3 + \cdots &= \lambda f_1 \\
\frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{4}f_3 + \cdots &= \lambda f_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $k = 1, 2, \ldots$ için; $\lambda \neq 0$ ise,

$$f_k = \left[\prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)\right] f_0$$

elde edilir. Öyle ise; $\lambda = 1$ için, $f = (f_0, 0, 0, \ldots) \in bv_p{}^*$ olduğundan dolayı, $1 \in \sigma_p\left(C_1{}^*, bv_p{}^*\right)$ olur. $z = (z_k)$ dizisini; $k = 1, 2, \ldots$ için,

$$z_k = \prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n\lambda}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan; $A$ bir sabit ve $\sum z_k$ serisi; $Re(1/\lambda) > 1$ ise, sınırlı ve $Re(1/\lambda) \leq 1$ ise, ıraksak olmak üzere,

$$z_k = A.k^{-1/\lambda} + O\left(k^{-Re(1/\lambda)-1}\right)$$

şeklinde tanımlanır. [31, Lemma 1.4]. Şimdi, $s = (s_k)$ dizisini;

$$s_k = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^{1/\lambda}}, (k \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlayalım ve $|s_1| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $Re(1/\lambda) > 1$ olmasıdır. $Re(1/\lambda) = \beta$ ve $\beta > 1$ olsun. Buradan;

$$s_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\beta}}$$

serisinin yakınsaklığını Lemma 3.2.5 deki ifade verir. Buradan; $2^{m-1} \leq k \leq 2^m - 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} s_k \leq &\left[\frac{1}{2^{(m-1)\beta}} + \cdots + \frac{1}{(2^m - 1)^{\beta}}\right] \\ &+ \left[\frac{1}{2^{m\beta}} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1} - 1)^{\beta}}\right] + \cdots \end{aligned} \tag{3.2.6.1}$$

olarak elde edilir. Buradan da;

$$s_j \leq \frac{2^{\beta-1}}{2^{\beta-1}-1} \cdot \frac{1}{2^{(m-1)(\beta-1)}} \tag{3.2.6.2}$$

ifadesini elde ederiz. $(3.2.6.2)$' deki ifadeden; $Re(1/\lambda) > 1$ ise,

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^{1/\lambda}}\right| \leq \frac{2^{\beta-1}}{(2^{\beta-1}-1)2^{(m-1)(\beta-1)}}, (k \in \mathbb{N}) \tag{3.2.6.3}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde; $B$ pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty} j^{-Re(1/\lambda)-1}\right| \leq B \cdot \frac{1}{2^{(m-1)(\beta-1)}}, (k \in \mathbb{N}) \tag{3.2.6.4}$$

olduğu gösterilebilir. Bu takdirde; $(3.2.6.3)$ ve $(3.2.6.4)$' den,

$$\sup_{k,n \in \mathbb{N}} \left|\sum_{j=k}^{n} f_j\right| < \infty \tag{3.2.6.5}$$

olarak elde edilir. Eğer; $f_0 \neq 0$ ve $Re(1/\lambda) > 1$ ise, $f \in bv_1{}^*$ ve her ne zaman $f_0 \neq 0$ ise $f \neq \theta$ olur. Buradan da;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 1\right\} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$$

olduğu görülür. Şimdi; $(3.2.6.3)$ ve $(3.2.6.4)$ kullanılarak, $M$ pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\left|\sum_{j=k}^{n} f_j\right|^q \leq M \cdot \frac{1}{2^{(m-1)(\beta-1)q}} \qquad (3.2.6.6)$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak; $(3.2.6.6)$' dan,

$$\sum_k \left|\sum_{j=k}^{n} f_j\right|^q < \infty$$

olarak elde edilir. Bunun anlamı da; $f_k \in bv_p{}^*$ olmasıdır ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.7. $\sigma_c(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},\ \lambda \neq 1\right\}$ dir.

İspat: $\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1\right\} \cup \{0\}$ eşitliğini göstermek zor değildir. Kabul edelim ki; $\lambda \neq 1$ olsun. Bu takdirde; Teorem 3.2.6' dan, $\lambda \notin \sigma_p(C_1{}^*, bv_p{}^*)$ olur ve böyle $\lambda$' lar için, $Ker(C_1{}^* - \lambda I) = \{\theta\}$ olur. Bu da,

$$\overline{R(C_1 - \lambda I)} = bv_p \qquad (3.2.7.1)$$

olduğunu gösterir. Şimdi; kabul edelim ki, $\lambda = 0$ olsun. $C_1 x = \theta$ denklemini göz önüne alalım. Buradan, $x = \theta$ olduğunu görmek kolaydır. Öyle ise; $Ker(C_1) = \{\theta\}$ ve $C_1$ operatörünün tersi mevcuttur. Aynı zamanda; $Ker(C_1{}^*) = \{\theta\}$ ve bu yüzden,

$$\overline{R(C_1)} = bv_p \qquad (3.2.7.2)$$

olur. Sonuç olarak; $(3.2.7.1)$, $(3.2.7.2)$ ve Teorem 1.1.16' dan;

$$\sigma_c(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1\,,\;\; \lambda \neq 1\right\} \cup \{0\}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.8. $\sigma_r(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$ dir.

İspat: : $\sigma(T,X) = \sigma_p(T,X) \cup \sigma_r(T,X) \cup \sigma_c(T,X)$ olduğundan; Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.7' den,

$$\sigma_r(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$$

olduğu kolayca görülür.

### 3.3. $c$ Dizi Uzayı Üzerinde $C_r$ Operatörünün Spektrumu

Teorem 3.3.1. $\sigma_p(C_r, c) = \left\{\frac{1}{k^r}\,,\;\; k = 1,2,\ldots\right\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki; $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots) \in bv_p$ için, $C_1 x = \lambda x$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda x_0 \\ \frac{1}{2^r}x_0 + \frac{1}{2^r}x_1 &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{3^r}x_0 + \frac{1}{3^r}x_1 + \frac{1}{3^r}x_2 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden;

$$\lambda = \frac{1}{(k+1)^r}$$

ve

$$x_n = \prod_{j=k+1}^{n} \left( \frac{\lambda j^r}{\lambda (j+1)^r - 1} \right) x_k \qquad (3.3.1.1)$$

olarak bulunur; burada, $k$; $x_k \neq 0$ olan en küçük tam sayı ve $n \geq k+1$' dir. Buradan, $(3.3.1.1)$' de tanımlanan dizi $c_0$ üzerindedir $[1, \text{syf. } 208]$. Bu takdirde; $c_0 \subset c$ olduğundan dolayı, $x = (x_n) \in c$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2. $\sigma(C_r, c) = \left\{ \frac{1}{k^r} \ , \ \ k = 1,2, \dots \right\} \cup \{0\}$ dır.

