

**T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

## **ASILI SARKACIN KAYMA KIPLI KONTROLÜ**

### **YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Elektrik-Elektronik Müh. Hakan KIZMAZ**

**Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH.**

**Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRONİK**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Saadettin AKSOY**

**Haziran 2009**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ASILI SARKACIN KAYMA KIPLI KONTROLÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Elektrik-Elektronik Müh. Hakan KIZMAZ**

**Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH.**

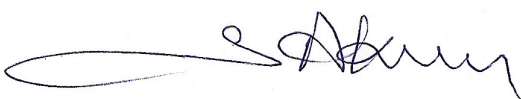
**Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRONİK**

**Bu tez 09 / 06 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.**

**Doç. Dr. Saadettin AKSOY**  
**Jüri Başkanı**

**Y. Doç. Dr. Mehmet BAYRAK**  
**Üye**

**Y. Doç. Dr. Ali Fuat BOZ**  
**Üye**



## **TEŞEKKÜR**

Öncelikle öğrenimim boyunca ve tez konumun belirlenmesinde ve yapım aşamasında madden ve manen yardımcı olan, yol gösteren, sıkıntılarımın kolaylıkla üstesinden gelmemi sağlayan danışman hocam sayın Doç. Dr. Saadettin Aksoy'a, tezim için gerekli olan deney düzeneğini gerçekleştirmemde bana yol gösteren Arş. Gör. Ahmet Küçüker'e, gerekli malzeme temininde yardımlarını esirgemeyen iş arkadaşlarıma ve her türlü maddi manevi destekleriyle yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
TABLolar LİSTESİ.....	x
ÖZET.....	xi
SUMMARY.....	xii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
1.1. Asılı Sarkacın Tarihçesi.....	1
1.2. Değişken Yapılı Sistemler.....	3
1.3. Çalışmanın İçeriği.....	4
BÖLÜM 2.	
ASILI SARKAÇ SİSTEMİ.....	6
2.1. Giriş.....	6
2.2. Sarkaç Sisteminin Kullanım Alanları.....	6
2.3. Asılı Sarkaç Kontrol Düzeneği.....	7
2.4. Asılı Sarkacın Matematiksel Modeli.....	8
2.5. Sarkaç Sisteminin Matematiksel Modeli.....	12
BÖLÜM 3.	
KONTROL YÖNTEMLERİ.....	18
3.1. Giriş.....	18
3.2. Açık Çevrim Kontrol.....	18

3.3. Kapalı Çevrim Kontrol.....	19
3.4. PID Kontrol.....	19
3.5. Kayma Kipli Kontrol.....	22
3.5.1. Faz uzayı.....	24
3.5.2. Değişken yapıli kontrol kavramı.....	29
3.5.3. Kayma kipli kontrole ilişkin temel kavramlar.....	36
3.5.3.1. Anahtarlama yüzeyi.....	36
3.5.3.2. Kayma yüzeyi ve kayma hareketi.....	36
3.5.3.3. Erişim kipi ve erişim zamanı.....	37
3.5.4. Kayma yüzeyi tasarımı.....	37
3.5.5. Kayma yüzeyine erişim koşulları.....	39
3.5.5.1. Doğrudan anahtarlama fonksiyonu yaklaşımı.....	40
3.5.5.2. Erişim kuralı yaklaşımı.....	40
3.5.5.3. Lyapunov erişim kuralı.....	41
3.5.6. Kontrol kuralı tasarımı.....	46
3.5.6.1. Lineer kontrol kuralı.....	46
3.5.6.2. Non-lineer kontrol kuralı.....	47
3.5.6.3. Lyapunov eşdeğer kontrol kuralı.....	48
3.5.7. Çatırtı indirgeme.....	51
<b>BÖLÜM 4.</b>	
<b>DENEY DÜZENEGİ.....</b>	<b>52</b>
4.1. Giriş.....	52
4.2. Sistemin Çalışması.....	53
<b>BÖLÜM 5.</b>	
<b>MODELLEME.....</b>	<b>54</b>
5.1. Giriş.....	54
5.2. Asılı Sarkacın Lineer Modeli.....	54
5.3. Asılı Sarkaç Sisteminin Parametrik Modelinin Elde Edilmesi.....	57
5.4. Asılı Sarkacın Kayma Kipli Kontrolü.....	60

BÖLÜM 6.	
DENEYSEL VE BENZETİM SONUÇLARI.....	66
BÖLÜM 7.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	70
KAYNAKLAR.....	72
EKLER.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	86

## SİMGELER LİSTESİ

$a$	: İvme
$\alpha$	: Açısal ivme
$c$	: Viskoz sönümleme katsayısı
$d$	: Askı noktasının ağırlık merkezine uzaklığı
$e$	: Hata işareti
$F$	: Kuvvet
$g$	: Yerçekimi sabiti
$G$	: Sistem transfer işlevi
$h$	: Yükseklik
$j$	: Atalet momenti
$K_d$	: Türevsel kontrol katsayısı
$K_i$	: İntegral kontrol katsayısı
$K_p$	: Oransal kontrol katsayısı
$L$	: Sarkaç çubuk uzunluğu
$m$	: Kütle
$\mu_p$	: Yüzdesele aşım
$P$	: Tepe değeri
$s$	: Kayma yüzeyi fonksiyonu
$T_0$	: Salınım periyodu
$\tau$	: Tork
$u$	: Sistem giriş işareti
$v$	: Hız
$V$	: Gerilim
$\omega$	: Açısal hız
$\omega_d$	: Sönüm frekansı
$\omega_n$	: Doğal frekans

$y$  : Sistem ıkış işareti  
 $y_m$  : Model ıkış işareti  
 $\theta$  : Mevcut ağı  
 $\zeta$  : Sönüm oranı



## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Robins'in balistik sarkacı.....	2
Şekil 1.2. Foucault sarkacı.....	3
Şekil 2.1. Asılı sarkaç sistemi.....	7
Şekil 2.2. Asılı sarkaç sistemine etki eden kuvvetler.....	8
Şekil 2.3. Sarkaçta yükseklikteki değişim.....	10
Şekil 2.4. Sarkaç sistemi.....	13
Şekil 2.5. Sarkaç sisteminin blok diyagramı.....	16
Şekil 3.1. Açık çevrim kontrol.....	19
Şekil 3.2. Kapalı çevrim kontrol.....	19
Şekil 3.3. PID kontrollü sistemin blok şeması.....	20
Şekil 3.4. Kapalı çevrimli bir kontrol sisteminin birim basamak cevabı.....	21
Şekil 3.5. Kapalı çevrimli bir kontrol sisteminin birim basamak girişi cevap eğrileri.....	22
Şekil 3.6. Asılı sarkaç sistemi.....	25
Şekil 3.7. Asılı sarkaç sisteminin durumlarına ilişkin grafikler.....	25
Şekil 3.8. Faz uzayında farklı elips yörüngelerin elde edilmesi.....	27
Şekil 3.9. Osilasyon yapan iki sistemden oluşan kararlı bir sistemin faz yörüngesi.....	27
Şekil 3.10. İkinci dereceden lineer sistemlerin farklı durum yörüngeleri.....	29
Şekil 3.11. Lineer durum geri beslemeli kontrol yapısı.....	30
Şekil 3.12. Değişken yapıli durum geri besleme yaklaşımı.....	30
Şekil 3.13. İkinci dereceden kararsız sistemin faz uzayı.....	31
Şekil 3.14. $K > 0$ durumunda sistemin faz yörüngesi.....	32
Şekil 3.15. $K < 0$ durumunda sistemin faz yörüngesi.....	32
Şekil 3.16. Değişken yapıli sistemin faz yörüngesi.....	33
Şekil 3.17. $m > \sqrt{K}$ durumunda sistemin durum yörüngesi.....	34

Şekil 3.18. $m < \sqrt{K}$ durumunda sistemin durum yörüngesi.....	34
Şekil 3.19. Kayma kipinde çatırtı olgusu.....	35
Şekil 3.20. Lyapunov fonksiyonu.....	42
Şekil 4.1. Deney düzeneği.....	52
Şekil 4.2. Deney düzeneğine ilişkin işlevsel blok gösterimi.....	53
Şekil 5.1. Asılı sarkaç sistemine ilişkin statik karakteristik eğrisi (deneysel).....	55
Şekil 5.2. Deney düzeneğine ilişkin çıkış eğrisinin zamana göre değişimi...	57
Şekil 5.3. Sarkaç sistemine ilişkin radyan cinsinden çıkışlı yaklaşık transfer işlevi.....	59
Şekil 5.4. Sarkaç sistemine ilişkin derece cinsinden çıkışlı yaklaşık transfer işlevi.....	60
Şekil 5.5. Lyapunov karar kuralına dayalı sarkaç kontrol sisteminin blok gösterimi.....	61
Şekil 5.6. Şekil 5.5'deki sisteme ilişkin $\rho$ ve $m$ değerlerine göre benzetim eğrileri.....	62
Şekil 5.7. Kayma kipli kontrol blok diyagramı.....	63
Şekil 5.8. Sürekli duruma ulaşma zamanının, $m$ ve $\rho$ değerine göre değişimi.....	65
Şekil 5.9. Tepe değerlerinin, $m$ ve $\rho$ değerine göre değişimi.....	65
Şekil 5.10. Sürekli hal hatasının, $m$ ve $\rho$ değerine göre değişimi.....	65
Şekil 6.1. $\rho = 3$ ve $m = 2$ için benzetim ve deneysel sonuçlar.....	66
Şekil 6.2. $\rho = 5$ ve $m = 2$ için benzetim ve deneysel sonuçlar.....	67
Şekil 6.3. $\rho = 5$ ve $m = 5$ için benzetim ve deneysel sonuçlar.....	68
Şekil 6.4. $\rho = 5$ ve $m = 8$ için benzetim ve deneysel sonuçlar.....	69
Şekil A.1. Sarkaç sisteminin simulink benzetimi.....	75
Şekil A.2. İntegratöre başlangıç değer ataması.....	76
Şekil A.3. Lyapunov eşdeğer kontrol kurallı kayma kipli kontrol sistemi.....	77
Şekil A.4. Kayma kipli kontrol sistemi.....	78
Şekil B.1. Çalışmada kullanılan VI'nın arayüzü.....	81
Şekil B.2. Çalışmada kullanılan VI'nın blok şeması.....	82
Şekil B.3. Deney düzeneği.....	83

## TABLolar LİSTESİ

Tablo 5.1. Farklı $m$ ve $\rho$ değerlerine göre sürekli duruma ulaşma süreleri...	64
Tablo 5.2. Farklı $m$ ve $\rho$ değerlerine göre yüzdesel aşım değerleri.....	64
Tablo 5.3. Farklı $m$ ve $\rho$ değerlerine göre sürekli hal hatası değerleri.....	64

## ÖZET

Anahtar kelimeler: Asılı Sarkaç Sistemi, Kayma Kipli Kontrol, Konum Kontrolü

Asılı sarkaç, yıllardır farklı kontrol metodlarının performansının incelenmesinde kullanılmaktadır. Sistemlerdeki parametre değişimleri kararsızlığa sebep olabilmektedir. Söz konusu parametre değişimlerine karşı uyarılama içermeyen kontrol teknikleri kullanıldığında sistem kararlılığı garanti edilemez. Bu sebeple sistem parametrelerinin değişimine karşı uyarılmalı kontrol teknikleri kullanılmalıdır.

Bu çalışmada asılı bir sarkaç sisteminin kayma kipli kontrolü amaçlanmıştır. Öncelikle asılı sarkaç sistemine ilişkin uygun bir deney düzeneği hazırlanarak; sistemin matematiksel modeli elde edilmiştir. Ardından kayma kipli kontrollü asılı sarkaç sisteminin değişik çalışma koşulları ve kontrol parametreleri için Matlab/Simulink ortamında simulasyon sonuçları ve Labview yazılımına dayalı gerçek zamanda deneysel sonuçları elde edilmiştir. Elde edilen deneysel sonuçlarının, simulasyon sonuçları ile oldukça uyumlu olduğu ve amaçlanan kontrol performansının sağlandığı gözlemlenmiştir.

# **SLIDING MODE CONTROL OF SUSPENDED PENDULUM**

## **SUMMARY**

Keywords: Suspended Pendulum System, Sliding Mode Control, Position Control

Suspended pendulum has been using in examining of performance of different control methods for years. Changes of parameters in systems could be cause system instability. It is not ensured to perform the system stability by using control technics without adaptation against of changing of system parameters. That's why adaptive control technics must be used against of unstable system parameters.

The sliding mode control of suspended pendulum has been purposed in this study. Firstly, the mathematical model of suspended pendulum system has been obtained by using prepared an experimental set-up which is related suspended pendulum. After that, simulation results in Matlab/Simulink and Labview soft based real time results has been obtained in different work conditions. Simulation results and experimental results has been obtained nearly the same and it has been observed that the control performance which was purposed.

## **BÖLÜM 1. GİRİŞ**

Asılı sarkaç sistemi; içinde harmonik hareket, çarpışma kanunları, kütle korunumu yerçekimi ivmesi, açısal hız, açısal ivme, peryot, atalet momenti, non-lineerite gibi fiziğin bir çok konusunu içerdiğinden, fizik hesapları ve uygulamalarında önemli bir yere sahiptir. Protez bacak modellemesi, yerçekimi ivmesinin etkisi, gemilerin ve uçakların dengesinin sağlanması gibi uygulamalarda etkin bir rol üstlenir. Bir çok fizik uygulamalarında yer alan asılı sarkaç sistemi kontrol uygulamalarında örnek bir model olarak ele alınabilir [1].

### **1.1. Asılı Sarkacın Tarihçesi**

Çin kaynaklarındaki kayıtlara göre sarkacın ilk kullanımı milattan önce 4. yy'da Han hanedanlığı (M.Ö. 202 – M.S. 220) zamanında; Çinli bir bilimci olan Zhang Heng (78-139) tarafından bir sismometre aygıtında kullanılmıştır. Heng'in sismometre aygıtındaki sarkacın işlevi, titreşimleri algılayarak salınım yapması idi [2].

Mısırlı bilgin İbn-i Yunus'un 10. yy'da sarkaç üzerinde çalışmalar yaptığı bilinmektedir. Nitekim; geçmişe dayalı bilgilerden İbn-i Yunus'un sarkacı zaman ölçümü için kullandığı sonucuna varılmaktadır [1].

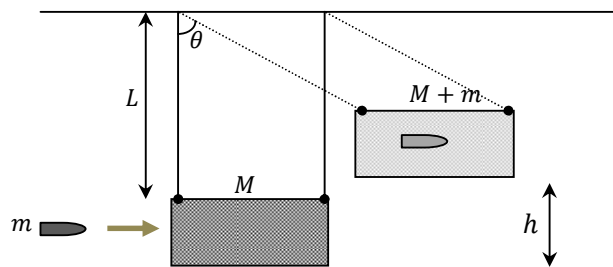
Galileo (1564 - 1642), çeşitli sarkaçlar üzerinde bir dizi gözlem ve deneyler gerçekleştirmiş ve sarkacı, zamanı ölçmek için kullanmıştır. Pisa katedralinde papazi dinlerken kürsünün üstünde sallanan lambanın salınım periyodunun değişmediğini farkederek Galileo, sarkacın salınım periyodunun ağırlığına ya da genişliğine değil uzunluğuna bağlı olduğunu keşfetmiştir. Galileo ölümüne yakın yıllarda sarkaçla çalışan bir saat tasarlamış ancak bunu gerçekleştirememiştir. Sarkacın metronom cihazında kullanılması, müzisyenlere de yardımcı olmuştur [3].

İlk sarkaçlı saat, Galileo'nun ölümünden 14 yıl sonra 1656 yılında Alman astronom Christian Huygens tarafından gerçekleştirilmiştir. Söz konusu sarkaç siciminin uzunluğunun değiştirilmesiyle zamanı ölçmedeki hassasiyet rahatlıkla sağlanabiliyordu [3,4].

Jean Richer, 1671 yılında, Fransız Guyana bölgesinde bulunan Cayenne'de, asılı sarkacın periyodunun Paris'teki sarkacın periyoduna göre daha yavaş olduğunu ispatlamıştır. Buradan da Cayenne'deki yerçekimi kuvvetinin daha büyük olduğu sonucuna varılmıştır. Huygens ise bunun sebebinin; dünyanın dönmesiyle oluşan merkezciil gücün, sarkacın bulunduğu enleme bağlı olarak sarkacın ağırlığının değişmesi olduğu kanaatine varmıştır [2].

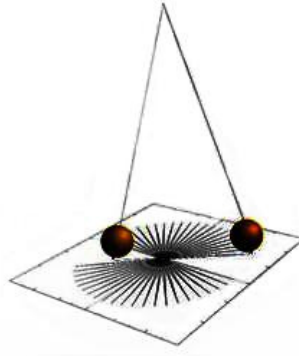
İngiliz bilimci Robert Hooke, iki yönde hareket eden konik sarkacı tasarlamıştır. Bu sarkacın dairesel hareketlerinin analizini, gezegenlerin yörüngesel hareketlerini analiz etmede kullanmıştır [2,4].

1742'de İngiliz Benjamin Robins tarafından çelik çubuklarla bir eksene asılmış tahta bloktan oluşan, mermilerin hızını ölçmede kullanılan "balistik sarkaç" yapılmıştır. Asılı tahta bloğa isabet eden mermi, tahta bloğa çarparak durur ve sarkacı hareket ettirir. Böylece sarkaç ile sarkacın düşey ekseninde bir miktar açı meydana gelir. Aynı zamanda sarkaç bir miktar yükselir. Söz konusu çarpışmanın esnek olmayan bir çarpışma olduğu varsayımıyla elde edilen bu veriler ile merminin hızı momentum yasalarıyla hesaplanabilir [4,5].



Şekil 1.1. Robins'in balistik sarkacı

Leon Foucault (1819-1868), dünyanın dönme hareketini ortaya koymuş olan deneylerin öncüsü olarak bilinen bir fizikçidir. Foucault, dünyanın dönmesi yüzünden, yatay düzlemde hareket eden cisimlerin yana sapma eğilimi gösterdiğini 1851 yılında gerçekleştirdiği bir deney ile ispatlamıştır. Foucault, Pantheon'da kubbenin tepesine, 67 metrelik çelik bir tel ve 28 kilogramlık kütleye sahip demir bir topdan oluşan sarkaç asmış ve sarkaçtaki topun altına sivri bir uç takarak, yere serili ince kum tabakasında sarkacın salınım düzlemindeki değişimini gözlemcilerin izleyebilmesini sağlamıştır. Bu deney sonucunda gözlemciler sarkacın salınım düzleminin yavaşça değiştiğini gözlemlemişlerdir. Bu deneyi izleyenler, tarihte ilk kez dünyanın kendi eksenini etrafında döndüğüne tanık olmuşlardır [6].



Şekil 1.2. Foucault sarkacı

## 1.2. Değişken Yapılı Sistemler

Değişken yapıli sistemler, literatürde içinde Emel'yanov (1964, 1967), Utkin (1971, 1974, 1977) ve Itkis (1976) gibi Sovyet yazarlarının bulunduğu birçok kişi tarafından tanımlanmıştır [7].

Değişken yapıli sistemler uzun süredir biliniyor olmasına rağmen kayma kipli kontrol 20. yy'ın ikinci yarısında Rusya'da ortaya çıkmış ve Utkin'in [8] 1977 yılındaki makalesinden sonra hızla yaygınlaşmaya başlamıştır [9]. Bu yeni kontrol yöntemi, robot kontrolü, elektrik motorlarının kontrolü, pnömatik ve hidrolik hareket sistemlerinin kontrolü ve elektronik sistemlerin kontrolü gibi bir çok alanda



uygulama alanı bulmuştur. Günümüzde teori bir çok sisteme uygulanmakta ve etkili sonuçlar alınmaktadır [10].

Sistem kararlılığının sağlanmasında etkin bir yapıya sahip olan kayma kipli kontrol, doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerde gürbüz yapısıyla bilinir. Kayma kipli kontrolörlü bir sistem kayma modunda iken dış bozucu büyüklüklere karşı duyarsızdır. Bu durum kayma kipli kontrole adaptasyon özelliği kazandırır ve kayma kipli kontrolün kullanılabilirliğini kaçınılmaz kılar.

### **1.3. Çalışmanın İçeriği**

Bu çalışmada kayma kipli kontrol yöntemi kullanılarak asılı sarkaç sisteminin, parametre değişikliklerine ve bozucu büyüklüklere duyarlı olmaksızın etkin bir kontrolünün sağlanması amaçlanmıştır.

İkinci bölümde asılı sarkaç sistemi ve sistemin hareketi hakkında bilgiler verilmektedir. Sisteme ilişkin formüller ve parametrik olarak sistemin matematiksel modelinin oluşturulması da bu bölümde yer almaktadır.

Üçüncü bölümde kapalı çevrim kontrol, PID ve kayma kipli kontrol gibi kontrol yöntemleri hakkında bilgiler verilmektedir.

Dördüncü bölümde, uygulamada kullanılan deney düzeneği ve deney düzeneğinde kullanılan ekipmanlar tanıtılmış ve deney düzeneğinin işleyişi hakkında bilgiler verilmiştir.

Deney düzeneğinden yararlanarak sistemin ikinci dereceden matematiksel modelinin sayısal olarak oluşturulması ve oluşturulan modelin kayma kipli kontrol sisteminin blok diyagramında yerleştirilmesi beşinci bölümde yer almaktadır.

Altıncı bölüm, kayma kipli kontrollü modeli çıkarılan sistemin MATLAB/Simulink ortamında gerçekleştirilen simülasyon sonuçları ile deney düzeneğinden Labview

yazılımı aracılığı ile elde edilen sonuçların grafiksel olarak karşılaştırılması verilmiştir.

Yedinci bölümde sonuçlara ilişkin yorumlar ve kontrole ilgili öneriler, Ekler bölümünde ise Matlab/Simulink ve Labview yazılımları hakkında bilgiler, benzetim modelleri ve deney arayüzleri verilmiştir.

## **BÖLÜM 2. ASILI SARKAÇ SİSTEMİ**

### **2.1. Giriş**

Bu bölümde asılı sarkacın kullanım alanları ve sarkaç sisteminde yer alan matematiksel ifadeler hakkında bilgiler verilmiştir.

### **2.2. Sarkaç Sisteminin Kullanım Alanları**

Sarkacın ilk kullanım alanlarından birisi saatlerdir. Sarkaç bulunan saatlerde, sarkacın bir periyodu 2 saniyelik süreye karşılık gelmektedir. Sarkacın 60 saniye süreli salınım hareketinde, sarkacın merkezinin bağlı olduğu dişlilerden yelkovan, 6 derecelik bir açı ile hareket etmekte ve yelkovanın da 360 derecelik hareketine karşılık akrep de 30 derecelik açı ile hareket etmektedir [2,3].

Sarkaç sistemi yerçekimi ivmesinin hesaplanmasında kullanılmaktadır. Sarkacın matematiksel modelinde yerçekimi ivmesi de yer aldığından dünyanın farklı bölgelerinde yerçekimi ivmesinin, sarkaç sistemi ile doğru olarak ölçülebilmesi sağlanmıştır [2].

Sismometre gibi hareketlerin grafiğe döküldüğü aygıtlarda sarkaç sistemi kullanılabilir [11].

Binaların duvarlarının denge durumunun denetlenmesinde sarkaç kullanılmaktadır.

Mermi balistiği analizinde “balistik sarkaç” uzun yıllar kullanılmıştır [4].