İspat: $c$ bir Banach uzayı olduğundan; $\sigma(C_r, c)$ kapalıdır. Bu yüzden; $\lambda = 0 \in \sigma(C_r, c)$ ve Teorem 3.3.1' den,

$$\left\{ \frac{1}{k^r} \ , \ \ k = 1,2, \dots \right\} \subset \sigma(C_r, c)$$

olur. Diğer taraftan; Teorem 1.2.14' den, $C_r$ operatörü $c$ dizi uzayı üzerinde kompakttır. Bu takdirde; $\forall \ \lambda \neq 0$ olan spektral eleman bir öz değerdir $[22, \text{syf. } 432]$. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3. $\sigma_c(C_r, c) = \{0\}$ dır.

İspat: Kabul edelim ki; $f = (f_0, f_1, \dots) \in \ell_1$ için, $C_r{}^* f = 0$ olsun. $C_r{}^* f = 0$ denkleminin çözümünden;

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0 \\
f_0 + \frac{1}{2^r} f_1 + \frac{1}{3^r} f_2 + \cdots &= 0 \\
\frac{1}{2^r} f_1 + \frac{1}{3^r} f_2 + \cdots &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan, $f = \theta = (0,0,\dots)$ olarak bulunur. Bu takdirde; $Ker(C_r{}^*) = \{0\}$ olur. Bu yüzden; $\overline{R(C_1)} = c$ olarak bulunur ve bundan dolayı, $0 \in \sigma_c(C_r, c)$ olur. Diğer taraftan; Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2'den, $\sigma_c(C_r, c) = \{0\}$ olduğu görülebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.4. $\sigma_r(C_r, c) = \emptyset$ dir.

İspat: $(T,X) = \sigma_p(T,X) \cup \sigma_r(T,X) \cup \sigma_c(T,X)$ olduğundan; kolayca görülür.

# BÖLÜM 4. BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE RHALY OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU

## 4.1. $c_0$ Dizi Uzayı Üzerinde Rhaly Operatörünün Spektrumu

Teorem 4.1.1. $S = \{a_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere; $0 < L < \infty$ ise,

$S \cap (2L, \infty) \subseteq \pi_0(R_a, c_0) \subseteq S \cap [2L, \infty)$ dur [50].

Teorem 4.1.2. Eğer; $0 < L < \infty$ ise,

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| < \frac{L}{2}\right\} \cup S \cup \{L\} \subseteq \pi_0(R_a{}^*, c_0{}^* \cong \ell_1)$$

$$\subseteq \left(\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} - \{0\}\right) \cup S$$

dir [50].

Teorem 4.1.3. Eğer; $0 < L < \infty$ ise,

$$\sigma(R_a, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \cup S$$

dir [50].

Teorem 4.1.4. $0 < L < \infty$ ve $Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha$ olsun. Eğer; $\lambda \notin S$ ve $\alpha L > 1$ ise,

$\lambda \in III_1\ \sigma(R_a, c_0)$ dır.

İspat: $\lambda \notin S$ olduğu için; $T_\lambda = (\lambda I - R_a)$ operatörü alt üçgensel bir matristir ve bundan dolayı, $T_\lambda{}^{-1}$ mevcuttur. Öyle ise; $T_\lambda{}^* x = \theta$ denklemi göz önüne alınırsa,

$$x_n = \left(1 - \frac{a_{n-1}}{\lambda}\right) x_{n-1}$$

ve

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right) x_0, \quad (n \geq 1)$$

olarak elde edilir. $\alpha L > 1$ olduğu için; $x = (x_n)_0^\infty \notin \ell_1$ olur. Bu takdirde; $T_\lambda{}^*$ 1-1 değildir ve Teorem 1.1.16' dan; $\overline{R(T_\lambda)} \neq c_0$ olur. Bu yüzden; $T_\lambda \in III$ olur.

$y = (y_n) \in \ell_1$ olsun. Buradan, $T_\lambda{}^* x = y$ olacak şekilde $x = (x_n) \in \ell_1$ dizisi bulunmalıdır. Bunun için; $x_0 = 0$ olsun. Bu takdirde;

$$x_1 = \frac{1}{\lambda}(y_1 - y_0) + \frac{1}{\lambda}(\lambda - a_0)x_0 = \frac{1}{\lambda}(y_1 - y_0)$$

olur ve $n > 1$ için;

$$x_n = \frac{1}{\lambda}\Bigg\{y_n - \frac{a_{n-1}}{\lambda} y_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{\lambda}\left(1 - \frac{a_{n-1}}{\lambda}\right) y_{n-2}$$
$$- \frac{a_{n-3}}{\lambda}\left(1 - \frac{a_{n-2}}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{a_{n-1}}{\lambda}\right) y_{n-3} - \cdots - \frac{a_1}{\lambda}\left(1 - \frac{a_{n-1}}{\lambda}\right) \ldots \left(1 - \frac{a_2}{\lambda}\right) y_1$$
$$- \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right) y_0\Bigg\}$$

olarak bulunur. Bu; $n \geq 1$ ve $k \geq 0$ için, $x = By$ olacak şekilde $B = b_{nk}$ matrisini tanımlar ve buradan;

$$b_{nn} = \frac{1}{\lambda}$$

$$b_{n,n-1} = -\frac{a_{n-1}}{\lambda^2}$$

$$b_{10} = -\frac{1}{\lambda} \qquad , \qquad b_{n0} = -\frac{1}{\lambda}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right), (n > 1)$$

$$b_{nk} = -\frac{a_k}{\lambda^2}\prod_{j=k+1}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right)$$

$$b_{nk} = 0, \qquad (k > 1 \geq n)$$

olur. Teorem 1.2.22’ den;

$$\frac{A}{N^{\alpha L}} \leq \prod_{j=1}^{n}\left|1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right| \leq \frac{B}{N^{\alpha L}}$$

olacak şekilde $A$ ve $B$ pozitif sabitleri vardır. Buradan;