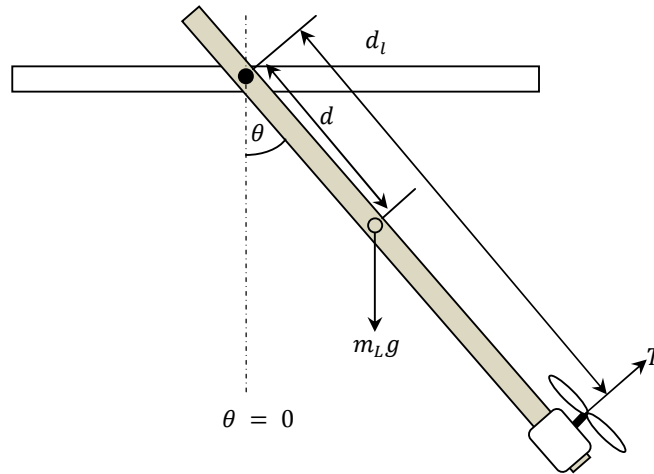
Su akışı “hidrometri sarkacı” ile ölçülebilir. Hidrometri sarkacı, bir su yatağına asılan ve suya daldırılarak düşey eksen ile yaptığı açığa göre suyun akış hızını veren bir sarkaç türüdür [4].

Uçak veya helikopter gibi hava taşıtlarının, yeryüzüne göre dengesinin sağlanabilmesi için gerekli olan otomatik kontrol sisteminde sarkaç kullanılabilir. Bununla birlikte yerçekimine karşı kontrol sisteminin kullanılacağı yerlerde sarkaç sistemine ihtiyaç duyulur [1].

Protez bacak modellemesinde, bir vincin kuvvet kolunun modellemesinde sarkaç sistemi kullanılabilir [1].

### 2.3. Asılı Sarkaç Kontrol Düzenegi

Uygulamada asılı sarkaç sisteminin konumunun kontrol edilebilmesi için öncelikle sistem düzeninin çalışma prensibinin ve matematiksel modelinin bilinmesi gerekmektedir.



Şekil 2.1. Asılı sarkaç sistemi

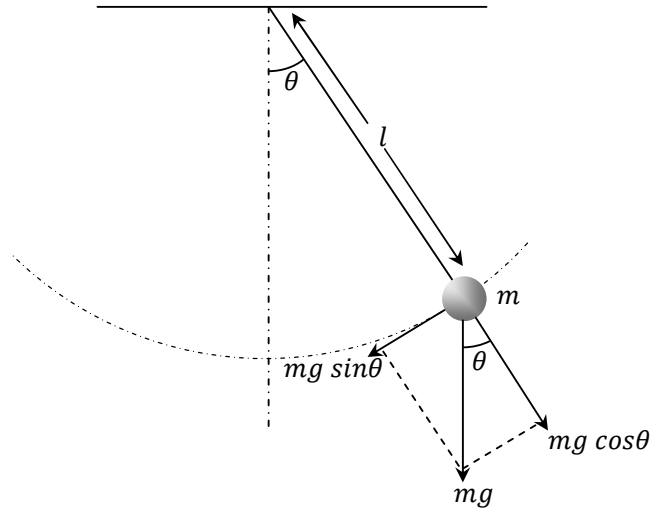
Şekil 2.1 ile verilen sarkaç düzeninde asılı bir çubuğun ucuna pervaneli bir DC motor bağlı bulunmaktadır. Bu düzenekte, sarkacın düşey eksenle yaptığı  $\theta$  açısının arzulan bir referans değere gelebilmesi için DC motor tahrik edilmektedir.

Sistemin çıkış büyüklüğü  $\theta$  açısı, giriş büyüklüğü ise DC motora uygulanan besleme gerilimidir. Sistemin açısal konumu optik kodlayıcı veya potansiyometre gibi konum sensörleri ile ölçülebilir.

Asılı sarkaç düzeneğinde amaç, asılı kolu arzulan amaç ölçülerini sağlayarak istenen konuma getirmektir.

#### 2.4. Asılı Sarkacın Matematiksel Modeli

Basit bir sarkaç sisteminin frekansının bulunabilmesi için Newton'un ikinci kanununun bilinmesi gerekmektedir. Newton'un ikinci kanununa göre  $F$  kuvvetine maruz kalan  $m$  kütlesi  $a$  ivmesi ile hızlanır. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi bu ivmeyi sağlayan, kütleye etki eden yerçekimi ivmesinin yatay bileşenidir [5].



Şekil 2.2. Asılı sarkaç sistemine etki eden kuvvetler

$$F = m \cdot a \quad (2.1)$$

Kütleye etki eden yerçekimi ivmesinin yatay bileşeni, kütleği aşağı yönüne harekete zorlar. Dolayısıyla

$$F = -m \cdot g \cdot \sin\theta = m \cdot a \quad (2.2)$$

$$a = -g \cdot \sin\theta \quad (2.3)$$

olur [5].

Burada yerçekimi sabit yükseklik ile değişmektedir. İvmenin negatif işaretli olması hızlanmanın; sistemin aşağı yönünde olduğunu gösterir. Bu hızlanma  $\theta$  açısına bağlı olarak sürekli değişir [1,5].

Buradan, hızlanmayı kontrol eden kuvvetin, açığı da kontrol edebileceği, değiştirebileceği sonucu çıkmaktadır.

Sarkaç sisteminde kütlelin takip ettiği yörüngenin bir yay olduğu göze alınır, yay uzunluğu formülünden

$$s = l \cdot \theta \quad (2.4)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (2.5)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.6)$$

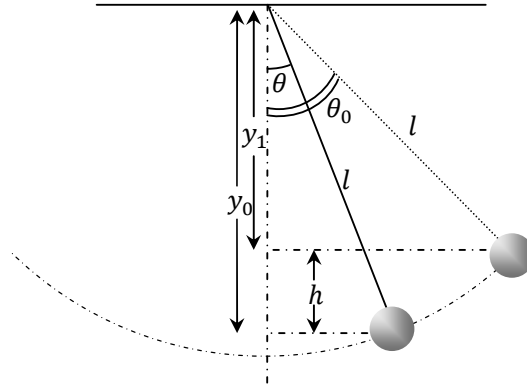
olur. Böylelikle ivmenin, açı değişkenine bağlı olarak türevsel denklemi bulunmuş olur. (2.6) eşitliği (2.3)'de yerine yazılırsa,

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \cdot \sin\theta \quad (2.7)$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \cdot \sin\theta = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (2.9)$$

türevsel denklemi elde edilir. Enerjinin sakınımı yasası gereğince sarkaç sisteminde kayıp enerji olmadığı düşünülürse, sistemde sürekli olarak potansiyel enerji kinetik enerjiye; kinetik enerji de potansiyel enerjiye dönüşecektir.



Şekil 2.3. Sarkaçta yükseklikteki değişim

Nitekim, potansiyel enerjideki değişim

$$\Delta U = mgh \quad (2.10)$$

kinetik enerjideki değişim ise

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.11)$$

bağıntıları ile verilebilir [5]. Hava sürtünmesi gibi enerji kaybına neden olacak etkenlerin olmadığı düşünülürse

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.12)$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (2.13)$$

bağıntıları yazılabilir. (2.13) ile verilen hız ifadesi (2.5) bağıntısında yerine yazılırsa (2.14) denklemi elde edilir.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l} \sqrt{2gh} \quad (2.14)$$

Son bağıntıdaki  $h$ , sarkacın bırakıldığı yükseklik ile herhangi bir andaki yükseklik arasındaki farkı ifade etmektedir (Bkz. Şekil 2.3). Sarkacın başlangıç açısı  $\theta_0$ , başlangıç yüksekliği  $y_0$ , sarkaç bırakıldıktan belirli bir zaman sonraki açısı  $\theta$ , yüksekliği ise  $y_1$  olacağından,  $y_0$  ve  $y_1$  değerleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$y_0 = l \cdot \cos\theta \quad (2.15)$$

$$y_1 = l \cdot \cos\theta_0 \quad (2.16)$$

$h$  yüksekliği için ise

$$h = l \cdot (\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (2.17)$$

bağıntısı yazılabilir. (2.17) bağıntısı (2.14)'de yerine yerleştirilirse

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad (2.18)$$

eşitliği elde edilir.  $\sin\theta$  ifadesinin Taylor serisel açılımını aşağıdaki ifade ile verilebilir [12].

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (2.19)$$

Söz konusu bu serisel açılım ifadesi için  $\theta_0 = 0$  çalışma noktası civarında geçerli olmak üzere

$$\sin\theta \cong \theta \quad |\theta| \ll 0.785 \text{ rad} \quad (2.20)$$

biçiminde yaklaşık bağıntısı yazılabilir. (2.20) bağıntısı (2.9)'da yerleştirilirse



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (2.21)$$

elde edilir.

$\theta(0) = \theta_0$  ve  $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$  başlangıç koşulları ile (2.21) türevsel eşitliği çözümü

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (2.22)$$

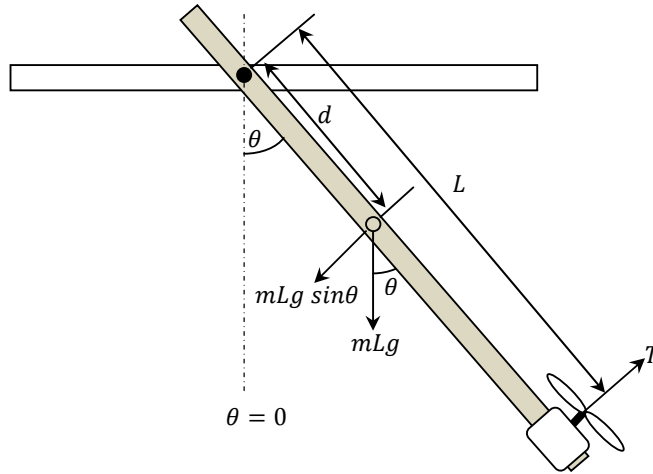
biçiminde elde edilir. Burada  $2\pi f_0 = \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  ve  $f = \frac{1}{T}$  olduğundan sarkaç periyodu  $T_0$  için

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.23)$$

eşitliği yazılabilir [1,4,5]. Son bağıntıdan, sarkacın periyodunun; sarkacın uzunluğuna ve yüksekliğine bağlı olduğu görülmektedir.

## 2.5. Sarkaç Sisteminin Matematiksel Modeli

Kontrol edilecek bir sistemin, öncelikle matematiksel modeli çıkarılmalıdır. Basit sarkaç sisteminin matematiksel modeli oluşturulurken, Archimedes prensipleri ve Newton'un yerçekimi kanunları dikkate alınır.



Şekil 2.4. Sarkaç sistemi

$L$ = Çubuğun uzunluğu

$m$ = Çubuğun ağırlığı

$d$ = Askı noktasının ağırlık merkezine olan uzaklığı

$J$ = Atalet momenti

$g$ = Yerçekimi ivmesi

$c$ = Viskoz sönümlenme katsayısı

olmak üzere, sarkacın asıldığı noktaya göre Archimedes moment prensipleri esas alınır.

Sistemin modelinde, sistemin hareketinden kaynaklanan bir atalet momenti mevcuttur. Noktasal bir  $m$  kütesinin  $d$  uzaklıktaki bir merkeze göre momenti

$$\tau = F \cdot d \quad (2.24)$$

olur. Newton'un ikinci kanunu gereği (2.1.) son bağıntıda yerleştirilirse

$$\tau = m \cdot a \cdot d \quad (2.25)$$

elde edilir. Buradaki  $a$  çizgisel ivme olup; teğetsel ivme olarak da adlandırılabilir.  $V$  çizgisel hız olmak üzere aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$V = \omega \cdot d \quad (2.26)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot d \quad (2.27)$$

$$a = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot d \quad (2.28)$$

$$a = \alpha \cdot d \quad (2.29)$$

$a$  ivmesine ilişkin (2.29) bağıntısı (2.25) bağıntısı ile verilen moment denkleminde yerleştirilirse

$$\tau = m \cdot \alpha \cdot d \cdot d \quad (2.30)$$

$$\tau = m \cdot d^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.31)$$

elde edilir. Burada  $m \cdot d^2$  ifadesi noktasal bir kütle için  $d$  kadar uzaklıktaki bir eksene göre atalet momentidir [13,14]. Kütlelerin atalet momentleri; kütle dağılımlarına ve dönme eksenine bağlı olduğundan bulunması oldukça karmaşık hesaplar gerektirir.  $N$  adet noktasal kütlelerin oluşturduğu bir sistemin atalet momenti

$$J = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2 \quad (2.32)$$

olur. Bir katı modelin belirli bir eksene göre atalet momentinin hesabı için  $\rho(r)$  şeklinde bir kütle yoğunluk fonksiyonu tanımlanır.  $V$  hacim olmak üzere bir katı modelin atalet momenti (2.33) bağıntısı ile hesaplanır.

$$J = \iiint_V d^2 \cdot \rho(r) \cdot dV \quad (2.33)$$

Bir katı modele boyutsal bir analiz yapıldığında atalet momenti

$$J = k \cdot m \cdot d^2 \quad (2.34)$$

şeklinde düşünülebilir. Burada  $k$  sabiti, atalet momenti bulunacak olan cisme göre değişir. Örneğin  $k$ , merkez eksen etrafında dönen bir küre için  $2/5$  değerini alırken, silindir için  $1/2$  değerini alır. Aynı zamanda  $d^2$  ifadesi de atalet momenti bulunacak olan cisme göre değişir [14,15].

Sarkaç sisteminin atalet momenti aşağıdaki bağıntı ile verilebilir.

$$J = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (d^2 + L^2) \quad (2.35)$$

Atalet momentinden kaynaklanan dönme kuvveti

$$\tau = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = J \cdot \ddot{\theta} \quad (2.36)$$

bağıntısı ile verilebilir [16].

Sarkaç modelinde, sistemin kararlı hale gelmesine yol açan viskoz sönümlenme katsayısı mevcuttur.

Sarkaç sisteminde aynı zamanda, sistemin kütesinden kaynaklanan bir dönme kuvveti mevcuttur.

Tüm bu bilgiler ışığında sarkaç sisteminin matematiksel modeli (2.37) bağıntısı ile verilebilir.

$$j\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + m_L \cdot g \cdot d \cdot \sin\theta = T \quad (2.37)$$

Burada  $T$  motorun pervanesindeki itme kuvvetinden oluşacak momenti,  $\theta$  ise kontrol edilecek olan açıdır. Son eşitliğin her iki yanını  $j$ 'ye bölünürse,

$$\ddot{\theta} = \frac{c}{j} \dot{\theta} - \left(\frac{m_L g d}{j}\right) \sin\theta + \frac{T}{j} \quad (2.38)$$

bağıntısı elde edilir. (2.38) denkleminde  $\sin\theta \approx \theta$  yaklaşımı alınarak denklemin Laplace dönüşümü alınırsa (2.39) eşitliği elde edilir.

$$s^2 \cdot \theta(s) = \frac{c}{j} \cdot s \cdot \theta(s) - \left(\frac{m_L g d}{j}\right) \theta(s) + \frac{T(s)}{j} \quad (2.39)$$

Nitekim son bağıntıdan sistemin transfer fonksiyonu

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{js^2 + cs + m_L g d} \quad (2.40)$$

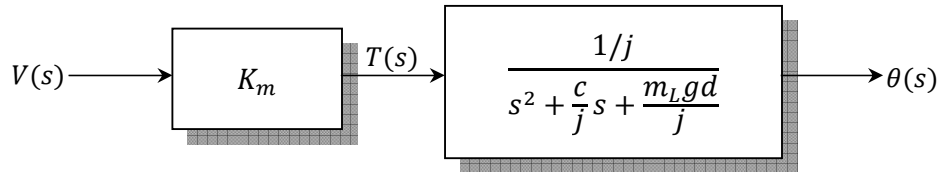
şeklinde yazılabilir.

Sarkacın hareketi için gerekli olan itme kuvveti ( $T$ ) motor miline bağlı olan pervane tarafından sağlanmaktadır. Motora uygulanan  $V$  gerilimi ile söz konusu  $T$  itme kuvveti arasındaki ilişki

$$T(s) = K_m \cdot V(s) \quad (2.41)$$

$$K_m = \frac{m_L g d \sin\theta_{ss}}{v} \quad (2.42)$$

bağıntısı ile verilebilir. Böylece sarkaç sistemine ilişkin açık çevrim blok diyagramı aşağıdaki gibi olur.



Şekil 2.5. Sarkaç sisteminin blok diyagramı

Böylece motora uygulanan gerilim ile açı arasındaki transfer işlevi;

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{Km/j}{s^2 + \frac{c}{j}s + \frac{m_L g d}{j}} \quad (2.43)$$

olarak yazılabilir.

## **BÖLÜM 3. KONTROL YÖNTEMLERİ**

### **3.1. Giriş**

Matematiksel modeli mevcut olan bir sistemin kontrolüne ilişkin yöntemler iki ana grupta incelenebilir [1,17].

- 1- Açık çevrimli kontrol yöntemleri
- 2- Kapalı çevrimli kontrol yöntemleri

Bu kontrol yöntemlerinin amaçları aşağıdaki gibi sıralanabilir;

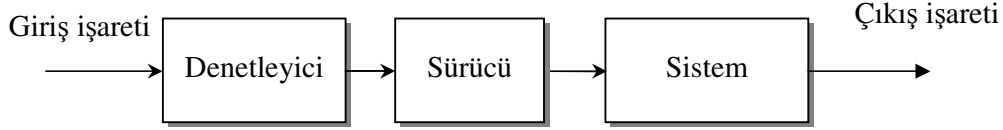
- Sisteme ilişkin fiziksel çıkış büyüklüğünü arzulanan seviyede tutmak
- Proseslerdeki çıkış büyüklüklerinin referans bir değişimi izlemelerini sağlamak
- Ardışıl lojik mantığına dayalı proseslerin kontrolünü gerçekleştirmek

Bir kontrol sisteminde, çıkış büyüklüklerini etkileyen bozucu büyüklükler kaçınılmazdır. Kontrol yöntemleri bu bozucu büyüklükleri dikkate alarak, sistemin çıkışını istenilen referans değerinde tutmaya çalışır. Örneğin sıcaklığı sabit bir değere ulaşmış bir fırının kapağının açılması, fırının ısı kaybetmesine; dolayısıyla iç sıcaklığının düşmesine neden olacaktır. Bu durumda fırının kapağının açılmasıyla kaybettiği sıcaklık miktarı, fırın sistemi için bozucu bir büyüklüktür [18].

### **3.2. Açık Çevrim Kontrol**

Bu kontrol yönteminde sisteme uygulanan kontrol işareti, sistemin durumuyla ilgili işaretlerden ya da çıkış işaretlerinden etkilenmez. Sistem parametrelerindeki değişimlerden ya da sisteme etkileyen bozucu büyüklüklerden etkilenmeyen açık çevrimli

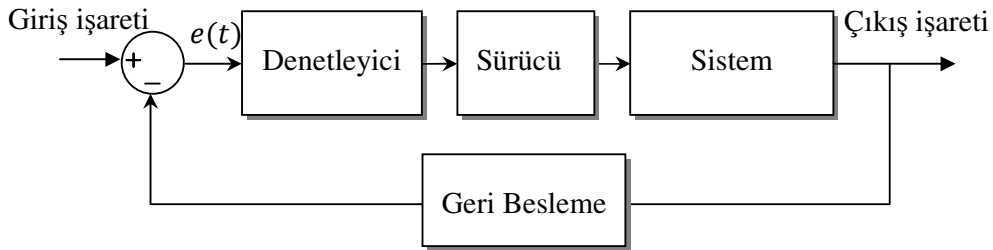
kontrol yöntemi, sistemi istenilen referansta tutma eğiliminde değildir. Bu yüzden açık çevrimli kontrol yöntemi basit uygulamalarda kullanılır.



Şekil 3.1. Açık çevrimli kontrol

### 3.3. Kapalı Çevrim Kontrol

Geri beslemeli kontrol olarak da adlandırılan kapalı çevrim kontrolde, sistemin giriş işareti, çıkış işaretinden etkilenir. Bu tür kontrol sistemlerinde, sistemin çıkışından alınan bilgi ile referans giriş değeri arasındaki fark olan hata değeri kontrolör girişine uygulanır. Kontrolör çıkışından sürücü girişine uygulanan kontrol işaretine bağlı olarak sistem için gerekli olan enerji ya da sinyal üretilir [19].



Şekil 3.2. Kapalı çevrim kontrol

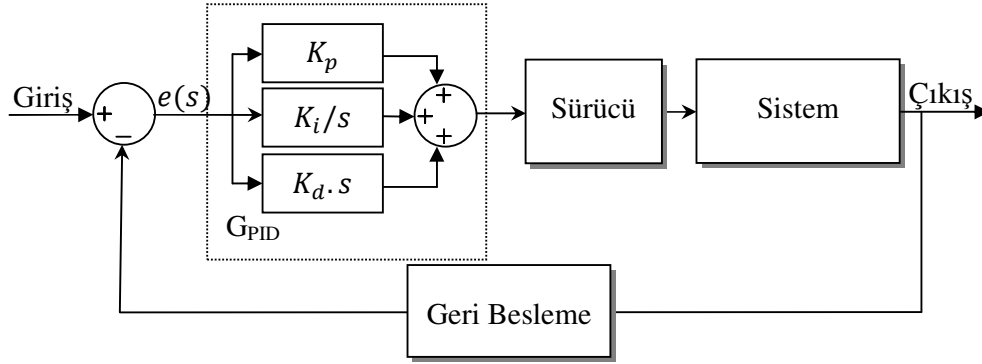
Kontrol yöntemlerinin birçoğu kapalı çevrim kontrol sınıfına girer. Endüstride yaygın olarak kullanılan kontrol türleri on/off kontrol ve PID kontrolüdür.

### 3.4. PID Kontrol

PID kontrolörler, oransal (Proportional), integral (Integral) ve türevsel (Derivative) işlevlerini içeren, endüstride yaygın olarak kullanılan kontrol algoritmalarıdır. PID kontrolün çıkışı; hata işaretinin bir katsayısı ile çarpımı, integrali ve türevi alınarak



toplanır. Elde edilen toplam sinyal, sisteme gerekli enerjiyi sağlayacak olan sürücüye uygulanır. Şekil 3.3’de PID kontrolörünün blok gösterimi verilmiştir [19].



Şekil 3.3. PID kontrollü sistemin blok şeması

PID kontrol eşitliği s domeninde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G_{PID}(s) = Kp + \frac{Ki}{s} + Kd \cdot s \quad (3.1)$$

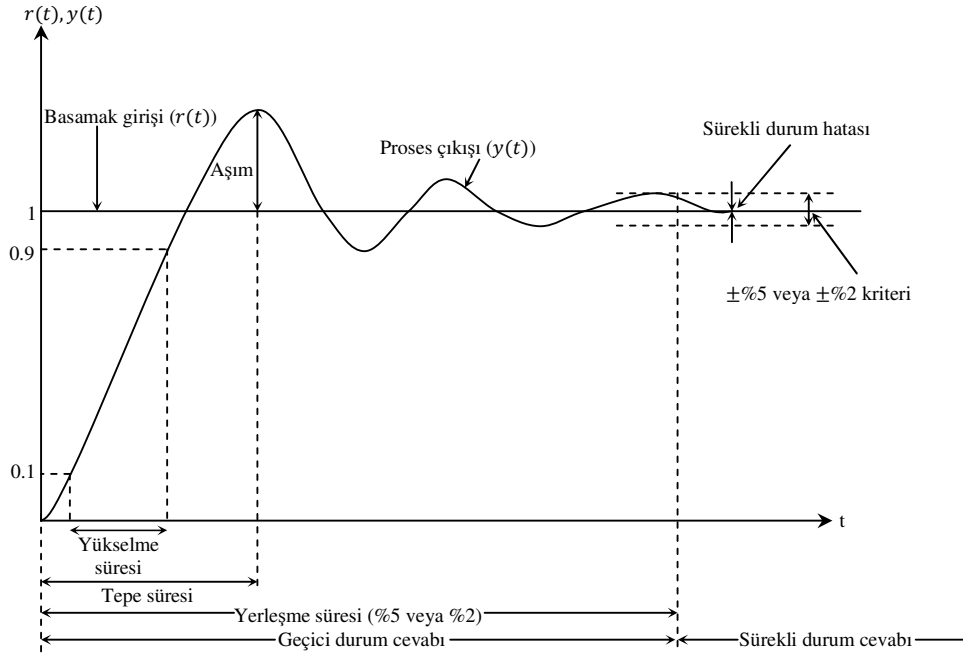
Burada “ $K_p$ ” oransal sabiti ifade eder. Sabit kazançlı kuvvetlendirici gibi düşünülebilir.

“ $K_i$ ” integral kontrolünün kazanç katsayısıdır.

“ $K_d$ ” katsayısı türevsel kontrol kazanç katsayısıdır. Türev kontrolde hata değişmiyorsa ya da az değişiyorsa, hatanın türevi sıfır ya da sıfıra yakın olduğundan bu bileşen etkisizdir.

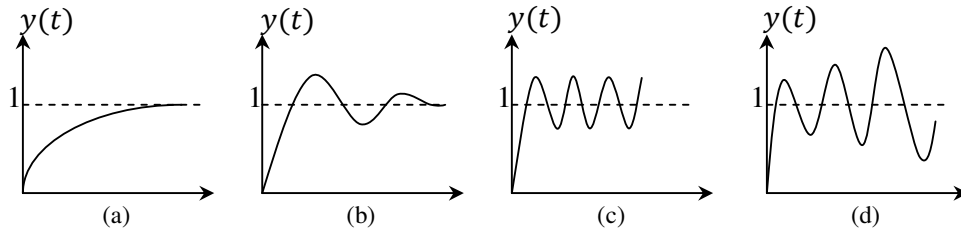
PID kontrol eşitliği incelendiğinde, ilk terim hata ile (P), ikinci terim hatanın integrali ile (I), üçüncü terim hatanın türevi ile (D) orantılıdır. Üç terim içeren PID kontrolörün herhangi bir teriminin çıkışa olan etkisi, ilgili katsayı “0” kabul edilerek ortadan kaldırılabilir. Bu şekilde P, PI, ve PD kontrolör türleri elde edilebilir.

Kapalı çevrimli kontrol sistemlerinde, proses çıkışının değişimi; geçici durum cevabı ve sürekli durum cevabı olarak iki kısma ayrılabilir. Birim basamak girişi uygulanmış olan bir kapalı çevrim kontrol sisteminin çıkışının zamana göre değişimi; Şekil 3.4’de verilmiştir.



Şekil 3.4. Kapalı çevrimli bir kontrol sisteminin birim basamak cevabı

Sürekli durum hatası, sürekli durum süresince çıkış ile giriş arasındaki farktır. Şekilde sönümlü çıkış eğrisi üzerinde tanımlanan parametreler, sistemin performans ölçütleri olarak isimlendirilirler ve çıkış eğrisinin şeklini tanımlar. PID kontrol parametreleri olarak isimlendirilen  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  katsayıları uygun değerlerde seçilerek performans ölçütleri değiştirilebilir. Böylelikle proses çıkışının geçici durum cevabı, sürekli durum hatası ve diğer performans ölçütleri değiştirilmiş olur. Dolayısıyla çıkış eğrisinin şekli de değişir. Şekil 3.4’de birim basamak girişi için verilen sönümlü cevap eğrisi, PID parametrelerinin değişmesiyle Şekil 3.5’deki cevap eğrilerinden herhangi birine dönüştürülebilir. Bu cevap eğrileri sistemin davranışı olarak da adlandırılabilir [17,19].



Şekil 3.5. Kapalı çevrimli bir kontrol sisteminin birim basamak girişi cevap eğrileri

- a. Aşırı sönümlü titreşim
- b. Sönümlü titreşim
- c. Sabit genlikli titreşim
- d. Kararsız titreşim

PID kontrolör ile sabit katsayılı türevsel eşitlik ile verilen matematiksel modele sahip bir sistemin davranışı, şekildeki eğrilerden birine benzetilebilir. Fakat matematiksel modeli zamanla değişen katsayılı türevsel eşitlik ile verilen bir sistemde ise, PID parametreleri değişmese bile sistemin davranışı değişir. Bu yüzden zamanla değişen sistemlerde, sistemi istenen davranışa yaklaştıracak, uyarlamalı kontrol teknikleri kullanılmalıdır.

### 3.5. Kayma Kipli Kontrol

Kayan kipli kontrol değişken yapılı kontrol sistemlerinin özel bir tipidir. Bu kip sistem belirsizliklerine ve bozucu büyüklüklere karşı etkin olma özelliği ile bilinir. Kuramsal olarak kayan kipli kontrol tekniği, bir sistemin hata vektörünün istenen bir dinamik içerisine zorlanması ve bu dinamik içerisinde tutulması esasına dayanır [20]. Değişken yapılı sistemler ilk olarak Sovyet Rusya'sında Emelyanov tarafından 1967 yıllarında ortaya atılmış ve bahsedilen çalışmada ikinci dereceden sistemlerin faz uzayında bir doğruyun tanımlanması ve herhangi bir başlangıç koşulu altında sistem durumlarının bu doğruya itilmesi ve doğru üzerinde kalması üzerinde durulmuştur. Bu çalışmadan sonra literatürde birçok çalışma kayan kipli kontrol üzerine yoğunlaşmıştır. Söz konusu doğru; zamanla düzlem, çok boyutlu hiper uzay halini almış ve anahtarlama yüzeyi, kayma yüzeyi gibi isimler almıştır. Kayma kipli kontrolde ise temel felsefe kayma yüzeyinde, anahtarlama bir kontrol stratejisi kurmaktır.

Kayma kipli kontrol üzerine birçok çalışma mevcuttur. Utkin yayınlarına kadar Rusya dışında kayan kipli kontrol ile ilgili bir çalışma görülmemiştir [8]. Hung, kontrol stratejisinin doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler için incelemiş, değişik anahtarlama mekanizmaları, diferansiyel denklemlerin kanonik formlarda gösterilmesi ve basit kayma kipli kontrol kurallarının oluşturulması üzerinde durmuştur [21]. Bekiroğlu, uyarlamalı kayma yüzeyinin üzerinde durmuş, Young ise kayma kipli kontrolün uygulamadaki güçlüklerinin nasıl aşılabileceği üzerinde durmuştur [22].

Değişken yapıli kontrol sistemlerinin davranışları, uygun bir geri besleme kontrol kuralı ve bir karar kuralı tarafından karakterize edilir. Anahtarlama fonksiyonu olarak adlandırılan karar kuralı, sistemin davranışını oluşturan fonksiyon seçer. Kayan kipli kontrolde, değişken yapıli kontrol sisteminin durumları, faz uzayında, faz değişkenlerinden oluşan kayma yüzeyi olarak adlandırılan bir yüzey üzerinde tutacak şekilde tasarlanır. Tasarlanan sistemin davranışı, sistemin durumlarının bu yüzey üzerine gelmesi ve bu yüzey üzerinde kalmasına yöneliktir. Kayan kipli kontrol sisteminde sistemin durumları kayma yüzeyine ulaşır ve sistem kararlı hale gelinceye kadar yüzeye yakın yerlerde bulunur.

Kayan kipli kontrolde iki adet kontrol tasarımı yapılır. Bunlardan biri uygun bir besleme kontrolü diğeri karar verme kuralıdır. Anahtarlama fonksiyonu olarak adlandırılan karar verme kuralı sistem durum değişkenlerinin anlık değerlerinden bir işaret üretir. Bu işaret sistem durumlarının faz uzayında buldukları yere göre değişir. Geri besleme kontrolü ise bu işaret yardımıyla sistemi kontrol etmeye çalışır. Sonuçta sistem durumların faz uzayında farklı bölgelerde bulunmasına bağlı alt sistemlerden oluşan değişken yapıli bir kontrol sistemi elde edilmiş olur. Böyle bir sistemin en önemli özelliği, farklı sistemlerin yararlı özelliklerinin tek bir sistemde birleşmiş olmasıdır [10,23].

Kayma kipli kontrolün iki üstünlüğü vardır. Bunlardan birisi, kayma fonksiyonun değiştirilmesiyle sistemin dinamik davranışının değiştirilebilmesidir. Diğeri ise sistemin kapalı çevrim davranışının sistemle ilgili parametre belirsizliklerine ve bozucu büyüklüklere karşı duyarsız olmasıdır. Bu özellik, sistemin kontrol

edilebilmesinde sınırlayıcı etkileri olan; sistemin non-lineeritesi, parametre belirsizlikleri ve bozucu büyüklükler gibi durumların modellenebilmesini sağlar. Kontrolör derecesinin sistem derecesinden küçük olması, parametre belirsizliklerine karşı duyarsızlığı ve gürültü bastırabilme gibi özellikler kayan kipli kontrolü üstün kılan diğer özelliklerdir. Bütün bu özellikler kayan kipli kontrolün gürbüzlük özelliğinin parçalarıdır.

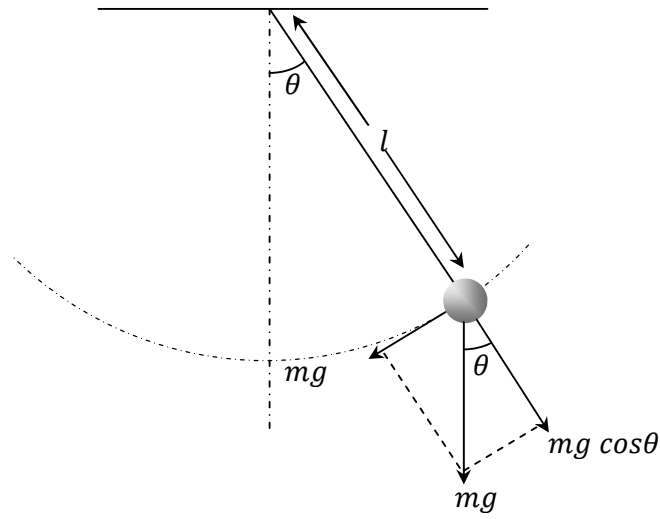
Kayan kipli kontrol; doğası gereği süreksizdir. Kontrolde, sistem durumları kayma yüzeyine ulaştıktan sonra, sistem durumlarının kayma yüzeyinin dışına çıkma durumu gerçekleşirse, ani bir kontrol işareti üretilerek durumlar tekrar yüzey üzerine getirilmeye çalışılır. Böyle bir kontrolde sistem çok kısa zamanda çok fazla yön değiştirir. Sistem durumlarını kayan yüzey üzerinde tutmak için ani yön değiştiren sınırsız frekanslı bu işarete çatırtı (chattering) denir. Bu durum, uygulamada bazı problemlere sebep olur. Çatırtı, hızlı hareket eden mekanik sistemlere uygulandığında, sistemi oluşturan hızlı hareket eden parçalara zarar verebilir. Bu yüzden hızlı değişen sistemlerde, kayan kipli kontrol tavsiye edilebilecek bir kontrol yöntemi değildir.

Çatırtı sorunu; filtreleme, süreksiz yaklaşım, doyma fonksiyonu, bulanık kontrol gibi çeşitli fonksiyon ve yöntemler kullanılarak azaltılabilir. Ancak bu durumda kayan kipli kontrol gürbüzlük özelliğini kaybeder.

Kayma kipli kontrolde faz uzayından yararlanıldığından, yöntemi daha iyi kavrayabilmek için sistemin faz uzayındaki davranışı analitik olarak incelemek faydalı olacaktır.

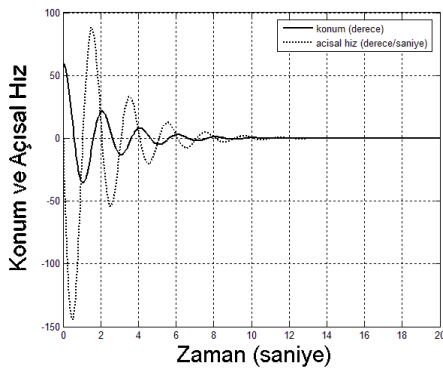
### **3.5.1. Faz uzayı**

Faz uzayı; eksenleri, bir sistemin durumlarından oluşan bir koordinat sistemidir. Sistemin davranışının ve kararlılığının incelenmesinde etkili bir olanak sağlayan faz uzayı, doğrusal olmayan sistem davranışlarının analizini doğrusallaştırma yapmadan incelemek amacı ile kullanılan ilk yöntemdir [24,25]. Faz uzayında sistemin durumları, zamanın birer fonksiyonudur.

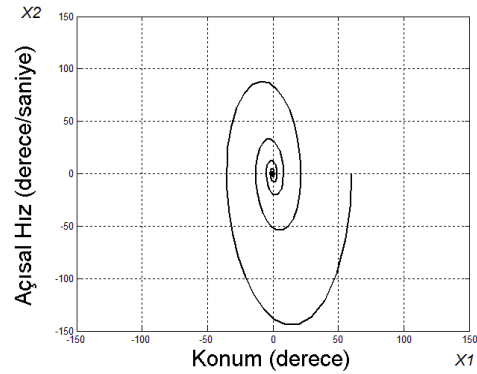


Şekil 3.6. Asılı sarkaç sistemi

Şekil 3.6'da gösterilen sarkaç sisteminde, başlangıçta denge noktasında durmakta olan  $m$  kütlesi belirli bir yüksekliğe çıkarılıp bırakıldığında, sistem zamanla azalan genlikli salınımlar yaparak tekrar denge noktasına gelecek ve duracaktır. Sistemin serbest bırakıldığı andan denge durumuna gelinceye kadarki zamanda, sistemin değişen konum ve hız grafiği Şekil 3.7'de verilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 3.7. Asılı sarkaç sisteminin durumlarına ilişkin grafikler

- Sistemin zamana göre konum ve açısal hız değişimi
- Sistemin hız ve konumunun birbirine göre değişimi

Şekilde verilen sistem için durum değişkenleri; konum için  $x_1$ , açısal hız için  $x_2$  olarak seçildiğinde ve seçilen bu değişkenler faz uzayına aktarıldığında sistem durum

yörüngesi Şekil 3.7.b'deki gibi elde edilir. Başlangıç konumu  $60^\circ$ 'den bırakılan sistemin durumları, zamanla faz uzayının orijinine yaklaşır ve  $\underline{x} = [0 \ 0]^t$  noktasında sistem durur. Şekilde gösterilen durum düzlemi  $x_2 = \dot{x}_1$  şeklindeki özel durumdan dolayı “faz uzayı”, düzlemdeki grafik de “durum yörüngesi” olarak adlandırılır.

İkinci dereceden bir sistemin faz uzayının incelenebilmesi için

$$\ddot{x}(t) = u(t) \quad (3.2)$$

şeklinde ikinci dereceden bir sistemi ele alalım. Burada  $u(t)$  kontrol girişi  $x$  sistemin açısız pozisyonu olmak üzere, kontrol kuralı olarak sadece negatif bir pozisyon geri beslemesi kullanılırsa sistemin kontrol girişi aşağıdaki gibi olur.

$$u(t) = -k \cdot x(t) \quad (3.3)$$

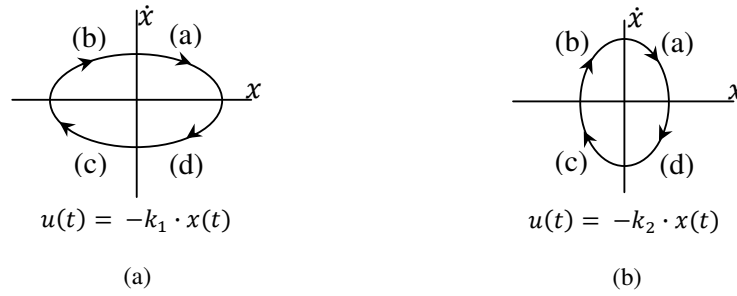
Burada  $k > 0$ 'dır. (3.3) fonksiyonu (3.2)'de yerini yazılıp, eşitliğin her iki taraf  $\dot{x}$  ile çarpılırsa

$$\dot{x} \cdot \ddot{x} = -k\dot{x}x \quad (3.4)$$

sistemi elde edilir. Her iki yanın integrali alınır

$$\dot{x}^2 + k \cdot x^2 = c \quad (3.5)$$

bağıntısı elde edilir (bkz EK C) [26]. (3.5) denklemindeki  $c$ , integrasyon işleminden gelen sabittir. Bu denklem faz uzayında  $k \neq 1$  durumunda bir elips denklemdir.  $k = 1$  durumunda ise bir çember denklemine dönüşür. Şekil 3.8'de  $k$ 'nin iki farklı değeri için, elde edilen elipsler verilmiştir [8,27,28].

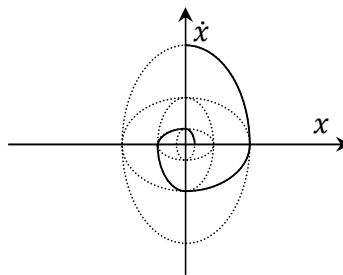


Şekil 3.8. Faz uzayında farklı elips yörüngelerinin elde edilmesi  
 a.  $k_1 < 1$  içeren kontrol girişi bulunan sistemin faz uzayı  
 b.  $k_2 > 1$  içeren kontrol girişi bulunan sistemin faz uzayı

Burada  $k$  değerinin değiştirilmesiyle; faz uzayındaki sistem durumları, bir başlangıç noktasından başlayarak faz uzayının orijinine götürülebilir. Durumların orijine gitmesi sistemin kararlı hale gelmesinin göstergesidir. Dolayısıyla kontrol kuralı  $0 < k_1 < 1 < k_2$  olacak şekilde değiştirilebilir. Kontrol kuralı anahtarlama mantığı olarak düşünülürse aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u(t) = \begin{cases} -k_1 \cdot x(t), & x \cdot \dot{x} < 0 \\ -k_2 \cdot x(t), & x \cdot \dot{x} \geq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Bu durumda değişken yapıda kontrol sisteminin durum değişkenlerinin faz uzayında izlediği yörünge Şekil 3.9'daki gibi olur [8].



Şekil 3.9. Osilasyon yapan iki sistemden oluşan kararlı bir sistemin faz yörüngesi

Görüldüğü gibi iki farklı kararsız sistem, belirli bir koşula göre birleştirilerek yeni bir sistem oluşturulmuş ve bu yeni sistemin faz uzayındaki durum yörüngesi faz uzayının orijinine doğru hareket etmektedir. Kayan kipli kontrol, sistemin durumlarını orijine götürmek için yukarıda tanımlanan aynı prensibi kullanır.



Yukarıda tanımlanan kontrolör yaklaşımında, kontrol girişi için  $s(x, \dot{x}) = x \cdot \dot{x}$  fonksiyonu kullanıldı. Kayan kipli kontrolde ise anahtarlama fonksiyonu  $s(x, \dot{x}) = m \cdot x + \dot{x}$  şeklinde seçilir. Dolayısıyla kayan kipli kontrolde, kayma yüzeyi denilen  $s(x, \dot{x})$  fonksiyonunun işaretiyle anahtarlama yapılır.  $s(x, \dot{x})$  orijinden geçen bir doğru denklemdir. Kontrolör,  $s(x, \dot{x}) = 0$  değerine ulaşıldıktan sonra sistem durumlarını  $s(x, \dot{x}) = 0$  doğrusu üzerinde tutmaya çalışır ve durum uzayını asimtotik bir şekilde orijine taşır.  $s(x, \dot{x})$  fonksiyonunun her sıfırdan büyük ve küçük olduğu durumlarda sistem durumlarını kayma yüzeyine itecek bir kontrol kuralı oluşturulursa bu durumda sistem durumlarını kayma yüzeyinde tutmak mümkün olur. Sistem birinci dereceden sistem gibi davranır ve kayma yüzeyi üzerinde orijine doğru kayar. Ancak bu sadece anahtarlama fonksiyonunun sıfır olduğu anda mümkün olur. Buna ideal kayma hareketi denir.

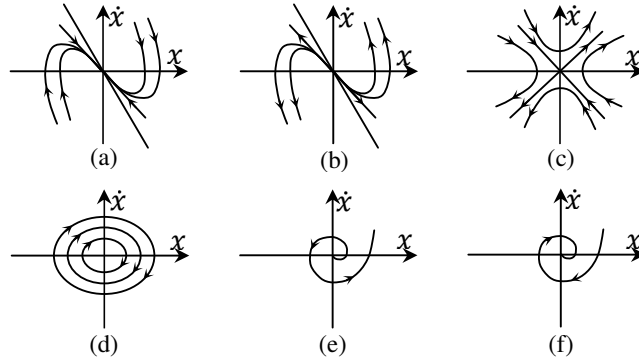
Aynı sistemin kontrol girişine kontrol kuralı olarak pozisyon ve hız geri beslemesi uygulanırsa  $K = [k_1 \ k_2]$  şeklinde bir vektör olmak üzere sistemin kontrol girişi,

$$u(t) = -K \cdot x(t) \quad (3.7)$$

şeklinde olur. Bu denklem sistemin içine yazılırsa, sistemin son hali aşağıdaki gibi olur.

$$\ddot{x}(t) + k_1 \dot{x} + k_2 x = 0 \quad (3.8)$$

Bu ifadede yer alan  $k_1$  ve  $k_2$  katsayılarının alabileceği farklı değerlere göre sistemin faz uzayında takip edebileceği durum yörüngeleri farklı başlangıç koşullarına göre aşağıda gösterilmiştir [24,29,30].



Şekil 3.10. İkinci dereceden lineer sistemlerin farklı durum yörüngeleri

Bu sistemde  $k_1$  ve  $k_2$  değerlerine bağlı olarak sistemin köklerini ifade eden bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir [8].

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_1}{2} \mp \sqrt{(k_1)^2 - 4 \cdot k_2} \quad (3.9)$$

Bu durumda değiştirilen  $k_1$  ve  $k_2$  katsayıları sistemin faz uzayındaki yörüngesini ve dolayısıyla kararlılığını da etkilemektedir. Sistemin kararlılığı Şekil 3.10'da görüldüğü gibi başlangıç noktasına bağlı olabilir.  $k_1$  ve  $k_2$  katsayıları sistemin durumlarının faz uzayında belirli yerlerinde, sistemi kararlı olmaya itecek şekilde değiştirilirse sistem kararlı bir hale getirilebilir. Böyle sistemler “değişken yapıli sistemler” olarak adlandırılırlar.

### 3.5.2. Değişken yapıli kontrol kavramı

Değişken yapıli sistemler; içerisinde birden fazla alt sistemin bulunduğu sistemlerdir. Kontrol sürecinin herhangi bir zamanında bu alt sistemlerden yalnızca birisi aktiftir. Alt sistemlerden herhangi birinin aktivasyonu, sistemin durum değişkenlerine bağlı olarak tasarlanan bir anahtarlama kuralı tarafından belirlenir. Kayan kipli kontrol tasarım problemi, her bir alt sistem parametrelerinin ve bu alt sistemler arasındaki geçişi sağlayan anahtarlama fonksiyonun belirlenmesi olarak tanımlanır [10].

Lineer durum geri besleme yaklaşımından farklı olarak, değişken yapıli kontrol sistemlerinde geri besleme vektörü zamanla değişir. Bu durum lineer durum geri

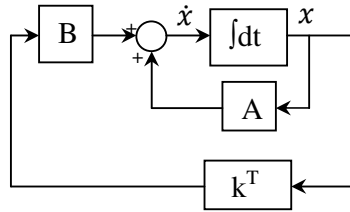
besleme durumunda açıklanmaya çalışılacaktır. Sistemin modeli aşağıdaki gibi olsun.

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad (3.10)$$

Lineer durum geri beslemeli kontrolde sistemin durum geri besleme yapısı belirli ve sabittir.

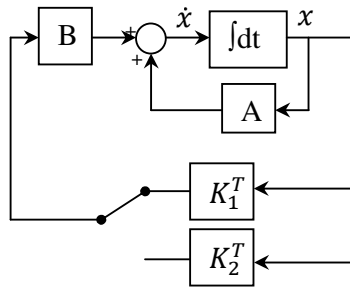
$$\underline{u} = \underline{k}^T \underline{x} \quad (3.11)$$

Böyle bir giriş için, sisteme uygulanarak elde edilen lineer durum geri beslemeli kontrol sisteminin blok şeması aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.11. Lineer durum geri beslemeli kontrol yapısı

Lineer durum geri beslemeli kontrol yaklaşımında geri besleme vektörü sabittir ve değişmez. Fakat değişken yapılı durum geri besleme vektörü böyle değildir. Şekil 3.11’de verilen sisteme ilişkin değişken yapılı durum geri besleme yaklaşımının blok şeması ise aşağıdaki gibi verilebilir [21].