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n0}| = |b_{10}| + \sum_{n=2}^{\infty}|b_{n0}| = \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} + \frac{B}{|\lambda|}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^{\alpha L}}$$

ve $C = \sup k\alpha_k$ olmak üzere; $k \geq 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_{nk}| = |b_{kk}| + |b_{k+1,k}| + \sum_{n=k+2}^{\infty}|b_{nk}|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} + \frac{\alpha_k}{|\lambda|^2} + \frac{\alpha_k}{|\lambda|^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\prod_{j=k+1}^{n-1}\left|1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{C}{|\lambda|^2} + \frac{\alpha_k}{|\lambda|^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right|}{\prod_{j=1}^{k}\left|1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right|}$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{C}{|\lambda|^2} + \frac{\alpha_k}{|\lambda|^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{\frac{B}{(n-1)^{\alpha L}}}{\frac{A}{k^{\alpha L}}}$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{C}{|\lambda|^2} + \frac{\alpha_k}{|\lambda|^2}k^{\alpha L}\int_{n=k}^{\infty}\frac{A}{x^{\alpha L}}dx$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{C}{|\lambda|^2} + \frac{C}{|\lambda|^2(\alpha L-1)}$$

olur. Buradan; $\alpha L > 1$ olduğu için, $\sup_k \sum_k |b_{nk}| < \infty$ ve böylece $B \in B(\ell_1)$ olur. Bu da, $T_\lambda{}^*$ örten olduğunu gösterir. Bu takdirde; Teorem 1.1.17' den, $T_\lambda \in (1)$ olur. Sonuç olarak; $T_\lambda \in III_1$ ve $\lambda \in III_1\ \sigma(R_a, c_0)$ olarak elde edilir.

Teorem 4.1.5. $0 < L < \infty$ olsun. Eğer; $\lambda \notin S$ ve $\alpha L = 1$ ise, $\lambda \in II_2\ \sigma(R_a, c_0)$ dır.

İspat: $\lambda \notin S$ olduğu için; $T_\lambda$ alt üçgensel bir matris olur. Böylece; $T_\lambda$ 1-1 operatör, yani, $T_\lambda \in (1) \cup (2)$ olur. $T_\lambda{}^*$ adjoint operatörünü göz önüne alalım. $T_\lambda{}^* x = \theta$ denkleminden;

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_j}{\lambda}\right)x_0, \quad (n \geq 1)$$

olarak bulunur. $\alpha L = 1$ olduğundan;

$$x = (x_0, x_1, \dots) \in \ell_1 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

olur. Bu yüzden; $T_\lambda{}^*$ 1-1 operatör, yani, $T_\lambda \in (1) \cup (2)$ olur. Öyle ise; $T_\lambda \in I_1 \cup II_2$ olarak elde edilir. Teorem 4.1.3' den; $\lambda \in \sigma(R_a, c_0)$ olduğu için, $T_\lambda \notin I_1$ ve böylece, $T_\lambda \in II_2$ olur. Sonuç olarak; $\lambda \in II_2\ \sigma(R_a, c_0)$ olarak bulunur.

Teorem 4.1.6. $0 < L < \infty$ olsun. Eğer; en az bir tane $m$ $(m = 0,1,2, \dots)$ için, $\lambda = a_m$ ise, $\lambda = a_m \in III_3\ \sigma(R_a, c_0)$ dır.

İspat: $(\lambda I - R_a{}^*)x = 0$ denklem sistemini düşünelim. Kabul edelim ki; $\lambda = a_0$ olsun. Bu takdirde; $(\lambda I - R_a{}^*)_0 x = 0$ denklem sisteminden,

$$(a_0 - a_0)x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = 0$$

ya da

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = 0$$

olarak elde edilir ve buradan da;

$$a_1 x_1 = -\sum_{k=2}^{\infty} a_k x_k$$

olur. $(\lambda I - R_a{}^*)_1 x = 0$ denklem sisteminden;

$$0 = (a_0 - a_1)x_1 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k x_k = a_0 x_1 - a_1 x_1 + a_1 x_1 = a_0 x_1$$

olur. Bu da; $x_1 = 0$ olduğunu gösterir. Böyle devam ederek; $\forall\, n > 0$ için, $x_n = 0$ olduğu gösterilebilir.

Eğer; $\lambda = a_m$ ve $m > 0$ ise, $(\lambda I - R_a{}^*)_m x = 0$ denklem sisteminden;

$$a_m x_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x_k = 0$$

olur ve bu denklemden de;

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x_k = 0$$

ya da

$$a_{m+1} x_{m+1} = - \sum_{k=m+2}^{\infty} a_k x_k$$

eşitlikleri elde edilir. $(\lambda I - R_a{}^*)_{m+1} x = 0$ denklem sisteminden;

$$a_m x_{m+1} - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x_k = 0$$

ya da

$$0 = a_m x_{m+1} - a_{m+1} x_{m+1} - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x_k$$

$$= a_m x_{m+1} - a_{m+1} x_{m+1} + a_{m+1} x_{m+1} = a_m x_{m+1}$$

olur. Bu da; $x_{m+1} = 0$ olduğunu gösterir. Böyle devam edilirse; $\forall\, n > m$ için, $x_n = 0$ olduğu gösterilebilir.

Her durumda $x$ sonlu bir dizi ve $x \in \ell_1$ olur. Bu takdirde; $T_{a_n}{}^*$ 1-1 değildir ve böylece $T_{a_n}$ yoğun bir görüntü kümesine sahip değildir. Bu da; $T_{a_n} \in III$ olduğunu gösterir.

$\forall\, n$ için; $\lambda = a_m$ olduğundan dolayı, $T_{a_n}{}^{-1}$ mevcut değildir. Sonuç olarak; $T_{a_n} \in III_3$ olarak bulunur.