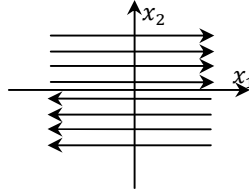


Şekil 3.12. Değişken yapılı durum geri besleme yaklaşımı

Değişken yapıli sistemlerde kontrol yapısı herhangi bir anda, durumların, farklı sürekli fonksiyonları arasında geçiş yapmasına izin verir. Dolayısı ile değişken yapıli sistem tasarımı her alt sistemin yapısını belirleyen parametrelerin seçimi ve uygun durumda bu parametreler arasında geçişi sağlayacak bir anahtarlama fonksiyonu tanımlanmasından ibarettir. Bu şekilde oluşturulan sistem, farklı sistemlerin yararlı özelliklerini birleştirme imkanı verir. Değişken yapıli bir sistem, kendisini oluşturan alt sistemlerde bulunmayan bir özelliğe sahip olabilir. Kararlı bir değişken yapıli kontrol sistemi, iki farklı kararsız sistemin bir kombinasyonundan oluşturulabilir. Bu durumun daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıda bir örnek verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (3.12)$$

şeklinde verilen bir sistemin faz uzayındaki durum yörüngeleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.13. İkinci dereceden kararsız sistemin faz uzayı

Görüldüğü gibi sistem, kararsız bir sistemdir. Başlangıç durumları yalnızca  $x_2 = 0$  ve  $x_1$ 'in herhangi bir değerinde sistem başlangıç noktasında kalmaktadır. Sistemi kararlı hale getirebilmek için doğrusal durum geri besleme kuralına göre

$$u(t) = -K \cdot x_1(t) \quad (3.13)$$

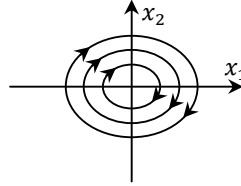
şeklinde bir kontrol kuralı tanımlanarak sistem içinde yerine yazılırsa sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K \end{bmatrix} \cdot u \quad (3.14)$$

Burada  $K > 0$  olması durumunda sistemin özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = \mp j\sqrt{K} \quad (3.15)$$

şeklinde reel kısmı sıfır olan imajiner sayılar olacaktır. Böyle bir durumda sistem herhangi bir başlangıç koşulu altında sinüzoidal kararsız bir salınım yapar.

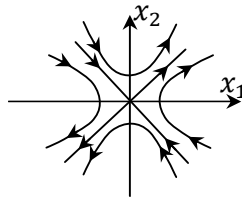


Şekil 3.14.  $K > 0$  durumunda sistemin faz yörüngesi

Yukarıdaki denklemde  $K < 0$  olması durumunda sistemin özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = \mp\sqrt{K} \quad (3.16)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda sistemin başlangıç koşulları ancak  $x_2 = -\sqrt{K} \cdot x_1$  doğrusu üzerinde olduğunda, sistemin durum yörüngesi orijine yakınsar. Diğer yörüngeler orijinden uzaklaşır.



Şekil 3.15.  $K < 0$  durumunda sistemin faz yörüngesi

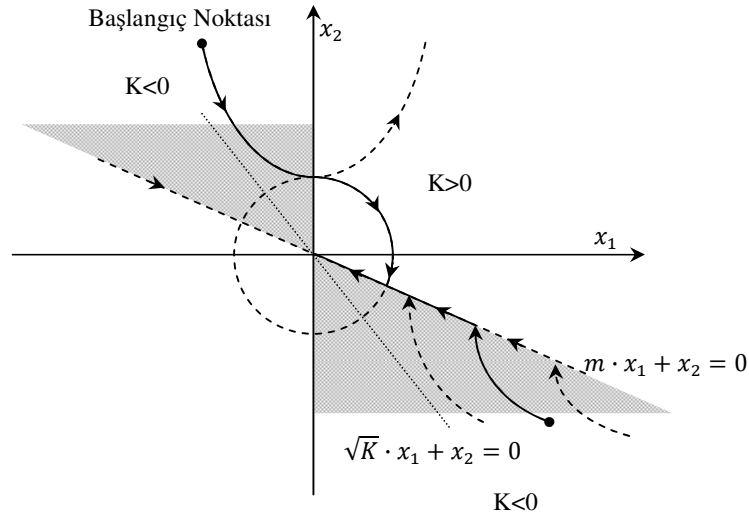
Sistemin kararlılığını tanımlayan özdeğerlerin incelenmesi sonucunda görüldüğü gibi  $K$ 'nın farklı işaretleri için sistem asimtotik kararlı olamamaktadır. İncelenen örnek değişken yapılı sistem kuramı sayesinde, sistem; durum yörüngesi orijine yaklaşma eğiliminde olan kararlı bir sistem haline getirilebilir. Bunun için

$$s(x_1, x_2) = m \cdot x_1 + x_2 \quad (3.17)$$

şeklinde bir anahtarlama fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon faz uzayında kullanılacak olan alt sistemi belirler.

$$u(t) = \begin{cases} Kx_1(t) & s(x) \cdot x_1 > 0 \\ -Kx_2(t) & s(x) \cdot x_2 < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Sistem (3.18) kuralındaki yapıya sahip bir anahtarlama kuralına göre değiştirilirse Şekil 3.16'daki gibi bir yapı elde edilir. Sistemin durum yörüngeleri orijine yaklaşma eğiliminde olan bölgeye doğru yönlendirilir. Böylece incelenen sistem asimtotik olarak orijine yaklaşır [10].



Şekil 3.16. Değişken yapılı sistemin faz yörüngesi

Görüldüğü gibi değişken yapılı sistem kuramı sayesinde kararsız olan iki sistem uygun bir karar kuralıyla birleştirilerek yeni bir sistem elde edilmiştir. Elde edilen yeni sistemin faz uzayındaki yörüngesi herhangi bir başlangıç koşulu altında seçilen kayma yüzeyine yönlendirilmektedir. Durum yörüngesi kayma yüzeyine ulaştıktan sonra faz uzayının orijinine doğru asimtotik bir yaklaşma hareketi gerçekleştirir. Bu harekete kayma kipi (sliding mode) adı verilir.

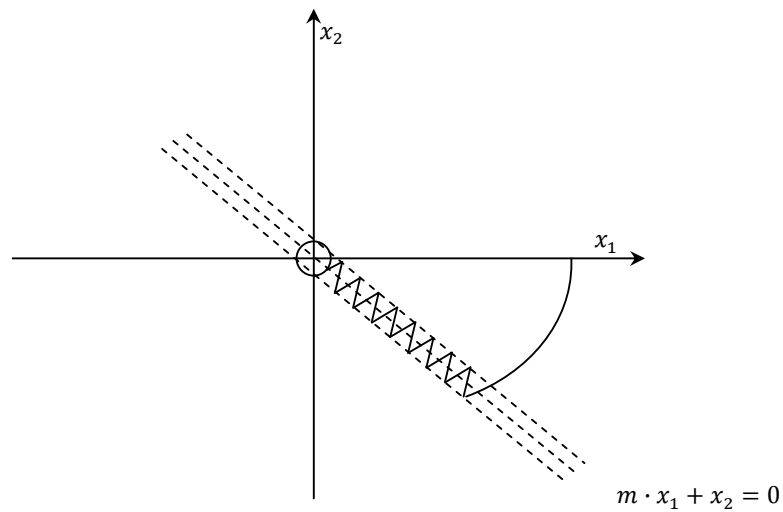


Şekillerde görüldüğü gibi  $m$  kayma parametresinin değişimi değişken yapıli kontrol sisteminin davranışını değiştirmektedir.  $m < 0$  olduğu zaman, durum yörüngesi anahtarlama yüzeyini takip etmekte fakat sistem kararsız olmaktadır [10].

Verilen örneğe göre değişken yapıli kontrol sistemleri hakkında şu yorumlar yapılabilir:

- Kayma kipi, alt sistemlere ait olmayan yeni bir yörüngede oluşmaktadır. Dolayısıyla kayma kipi sistem yörüngelerinden bağımsızdır.
- Kayma kipinde, sisteminkinden daha düşük dereceli ifadeler ile yörünge dinamiği belirlenebilmektedir.
- Kayma kipinde sistem dinamiğini etkileyen parametre  $m$ 'dir.

Kayma kipli kontrolde pratikte karşılaşılan çatırtı adı verilen bir olgu mevcuttur. Çatırtı, kayma kipi sırasında durum yörüngesinin teorik olarak sonsuz frekansta yön değiştirmesi gereğinden kaynaklanır. Pratikte ise sonsuz frekanstaki bir anahtarlama birçok sebepten dolayı gerçekleştirilemez. Sistem kayma kipinde iken, kayma yüzeyi etrafında yüksek frekanslı bir salınım yapar. Çatırtı, çözülmesi gereken bir problemdir çünkü bazı mekanik sistemlere zarar verebilmektedir [10].



Şekil 3.19. Kayma kipinde çatırtı olgusu



Yüksek dereceden kayan kipli kontrol yaklaşımı yukarıdaki gibi grafiklerle açıklanamaz. Bunun için matematiksel yaklaşımla kayan kipli kontrol açıklanmalıdır.

### 3.5.3. Kayma kipli kontrole ilişkin temel kavramlar

Doğrusal olup olmadığına bakılmaksızın bir sistem

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t) \cdot u(t) \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $f(x, t)$  ve  $B(x, t)$  fonksiyonları, sistemin lineer ya da non-linear olmasını belirleyebilen fonksiyonlardır. Kayma kipli kontrol kuralı bu en genel yapı üzerinde tanımlanacaktır.

#### 3.5.3.1. Anahtarlama yüzeyi

Anahtarlama fonksiyonu,  $n$  adet giriş için vektörel olarak

$$S(x) = [s_1(x) \ s_2(x) \ s_3(x), \dots \ s_n(x)]^T \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanır [27,31]. Burada,  $s_i(x)$  değeri  $i = 1, \dots, n$  olmak üzere  $i$ . kontrol kuralına ait anahtarlama fonksiyonudur. Kontrol kuralında  $s_i = 0$  olduğu zaman bir süreksizlik oluşur ve kontrol kuralı işaret değiştirir. Bu yüzden  $s_i(x) = 0$  eşitliği  $i$ . kontrol kuralına ait anahtarlama yüzeyidir [10].

#### 3.5.3.2. Kayma yüzeyi ve kayma hareketi

Eğer anahtarlama yüzeyinin her iki tarafındaki sistem yörüngeleri yüzeye doğru yönelmiş ise, elde edilen anahtarlama yüzeyine kayma yüzeyi ya da “kayma manifoldu” adı verilir.

Eğer sistemin  $t_0$  anındaki başlangıç değeri  $x_0$  ve herhangi bir  $t$  anındaki değeri  $x(t)$  olmak üzere; orijinden geçen  $S$  anahtarlama yüzeyi üzerindeki herhangi bir  $x_0$  için

$\forall t > t_0$  anında  $x(t)$  de  $S$  üzerinde ise  $x(t)$  sistemin kayma hareketini ya da “kayma kipini” gösterir.

### 3.5.3.3. Erişim kipi ve erişim zamanı

Kayma kipine erişene kadar sistemin tüm  $x(t)$  durum yörüngeleri, “erişme kipi” olarak adlandırılır. Erişimin sağlanması için bazı koşulların sağlanması gereklidir. Kayma kipinde kontrol edilecek bir sistemin durumları en azından kayma yüzeyini çevreleyen bir yüzeye çekilmelidir.

Kayma kipine girinceye kadar geçen ve sistemin belirsizliklere ve dış bozucu büyüklüklere duyarlı olduğu süre “erişim zamanı” olarak adlandırılır.

### 3.5.4. Kayma yüzeyi tasarımı

Kayma kipli kontrol tasarımı sisteminin cevabı anahtarlama yüzeyi tarafından belirlenir. Anahtarlama fonksiyonun tasarımı var olma problemi olarak adlandırılır. Kayma kipinin var olması sistemin faz uzayındaki durum yörüngesinin anahtarlama doğrusu etrafında kararlı olduğu anlamına gelir.

Kayma yüzeyinin tasarımı için çeşitli yöntemler kullanılabilir. Aşağıda düzenli form yaklaşımı ile lineer bir sistem için kayma yüzeyi tasarımına değinilmiştir.

Aşağıdaki gibi doğrusal zamanla değişmeyen bir sistem verilmiş olsun [23,31].

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad (3.21)$$

Burada  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $x \in R^n$  ve  $u \in R^m$  olsun. Bu eşitlik ile verilen kayma yüzeyi denkleminde  $S$  sistemi kararlı davranıracak şekilde seçilmelidir.

Yukarıdaki denklem ile verilen sistemin durum denklemlerinden sadece  $m$  tanesinin kontrol işaretini içermesi  $n - m$  kadarının içermemesi gereklidir. Bu sebeple sistemin kontrol kuralı içeren ve içermeyen iki alt sistem haline getirilmesi gereklidir

[32]. Bunun için gerekli matrisel dönüşümler yapılır. Tek girişli düşük dereceli sistemlerde matrisel dönüşüm gerekmez. Dönüşümü sağlayacak olan matris  $T$  tekil olmamak üzere  $z = Tx$  olarak kabul edilsin [23].

$$\begin{aligned} z &= Tx \\ \dot{z} &= T(Ax + Bu) \\ \dot{z} &= TAx + TBu \\ \dot{z} &= TAT^{-1}z + TBu \end{aligned} \quad (3.22.)$$

Burada  $TAT^{-1} = K$  ve  $TB = L$  değişiklikleri yapılırsa sistem aşağıdaki şekli alır.

$$\dot{z} = Kz + Lu \quad (3.23)$$

(3.23) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= K_{11}z_1 + K_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 &= K_{21}z_1 + K_{22}z_2 + Lu \end{aligned} \quad (3.24)$$

Böylelikle kontrol girişi içeren ve içermeyen iki alt sistem elde edilmiş olur. Bu gösterim literatürde “düzenli form” olarak adlandırılır. Matrisel dönüşüm ile durum denklemleri dönüşüm içeren ve içermeyen iki alt sisteme ayrıldıktan sonra kayma yüzeyi tasarımı gerçekleştirilir.

$$s(t) = Sz = [S_1 \quad S_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$s(t) = S_1z_1 + S_2z_2 \quad (3.26)$$

Burada  $S_1 \in R^{1 \times (n-m)}$ ,  $S_2 \in R^1$  şeklinde tanımlıdır. Sistemin kayma yüzeyi üzerinde kararlı olabilmesi için

$$s(t) = S_1z_1 + S_2z_2 = 0 \quad (3.27)$$

olmalıdır. Bu durumda  $S_1 z_1 + S_2 z_2 = 0$  eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten

$$z_2 = -S_2^{-1} S_1 z_1 \quad (3.28)$$

elde edilir. Bu ifade ayrılmış durum denklemlerinde yerine konulursa

$$\dot{z}_1 = [K_{11} - K_{12} S_2^{-1} S_1] \cdot z_1 \quad (3.29)$$

elde edilir. Bu denklem ideal kayma hareketini verir.  $z_2$  dinamiği  $z_1$  dinamiğinde matematiksel ilişki ile belirlenebilir. Bu durumda derecesi azaltılmış  $z_1$  diferansiyel denklem bütün sistemin dinamiğini tanımlar. Bu durumda  $z_1$ 'in kararlı olması; bütün sistemin kararlı olması demektir. Dolayısıyla  $[K_{11} - K_{12} S_2^{-1} S_1]$  ifadesinin özdeğerlerinin gerçel kısımlarının negatif olması indirgenmiş sistemin kararlı olması için yeterlidir. Bunun için kutup yerleştirme ve optimal kontrol gibi klasik geri besleme tasarım yöntemleri kullanılabilir. Burada var olma problemi  $S_2^{-1} S_1$  değerinin belirlenmesidir. Burada  $S_2$  katsayı matrisi tersinin var olması şartı ile keyfi seçilebilir.  $S_1$  ve  $S_2$  değerleri bulunduktan sonra kayma yüzeyi parametreleri elde edilmiş olur [31].

### 3.5.5. Kayma yüzeyine erişim koşulları

Kayma kipine erişmeyi sağlayacak olan kontrol yapısının ve kazançlarının belirlenmesi “erişim problemi” reachability problem olarak adlandırılır. Erişim problemi kayma yüzeyine bağlı olduğundan erişim problemi çözülmeyen kontrol kuralı tasarlanamaz.

Aşağıda kayma kipli kontrol sistemlerinin tasarımında kullanılan erişim koşulları tanıtılmıştır [31].

### 3.5.5.1. Doğrudan anahtarlama fonksiyonu yaklaşımı

İlk kullanılan kayma yüzeyine ulaşma koşuludur. Kayma yüzeyini çevreleyen yerel bir bölgede durum yörüngeleri kayma yüzeyine doğru yaklaşmalıdır. Burada kayma kipinin var olma durumu aşağıdaki gibi ifade edilebilir [8,27,31].

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ds}{dt} < 0 \quad (3.30)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{ds}{dt} > 0 \quad (3.31)$$

(3.30) ve (3.31) ifadeleri

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{ds}{dt} < 0 \quad (3.32)$$

şeklinde birleştirilebilir. Bu koşullar doğrudan anahtarlama fonksiyonu koşulları olarak adlandırılırlar.

### 3.5.5.2. Erişim kuralı yaklaşımı

Erişim kuralı yaklaşımı doğrudan anahtarlama fonksiyonu dinamiğini belirler.  $Q$  ve  $K$  diagonal matrisler olmak üzere anahtarlama fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilsin [21].

$$\dot{s} = -Qsgn(s) - Kf(s) \quad (3.33)$$

Burada  $sgn(s)$  işaret fonksiyonu ve  $f(s)$  skaler fonksiyondur. Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$sgn(s) = [sgn(s_1) \dots sgn(s_m)]^T \quad (3.34)$$

$$f(s) = [f_1(s_1) \dots f_m(s_m)]^T \quad (3.35)$$

Burada  $f_i$  skaler fonksiyonu  $s_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) için  $s_i(x) \cdot \dot{s}_i(x) > 0$  koşulunu sağlar.

Erişim kuralındaki  $sgn(\cdot)$  işaret fonksiyonu  $s \cdot sgn(s) = |s|$  sağlayacak şekilde;

$$sgn(s) = \begin{cases} -1 & s < 0 \\ 0 & s = 0 \\ 1 & s > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

değerlerini alır.  $Q$  ve  $K$ 'nin değişik değerleri farklı yapıya sahip erişim kuralları oluşturur. Aşağıda bu kurallardan bazıları gösterilmiştir.

- Sabit değişimli erişim kuralı  $\dot{s} = -Q \cdot sgn(s)$
- Sabit ve oransal değişimli erişim kuralı  $\dot{s} = -Q \cdot sgn(s) - Ks$
- Üstel değişimli erişim kuralı  $\dot{s} = -K|s|^a sgn(s)$

### 3.5.5.3. Lyapunov erişim kuralı

Kayma yüzeyinin ulaşılabilirliği hakkında yorum yapılmadan önce Lyapunov'un ikinci kararlılık kuralının hatırlanmasında yarar vardır.

Lyapunov 2. Metodu; lineer ya da non-lineer sistemlerin zaman domeninde çözümü bilinmeden kararlılığının incelenbilmesi olanağını veren metoddur [33].

Bir sistemde depolanan enerjiyi ya da enerjiye eşdeğer bir değişimi gösteren zamana bağlı bir  $y(t)$  fonksiyonu için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty \quad (3.37)$$

durumu söz konusu ise bu sistem kararsızdır. Eğer,  $n$  bir sabit olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = n \quad (3.38)$$

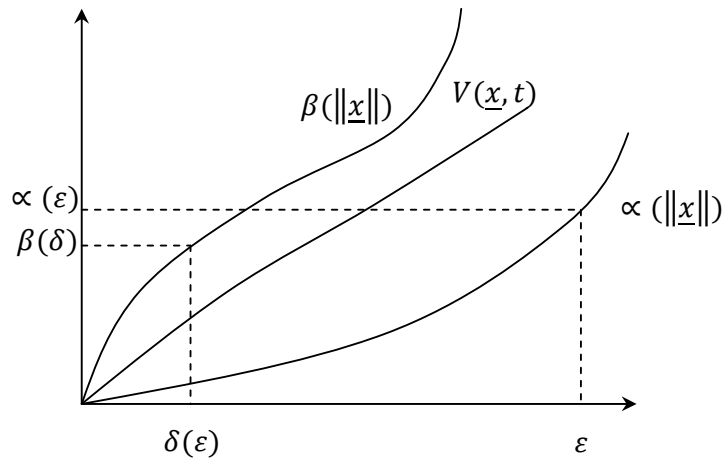
durumu söz konusu olursa sistem kararlı bir sistemdir.

Lyapunov'un 2. Metodu, Lyapunov fonksiyonu adı verilen bir hayali fonksiyonun belirlenmesinden ibarettir. Lyapunov fonksiyonu genel olarak  $V(\underline{x}, t)$  şeklinde gösterilir. Lyapunov fonksiyonu  $x_1 x_2 \dots x_n$  ve  $t$ 'nin bir fonksiyonudur. Fonksiyon içinde  $t$  açıkça yer almıyorsa Lyapunov fonksiyonu  $V(\underline{x})$  olarak gösterilir. Lyapunov'un 2. metodunda  $V(\underline{x}, t)$ 'nin türevinin işaret değişimi incelenir.

Teorem:  $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, t)$  sisteminin denge durumunun faz uzayında orijin ( $f(0, t) = 0, \forall t$  için) olmak üzere birinci kısmi türevleri sürekli olan  $V(\underline{x}, t)$  skaler fonksiyonu mevcutsa ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa sistem  $\underline{x} = \underline{0}$ 'da düzgün olarak asimtotik kararlıdır.

- $V(\underline{x}, t)$  kesin pozitif tanımlı ise
- $\alpha, \alpha(0) = 0$  olan sürekli ve azalmayan bir skaler fonksiyon olmak üzere;  
 $V(\underline{x}, t) \geq \alpha(\|\underline{x}\|) > 0 \quad \forall t \text{ ve } \forall \underline{x} \neq 0$  ise
- $\beta, \beta(0)=0$  sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olmak üzere  
 $V(\underline{x}, t) \leq \beta(\|\underline{x}\|) \quad \forall t \text{ ve } \forall \underline{x} \neq 0$  ise
- $\dot{V}(\underline{x}, t), \forall t \text{ ve } \forall \underline{x} \neq 0$  için kesin negatif yani enerji azalıyor ise
- $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} \alpha(\|\underline{x}\|) = \infty$  ise

sistem asimtotik kararlıdır.



Şekil 3.20. Lyapunov fonksiyonu

Bu koşulların sonucunda;  $x \in R^n$  ve kesin pozitif tanımlı birinci parçalı türevleri sürekli olan bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak  $\dot{x} = f(x, t)$  sisteminin kararlılığı için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Seçilen Lyapunov fonksiyonu  $V(x, t)$ 'nin özellikleri;

$$\begin{aligned} V(x, t) &> 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \\ V(x, t) &= 0 \quad x = 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \end{aligned} \quad (3.39)$$

koşullarını sağlıyorsa  $V(x, t)$  fonksiyonu kesin pozitif tanımlı bir fonksiyondur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &> 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \\ \dot{V}(x, t) &= 0 \quad x = 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \end{aligned} \quad (3.40)$$

koşulları sağlanıyorsa  $\dot{V}(x, t)$  kesin pozitifdir ve sistem kararsız bir sistemdir.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &< 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \\ \dot{V}(x, t) &= 0 \quad x = 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \end{aligned} \quad (3.41)$$

koşulları sağlanıyorsa  $\dot{V}(x, t)$  kesin negatiftir ve sistem düzgün asimtotik kararlı bir sistemdir.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &\leq 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \\ \dot{V}(x, t) &= 0 \quad x = 0 \text{ ve } \forall t \text{ için} \end{aligned} \quad (3.42)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda  $\dot{V}(x, t)$  yarı-kesin negatiftir ve sistem düzgün kararlı bir sistemdir.