**4.2. $bv_0$ Dizi Uzayı Üzerinde Rhaly Operatörünün Spektrumu**

Teorem 4.2.1. $S = \{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere; $\{(n+1)a_n\}$ monoton ve $\lim_n (n+1)a_n = L < \infty$ ise, $S \cap (2L, \infty) \subseteq \pi_0(R_a, bv_0)$ dır.

İspat: $bv_0 \subseteq c_0$ olduğundan dolayı; ispatı basittir.

Teorem 4.2.2. Eğer; $\{(n+1)a_n\}$ monoton ve $0 < L = \lim_n (n+1)a_n < \infty$ ise,

$$S \cup \left( \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{L}{2} \right| \leq \frac{L}{2} \right\} - \{0\} \right) \subset \pi_0(R_a{}^*, bv_0{}^* \cong bs)$$

dır.

İspat: $R_a{}^*x = \lambda x$ denklemini göz önüne alırsak; bu denklemin çözümünden,

$$\lambda a_n{}^{-1}x_{n+1} = (\lambda a_n{}^{-1} - 1)x_n \tag{4.2.2.1}$$

olur. Buradan; $\lambda = 0$ ise, $x = \theta$ ve böylece $0 \in \pi_0(R_a{}^*, bs)$ olur. $(4.2.2.1)$' den;

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{a_{n-1}}{\lambda}\right)x_n \tag{4.2.2.2}$$

olarak bulunur. $\lambda = a_m$ ise; $\lambda \in \pi_0(R_a{}^*, bs)$ olur. Çünkü; $n \geq m+1$ olduğu için, $x_n = 0$' dır. $(4.2.2.2)$' den;

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\lambda}\right)x_0 \tag{4.2.2.3}$$

olur. Teorem 1.2.21' den; diğer $\lambda$' lar $aL \geq 1$ özelliğine sahiptir. Bu takdirde;

$$S \cup \left(\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} - \{0\}\right) \subset \pi_0(R_a{}^*, bv_0{}^* \cong bs)$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. $T_\lambda = (\lambda I - R_a)$ olsun. Öyle ise; $T_\lambda{}^{-1}$ operatörü;

$$T_\lambda{}^{-1} = (b_{nk}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - \alpha_n} & , \quad (k = n) \\ \frac{\alpha_n}{\lambda^2 \prod_{j=k}^{n}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\lambda}\right)} & , \quad (k < n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases} \tag{4.2.3.1}$$

olarak tanımlanır.

İspat: $T_\lambda x = y$ ise; bu denklemden,

$$x_0 = \frac{1}{\lambda - \alpha_0} y_0$$

$$x_1 = \frac{1}{\lambda - \alpha_1} y_1 + \frac{\alpha_1}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_0)} y_0$$

$$x_2 = \frac{1}{\lambda - \alpha_2} y_2 + \frac{\alpha_1}{(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_1)} y_1 + \frac{\alpha_2 \lambda}{(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_0)} y_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \alpha_n} y_n + \frac{\alpha_n}{(\lambda - \alpha_n)(\lambda - \alpha_{n-1})} y_{n-1}$$

$$+ \frac{\alpha_n \lambda}{(\lambda - \alpha_n)(\lambda - \alpha_{n-1})(\lambda - \alpha_{n-2})} y_{n-2} + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha_n \lambda^{n-2}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\alpha_k}{\lambda}\right)} y_1 + \frac{\alpha_n \lambda^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{\alpha_k}{\lambda}\right)} y_0$$

$$\vdots$$

olur. Böylece; $T_\lambda^{-1} = (b_{nk})$ matrisi, $(4.2.3.1)$' de tanımlanan şekilde verilir.

Teorem 4.2.4. Eğer; $\{(n+1)a_n\}$ monoton ve $0 < L = \lim_n (n+1)a_n < \infty$ ise,

$$\sigma(R_a, bv_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \le \frac{L}{2}\right\} \cup S$$

dir.

İspat: Teorem 4.2.2 ve Teorem 1.2.22' den;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \cup S \subseteq \pi_0(R_a{}^*, bv_0{}^* \cong bs) \subseteq \sigma(R_a{}^*, bv_0{}^*)$$

$$= \sigma(R_a, bv_0)$$

olur. Böylece;

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \cup S \subseteq \sigma(R_a, bv_0)$$

olarak bulunur. Şimdi; ispatı tamamlamak için,

$$\sigma(R_a, bv_0) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \cup S$$

olduğu gösterilmelidir. $\left|\lambda - \frac{L}{2}\right| > \frac{L}{2}$ $(aL < 1)$ ve $\lambda \neq \alpha_m$ $(m = 0,1,2, \dots)$ olsun. Buradan; $T_\lambda{}^{-1} = (b_{nk})$ operatörünün, Teorem 1.2.26' daki; (i) ve (ii) özelliklerini sağladığı gösterilmelidir.

$\left|\lambda - \frac{L}{2}\right| > \frac{L}{2} \Leftrightarrow aL < 1$ ve $\lambda \neq \alpha_m$ $(m = 0,1,2, \dots)$ olduğundan dolayı; $\forall\, k$ için,

$$\lim_{n\to\infty} b_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{|\lambda|^2 \prod_{j=k}^{n} \left|1 - \frac{\alpha_j}{\lambda}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{aL} \alpha_n n^{aL-1}}{(k-1)^{aL}} = 0$$

olarak bulunur. Böylece; (i) şartı sağlanmış olur. Şimdi; (ii) özelliğinin sağlandığını gösterelim. Buradan,

$$\sum_1 = \sum_{k=0}^{N} \left| \sum_{m=0}^{n} b_{nm} - \sum_{m=0}^{n-1} b_{n-1,m} \right|, \quad (0 \leq n \leq N)$$

$$\sum_{2} = \left|\sum_{m=0}^{N+1}(b_{N+1,m} - b_{N+1,N+1}) + \sum_{m=0}^{N+1} b_{N,m}\right|, (n = N+1)$$

$$\sum_{3} = \sum_{n=N+2}^{\infty}\left|\sum_{m=0}^{N}(b_{nm} - b_{n-1,m})\right|, \quad (N+2 \leq n \leq \infty)$$

olmak üzere;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{m=0}^{N}(b_{nm} - b_{n-1,m})\right| = \sum_{1} + \sum_{2} + \sum_{3}$$

olsun. Teorem 1.2.22' den; $i = 1, 2, 3$ için, $\sum_i O(1)$ olduğu gösterilebilir.

Rhaly matrisinin spektrumunun diğer özel durumları için bazı örnekler aşağıda verilmiştir:

Örnek 4.2.5. $a = \left(\frac{n+3}{n^2+1}\right)$ ise;

$$\pi_0(R_a{}^*, bs) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| < \frac{L}{2}\right\} \cup \{1,2,3\}\ , \qquad \pi_0(R_a, bv_0) = \emptyset$$

ve

$$\sigma(R_a, bv_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\} \cup \{2,3\}$$

dır.

Örnek 4.2.6. $a = \left(\sin\frac{1}{n+1}\right)$ ise;

$$\pi_0(R_a{}^*, bs) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| < \frac{L}{2}\right\} \cup \{1\}$$

ve

$$\sigma(R_a, bv_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{L}{2}\right| \leq \frac{L}{2}\right\}$$

dır.

### 4.3. $c$ ve $c_0$ Dizi Uzayları Üzerinde Kompakt Rhaly Operatörünün Spektrumu

Teorem 4.3.1. $S = \{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere; $\pi_0(M, c_0) = S$ dir.

İspat: $Mx = \lambda x$ denklemini göz önüne alırsak; bu denklemin çözümünden, $(a_0 - \lambda)x_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için, $\lambda a_n{}^{-1} x_n = (\lambda a_n{}^{-1} - 1)x_{n-1}$ olur. Eğer; $m$, $x_m \neq 0$ olan en küçük tam sayı ise, $\lambda = a_m$ ve $n \geq m + 1$ için,

$$x_n = \left(\prod_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda a_{j-1}^{-1}}{\lambda a_j^{-1} - 1}\right) x_m \qquad (4.3.1.1)$$

olarak bulunur. $(4.3.1.1)$’ den; $M$’ nin özdeğerleri kolayca bulunur.

$\ell_2 \subset c_0$ olduğu için; $\lambda = a_m$ olduğunda, $\sum |x_n|^2$ serisinin yakınsak olmasını sağlayacak bir $x$ dizisinin olup olmadığı belirlemeye çalışalım. Bu yüzden; $p_n = 1 / n a_n{}^2$ ile verilen Kummer testini uygulayalım. Buradan; $n \geq m$ için,

$$\frac{|x_n|^2}{|x_{n+1}|^2} = \frac{(\lambda - a_{n+1})^2}{\lambda^2}\frac{{a_n}^2}{{a_{n+1}}^2}$$

olur. Bu takdirde;

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_n\frac{|x_n|^2}{|x_{n+1}|^2} - p_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^2 - 2(n+1)a_{n+1}\lambda + (n+1){a_{n+1}}^2}{n(n+1){a_{n+1}}^2\lambda^2} = \infty$$

olduğundan dolayı; $x \in \ell_2$ olur. Bu yüzden; $\lambda = a_m$ olduğunda, $x \in c_0$ olur. Sonuç olarak; $\pi_0(M, c_0) = S$ olarak bulunur.

Teorem 4.3.2. $\pi_0(M^*, {c_0}^* = \ell_1) = S$ dir.

İspat: $M^*$ operatörü $M'$ nin transpozesine eşittir. $M^* x = \lambda x$ denklemini göz önüne alırsak; bu denklemin çözümünden,

$$x_n = \lambda {a_n}^{-1}(x_n - x_{n+1})$$

olur. Bu takdirde; $\lambda = 0$ ise, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 0$ olduğundan dolayı, $0 \notin \pi_0(M^*, {c_0}^*)$ olur ve böylece $\forall\, n \geq 0$ için;

$$M^* x = \lambda x \iff x_{n+1} = \left(1 - \frac{a_n}{\lambda}\right) x_n$$

olarak bulunur. Buradan; $\forall\, a_m \in S$ $M^*$ operatörünün bir özdeğeri olur ve $\lambda \in \pi_0(M^*, {c_0}^*)$ ise,

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\lambda}\right)x_0 \qquad (4.3.2.1)$$

olur. Şimdi; $\lambda$ sayısı $a_n$' ler den biri değilse, bu $\lambda$' nın özdeğer olmadığını gösterelim. $x$ dizisi $(4.3.2.1)$' deki eşitliği sağlarsa;

$$\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1 = \frac{1 - |1 - a_n \,/\, \lambda|}{|1 - a_n \,/\, \lambda|} = \frac{1 - |1 - a_n \,/\, \lambda|^2}{|1 - a_n/\lambda|(1 + |1 - a_n/\lambda|)}$$

$$= \frac{2Re(a_n/\lambda) - {a_n}^2/|\lambda|^2}{|1 - a_n/\lambda|(1 + |1 - a_n/\lambda|)}$$

olarak elde edilir. Bu takdirde; Raabe limit testinden,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} - 1\right) = 0 < 1$$

olur ve böylece $x \notin \ell_1$ olduğu görülür. Buda; $a_n$' lerin dışında bir öz değer olmadığını gösterir.

Teorem 4.3.3. $\sigma(M, c_0) = S \ \cup \ \{0\}$ dır.

İspat: $M$ kompakt bir operatör olduğu için; $0 \in \sigma(M, c_0)$ olur $[39, \text{syf}. 99]$. Buradan $0 \neq \lambda \in \sigma(M, c_0)$ ise; $\lambda \in \pi_0(M, c_0) \cap \pi_0(M^*, {c_0}^*)$ olur. Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2' den; $\sigma(M, c_0) = S \ \cup \ \{0\}$ olarak bulunur.

Teorem 4.3.4. $0 \in II_2\ \sigma(M, c_0)$ dır.

İspat: $0 \notin S = \pi_0(M, c_0)$ olduğu için; $M^{-1}$ mevcuttur. Fakat; $0 \in \sigma(M, c_0)$

olduğundan, $M^{-1}$ sürekli değildir. Bu takdirde; $M \in (2)$ olur.