Kısaca kesin pozitif tanımlı bir Lyapunov fonksiyonu seçildikten sonra, fonksiyonun türevinin kesin pozitif, kesin negatif veya yarı-kesin negatif olup olmadığına bakılarak sistemin kararlılığı incelenir [33].

Bu bilgilerin ışığında kayma yüzeyinin ulaşılabilirliği analizi rahatlıkla yapılabilir. Aşağıda ele alınacak ikinci dereceden bir sistem verilmiştir.

$$\ddot{x}(t) + f(x, t) = \underline{u}(t) \quad (3.43)$$

Bu sistem için kayma kipli denetim kontrol kuralı aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\underline{u}(t) = -k_1x(t) - k_2\dot{x}(t) - \rho \cdot \text{sign}(s(t)) \quad (3.44)$$

Kontrol girişinin lineer bölümü, sistemin yapısına uyan durum geri besleme kuralıdır ve lineer kontrol kuralındaki sistem girişinin yapısıyla aynıdır.  $S_2=1$  alındığında ve  $S_2^{-1}S_1$  yerine  $m$  kullanıldığında kayma yüzeyi  $s(t) = mx(t) + \dot{x}(t)$  şeklinde yazılabilir. Burada  $S_1$  veya  $S_2$  değerlerinden herhangi birisi kayma yüzeyini tanımlamak için yeterlidir.

$$s(t) = mx(t) + \dot{x}(t) \quad (3.45)$$

Lyapunov'un 2. metoduna göre kesin pozitif bir Lyapunov fonksiyonu seçilmelidir

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2 \quad (3.46)$$

Fonksiyonun türevi alındığında

$$\dot{V}(s) = s \cdot \dot{s} \quad (3.47)$$

olur. Sistemin kararlı sayılabilmesi için  $\dot{V}(s)$  fonksiyonu negatif tanımlı olmalıdır

$$s \cdot \dot{s} < 0 \quad (3.48)$$

koşulu sağlanmalıdır. Kayma fonksiyonu koşulda yerine yazılırsa,

$$s \cdot \dot{s} = s(m\dot{x} - \ddot{x}) \quad (3.49)$$

olur. Kontrol kuralı bu fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$s \cdot \dot{s} = s(m\dot{x} - k_1x - k_2\dot{x} - \rho \cdot \text{sign}(s) - f) \quad (3.50)$$

Tüm parametreler pozitif olmak üzere  $k_1 = \phi \cdot m$  ve  $k_2 = \phi + m$  durum geri besleme parametrelerinin uygun seçilmesiyle ve  $m\dot{x} + \ddot{x}$  yerine  $s$ ,  $s \cdot \text{sign}(s)$  yerine  $|s|$  konulursa,

$$s\dot{s} = -\phi s^2 - \rho|s| - fs \quad (3.51)$$

şeklini alır. Burada yine;  $\eta$ , pozitif tasarım parametresi olmak üzere  $\rho = f + \eta$  şeklinde bir yerleştirme yapılırsa denklem aşağıdaki gibi olur.

$$s\dot{s} = -\phi s^2 - \eta|s| \quad (3.52)$$

Bu denklem her durumda negatif bir değer alacaktır. Lyapunov'un 2. metoduna göre bu durumda kayma yüzeyine sınırlı bir sürede ulaşılabilir. Bu denklemdeki  $\eta$  küçük parametre ihmal edilirse elde edilen diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi olur [31].

$$|s(t)| = |s(0)| \cdot e^{-\phi t} \quad (3.53)$$

Buraya kadar özetlenecek olursa, kayan kipli denetimin kontrol girişi, sistemi sınırlı bir zamanda kayma yüzeyine götürüp, sistemin kayma yüzeyi üzerinde sönümünün gerçekleşmesine sebep olur.

### 3.5.6. Kontrol kuralı tasarımı

Kayma yüzeyinin parametrelerinin hesabından sonra sistemi kayma yüzeyinde tutacak bir anahtarlamalı geri besleme kontrol kuralı çıkarılmalıdır.

#### 3.5.6.1. Lineer kontrol kuralı

Düzenli form yaklaşımıyla kayma yüzeyi tasarımında indirgenmiş sistemin kayma yüzeyi

$$s(t) = S_1 z_1 + S_2 z_2 = 0 \quad (3.54)$$

şeklinde ifade edilmişti. Burada  $S_2^{-1} S_1 = M$  olmak üzere kayma yüzeyi

$$s(t) = M z_1 + z_2 \quad (3.55)$$

şeklinde ifade edilebilir. Kayma kipli kontrolde sistemin durum değişkenleri kayma yüzeyinde iken kayma yüzeyi

$$s(t) = M z_1 + z_2 = 0 \quad (3.56)$$

ile tanımlanabilir. (3.56) denkleminin türevi alınıp (3.54) denkleminde yerine yazılırsa

$$\dot{s}(t) = M(K_{11} z_1 + K_{12} z_2) + K_{21} z_1 + K_{22} z_2 + Lu = 0 \quad (3.57)$$

şeklinde bir ifade elde edilir.  $Q$  diyagonal matris olmak üzere erişim kuralı olarak sabit değişimli bir erişim kuralı seçilirse erişim kuralı

$$\dot{s}(t) = -Q \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (3.58)$$

olur. Bu erişim kuralı ile sistem durumu zamanla  $s(t) = 0$  olan alt uzaya yönelir ve bu uzayda yukarıdaki tanımlar gereği kararlı bir alt uzay olup faz uzayında durum yörüngesini orijine yönlendirir. Burada son iki denklem birbirine eşitlenirse

$$\dot{s}(t) = M(K_{11}z_1 + K_{12}z_2) + K_{21}z_1 + K_{22}z_2 + Lu = -Q \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (3.59)$$

ifadesi elde edilir. Buradan da  $u$  çekilirse

$$u = -L^{-1}[(M \cdot K_{11} + K_{21})z_1 + (M \cdot K_{12} + K_{22})z_2 + Q \cdot \text{sgn}(s)] \quad (3.60)$$

kontrol girişi elde edilir. Elde edilen kontrol girişi çok girişli lineer bir sistem içindir. Sistem tek girişli bir sistem olsaydı,  $l$  ve  $\rho$  sabit katsayılar olmak üzere kontrol girişi

$$u = -\frac{1}{l}[(M \cdot K_{11} + K_{21})z_1 + (M \cdot K_{12} + K_{22})z_2 + \rho \cdot \text{sgn}(s)] \quad (3.61)$$

şeklinde ifade edilebilir [23]. Burada  $\rho$  parametresi sistemin kayma yüzeyi üzerindeki kararlılığını güçlü kılar. Şimdiye kadar yapılan işlemlerde  $T$  dönüşümü yapılmış olan sistemden yararlanıldığından, kontrol kuralı sisteme uygulanmadan önce ters  $T$  dönüşümü yapılmalıdır.

### 3.5.6.2. Non-linear kontrol kuralı

Aşağıdaki verildiği gibi bir nonlinear sistem tanımlansın.

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \quad (3.62)$$

Aynı zamanda  $m$  adet anahtarlama yüzeyi elemanı tanımlansın

$$s = \{x \in R^n: \underline{s}(x) = [S_1(x) \dots \dots S_m(x)]^T = 0\} \quad (3.63)$$

$$s(x) = 0 \quad (3.64)$$

olduğundan zincir kuralına göre

$$\dot{s}(x) = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot [f(x) + g(x) \cdot u(t)] = 0 \quad (3.65)$$

olmalıdır [31].

Erişim koşulu  $\dot{s}(x) = -Q \cdot \text{sgn}(s(t))$  şeklinde seçilirse

$$\dot{s}(x) = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot [f(x) + g(x) \cdot u(t)] = -Q \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (3.66)$$

Buradan  $u$  çekilirse non-lineer kontrol kuralı aşağıdaki gibi olur [21].

$$u_N(t) = - \left[ \frac{ds}{dx} g(x) \right]^{-1} \cdot \left[ \frac{ds}{dx} \cdot f(x) + Q \cdot \text{sgn}(s(t)) \right] \quad (3.67)$$

şeklinde non-lineer kontrol kuralı elde edilir.

### 3.5.6.3. Lyapunov eşdeğer kontrol kuralı

Lyapunov eşdeğer kontrol kuralı non-lineer sistemlerin kararlılık incelemesinde en çok kullanılan yöntem olduğundan kayan kipli kontrolcü tasarımında da en çok kullanılan yöntemdir[10]. Lyapunov kararlılık kriterine göre sistemin değişkenlerini içeren pozitif tanımlı bir fonksiyon seçilir. Bu fonksiyona Lyapunov fonksiyonu denir. Sistemin kararlı olabilmesi için Lyapunov fonksiyonunun türevinin negatif tanımlı olması gerekir. Aşağıdaki gibi bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanırsa,

$$V(\underline{s}) = \frac{1}{2} \underline{s}^T \underline{s} \quad (3.68)$$

kararlılık için  $V(\underline{s}) > 0$  pozitif tanımlı ve  $\dot{V} \leq 0$  negatif yarı-tanımlı şartları sağlanmalıdır. Bu durumda,

$$\frac{1}{2} \underline{s}^T \underline{s} > 0 \quad (3.69)$$

ve

$$\frac{dV(\underline{s})}{dt} = \frac{dV(\underline{s})}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{\underline{s}^T \underline{\dot{s}}}{2} + \frac{\underline{s}^T \underline{\dot{s}}}{2} \leq 0 \quad (3.70)$$

olmalıdır. (3.70) eşitliği düzenlenirse

$$\frac{dV(\underline{s})}{dt} = \underline{s}^T \underline{\dot{s}} \leq 0 \quad (3.71)$$

olur. Sistemin izlemesi istenen kayan yüzey, tüm hiperuzayda var olduğu kabul edilmek üzere kayma yüzeyi aşağıdaki gibi tanımlanabilir [9,34,35].

$$\underline{s} = [G]e \quad (3.72)$$

Burada  $G$  matrisi hiper uzayda kayan yüzey eğimini içeren matris,  $e$  ise sistemin mevcut durumları ile referans durumları arasındaki fark yani hata vektörüdür.

$$\underline{e} = \underline{x}_r - \underline{x} \quad (3.73)$$

Hata vektörü yukarıdaki denklemden yerine yazılarak, denklemin türevi alınır

$$\underline{\dot{s}} = [G][\underline{\dot{x}}_r - \underline{\dot{x}}] \quad (3.74)$$

Sistemin faz uzayında yörüngesi kayma yüzeyinin üzerinde olduğunda

$$\underline{\dot{s}} = [G][\underline{\dot{x}}_r - \underline{\dot{x}}] = 0 \quad (3.75)$$

olur. Non-lineer denklem sistemi yukarıdaki denklemin içine yazılırsa,

$$[G][\underline{\dot{x}}_r - f(\underline{x}) - B(\underline{x})\underline{u}] = 0 \quad (3.76)$$

elde edilir. Buradan  $\underline{u}$  kontrol girişi çekildiğinde elde edilen ifadeye “eşdeğer kontrol” denir [7,24,36].

$$\underline{u}_{eq} = [GB]^{-1}[G][\dot{\underline{x}}_r - f(x)] \quad (3.77)$$

Elde edilen kontrol giriş, sistemi kayma yüzeyine itecek olan yüksek frekanslı kontrol girişini içermez. Bu yüzden eşdeğer kontrol sistemi ancak kayma yüzeyi üzerinde iken geçerlidir. Sistemi kayma yüzeyine götürecektir ve tutacak başka bir terim gereklidir. Bunun için başka bir Lyapunov fonksiyonu seçilir [10].

$$V(\underline{s}) = \frac{1}{2}\underline{s}^T[W]\underline{s} \quad (3.78)$$

Burada  $W$  pozitif tanımlı bir matristir. Kararlılık için Lyapunov fonksiyonunun türevi negatif olması gerektiğinden, türevi negatif kabul edilen başka bir Lyapunov fonksiyonu seçilir.

$$\frac{dV(\underline{s})}{dt} = -\underline{s}^T[D]sign(\underline{s}) < 0 \quad (3.79)$$

Burada  $D$  pozitif tanımlı bir matristir.  $s^T$  pozitif bir ifade olduğunda  $sign(s)$  ifadesi de pozitif olur. Yukarıdaki denklemin türevi alınır

$$\frac{dV(\underline{s})}{dt} = \underline{s}^T[W]\dot{\underline{s}} \quad (3.80)$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Son iki denklem birbirine eşitlenirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-[D]sign(\underline{s}) = [W]\dot{\underline{s}} \quad (3.81)$$

ifadesi elde edilir. Kayma yüzeyinin türevi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$-[D]sign(\underline{s}) = [W][[G](\dot{\underline{x}}_r - f(x) + B(x)\underline{u})] \quad (3.82)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden  $u$  kontrol girişi ifadesi çekilirse

$$\underline{u} = [GB]^{-1}[G] \left( \dot{\underline{x}}_r - f(x) \right) + [GB]^{-1}[D] \text{sign}(\underline{s}) \quad (3.83)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin ilk terimi eşdeğer kontrol ifadesidir.  $[K] = [GB]^{-1}[D]$  şeklinde bir kısaltılmış ifade kullanılırsa kontrol girişi

$$\underline{u} = \underline{u}_{eq} + [K] \text{sign}(\underline{s}) \quad (3.84)$$

kontrol girişi ifadesi elde edilir.  $K$  matrisinin içinde bulunan  $G$  ve  $D$  matrisleri tasarımcı tarafından belirlenirler [10,36]. Bu kontrol girişindeki işaret fonksiyonlu terim sistemin faz uzayındaki yörüngesini kayma yüzeyine çeker. Sistem kayma yüzeyi üzerinde iken işaret fonksiyonu sıfır değerini alacağından işaret fonksiyonunun kayma yüzeyinde bir etkisi olmaz. Sistem kayma yüzeyine ulaştıktan sonra eşdeğer kontrol terimi devreye girer ve sistemi kararlı hale getirir.

### 3.5.7. Çatırtı indirgeme

Çatırtı mekanik problemlerin ortadan kaldırılması için, çözülmesi gereken bir problemdir. Çatırtı, sistemlerin kontrolünde hassasiyet derecesini düşürür, mekanik hızlı sistemlerin ani hareket etmesine ve elektrik devrelerinde ısıl kayıplara neden olur. Bunun için çeşitli yöntemler mevcuttur. Bulanık mantıkla indirgeme, işaret fonksiyonunun farklı matematiksel yaklaşımı vb. yöntemler kullanılabilir. Özellikle işaret fonksiyonunun

$$\text{sgn}(s) = \frac{s}{|s| + \delta} \quad (3.85)$$

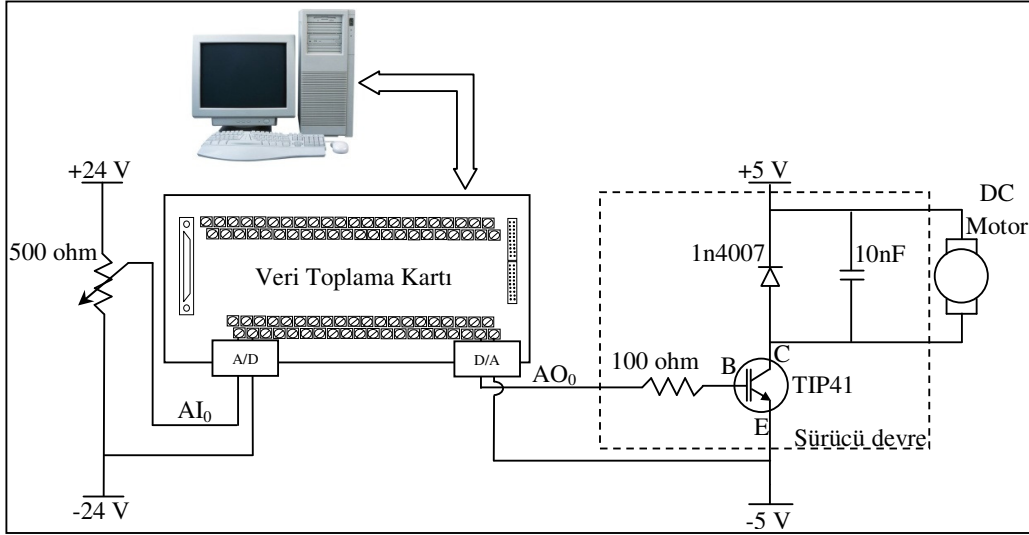
şeklindeki yaklaşım ile yumuşatılması, kayan kipli kontrolde çatırdama etkisinin kısmen de olsa azalmasını sağlamaktadır [20]. Burada  $\delta$  sabiti değiştirilerek işaret fonksiyonunun etkisi azaltılabilir. Ancak böyle bir durumda kayan kipli kontrol gürbüzlük özelliğini kaybeder.



## BÖLÜM 4. DENEY DÜZENEGİ

### 4.1. Giriş

Asılı sarkacın kayma kipli kontrolü için Şekil 4.1'deki deney düzeneği kullanılmıştır.



Şekil 4.1. Deney düzeneği

Şekil 4.1'de görüldüğü gibi; deney düzeneği sarkaç açısını ölçen gerilim bölücü döner bir potansiyometre, bilgisayar bağlantılı bir veri toplama kartı ve bir motor sürücü devresinden oluşmaktadır.

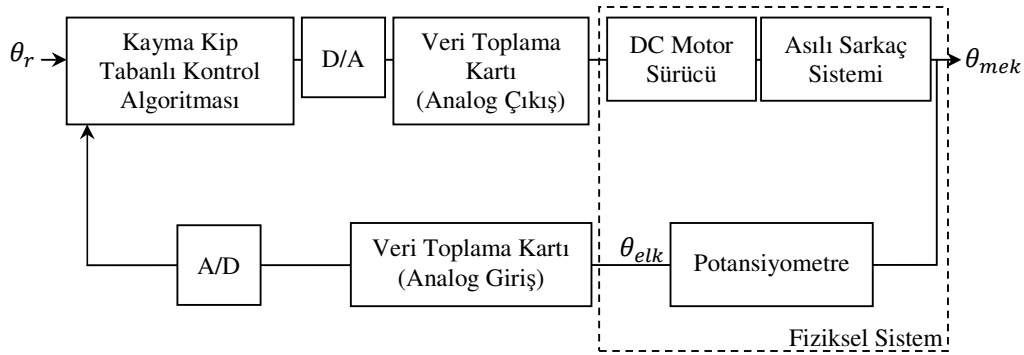
Potansiyometre proses büyüklüğü olan sarkacın açısız yer değiştirmesini elektriksel büyüklüğe dönüştürür.

Veri toplama kartı, potansiyometre ile elde edilen analog işareti sayısala dönüştürerek bilgisayara aktarılmasını ve amaçlanan kontrol algoritması ile elde edilen sayısız kontrol işaretinin analoga dönüştürülerek sürücüye uygulanmasını

sağlar. Sürücü devre ise girişine uygulanan kontrol sinyaline göre motorun hızını ayarlar.

#### 4.2. Sistemin Çalışması

Kontrolü amaçlanan sistem tek girişli ve tek çıkışlı bir sistem olup kayma kipli kontrole dayalı kontrol algoritması Labview programlama dilinde programlanmıştır.



Şekil 4.2. Deney düzeneğine ilişkin işlevsel blok gösterimi

Sistemin çalışması şu şekilde özetlenebilir: Kontrolü amaçlanan  $\theta$  açısına ilişkin potansiyometre çıkış gerilimi A/D dönüştürücü üzerinden sayısal olarak dönüştürülerek bilgisayara kaydedilir. Kaydedilen bu sayısal açı değerleri referans açı ile karşılaştırılarak gerekli hata işareti elde edilir. Her bir örnekleme aralığı için elde edilen  $e(k)$  hata işareti kullanılarak kontrol algoritması yürütülür. Kontrol algoritmasının icrası sonucunda elde edilen sayısal  $u(k)$  kontrol işareti D/A dönüştürücü üzerinden analoğa dönüştürülerek sürücü devresinin girişine uygulanır. Bu işlemler her bir örnekleme aralığı için icra edilerek amaçlanan kontrol işlemi gerçekleştirilmiş olur. Burada örnekleme frekansı  $f_s = 10 \text{ kHz}$  olarak seçilmiştir.

## BÖLÜM 5. MODELLEME

### 5.1. Giriş

Asılı sarkaç sisteminin benzetim çalışmaları için, sistemin çalışma noktasına ilişkin matematiksel modelinin bilinmesi gerekir. Bunun için sistemin basamak girişine ilişkin cevap eğrisi kullanılabilir. Bu bölüm asılı sarkaç sisteminin basamak cevabı kullanılarak deneysel yolla sisteme ilişkin yaklaşık matematiksel model elde edilecektir.

### 5.2. Asılı Sarkacın Lineer Modeli

Asılı sarkacın matematiksel modeli daha önce de belirtildiği gibi aşağıdadır.

$$j\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + m_L g d \sin\theta = T \quad (5.1)$$

(5.1) eşitliği  $j$  ile sadeleştirilip  $\ddot{\theta}$  çekilirse

$$\ddot{\theta} = \frac{c}{j}\dot{\theta} - \left(\frac{m_L g d}{j}\right) \sin\theta + \frac{T}{j} \quad (5.2)$$

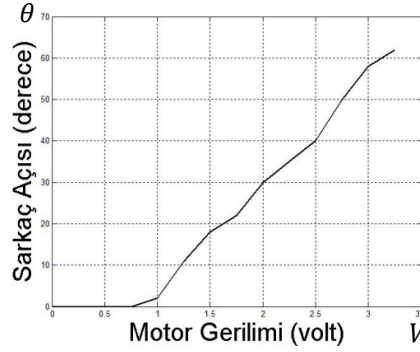
şeklinde bir matematiksel ifade elde edilir. Elde edilen bu ifadede kontrol girişi

$$u = \frac{T}{j} \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Sistemin kontrol girişindeki  $T$ , asılı sarkaçta DC motora bağlı pervanenin oluşturduğu kuvvetten kaynaklanan tork kuvvetidir. Pervanenin oluşturduğu kuvvet  $F$  olmak üzere kontrol girişi

$$u = \frac{F\left(\frac{1}{2}L+d\right)}{j} \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Görüldüğü gibi; sistemde gerekli torku sağlayabilecek olan parametre  $F$  kuvvetidir. Ancak, DC motora verilen gerilim ile pervanenin oluşturduğu  $F$  kuvveti arasındaki transfer fonksiyonu; fiziksel olarak ölçüm zorluklarından ya da imkansızlıklardan tam olarak bilinmemektedir. Bu yüzden sistem deneysel yolla modellenmelidir. Bunun için motora değişik düzeyde gerilimler uygulanarak, her bir farklı gerilim düzeyine karşılık gelen açı değerleri kaydedilir. Söz konusu deneysel sonuçlar ile elde edilen sisteme ilişkin statik karakteristik eğrisi aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 5.1. Asılı sarkaç sistemine ilişkin statik karakteristik eğrisi (deneysel)

Grafikten görüldüğü gibi sistem  $0^\circ$  ile  $60^\circ$  arasında yaklaşık olarak doğrusal bir karakteristiğe sahiptir. Dolayısıyla bu aralıkta sistem doğrusal kabul edilebilir. Bu durum sisteme uygulanan gerilim ile sistemde oluşan tork arasında sabit bir oran olduğu varsayımını mümkün kılar. Böylece sisteme verilen gerilim ile sistemde oluşan tork arasındaki ilişki,

$$T = K_m \cdot V \quad (5.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade sistemin türevsel denkleminde yerine konulduğunda sistemin türev denklemi aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$j\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + m_L g d \sin\theta = K_m V \quad (5.6)$$

Bu ifadeden yola çıkılarak sistemin giriş büyüklüğü gerilim olarak kabul edildiğinde sistemin transfer fonksiyonu

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{Km/j}{s^2 + \frac{c}{j}s + \frac{m_L g d}{j}} \quad (5.7)$$

şeklindedir. Bu transfer fonksiyonu ifadesi sistemin lineerleştirilmiş modeli olduğundan, sadece sistemin lineer bölgesi için geçerlidir.

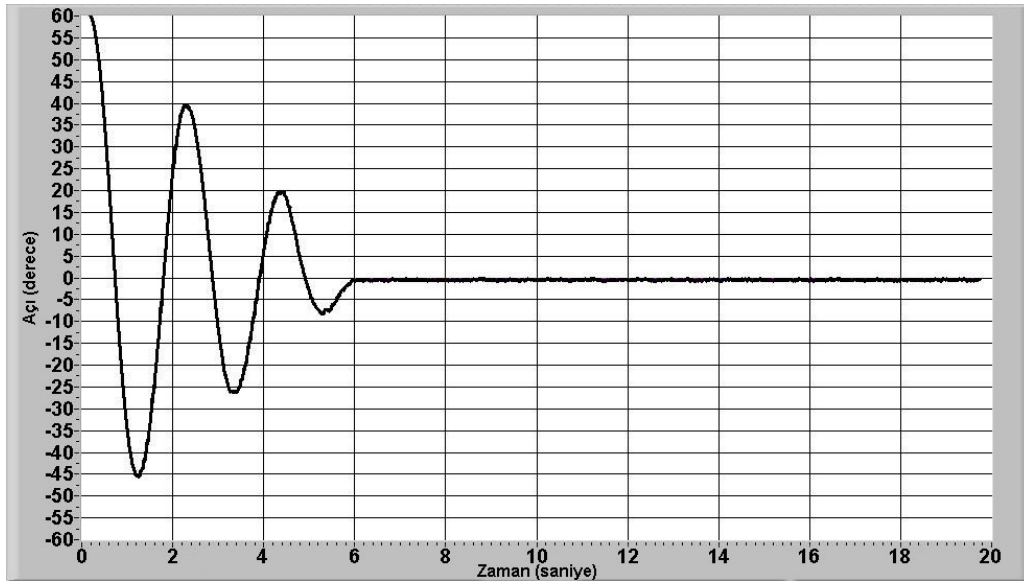
İkinci dereceden bir sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki genel ifade ile verilebilir.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \cdot (\omega_n)^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + (\omega_n)^2} \quad (5.8)$$

Burada  $\zeta$  sönüm oranını,  $\omega_n$  doğal frekansı belirtir. Bu fonksiyondaki payda, karakteristik fonksiyondur. Görüldüğü gibi sistemin karakteristik fonksiyonunda yer alan  $\zeta$  ve  $\omega_n$  değerleri bilindiğinde sistem ikinci dereceden bir sistem olarak ifade edilebilmekte ve transfer fonksiyonu çıkarılabilmektedir. Elde edilen ikinci dereceden transfer fonksiyonu, asılı sarkaç sisteminin lineer modeliyle karşılaştırılarak lineer modeldeki parametreler hesaplanabilir.

Bu bilgilerin ışığında, lineer modelin tepkisi incelenerek  $\zeta$ ,  $\omega_n$  ve  $K_m$  değerleri hesaplandığında sistemin transfer fonksiyonu deneysel yolla elde edilebilir.

### 5.3. Asılı Sarkaç Sisteminin Parametrik Modelinin Elde Edilmesi



Şekil 5.2. Deney düzeneğine ilişkin çıkış eğrisinin zamana göre değişimi

Deney düzeneğinden yararlanılarak, asılı sarkacın  $60^\circ$ 'lik konumdan serbest bırakılması durumunda elde edilen deneysel çıkış eğrisi Şekil 5.2'de verilmiştir. Söz konusu deneysel salınım grafiğinden iki tepe noktasının genlik, zaman ve iki tepe arasındaki tepe sayısı değerleri ölçülür. Sistemin  $\zeta$  ve  $\omega_n$  değerleri bu ölçüm değerleri ile hesaplanır [18,37].

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 39^\circ & t_1 &= 2.4sn \\
 P_2 &= 19^\circ & t_2 &= 4.4sn \\
 N &= 1
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Sönüm Frekansı

$$\omega_d = \frac{2N\pi}{(t_2 - t_1)} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{(4.4 - 2.4)} = 3.1416 \text{ rad/sn} \tag{5.10}$$

Sönüm Oranı

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\sqrt{4 \cdot (\pi)^2 N^2 + \left[\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\right]^2}} = 0.1137 \quad (5.11)$$

Doğal Frekans

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.1621 \text{ rad/sn} \quad (5.12)$$

Elde edilen değerlerle ikinci dereceden bir karakteristik fonksiyon oluşturulup, asılı sarkacın karakteristik fonksiyonu ile karşılaştırılırsa

$$s^2 + 2\zeta\omega_n + (\omega_n)^2 = s^2 + \frac{c}{j}s + \frac{m_L d g}{j} \quad (5.13)$$

$$(\omega_n)^2 = \frac{m_L d g}{j} \quad (5.14)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{c}{j} \quad (5.15)$$

ifadeleri elde edilir. Sistemle ilgili bilinen değerler ile bilinmeyen değerler hesaplanabilir. Bilinen değerler;

$$m_L = 0.36 \text{ kg}$$

$$d = 0.03 \text{ m}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (5.16)$$

olduğuna göre, bilinmeyen değerler

$$(\omega_n)^2 = \frac{m_L d g}{j} \Rightarrow 9.9989 = \frac{0.36 \cdot 0.03 \cdot 9.8}{j} \Rightarrow j = 0.0106 \text{ kgm}^2 \quad (5.17)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{c}{j} \Rightarrow 0.7191 = \frac{c}{0.0106} \Rightarrow c = 0.0076 \text{ Nms/rad} \quad (5.18)$$

şeklinde bulunur.

Bir asılı sarkaca belirli bir gerilim uygulandığında, sistem belirli bir açıya gelecek ve duracaktır. Kararlı haldeki bu açı sabit olduğunda sistemin türevsel durumları sıfır olacaktır. Sürekli durumdaki açı  $\theta_{ss}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_{ss} \\ \dot{\theta} &= \ddot{\theta} = 0\end{aligned}\quad (5.19)$$

olacaktır. Bu ifadeler sistemin türevsel denkleminde yerlerine yerleştirilirse,

$$m_L g d \theta_{ss} = K_m V \quad (5.20)$$

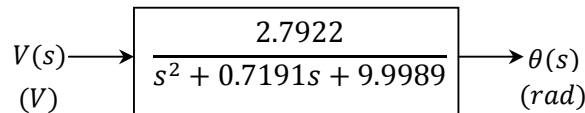
ifadesi elde edilir. Sisteme verilen belirli bir gerilime karşılık sistemde oluşan açı bilindiğinde bu ifadedeki  $K_m$  değeri hesaplanabilir.

$$K_m = \frac{m_L \cdot g \cdot d \cdot \theta_{ss}}{V} \Rightarrow \frac{0.36 \cdot 9.8 \cdot 0.03 \cdot 40 \cdot (\pi/180)}{2.5} \Rightarrow K_m = 0.0296 \quad (5.21)$$

Elde edilen verilere göre sistemin yaklaşık transfer fonksiyonu sayısal olarak ifade edilebilir.

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_m/j}{s^2 + \frac{c}{j}s + \frac{m_L g d}{j}} = \frac{2.7922}{s^2 + 0.7191s + 9.9989} \quad (5.22)$$

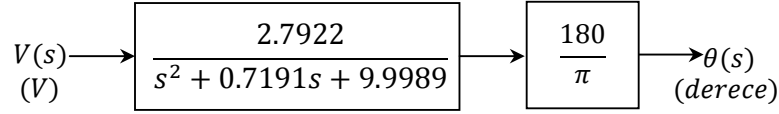
(5.22) ifadesi model benzetimlerinde kullanılacak ifadedir. Sarkacın blok şeması aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 5.3. Sarkaç sistemine ilişkin radyan cinsinden çıkışlı yaklaşık transfer işlevi



Elde edilen sisteme gerilim uygulandığında elde edilecek açı radyan cinsindedir. Bu yüzden çıkışın  $180/\pi$  ile çarpılmasıyla çıkış açısı dereceye dönüştürülebilir. Kontrol işareti volt, çıkış işareti derece olan asılı sarkaç transfer fonksiyonu



Şekil 5.4. Sarkaç sistemine ilişkin derece cinsinden çıkışlı yaklaşık transfer işlevi

#### 5.4. Asılı Sarkacın Kayma Kipli Kontrolü

Sisteme uygulanan torku ifade eden  $T = K_m V$  ifadesi göz önüne alınırsa sistemin lineer türev denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\ddot{\theta} = -\frac{c}{j}\dot{\theta} - \frac{m_L dg}{j}\theta + \frac{K_m 180}{j \pi}V \quad (5.23)$$

Asılı sarkacın bu ifadesiyle birlikte,  $e$  hata vektörü olmak üzere  $s(e, \dot{e}) = me + \dot{e}$  şeklinde bir kayma yüzeyi seçilerek Lyapunov'un eşdeğer kontrol kuralıyla kayma kipli kontrol girişi hesaplanabilir. Sistemin hata vektörü ve hata türev ifadeleri aşağıdadır [20,38,39,40].

$$\begin{aligned} e &= \theta_r - \theta \\ \dot{e} &= \dot{\theta}_r - \dot{\theta} \\ \ddot{e} &= \ddot{\theta}_r - \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Seçilen kayma yüzeyinin türevi alındığında

$$\dot{s} = m\dot{e} + \ddot{e} = 0 \quad (5.25)$$

elde edilir. Hata vektörü ve türevleri ifadedeki yerlerine yazılırsa,

$$\dot{s} = m(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}) + \ddot{\theta}_r - \ddot{\theta} = 0 \quad (5.26)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $\theta_r$ 'nin sabit olduğu düşünülürse  $\theta_r$ 'nin türevleri de sifıra eşit olacaktır. Dolayısıyla ihmal edilebilirler.  $\rho > 0$  olmak üzere  $\dot{s} = -\rho \cdot \text{sgn}(s)$  şeklinde bir erişme kuralı seçilirse ifade aşağıdaki hali alır.

$$\dot{s} = -m\dot{\theta} - \ddot{\theta} = -\rho \cdot \text{sgn}(s) \quad (5.27)$$

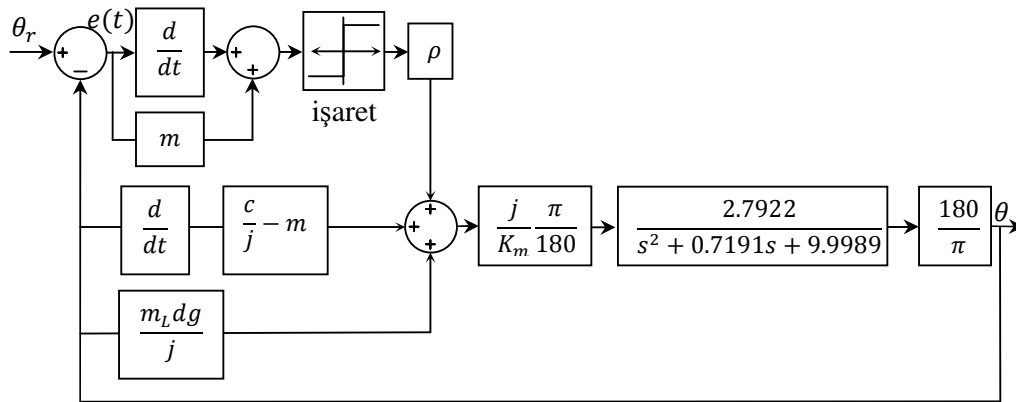
Asılı sarkacın türevsel ifadesi bu ifadedeki yerine yerleştirilirse,

$$-m\dot{\theta} + \frac{c}{j}\dot{\theta} + \frac{m_L dg}{j}\theta - \frac{K_m}{j} \frac{180}{\pi} V = -\rho \cdot \text{sgn}(s) \quad (5.28)$$

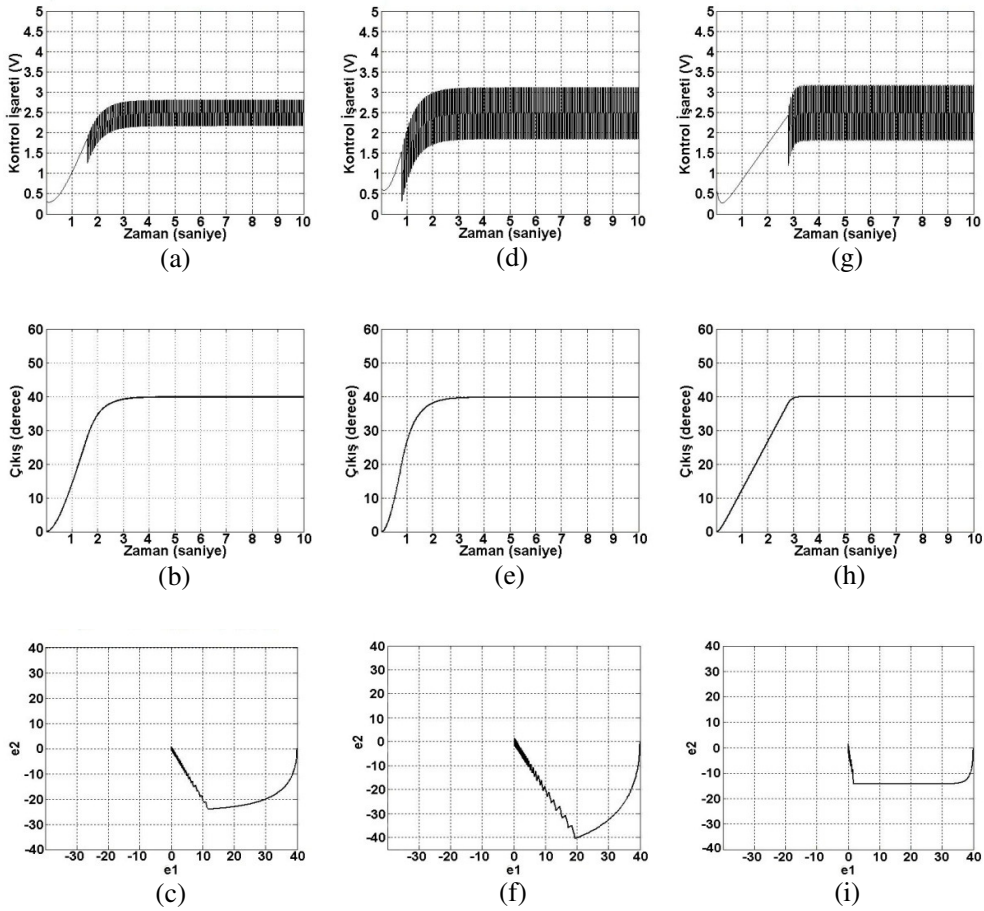
ifadesi elde edilir.  $V$  ifadesi yalnız bırakılırsa,

$$V = \frac{j}{K_m} \frac{\pi}{180} \left[ \left( \frac{c}{j} - m \right) \dot{\theta} + \frac{m_L dg}{j} \theta + \rho \cdot \text{sgn}(s) \right] \quad (5.29)$$

şeklinde kontrol giriş ifadesi elde edilir. Son denklemden  $\rho$  ve  $m$  erişim kuralı parametreleri yer aldığı gibi sisteme ait parametreler de yer almaktadır. Burada  $\rho$  ve  $m$  değerleri tasarımcı tarafından seçilir. Yukarıdaki kontrol kuralı sisteme uygulandığında elde edilen giriş, çıkış ve faz uzayı grafikleri, farklı  $\rho$  ve  $m$  değerleri için aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.5. Lyapunov karar kuralına dayalı sarkaç kontrol sisteminin blok gösterimi



Şekil 5.6. Şekil 5.5'deki sisteme ilişkin farklı  $\rho$  ve  $m$  değerlerine göre benzetim eğrileri

- $\rho = 50$   $m = 2$  değerleri için kontrol işareti
- $\rho = 50$   $m = 2$  değerleri için çıkış işareti
- $\rho = 50$   $m = 2$  değerleri için faz uzayı
- $\rho = 100$   $m = 2$  değerleri için kontrol işareti
- $\rho = 100$   $m = 2$  değerleri için çıkış işareti
- $\rho = 100$   $m = 2$  değerleri için faz uzayı
- $\rho = 100$   $m = 7$  değerleri için kontrol işareti
- $\rho = 100$   $m = 7$  değerleri için çıkış işareti
- $\rho = 100$   $m = 7$  değerleri için faz uzayı

Şekilden görüldüğü gibi sistemin durum değişkenleri kayma yüzeyine gelene kadar sistemin girişine düşük frekanslı bir kontrol giriş işareti uygulanmaktadır. Sistemin durum değişkenleri kayma yüzeyine ulaştığında sisteme yüksek frekanslı bir kontrol giriş işareti uygulanmaya başlar ve sistem böyle bir durumda kayma kipindedir. Sistemin kontrol girişinde yer alan  $\rho$  değeri sistemin durum değişkenlerinin kayma yüzeyine ulaşma hızını etkilediği gibi sistemin kayma yüzeyi üzerinde iken sisteme uygulanan yüksek frekanslı kontrol giriş işaretinin genliğini de etkilemektedir.

Kontrol girişinde yer alan  $m$  parametresi de sistemin durum değişkenlerinin kayma yüzeyine ulaşma zamanını etkilemektedir.

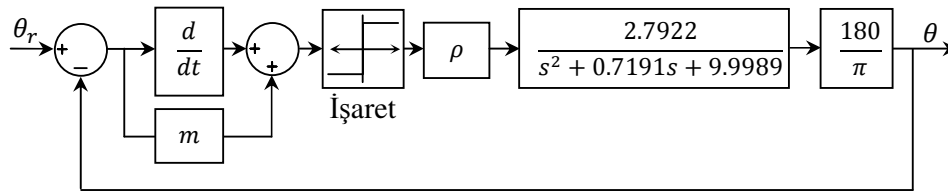
Yukarıda verilen kontrol girişi ifadesinde, sistemin transfer fonksiyonunda da yer alan parametreler bulunmaktadır. Bu durum pratikte bu tarz bir kontrol girişinin sisteme uygulanmasını zorlaştırır. Çünkü sistemin kontrol giriş ifadesinde yer alan sistem parametrelerinin değişmesi durumunda kontrol işaretinde yer alan büyüklüklerin de değişmesi gerekir. Yani sisteme kontrol girişi uygulandığı sırada eş zamanlı olarak kontrol giriş ifadesindeki parametreler ölçülerek yenilenmelidir.

(5.22)'de transfer fonksiyonu ile verilen sistemin kutupları

$$\lambda_{1,2} = -0.3595 \mp 3.1416j \quad (5.30)$$

olduğundan dolayı sistemin kutupları imajiner ekseninde sol yarı-düzlemededir. Bu durum sistemin kararlı olduğunu gösterir. (5.29)'da verilen kontrol kuralı girişi, sistemi kararlı hale getiren ve sistem durum değişkenlerini kayma yüzeyine getiren erişim kuralı olmak üzere iki kısımdan oluşur. Sistem kararlı olduğuna göre sisteme yalnızca erişim kuralı uygulanarak sistem kontrol edilebilir. Bu şekildeki bir kontrol girişi düşük derecede ve basit bir kontrol girişi halini alır. Bu çalışmada erişim kuralının sisteme etkisi incelenmiştir.

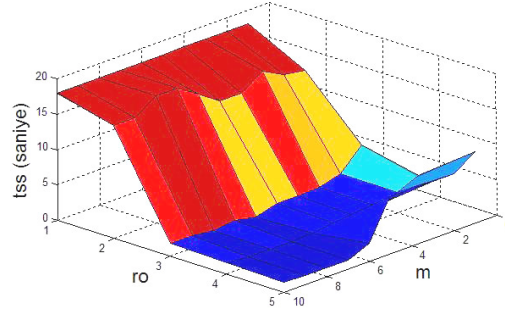
Aşağıda erişim kurallı kontrol sisteminin blok diyagramı verilmiştir.



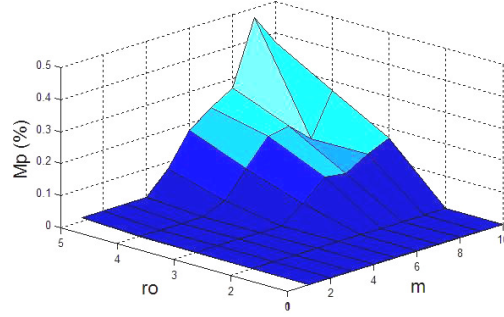
Şekil 5.7. Kayma kipli kontrol blok diyagramı

Bu kontrol sisteminde değişik  $\rho$  ve  $m$  değerleri  $40^\circ$  referans açığına göre denenerek, sistemin ulaşma süresi ( $t_{ss}$ ), sürekli hal hatası ( $e_{ss}$ ) ve aşım ( $\mu_p$ ) değerleri

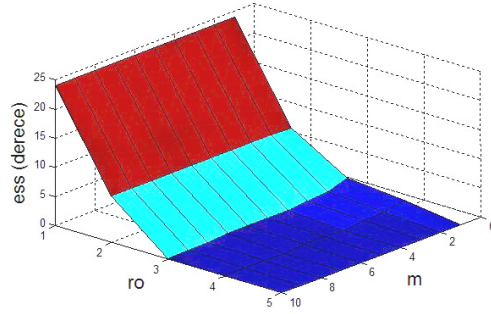




Şekil 5.8. Sürekli duruma ulaşma zamanının,  $m$  ve  $\rho$  değerine göre değişimi



Şekil 5.9. Tepe değerlerinin,  $m$  ve  $\rho$  değerine göre değişimi

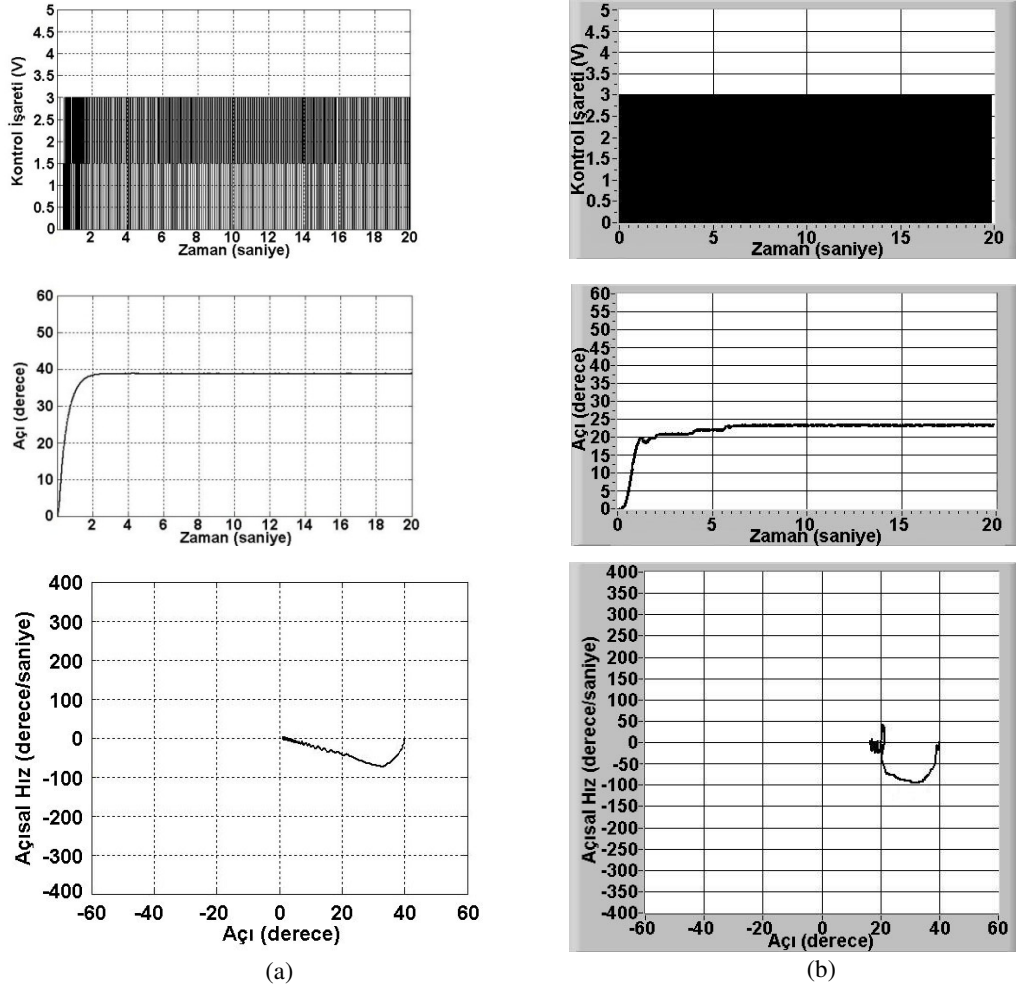


Şekil 5.10. Sürekli hal hatasının,  $m$  ve  $\rho$  değerine göre değişimi

Yukarıdaki grafik veya tablolar kullanılarak arzulanan aşım, sürekli hal hatası, ve yerleşme süresini sağlayacak olan  $m$  ve  $\rho$  parametreleri belirlenebilir.

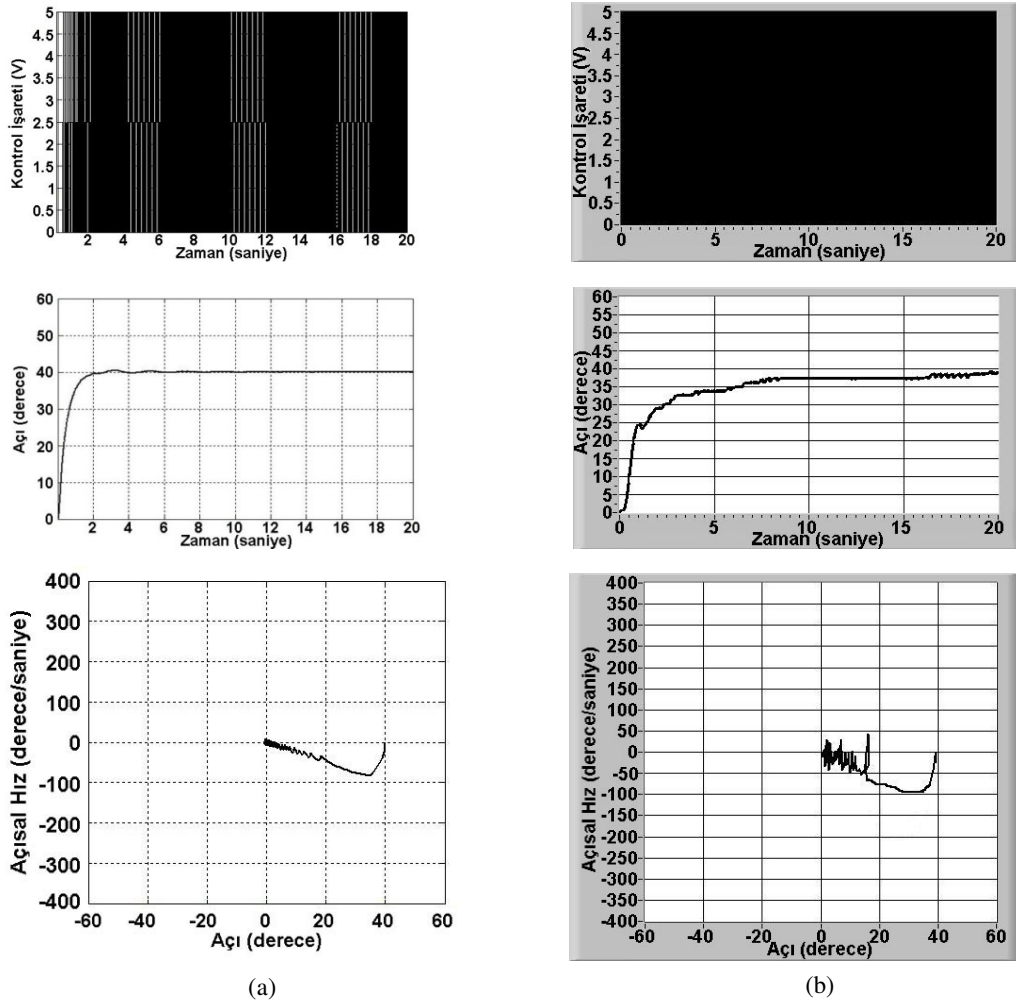
## BÖLÜM 6. DENEYSEL VE BENZETİM SONUÇLARI

Bu bölümde, beşinci bölümde yer alan performans eğrileri kullanılarak farklı performans kriterleri için  $\rho$  ve  $m$  değerlerine göre, sisteme ilişkin simülasyon ve deney sonuçları verilip gerekli karşılaştırmalar yapılmıştır.



Şekil 6.1.  $\rho = 3$  ve  $m = 2$  için benzetim ve deneysel sonuçlar  
a. Benzetim sonuçları b. Deneysel sonuçları

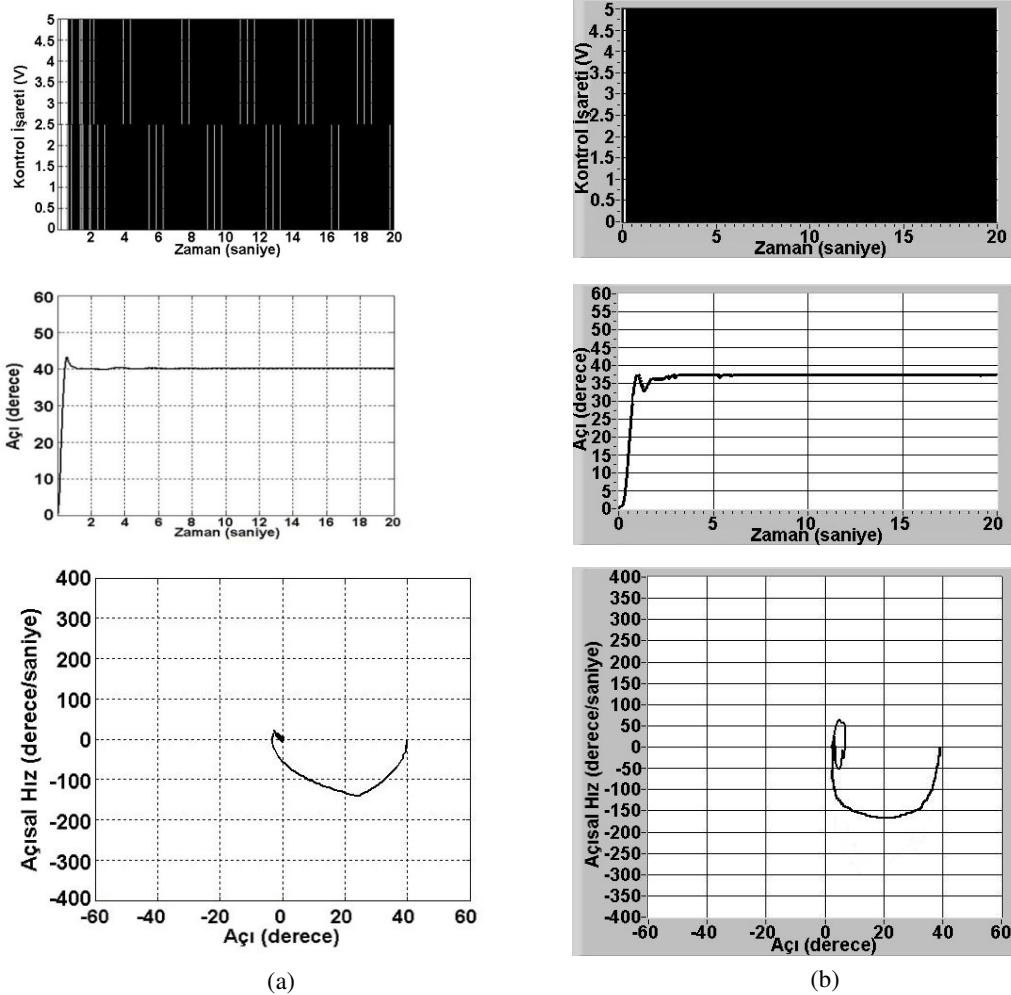
Sisteme uygulanan işaretle yer alan  $\rho$  ve  $m$  parametreleri uygun şekilde seçilerek sistemin dinamik davranışı değiştirilebilir. Yerleşme süresi  $t_{ss} = 3$ , sürekli hal hatası  $e_{ss} = 1.2$  ve aşım  $\mu_p = 0$  değerleri için bir önceki bölümdeki tablolardan elde edilen  $\rho = 3$  ve  $m = 2$  kontrol parametrelerine ilişkin benzetim ve deneysel sonuçlar Şekil 6.1’de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi deneysel yolla elde edilen sürekli hal hatasının benzetim değerinden daha büyük olduğu görülmektedir. Bunun nedeni, Şekil 5.1’deki statik karakteristik eğrisinden görüldüğü gibi, torku oluşturan motorun 0.75 V’luk bir eşik geriliminin üzerinde çalışmaya başlamasıdır. Söz konusu problemin ortadan kaldırılması için  $\rho$  parametresi yeterince büyük seçilmelidir.



Şekil 6.2.  $\rho = 5$  ve  $m = 2$  için benzetim ve deneysel sonuçlar  
a. Benzetim sonuçları b. Deneysel sonuçları

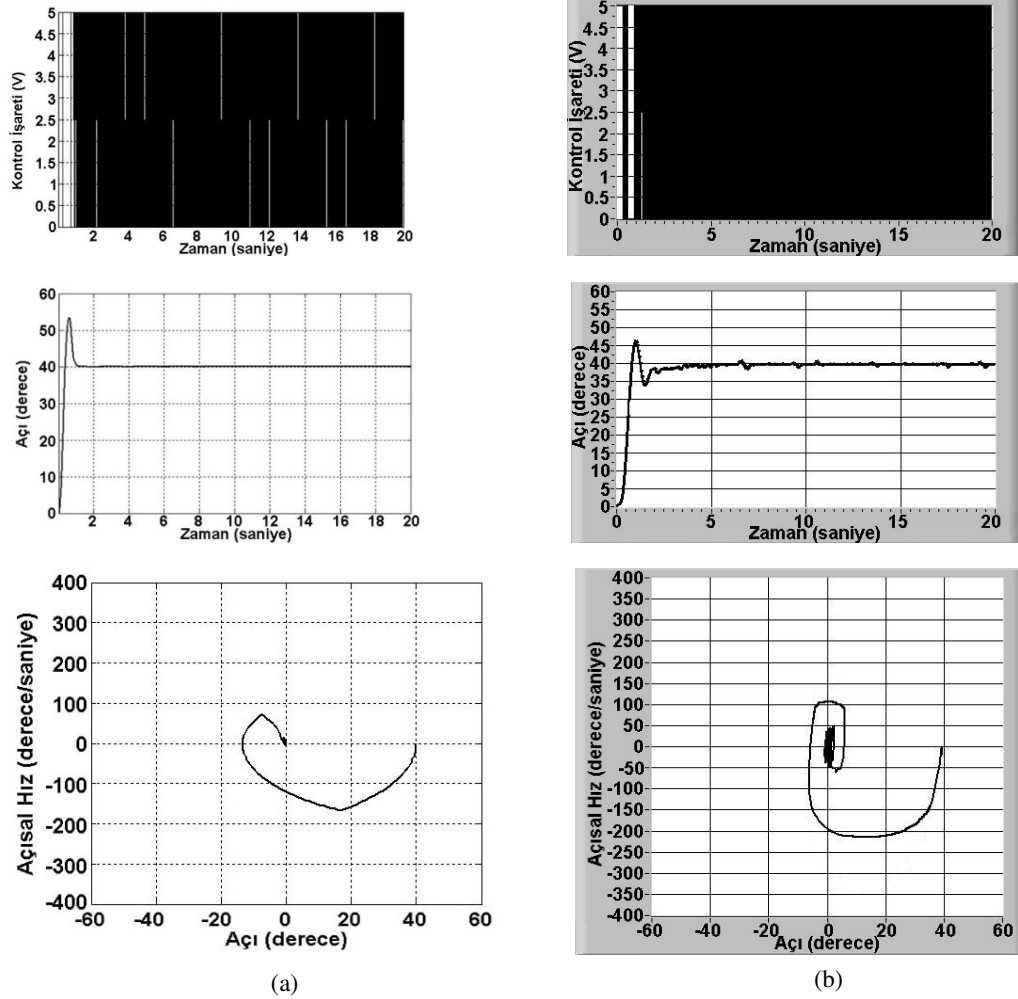


Aynı performans tablolarından (Tablo 5.1. – Tablo 5.3.) yerleşme süresi  $t_{ss} = 8$ , sürekli hal hatası  $e_{ss} = 0$  ve aşım  $\mu_p = 0.01$  değerleri için elde edilen  $\rho = 5$  ve  $m = 2$  parametre değerlerine ilişkin benzetim ve deneysel sonuçlar Şekil 6.2’de verilmiştir. Eğrilerden görüldüğü gibi,  $\rho$  parametresinin büyük seçilmesi, benzetim ve deney sonuçlarının uyumluluğunu arttırmaktadır.



Şekil 6.3.  $\rho = 5$  ve  $m = 5$  için benzetim ve deneysel sonuçlar  
a. Benzetim sonuçları b. Deney sonuçları

Yerleşme süresi  $t_{ss} = 8$ , sürekli hal hatası  $e_{ss} = 0$  ve aşım  $\mu_p = 0.08$  için elde edilen  $\rho = 5$  ve  $m = 5$  kontrol parametreleri için elde edilen benzetim ve deney sonuçları Şekil 6.3’de verilmiştir.



Şekil 6.4.  $\rho = 5$  ve  $m = 8$  için benzetim ve deneysel sonuçlar  
a. Benzetim sonuçları b. Deneysel sonuçları

Tablolardan seçilen ulaşma süresi  $t_{ss} = 1.2$ , sürekli hal hatası  $e_{ss} = 0$  ve aşım  $\mu_p = 0.27$  değerlerine karşılık gelen  $\rho = 5$  ve  $m = 8$  parametre değerlerine ilişkin benzetim ve deney sonuçları ise Şekil 6.4’de verilmiştir.

Elde edilen sonuçlardan;  $\rho$  parametresi sistemin sürekli hal hatasını,  $m$  parametresi ise sistemin sürekli hale ulaşma zamanını (yerleşme zamanı) ve aşım değerini etkilediği görülmektedir.

## BÖLÜM 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada asılı bir sarkaç sistemi için tasarlanmış, gerekli benzetim ve deneysel çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Kayma kipli kontrolün gürbüz olma özelliği, büyük zaman sabitine sahip olan asılı sarkaç sisteminde etkin bir kontrol sağladığı görülmüştür. Ayrıca kontrol parametrelerinin değiştirilmesinin, sistemin kontrolünde nasıl bir etki yaptığı irdelenmiştir.

Çalışmada kullanılan non-lineer asılı sarkaç sisteminin lineer bölgesi (yaklaşık  $0\pm 60^\circ$ ); çalışma aralığı olarak seçilmiştir. Sistem, ikinci dereceden bir sistem varsayılarak deney düzeneği ile elde edilen verilere dayanarak sistemin yaklaşık parametrik modeli elde edilmiştir. Lyapunov karar kuralı kullanılarak oluşturulan bir kayma kipli kontrolde sistemin girişine sistem parametrelerinden oluşan bir kontrol kuralı uygulanmaktadır. Söz konusu bu kontrol kuralının, sistem parametrelerini içermesi; parametre değişimine karşılık karar kuralını da değiştireceği aşikardır. Kuramsal olarak sistemin girişine, sistemin parametrelerini içeren bir kontrol girişi uygulanabilse de uygulamada, teoriye yakın sonuçlar elde edebilmek için parametre değişiminin bilinmesi gereklidir.

Lyapunov karar kuralı kullanılarak elde edilen kayma kipli kontrol kuralında, karar kuralı; sistemi, kayma yüzeyi üzerinde kararlı kılar. Sistemin kararlılığı için Lyapunov karar kuralı haricinde durum geri besleme gibi kararlılık sağlayan yöntemler de kullanılabilir. Seçilen kayma yüzeyinin eğimi değiştiğinde sisteme ilişkin yerleşme süresi ve aşım değeri de değişmektedir. Bu çalışmada kararlı bir sistem kullanıldığından dolayı, uygulamada karar kuralı kullanımı gerek görülmeyp sistem girişine sadece kayma yüzeyine erişim kuralı uygulanmıştır.

Döner potansiyometre yerine yüksek sayıda puls üreten artımlı encoder kullanılarak, sarkacın açısal konumunun ölçüm gürültüsü azaltılabilir.

Uygulama alanına göre farklı şekilde tasarlanabilen kayma kipli kontrol yöntemi yüksek frekanslı girişlere yanıt verebilecek sistemlerde oldukça kullanışlı olabileceği kanaati mevcuttur.

Kayma kipli kontrol yöntemi; PID kontrol, model referans kontrol, bulanık mantık kontrol gibi farklı kontrol yöntemleriyle birlikte kullanılarak farklı davranışlar sergileyen kontrol sistemleri tasarlanabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] KÜÇÜKER, A., Asılı Sarkaç Sisteminde Konum Kontrolü, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, syf. 1-11, Haziran 2007
- [2] Wikipedia - <http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum>, Mayıs 2009
- [3] Wikipedia - [http://tr.wikipedia.org/wiki/Mekanik\\_saat](http://tr.wikipedia.org/wiki/Mekanik_saat), Mayıs 2009
- [4] Meydan Larousse Ansiklopedisi, Cilt 17, Sabah, syf. 335-336, İstanbul, 1992
- [5] SERWAY, R. A., Physics: For Scientist And Engineers With Modern Physics, Saunders, pp. (468-475, 264-265), Philadelphia, 1990
- [6] Wikipedia - [http://tr.wikipedia.org/wiki/Foucault\\_sarkac%C4%B](http://tr.wikipedia.org/wiki/Foucault_sarkac%C4%B), Mayıs 2009
- [7] HARRIS, C. J., BILLINGS, S.A., Self Tuning And Adaptive Control Theory and Application Revised 2nd Edition, Peter Perogrinus Ltd., pp. 224-227, London, 1981
- [8] UTKIN, V., Variable Structure Systems With Sliding Modes, IEEE Transactions On Automatic Control, AC-22, 2, pp. 212-222, April 1977
- [9] HACIOĞLU, Y., Bulanık Mantıklı Kayan Kipli Kontrol Tasarımı ve Robot Yörünge Takibinde Uygulanması, II. Mühendislik Bilimleri Genç Araştırmacılar Kongresi, MBGAK 2005, İstanbul, syf. 325-335, Kasım 2005
- [10] BODUR, F.N., Taşıt Süspansiyon Sistemlerinin Bulanık Mantıklı Kayan Kipli Kontrolü, Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, syf. 30-60, Temmuz 2008
- [11] Gelişim Hachette Ansiklopedisi, Cilt 10, Sabah, syf. 3594-3595, İstanbul, 1993
- [12] ARIKAN, H., GÖZÜKIZIL, Ö. F., ÖZGÜR, İ., Genel Matematik, I, Değişim Yayınları, syf. 262-276, Sakarya, Ekim 2002
- [13] Wikipedia - [http://en.wikipedia.org/wiki/Moment\\_of\\_inertia](http://en.wikipedia.org/wiki/Moment_of_inertia), Mayıs 2009
- [14] SHIGLEY, J. E., MISCHKE, C. R., BUDYNAS, R. G., Mechanical Engineering Design, Mc Graw Hill, pp. 990-993, Singapore, 2004

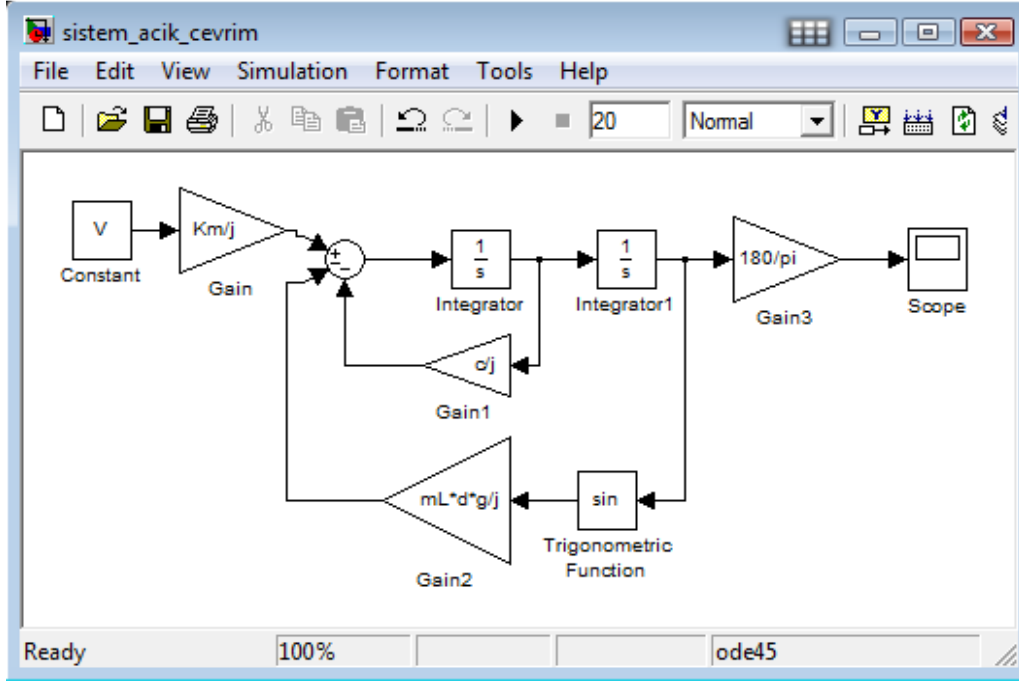
- [15] Wikipedia - [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_moments\\_of\\_inertia](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_moments_of_inertia), Mayıs 2009
- [16] Wolfram - <http://scienceworld.wolfram.com/physics/Pendulum.html>, Mayıs 2009
- [17] YAZICI, İ., Kendinden Ayarlamalı PID Tasarımı, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, syf. 4-13, Ocak 2002
- [18] BURNS, R. S., Advanced Control Engineering, Butterworth-Heinemann, pp. 1-104, Oxford, 2001
- [19] AKSOY, S., Programlanabilir Lojik Denetleyiciler, Değişim Yayınları, syf. 133-150, Sakarya, 2004
- [20] AKAT, S. B., EFE, M. Ö., Bir Manyetik Askı Sisteminin Kontrolünde Dört Yöntemin Karşılaştırılması, TOK'07 Bildiriler Kitabı, İstanbul, syf. 265-270, Eylül 2007
- [21] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J. C., Variable Structure Control: A Survey, IEEE Transactions On Industrial Electronics, 40, 1, pp. 2-22, February 1993
- [22] BEKİROĞLU, N., BOZMA, H. I., İSTEFANOPULOS, Y., Model Reference Adaptive Approach To Sliding Mode Control, Proceeding Of The American Control Conference, 2, 15, pp.1028-1032, June 1995
- [23] GÖKSEL, M., Yarı Aktif Sönümleyicinin Optimal Kayan Yüzey Kontrolü, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, syf. 33-42, Haziran 2007
- [24] YAZICI, İ., Model Referans Kayan Kipli Kontrolör Tabanlı Güç Sistem Kararlayıcı Tasarımı, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, syf. 51-65, Haziran 2008
- [25] DAMEN, A., Modern Control Theory, Eindhoven University of Technology, pp. 1-62, Eindhoven, October 2002
- [26] ARIKAN, H., GÖZÜKIZIL, Ö. F., ÖZGÜR, İ., Genel Matematik, II, Değişim Yayınları, syf. 5-13, Sakarya, Nisan 2002
- [27] AHMED, M., Sliding Mode Control For Switched Mode Power Supplies, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, pp. 43-55, 2004
- [28] YU, X., XU, J. X., Variable Structure Systems: Towards the 21st Century, 274, Springer, pp. 1-31, Berlin, 2002
- [29] UTKIN, V., Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives, IEEE Transactions On Industrial Electronics, 40, 1, pp. 23-36, February 1993

- [30] EDWARDS, C., COLET, E. F., FRIDMAN, L., Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control, 334, Thoma M., Morari M., Springer, pp. 90-120, Berlin, 2006
- [31] PERRUQUETTI, W., BARBOT, J. P., Sliding Mode Control In Enginnering, Marcel Dekker Inc, New York, pp. 20-47, 2002
- [32] ACKERMAN, J., UTKIN, V., Sliding Mode Control Design Based on Ackermann's Formula, IEEE Transactions On Automatic Control, 43, 2, pp. 234-237, February 1998
- [33] AKSOY, S., Lineer Sistem Teorisi Ders Notları, syf. 145-159, Sakarya Üniversitesi, 2006
- [34] ABIDI, K., Sliding Mode Control For High-Precision Motion Control Systems, Master Thesis, Sabancı University, Graduate School of Engineering and Natural Sciences, pp. 12-19, Istanbul, Spring 2004
- [35] YAGIZ, N., YUKSEK, I., Sliding Mode Control of Active Suspensions for a Full Vehicle Model, International Journal of Vehicle Design, 26, 2/3, pp. 264-276, 2001
- [36] YILDIZ, Y., Neuro Sliding Mode Controllers For Systems With Uncertainties, Master Thesis, Sabancı University, Graduate School of Engineering and Natural Sciences, pp. 16-19, Istanbul, Spring 2004
- [37] DORF, R. C., BISHOP, R. H., Modern Control Systems, Prentice Hall Inc, pp. (35-155, 430-485, 573-615), U.S.A., 2001
- [38] JING, J., WU, Q., An Intelligent Sliding Mode Control Algorithm For Position Tracking Servo System, International Journal of Information Technology, 12, 7, pp. 57-62, 2006
- [39] YIĞİT, İ., Bir Arabalı Ters Sarkaç Sisteminin Tasarımı, İmalatı ve Darbe Eni Modüleli Kayan Kipli Kontrolü, 13. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu (UMTM 2007), Cumhuriyet Üniversitesi, C. 1, syf. 273-282, 07-09 Haziran 2007
- [40] YÜCEL, A. N., BUĞDAY, Y., EFE, M. Ö., Bir DC Motorun Gerçek Zamanlı Kontrolünde Üç Yöntem, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, TOK'08, İST, syf. 280-285, 13-15 Kasım 2008
- [41] ARIFOĞLU, U., KUBAT, C., Matlab ve Mühendislik Uygulamaları, Alfa Basım Yayın Dağıtım, syf. 523-634, İstanbul, 2003

## EKLER

### EK A. Matlab/Simulink Benzetim Ortamı

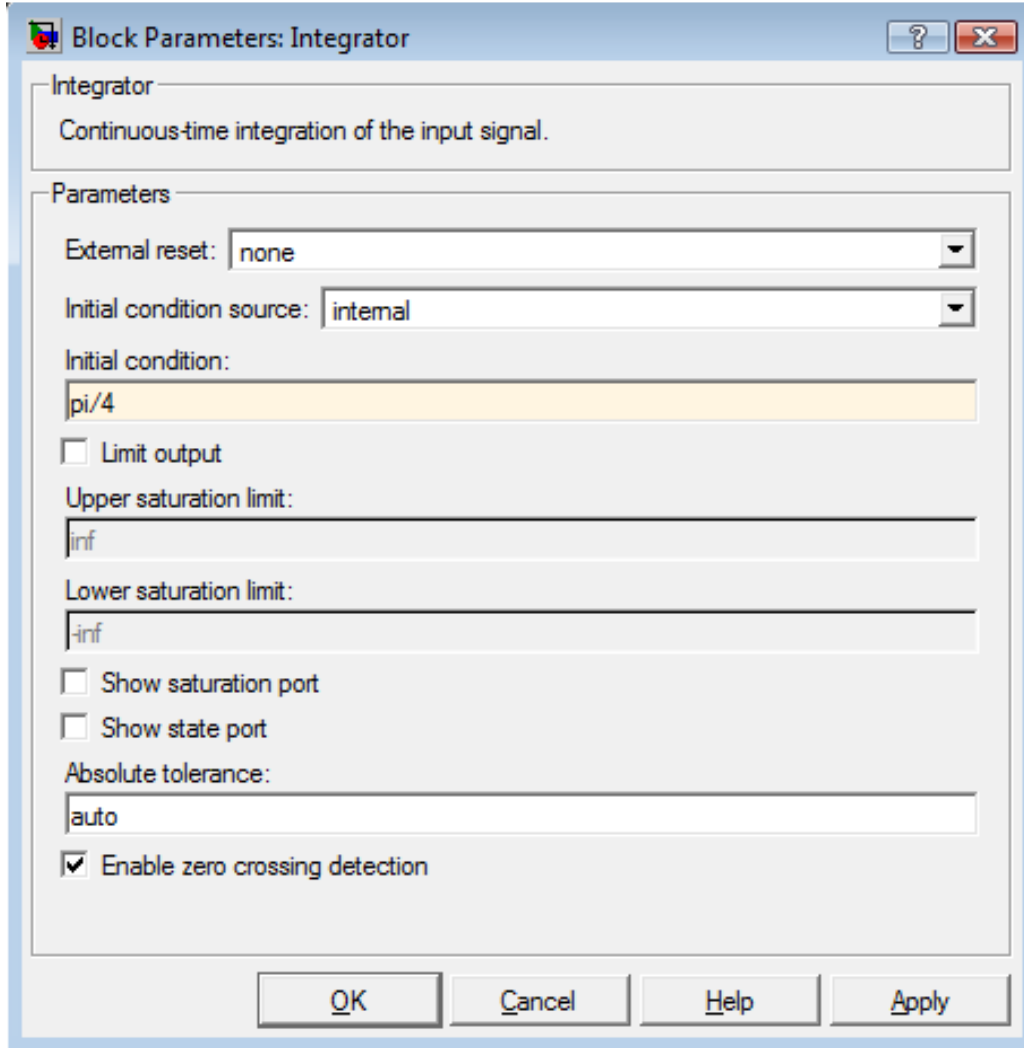
Aşağıda asılı sarkaç sisteminin Matlab/Simulink benzetimi görülmektedir.



Şekil A.1. Sarkaç sisteminin simulink benzetimi

Simulinkte yer alan integratörlerin başlangıç koşulları belirlenerek sistemin farklı başlangıç koşullarında simulasyonu gerçekleştirilebilir.

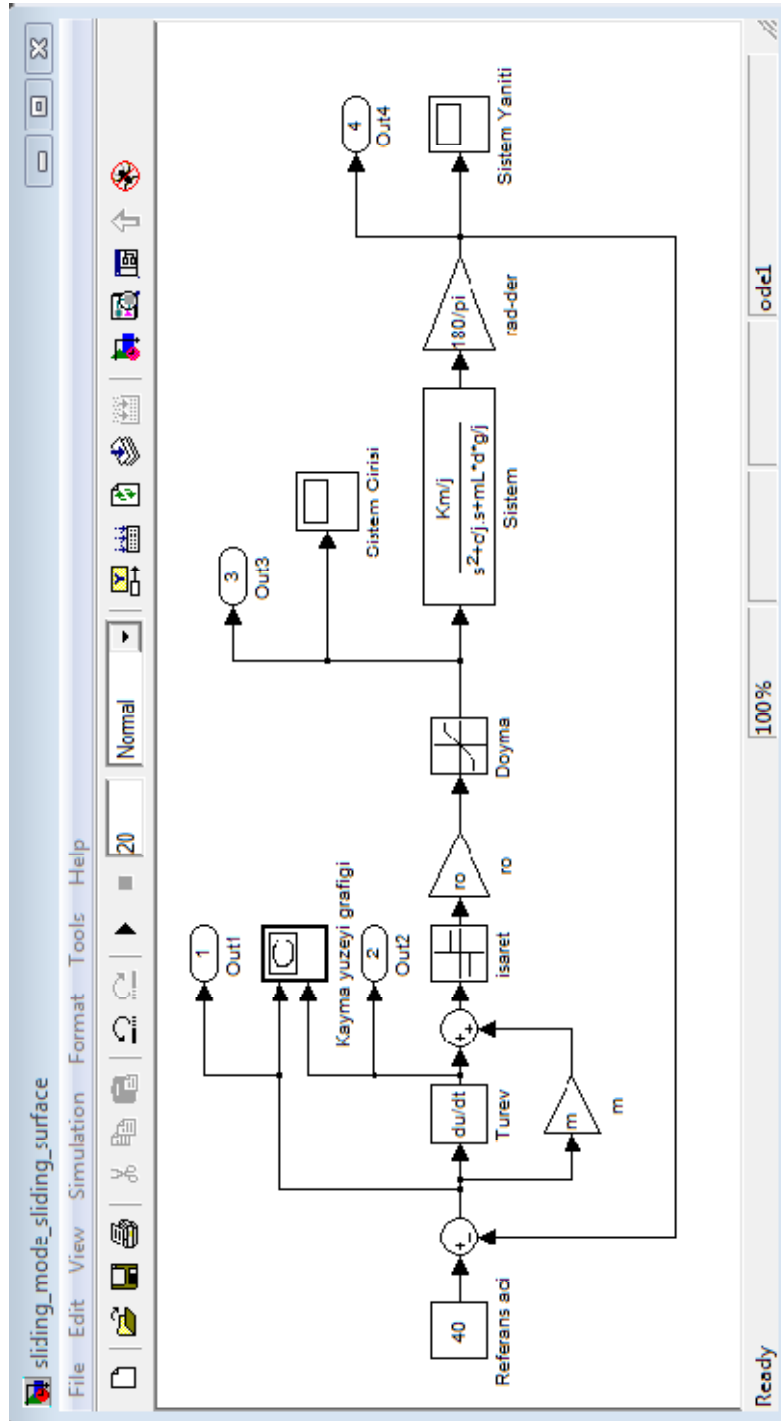




Şekil A.2. İntegratöre başlangıç değeri atması

Benzetim ortamında oluşturulan modeller aşağıdaki şekillerde verilmiştir.





Şekil A.4. Kayma kipli kontrol sistemi

## **EK B. LabVIEW Yazılımı**

LabVIEW (Laboratory Virtual Instruments for Engineering Workbench) yazılımı, C, Delphi gibi yazılımsal dillerden farklı olarak, grafiksel komut setleriyle algoritmalar oluşturma imkanı sağlayan bir yazılım geliştirme aracıdır. Modüler yapıdaki bir çok fonksiyonu, programın kullanım kolaylığını arttırmaktadır. G programlama dili denilen grafiksel programlama tabanlı LabVIEW yazılımında komutlar bloklar halindedir. Komut paletlerinden seçilen bloklar boş bir sayfaya yerleştirilerek ve birbirlerine bağlanarak algoritmalar oluşturulur.

National Instrument tarafından üretilmiş ve LabVIEW ile çalışan SERI PORT, PARALEL PORT ve veri toplama kartları (DAQ) gibi çeşitli donanımlar bir çok mühendislik uygulamalarında veri toplama, analizi ve sunumu aşamalarında çok hassas ölçümler yapmayı sağlar. LabVIEW yazılımı, bilgisayar ve veri toplama donanımı ile birlikte sanal bir laboratuvar oluşturabilme imkanı sağlayabilmektedir. Bunun dışında LabVIEW, donanımsal bilgi işlemeden bağımsız ve görsel (visual) programlamaya imkan vermektedir.

LabVIEW yazılımı ile yapılan programlara Virtual Instrument (VI) denir. VI'lar bir alt program gibi bir başka programın içine doğrudan yerleştirilebilir. Yazılımsal programlama dillerinde olduğu gibi LabVIEW yazılımında da derleyici özelliği bulunmaktadır. Yazılımdaki hataların nerelerde olduğu kolaylıkla tespit edilebilir.

Bir VI yapısının içerikleri şu şekilde sıralanabilir;

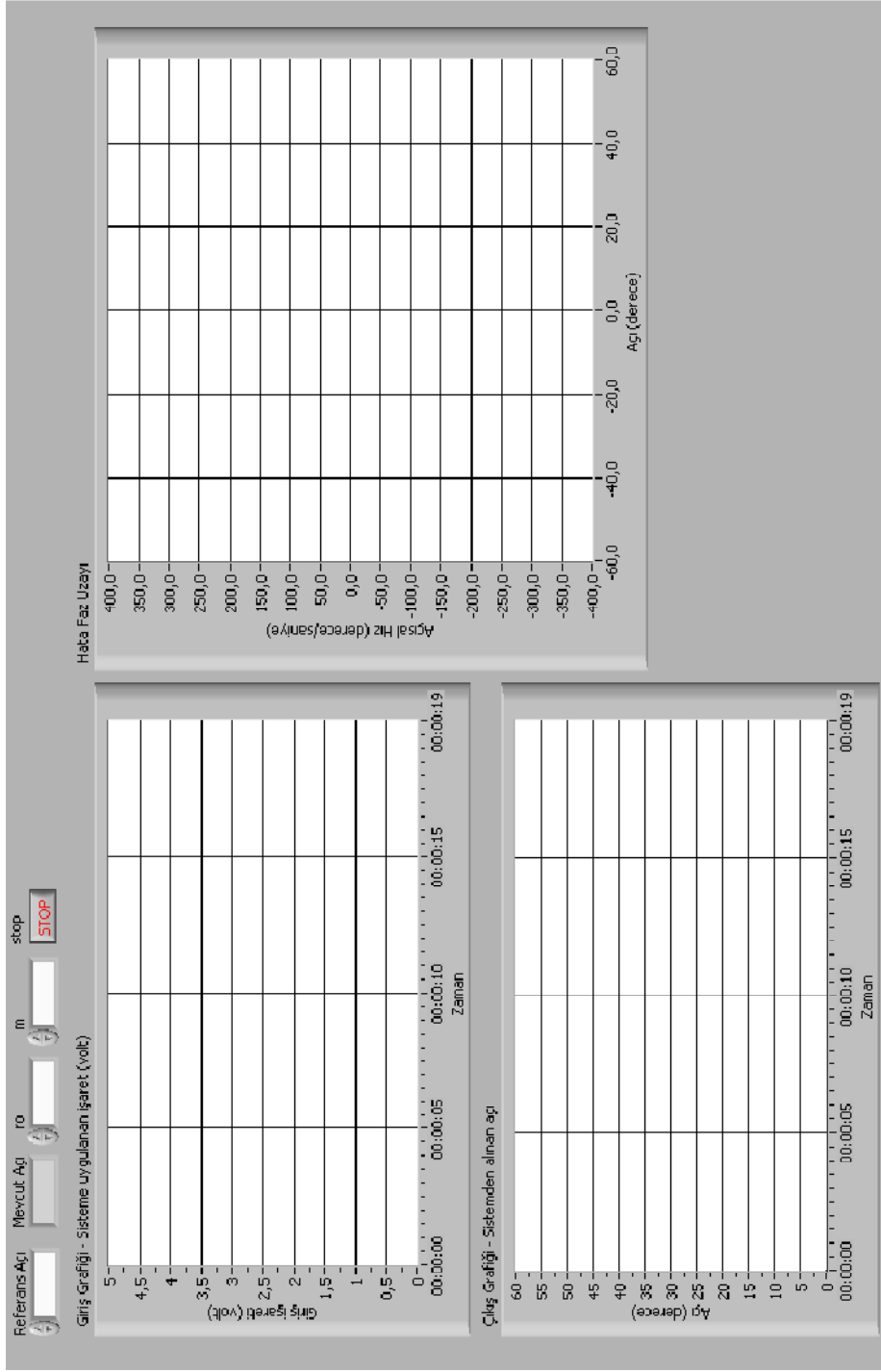
- Arayüz elemanı olarak oluşturulan ön panele, kontrol panelinden seçilebilen sayısal göstergeler, ölçekler, metreler, termometreler, LED'ler, çizelgeler, grafikler yerleştirilebilir. VI ile ilgili gerekli elemanlar program içine yerleştirildikten sonra bir anahtar tıklanarak, bir sürgü oynatılarak ya da klavyeden bir değer girilerek çalışan VI kontrol edilebilir.

- Bir VI programlanırken, bilinen programlardan farklı olarak çok detayla uğraşmadan blok diyagramlar oluşturulur. Nesnelere, fonksiyonlar (function)

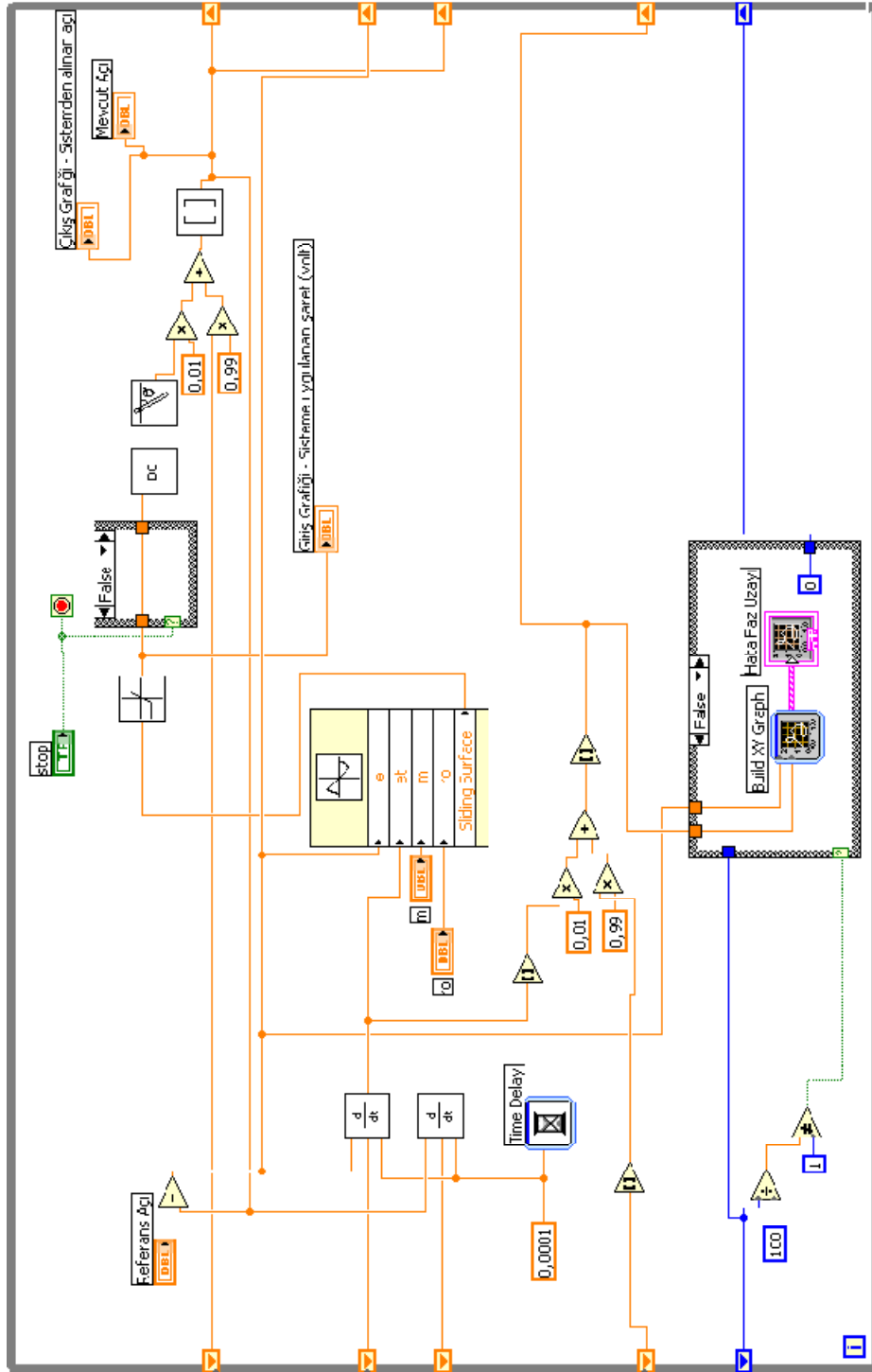
paletinden seçilir ve bloklar birbirlerine tel (wire) ile bağlanır. Bu blokların içeriği basit aritmetik fonksiyonlardan ileri veri toplama ve analiz işlemlerine, network ve I/O dosya işlemlerine kadar çeşitlilik göstermektedir.

- LabVIEW dizaynı modülerdir. Bu sayede VI'lar kendi başlarına koşturulabilir veya başka VI'ların parçası olarak kullanılabilir.

Çalışmada kullanılmak üzere oluşturulmuş VI'nın şekli aşağıda verilmiştir.



Şekil B.1. Çalışmada kullanılan VI'nın arayüzü



Şekil B.2. Çalışmada kullanılan VI'nın blok şeması



Şekil B.3. Deney düzeneği



**EK C. Kısmi İntegrasyon**

$$\dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) = -kx(t) \cdot \dot{x}(t) \quad (\text{C.1})$$

(C.1) eşitliğinde her iki tarafın integralini almak için

$$I_1 = \int \dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) dt \quad (\text{C.2})$$

$$I_2 = \int x(t) \cdot \dot{x}(t) dt \quad (\text{C.3})$$

olduğu varsayalım.  $I_1$  integrasyonunda değişken dönüşümü yapılırsa

$$\dot{x} = u \quad (\text{C.3})$$

$$\ddot{x} dt = du \quad (\text{C.4})$$

olur. Bu durumda  $I_1$  integrasyonu

$$I_1 = \int u du = \frac{u^2}{2} + c_1 = \frac{\dot{x}^2}{2} + c_1 \quad (\text{C.5})$$

olur.  $I_2$  integrasyonu için aynı yöntem uygulanırsa

$$x = v \quad (\text{C.6})$$

$$\dot{x} dt = dv \quad (\text{C.7})$$

$$I_2 = \int v dv = \frac{v^2}{2} + c_2 = \frac{x^2}{2} + c_2 \quad (\text{C.8})$$

elde edilir. Bulunan integrasyonlar denklemden yerlerine yazılırsa

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + c_1 = -k \left( \frac{x^2}{2} + c_2 \right) \quad (\text{C.9})$$

elde edilir. Son denklemdaki tüm sabitler  $c$  olarak kabul edildiğinde denklem

$$[\dot{x}(t)]^2 + k[x(t)]^2 = c \quad (\text{C.10})$$

şeklini alır.

## ÖZGEÇMİŞ

Hakan KIZMAZ, 28.10.1984 Sakarya Merkez doğumludur. İlk öğrenimini Yukarı Kırızca İlkokulu'nda, orta öğrenimini Merkez Atatürk İlköğretim Okulu'nda tamamlamıştır. Lise öğrenimini yine Sakarya'da; Figen Sakallıoğlu Anadolu Lisesi'nde tamamlayıp 2002 yılında Sakarya Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği bölümünde eğitime başlamış ve 2006'da lisans eğitimini bitirmiştir. 2006'da Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde; Elektronik alanında yüksek lisans eğitimi almaya hak kazanmıştır. 2007 yılında Kromel Makine A.Ş.'de mühendis olarak çalışmaya başlamıştır. Şu anda Kromel Makine A.Ş.'de otomasyon sorumlusu olarak görev yapmaktadır.