Şimdi; $M \in II$ olduğunu gösterelim. Buradan; $0 \notin \pi_0(M^*, c_0{}^*)$ olduğu için, $M^*$ operatörü 1-1' dir ve böylece; Teorem 1.1.16' dan, $\overline{R(M)} = c_0$ olur. Şimdi de; $R(M) \neq c_0$ olduğunu gösterelim. Buradan; $M^{-1}$ operatörü,

$$b_{nk} = \begin{cases} a_n{}^{-1} & , \quad k = n \\ a_{n-1}{}^{-1} & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad \text{diğerleri} \end{cases} \tag{4.3.4.1}$$

şeklinde tanımlıdır $[23, \text{syf}. 279]$. $y = (y_n) = \{(-1)^n a_n\}$ olsun. $Mx = y$ denkleminden; $x = M^{-1}y$ olur ve buradan $(4.3.4.1)$' de tanımlanan $M^{-1} = (b_{nk})$ matrisini kullanırsak; $\forall\, n \geq 1$ için,

$$x_n = a_n{}^{-1} y_n - a_{n-1}{}^{-1} y_{n-1} = 2(-1)^n$$

olarak elde edilir. Bu takdirde; $x \notin c_0$ olur. Buradan; $y \in c_0$ olduğu için, $R(M) \neq c_0$ olur. Bu yüzden; $M \in II$ olur ve sonuç olarak; $0 \in II_2\ \sigma(M, c_0)$ olarak bulunur.

Teorem 4.3.5. $\lambda = a_m \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots)$ ise; $\lambda \in III_3\ \sigma(M, c_0)$ dır.

İspat: $T_\lambda = (\lambda I - M)$ olsun. Teorem 4.3.1' den; $T_\lambda$ 1-1 değil ve böylece $T_\lambda \in (3)$ olur. Teorem 4.3.2' den; $T_\lambda{}^*$ 1-1 değildir. Bu takdirde; Teorem 1.1.16' dan, $T_\lambda$ yoğun bir görüntü kümesine sahip değildir ve böylece $T_\lambda \in III$ olur. Sonuç olarak; $\lambda \in III_3\ \sigma(M, c_0)$ olarak elde edilir.

Teorem 4.3.6. $\pi_0(M, c) = S$ dir.

İspat: Teorem 4.3.1' in ispatı gibi yapılır.

Teorem 4.3.7. $\pi_0(M^*, c^* = \ell_1) = S$.

İspat: $M^* x = \lambda x$ denklemini göz önüne alırsak; bu denklemin çözümünden, $\lambda x_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için;

$$x_n = \lambda a_n^{-1}(x_n - x_{n+1})$$

olarak bulunur. Bu takdirde; $\lambda = 0$; $x_0 \neq 0$ için, $x = x_0 e_0$ öz vektörüne karşılık gelen bir öz değerdir. Eğer; $\lambda \neq 0$ ise, $n > 1$ için

$$x_n = \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\lambda}\right) x_1$$

olarak bulunur. Buradan da; Teorem 4.3.2' nin ispatında küçük değişiklikler yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.8. $\sigma(M, c) = S \cup \{0\}$ dır.

İspat: Teorem 4.3.3' ün ispatı gibi yapılır.

Teorem 4.3.9. $\sigma(M, \ell_\infty) = S \cup \{0\}$ dır.

İspat: $A$ matris operatörü $c$ dizi uzayı üzerinde sınırlı ise; $\sigma(A, \ell_\infty) = \sigma(A, c)$olur [2]. Bu da; Teorem 4.3.8' nin bir sonucu olarak ortaya çıkar.

Teorem 4.3.10. $0 \in III_2\, \sigma(M, c)$ dir.

İspat: Teorem 4.3.6' dan; $M^{-1}$ operatörünün mevcut olduğu görülür. Buradan; $\forall\, y \in R(M^*)$ kümesinin ilk elemanı sıfırdır ve bu da $M^*$ operatörünün örten olmadığını gösterir. Bu takdirde; Teorem 1.1.17' den, $M^{-1}$ operatörünün sınırlı olmadığı elde edilir.

Diğer taraftan; $0$ sayısı $M^*$ operatörünün bir özdeğeridir ve bu yüzden; $M^*$ operatörü 1-1 değildir. Bu takdirde; Teorem 1.1.16' dan, $M$ yoğun bir görüntü kümesine sahip değildir. Sonuç olarak; $M \in III_2$ olur.

Teorem 4.3.11. $\lambda = a_m \ \ (m = 0, 1, 2, \dots)$ ise; $\lambda \in III_3\ \sigma(M, c)$ olur.

İspat: Teorem 4.3.5' in ispatı gibi yapılır.

Teorem 4.3.12. Kabul edelim ki; $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq a_m \,/\, (a_m - 1)$ olsun. Bu takdirde; $A = \lambda I + (1-\lambda)M$' nin yakınsaklık bölgesi $c$ dizi uzayıdır.

İspat: $\lambda = 1$ ise; ispatlanacak bir şey yoktur. Kabul edelim ki; $\lambda \neq 1$ olsun. O zaman, Teorem 4.3.7' den ve $\lambda$' nın seçiminden; $\left(\frac{\lambda}{\lambda-1} I - M\right)$ operatörünün $B(c)$ üzerinde tersi mevcuttur. Bu da;

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1} I - M\right)^{-1} \in B(c)$$

demektir. $A$ operatörü üçgensel ve $B(c)$' nin üzerinde olduğundan dolayı; $A^{-1}$ konservatiftir. Bu da; $c = c_A$ olduğunu gösterir [45].

## BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuç 5.1. $\Delta: c_0 \to c_0$ bir operatör ise,

(i) $\sigma(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(ii) $\sigma_p(\Delta, c_0) = \emptyset$,

(iii) $\sigma_p(\Delta^*, c_0{}^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$,

(iv) $\sigma_r(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$,

(v) $\sigma_c(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\}$

dir.

Sonuç 5.2. $\Delta: c \to c$ bir operatör ise,

(i) $\sigma(\Delta, c) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(ii) $\sigma_p(\Delta, c) = \emptyset$,

(iii) $\sigma_p(\Delta^*, c^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\} \cup \{0\}$,

(iv) $\sigma_r(\Delta, c) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\} \cup \{0\}$,

(v) $\sigma_c(\Delta, c) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\} \setminus \{0\}$

dır.

Sonuç 5.3. $\Delta: \ell_1 \to \ell_1$ bir operatör ise;

(i) $\sigma(\Delta,\ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(ii) $\sigma_p(\Delta,\ell_1) = \emptyset$,

(iii) $\sigma_p(\Delta^*,{\ell_1}^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(iv) $\sigma_r(\Delta,\ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(v) $\sigma_c(\Delta,\ell_1) = \emptyset$

dir.

Sonuç 5.4. $\Delta: bv \to bv$ bir operatör ise,

(i) $\sigma(\Delta,bv) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(ii) $\sigma_p(\Delta,bv) = \emptyset$,

(iii) $\sigma_p(\Delta^*,bv^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(iv) $\sigma_r(\Delta,bv) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(v) $\sigma_c(\Delta,bv) = \emptyset$

dir.

Sonuç 5.5. $\Delta: \ell_p \to \ell_p$ bir operatör ise,

(i) $\sigma(\Delta,\ell_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(ii) $\sigma_p(\Delta,\ell_p) = \emptyset$,

(iii) $\sigma_p(\Delta^*,{\ell_p}^*) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}, & (1 < p < \infty) \\ \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}, & (p = 1) \end{cases}$’

(iv) $\sigma_r(\Delta,\ell_p) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}, & (1 < p < \infty) \\ \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}, & (p = 1) \end{cases}$’

(v) $\sigma_c(\Delta,\ell_p) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\}, & (1 < p < \infty) \\ \emptyset \quad , & (p = 1) \end{cases}$

dir.

Sonuç 5.6. $\Delta: bv_p \to bv_p$ bir operatör ise,

(i) $\sigma(\Delta, bv_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(ii) $\sigma_p(\Delta, bv_p) = \emptyset$,

(iii) $\sigma_p(\Delta^*, bv_p^{\ *}) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$,

(iv) $\sigma_r(\Delta, bv_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| < 1\}$,

(v) $\sigma_c(\Delta, bv_p) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - 1| = 1\}$

dir.

Sonuç 5.7. $\Delta_v: c_0 \to c_0$ bir operatör ise,

(i) $\sigma(\Delta_v, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| \leq 1\right\}$,

(ii) $\sigma_p(\Delta_v, c_0) = \begin{cases} \emptyset \quad , & (v_k) \text{ sabit bir dizi ise} \\ \{v_0, v_1, v_2, \dots\}, & (v_k) \text{ kesin azalan bir dizi ise} \end{cases}$,

(iii) $\sigma_p(\Delta_v^{\ *}, c_0^{\ *}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| < 1\right\}$,

(iv) $\sigma_r(\Delta_v, c_0) = \begin{cases} \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| < 1\right\} & , (v_k) \text{ sabit dizi} \\ \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| < 1\right\} \setminus \{v_0, v_1, v_2, \dots\}, & (v_k) \text{ kesin azalan dizi} \end{cases}$,

(v) $\sigma_c(\Delta_v, c_0) = \begin{cases} \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1\right\} & , (v_k) \text{ sabit bir dizi} \\ \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|1 - \frac{\lambda}{L}\right| = 1\right\} \setminus \{v_0\}, & (v_k) \text{ kesin azalan bir dizi} \end{cases}$

dir.

Sonuç 5.8. $C_1 : c_0 \to c_0$ bir operatör ise;

(i) $\sigma_r(C_1, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$,

(ii) $\sigma_p(C_1, c_0) = \{\emptyset\}$,

(iii) $\sigma_r(C_1, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}$,

(iv) $\sigma_c(C_1, c_0) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},\ \ \lambda \neq 1\right\}$

dir.

Sonuç 5.9. $C_1 : c \to c$ bir operatör ise;

(i) $\sigma(C_1, c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$,

(ii) $\sigma_p(C_1, c) = \{1\}$,

(iii) $\sigma_r(C_1, c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$,

(iv) $\sigma_c(C_1, c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$

dir.

Sonuç 5.10. $C_1 : bv_p \to bv_p$ bir operatör ise;

(i) $\sigma(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$,

(ii) $\sigma_p(C_1, bv_p) = \{1\}$,

(iii) $\sigma_r(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$,

(iv) $\sigma_c(C_1, bv_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \lambda \neq 1 \right\}$

dir.

Sonuç 5.11. $C_r: c \to c$ bir operatör ise;

(i) $\sigma(C_r, c) = \left\{\frac{1}{k^r}\ ,\ \ k = 1,2,\dots\right\} \cup \{0\}$,

(ii) $\sigma_p(C_r, c) = \left\{\frac{1}{k^r}\ ,\ \ k = 1,2,\dots\right\}$,

(iii) $\sigma_c(C_r, c) = \{0\}$,

(iv) $\sigma_r(C_r, c) = \emptyset$

dir.

Yukarıda verilen bazı dizi uzayların spektrumlarının yanı sıra; Tanım 1.2.17' de verilen $\Delta_v$ operatörünün $\ell_p$ dizi uzayı üzerindeki spektrumu araştırılabilir.

# KAYNAKLAR


[1] AKHMEDOV, A.M., The spectrum of the r-cesaro operator on the sequence space $c$, J. News of Baku University.

[2] AKHMEDOV, A.M., MAMMADOV, I.A., On spectrum of r-cesaro operators in the space $\ell_s, (1 \leq s < \infty)$, J. News of Baku University, 3:41-46, 2007.

[3] AKHMEDOV, A.M., BAŞAR, F., The fine spectra of the difference operator $\Delta$ over the sequence space $bv_p$, $(1 \leq p < \infty)$, Acta. Math. Sin. Eng. Ser., 23(10):1757-1768, 2007.

[4] AKHMEDOV, A.M., BAŞAR, F., The fine spectra of the difference operator $\Delta$ over the sequence space $\ell_p$, $(1 \leq p < \infty)$, Demonstratio Math., 39(3):585-595, 2006.

[5] AKHMEDOV, A.M., BAŞAR, F., On the fine spectrum of the Cesaro operator in $c_0$, Math. J., Ibaraki Univ., 36:25-32, 2004.

[6] AKHMEDOV, A.M., BAŞAR, F., On the spectrum of the Cesaro operator, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 19:3-8, 2003.

[7] AKHMEDOV, A.M., BAŞAR, F., The fine spectra of the Cesaro operator $C_1$ over the sequence space $bv_p$, $(1 \leq p < \infty)$, Math. J. Okayama University, 50:135-147, 2008.

[8] ALTAY, B., BAŞAR, F., The fine spectrum and the matrix domain of the difference operator $\Delta$ on the sequence space $\ell_p$, $(0 < p < 1)$, Commun Math. Anal., 2(2):1-11, 2007.

[9] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces $c$ and $c_0$, Internat. J. Math. & Math. Sci., 18:3005-3013, 2005.

[10] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the space of sequences of $p$-bounded variation and related matrix mappings, Ukrainian Math. J., 55(1):136-147, 2003.

[11] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the fine spectrum of the difference operator $\Delta$ on space $c$ and $c_0$, Information Sci., 168:217-224, 2004.

[12] ALTAY, B., BAŞAR, F., Some Euler sequence spaces of non-absolute type, Ukrainian Math. J., 57(1):1-17, 2005.

[13] BAŞAR, F., Infinite matrices and Cesàro Sequence spaces of non-absolute type, Math. J. Ibaraki Univ., 31:1-12, 1999.

[14] BOSS, J., PETER, C., Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, 2000.

[15] CARTLIDGE, J.P., Weighted mean matrices as operators on $\ell_p$, Ph.D. Dissertation, Indiana Universty, 1978.

[16] COŞKUN, C., The spectra and fine spectra for p-Cesaro operators, Turkish J. Math., 21:207-212, 1997.

[17] GOLDBERG, S., Unbounded Linear Operators, Dover Publications, Inc., New York, 1985.

[18] GONZALES, M., The fine spectrum of the Cesaro operator in $\ell_p, (0 < p < 1)$, Arch. Math. 44:355-358, 1985.

[19] KAYADUMAN, K., FURKAN, H., The fine spectra of the difference operator $\Delta$ on space $bv$ and $\ell_1$, Int. Math. Forum, 24:1153-1160, 2006.

[20] KNOPP, K., Infinite Sequences and Series, Dover publications, Inc., New York, 1956.

[21] KNOPP, K., Theory and Application of Infinite series, Dover publications, Inc., New York, 1990.

[22] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.

[23] LEİBOWITZ, G., Rhaly Matrices, J. Math. Analysis and Applications, 128:272-286, 1987.

[24] LEİBOWITZ, G., The Cesaro operators and their generalizations: Examples in infinite dimensional linear analysis, Amer. Math. Monthly, 80:654-661, 1973.

[25] MADDOX, I.J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[26] MALKOWSKY, E., Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces, Mat. Vesnik, 49:187-196, 1997.

[27] MALKOWSKY, E., FK spaces, matrix transformations and the Hausdorff measure of noncompactness, Seminar,Van, Turkey, 2001.

[28] MUSAYEV, B., ALP, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

[29] NANDA, S., Matrix Transformations and Sequence Spaces, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, 1983.

[30] OKUTOYI, J.T., On the spectrum of $C_1$ as an operator on $bv_0$, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 48:79-86, 1990.

[31] OKUTOYI, J.T., On the spectrum of $C_1$ as an operator on $bv$, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. $A_1$, 41:197-207, 1992.

[32] OLMSTED, J.M.H., Advanced Calculus, Appleton-Century-Crofts, New York, 1956.

[33] READE, J.B., On the spectrum of the Cesaro operator, Bull. Lond. Math. Soc. 17:263-267, 1985.

[34] RHOADES, B.E., The fine spectra for weight mean operators, Pacific J. Math. , 104(1):219-230, 1983.

[35] RHOADES, B.E., The spectra of weight mean operators on $bv_0$, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 52:242-250, 1992.

[36] RHOADES, B.E., The spectrum of weight mean operators, Canad. Math. Bull., 30(4):446-449, 1987.

[37] RHALY, JR. H. C., Terrace Matrices, Bull. Lond. Math. Soc., 21:399-406, 1989.

[38] RHALY, JR. H. C., Houston J. Math., 15:137-146, 1989.

[39] RUDIN, W., Functional Analysis, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1973.

[40] POLAT, H., BAŞAR, F., Some Euler spaces of difference sequences of order $m$, Acta Math. Sci., 27B(2):254-266, 2007.

[41] SRIVASTAVA, P.D., KUMAR, S., On the fine spectrum of the generalized difference operator $\Delta_v$ over the sequence space $c_0$, Com. Math. Analysis,

6(1):8-21, 2009.

[42] STIEGLITZ, M., TIETZ, H., Matrixtransformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersict, Math. Z., 154:1-16, 1977.

[43] ŞUHUBİ, E.S., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.

[44] WENGER, R.B., The fine spectra of Hölder summability operators, Indian J. Pure Appl. Math., 6:695-712, 1965.

[45] WILANSKY, A., Summability through Functional Analysis, North-Hoolland Mathematics Studies, vol. 85, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

[46] WILANSKY, A., Topological divsors of zero and Tauberian Theorems, Trans. Amer. Math. Soc., 113:240-251, 1964.

[47] YILDIRIM, M., On the spectrum of the Rhaly operators on $bv_0$, Commun. Korean Math. Soc., 18(4):669-676, 2003.

[48] YILDIRIM, M., On the spectrum and fine spectrum of the compact Rhally operators, Indian J. Pure Appl. Math., 27(8):779-784, 1996.

[49] YILDIRIM, M., The fine spectrum of the Rhaly operators on $c_0$, Turk J. Math., 26:273-282, 2002.

[50] YILDIRIM, M., On the spectrum of the Rhaly operators on $c_0$ and $c$, Indian J. Pure Appl. Math., 29(12):1301-1309, 1998.

# ÖZGEÇMİŞ

Ramazan Kama, 02.06.1984 de Bingöl ilinin Solhan ilçesinde doğdu. İlk ve orta okul eğitimini Solhan' da ve lise eğitimini İstanbul' da tamamladı. 2000-2001 eğitim yılında Asım Ülker Lisesinden mezun oldu. 2003-2004 eğitim yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki Lisans eğitimini 2006-2007 eğitim yılında bitirdi. 2007 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı.