T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KORTEWEG – de VRIES DENKLEMİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ender ÖZDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd.Doç. Dr.Metin YAMAN**

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KORTEWEG – de VRIES DENKLEMİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ender ÖZDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 19 / 06 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç .Dr. Elman ALİYEV	**Y. Doç. Dr. Metin YAMAN**	**Y. Doç. Dr. Şevket GÜR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve çalışmaların yapılması sırasında her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen tez yöneticisi kıymetli hocam Y. Doç. Dr. Metin Yaman Beye ve tez hazırlama sürecinde bana gösterdikleri tahammül ve destekten ötürü aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ender ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

α	:	Alfa
β	:	Beta
δ	:	Delta
ε	:	Epsilon
η	:	Eta
κ	:	Kappa
ξ	:	Ksi
λ	:	Lambda
∇	:	Nabla operatör
φ	:	Phi
π	:	Pi
ψ	:	Psi
ρ	:	Rho
σ	:	Sigma
g	:	Yerçekimi sabiti
KdV	:	Korteweg de Vries

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: KdV denklemi , Soliton , Korunum Kanunları

Bu çalışma su dalgaları, plazma fiziği, esnek çubuk gibi fiziksel sistemlerin çalışmalarında ortaya çıkmış bir lineer olmayan kısmi türevli diffarensiyel denklem olan Korteweg de Vires (KdV) denklemi üzerine yapılmıştır.
KdV denkleminin ortaya çıkışı ,ilk olarak 1884 yılında İskoçyalı mühendis J.Scott Russel tarafından fark edilen soliton dalgalarla başlar. Russell'in keşfinden 60 yıl sonra Alman matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vires , soliton dalga çözümlerini bularak , günümüzde KdV denklemi olarak bilinen denklemi ortaya koymuşlardır.

Fiziksel uygulamalardan kaynaklanan kısmi türevli denklemler konusundaki detaylı çalışmalar iyi geliştirilmiş bir konu değildir. Gerçektende bu gibi denklemlerin çoğunun çözümleri hakkında az kaliteli ve az detaylı nicel bilgiler bilinmektedir. Bu yüzden özel denklemler üzerinde çalışmak ve onlardan mümkün olduğunca kaliteli ve nicel bilgiler çıkarmak ve elde edilen sonuçlardan genelleme yapabilmeye sebep olmak ümidiyle KdV denkleminin birkaç başlığı için detaylı bir çalışma yapmaya girişilmiştir.

Bu çalışmanın KdV denklemi hakkında son yıllarda yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar üzerine bir anket çalışması gibi olması hedeflenmiştir. Tarihsel gelişimle birlikte , çalışmalar ve sonuçlar ve nasıl elde edildiği incelenmeye çalışılmıştır. Daha sonra ise denklemin bir soliton için çözümü dönüşümü ile başlayarak elde edilmeye çalışılmıştır. Sonrada KdV denkleminin özel öneme sahip özelliklerinden biri olan sonsuz sayıda korunum kanununa sahip oluşu incelenmiştir. Bu çalışmada bu korunum kanunlarından birkaçı ele alınmış ve bununla ilgili bir teorem ve teoremin Gardner tarafından yapılan ispatı tüm adımlarıyla birlikte sunulmuştur.

Sonraki bölümde denklemin periyodik ve tek soliton çözümü bulma adımları gösterilmiş ve son bölümde de KdV denkleminin başlangıç değer probleminin çözümünün tekliği de ispatlanarak çıkartılmıştır.

A STUDY ON KORTEWEG – de VRIES EQUATION

SUMMARY

Key Words: KdV Equation , Soliton , Conservation Laws ,

This study is performed on Korteweg – de Vries equation (KdV) which is a nonlinear partial differential equation arising in the work of a number of different physical systems , water waves , plasma physics , anharmonic lattices and elastic rods. First appearance of KdV equation starts with John Scott Russell in 1884 by notice of solitary waves. After 60 years from Russell , German mathematician Korteweg and his student de Vries found soliton solution of the equation and introduce KdV equation.

The detailed study of nonlinear partial differential equations arising in physical applications is not well-developed subject. Indeed , for many such equations , little qualitative and detailed information is known about their solutions . And also questions of existence , uniqeness and stability remained unanswered as well With this philosophy in mind we embarked on detailed study on some topic of KdV equation.

This study is devoted to a survey of some results of these studies carried out recently for KdV equation . Later , one soliton solution of the equation is tried to get from starting some transformation .Another property of the KdV eqution of special significiance is the existence of an infinite number of conservation laws is examined. Some of laws are discussed and a theorem about the subject and one of the known proof of Gardner is introduced.

Later derivation of Kdv equation is studied in detailed physical perspective , using vector calculus etc. Finally , periodic and single soliton solutions is discussed and then the uniqeness of solution of the initial value problem fort he KdV equation is proved .

BÖLÜM 1. KORTEWEG – de VRİES (KdV) DENKLEMİ

Korteweg – de Vries (KdV) denklemi su dalgaları, plazma fiziği, harmonik olmayan kafes, esnek çubuk gibi fiziksel sistemlerin çalışmalarında ortaya çıkmış bir lineer olmayan kısmi türevli difarensiyel denklemdir.

KdV denklemi küçük fakat sonlu genişlikte dağıtıcı dalgaların uzun vadeli oluşumlarını tanımlar. Denklemin ve çözümlerinin özellikleri hakkında yapılan detaylı çalışmalar sayesinde solitonların içeriği ortaya çıkartılmış ve başlangıç değer probleminin tam çözüm yöntemi ters saçılım teorisi kullanılarak geliştirilmiştir.

KdV denkleminin ortaya çıkışı , ilk olarak 1834 yılında İskoçyalı mühendis J.Scott Russell tarafından fark edilen soliton dalgalarla başlar. Russel soliton dalgayı (solitary dalga) ilk keşfedişini kendi sözleriyle şöyle ifade eder:

“Ben dar bir kanaldan geçmekte olan ve iki beygir gücüyle giden bir botun hareketini gözlüyordum. Aniden bot durdu. Kanaldaki hareketli su kütlesinin durmadığını gördüm. Bu su kütlesi botun uç kısmı tarafında birikti ve sonra da aniden arka tarafa doğru yayılmaya başladı. Ve büyük bir hızla tek başına bir dalganın öne tarafa doğru geldiğini fark ettim. Bu su kütlesinin hızının azalmadan ve şeklini kaybetmeden ilerlemeye devam ettiğini gözlemledim. Atın sırtında olmama rağmen onu takip ettim , yetiştiğimde ise 8-9 mil hızla ilerlediğini fark ettim . Ancak 1-2 mil sonra kanalın dönüşünde kaybettim” [1]. Russell 1834 yılı Ağustos ayında yaptığı bu gözlemden sonra bu dalgaya “büyük translasyon dalgası” ismini vermiştir. Russell 1844’ de “Report on waves” bildirisin de solitary dalganın önemini vurgulamış olması dikkat çekicidir.

Soliton şeklini ve hızını yitirmeden ilerleyebilen ve çarpışma anında ve sonrasında kendilerine ait özelliklerini koruyabilen lineer olmayan dalgalardır. Rusell su dalgalarının önemine hayatı boyunca inanmış bir bilim adamıydı. Russell bunların nesne parçacığı özeliklerinden dolayı kendilerine ait dinamizme sahip olduklarını düşünüyordu. Bilim adamları O'ndan onlarca yıl sonra dalgaların farklı özeliklerini keşfedebilmiş, yayılış ve birbirinden geçiş özelliklerini fark edebilmişlerdir. Nitekim Russell'dan sonra 1847 de Stokes ve 1872 de Boussinesq gibi bir çok matematikçi bu dalgalardan bahsetmiştir.

Russell dalga hızının dalganın genişliğine bağlı olduğunu söylemiştir ki bu çok önemli bir olgudur. Çünkü bu ifade dalga denkleminin lineer olmadığının bir göstergesidir. Bilim adamları da lineer olmayan özelliğinden dolayı bu dalgaları soliton olarak adlandırmışlardır. Nihayet Russell'in keşfinden 60 yıl sonra 1895 yılında sığ sulardaki solitary dalgaların profilini gözlemleyen ve konu hakkındaki ilk teorik çalışmaları yapan Alman matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries olmuştur. Korteweg ve deVries sığ sulardaki tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair bir denklem ortaya koymuşlardır. Bu denklemin soliton dalga çözümleri bulunmuş , günümüzde KdV denklemi olarak bilinen

$$u_t(x,t) + 6\,u(x,t)\,u_x + u_{xxx}(x,t) = 0 \qquad (1.1)$$

denklemi ortaya çıkarılmıştır. Aslında onların çalışmalarının ilk ve önemli bir sonucu da ;

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) \qquad (1.2)$$

model denkleminin türetilmesidir (bir boyutta ve zamanda). Burada η denge seviyesi L nin üstündeki yüzey yüksekliği, α sıvının tek biçimli hareketiyle ilgili küçük bir sabit, g yer çekimi sabiti olmak üzere , $\sigma = L^3/3 - TL/\rho g$ dir. T yüzey kılcal gerilimi , ρ yoğunluktur. Bu denklem dikdörtgensel kesitli bir kanaldaki uzun su dalgalarının oluşumunu tanımlar. Bu denklemin yardımıyla, sinüsoid dalgaların ilerlerken daha dik hale gelmesine rağmen, diğer tip dalgaların farklı şekilde davranabileceğini göstermişlerdir. Cnoidal dalga adı verilen yeni bir uzun durağan dalga tipi özel durumu incelemişlerdir.

KdV denkleminin bu ilk türetiminden sonra , 1960' lara varmadan Gardner ve Morikawa [2] tarafından çarpışmasız hidro- magnetik dalgalar üzerine model denklemin yeni bir uygulaması bulundu. Bu keşif çok sürprizdi çünkü genelde KdV denklemi, küçük fakat sonlu genlikteki dalgaların doğrusal olmayan dağıtıcı ortamlardaki tek yönlü dağılımlarını açıklamaktaydı. 1960' lardan günümüze denklemin birçok uygulaması bulunmuştur. Kruskal [3] ve Zabusky [4] KdV denkleminin eşit kütlelerle birleştirilmiş doğrusal olmayan yaylarda ve tek boyutlu kafesteki (buna Fermi-Pasta-Ulam problemi denir) uzunlamasına dağılımını yönlendirdiğini göstermişlerdir.

Plasma fiziğine olan diğer uygulamalarını Berezin ve Karpman [6] , soğuk plazmadaki iyon akustik dalgalar çalışmalarıyla Washimi ile Taniuti [7] göstermişlerdir. Winjgarden [8] ise sıvı gaz kabarcığı karşımın da basınç dalgalarını tanımladığını bulmuştur. Naraboli [9] de denklemin esnek çubuklardaki dalgalarını yönettiğini göstermiştir. Shen [10] üç boyutlu su dalgaları çalışmasında KdV denklemini türetilmesini yapmış ve Leibovich de bir tüp boyunca dönerek akan sıvının eksensel hız bileşenini tanımladığını göstermiştir. Su ve Gardner ile Taniuti ve Wei de, bunun çeşitli genel denklem sınıflarından ortaya çıktığını göstermişlerdir.

Şurası açıkça bellidir ki, bilimin katılar , sıvılar, gazlar ve plazmalar ile alakalı çeşitli çalışma alanlarından kaynaklanan bu uygulama bolluğu KdV denklemi üzerine yapılan kapsamlı çalışmaların ne kadar isabetli olduğunu fazlasıyla haklı çıkarmaktadır. Bununla birlikte, dikkate değerdir ki, denklem üzerine son zamanlar da yapılan yoğun çalışmaların çoğu, özellikle denklemin ve çözümünün ilginç özelikleri üzerine odaklanmıştır.

Fiziksel uygulamalardan kaynaklanan kısmi türevli denklemler konusundaki detaylı çalışmalar iyi geliştirilmiş bir konu değildir. Gerçektende bu gibi denklemlerin çoğunun çözümleri hakkında az kaliteli ve az detaylı nicel bilgiler bilinmektedir.

Ve ayrıca varlık teklik ve tutarlılıkla ilgili temel sorunlar hala cevapsız kalmıştır. Bu yüzden özel denklemler üzerinde çalışmak ve onlardan mümkün olduğunca kaliteli ve nicel bilgiler çıkarmak ve elde edilen sonuçlardan genelleme yapabilmeye sebep olmak ümidiyle KdV denkleminin birkaç başlığı için detaylı bir çalışma yapmaya girişilmiştir.

Bu çalışmanın yukarıdaki bilgilere ilave olarak (1.1) ile ifade edilen KdV denklemi hakkında son yıllarda yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar üzerine bir anket çalışması gibi olması hedeflenmiştir. Tarihsel gelişimle birlikte , çalışmalar ve sonuçlar ve nasıl elde edildiği incelenmeye çalışılmıştır. KdV denklemini aşağıdaki şekilde tekrar yazılırsa;

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.3}$$

Denklemdeki fiziksel bazı sabitleri elimine edebilmek için bağımlı ve bağımsız değişkenleri aşağıdaki gibi tekrar ölçeklendirilirse ;

$$t' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L\sigma}}\,t, \qquad x' = -\frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \qquad u = -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha$$

(1.2) denkleminden (1.3) denkleminin elde edilişi yukarıdaki dönüşümü ile başlayarak ayrıntılı gösterilecektir:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta}_{A} + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)$$

$$\sigma = \frac{L^3}{3} - \frac{TL}{\rho g}$$

$t' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L\sigma}}\,t$, $x' = -\frac{x}{\sqrt{\sigma}}$, $u = -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha$ dönüşümlerini yapılırsa

$\eta = -2(u + \frac{1}{3}\alpha)$ elde edilir.

Şimdi gerekli olan terimler çıkartalırsa:

$$\eta_t = (-2u - \frac{2}{3}\alpha)_{t'} \frac{dt'}{dt}$$

$$= -2u_{t'} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L\sigma}}$$

$$= -\sqrt{\frac{g}{L\sigma}} u_{t'} \quad \text{ise}$$

$$\eta_t = -\sqrt{\frac{g}{L\sigma}}\, u_{t'} \text{ dir.} \qquad \text{elde edilir} \qquad (*)$$

(1.2) denkleminde parantez içindeki ifadeleri parçalayarak ayrı ayrı bulunacaktır :

$$A = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta$$

$$= \eta\,(\frac{1}{2}\eta + \frac{2}{3}\alpha)$$

$$= \left(-2u - \frac{2}{3}\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\left[-2u - \frac{2}{3}\alpha\right] + \frac{2}{3}\alpha\right)$$

$$= (-2)\left(u + \frac{1}{3}\alpha\right)\left[-u - \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha\right]$$

$$= 2(u + \frac{1}{3}\alpha)^2 - \frac{4}{3}\alpha(u - \frac{\alpha}{3})$$

Şimdi (1.2) denklemine göre yukarıdaki ifadenin türevi alınması gerektiğinden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(2(u + \frac{1}{3}\alpha)^2 - \frac{4}{3}\alpha(u + \frac{\alpha}{3})\right)\cdot\frac{dx'}{dx}$$

$$= \left[4(u + \frac{1}{3}\alpha).u_{x'} - \frac{4}{3}\alpha u_{x'}\right]\left(\frac{-1}{\sqrt{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{\sigma}}(u + \frac{1}{3}\alpha)\, u_{x'} + \frac{4}{3\sqrt{\sigma}}\alpha u_{x'} \qquad \text{elde edilir. } (**)$$

Aşağıda (1.2) denkleminde gerekli olan $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ terim elde edilecektir:

$$\eta_x = \left(-2(u + \frac{1}{3}\alpha) \right)_{x'} \frac{dx'}{dx}$$

$$= -2u_{x'} (\frac{-1}{\sqrt{\sigma}}) = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} u_{x'}$$

$$\eta_{xx} = \left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}} u_{x'} \right)_x$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}} u_{x'} \right)_{x'} \cdot \frac{dx'}{dx}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\sigma}} u_{x'x'} (\frac{-1}{\sqrt{\sigma}}) = \frac{-2}{\sigma} u_{x'x'}$$

$\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ terimini (1.2) denkleminde geçen katsayısı ile çarpılırsa :

$$\frac{1}{3} \sigma \eta_{xx} = \frac{-2}{3} u_{x'x'}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \sigma \eta_{xx} \right)_x$$

$$= \left(\frac{-2}{3} u_{x'x'} \right)_{x'} \cdot \frac{dx'}{dx}$$

$$= \frac{-2}{3} u_{x'x'x'} (\frac{-1}{\sqrt{\sigma}})$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{\sigma}} u_{x'x'x'} \quad (***)$$

(*) , (**) ve (***) denklemlerinden elde edilenler (1.2) denkleminde tekrar yerine yazılırsa:

$$-\sqrt{\frac{g}{L\sigma}}\, u_{t'} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left(\frac{-4}{\sqrt{\sigma}} (u + \frac{1}{3}\alpha)\, u_{x'} + \frac{4}{3\sqrt{\sigma}} \alpha u_{x'} + \frac{2}{3\sqrt{\sigma}} u_{x'x'x'} \right)$$

$$-u_{t'} = \frac{3}{2}\sqrt{\sigma}\left(\frac{-4}{\sqrt{\sigma}}\left[u + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\alpha\right] u_{x'} + \frac{2}{3\sqrt{\sigma}} u_{x'x'x'} \right)$$

$$u_{t'} - 6\,u\,u_{x'} + u_{x'x'x'} = 0$$

elde edilir ki türev işaretleri olan apostrof işaretleri kaldırılınca yani $t' = t$ ve $x' = x$ yazılırsa (1.3) denklemi elde edilir.

Denklemin diğer biçimlerinden (1.3) denklemini elde etmeye ilave olarak, denklemi değişmez olarak bırakacak değişken dönüşümleri de vardır .x ve t sadece türevlerde ortaya çıktığı için (1.3) denklemi keyfi dönüştürümlere açıkça değişmezdir. Ayrıca, bütün türevler tek mertebeden olduğu için, x ve t nin işaretlerini tersine çevirmek, denklemi değiştirmez.

Ayrıca, KdV denklemi Galile değişmezidir (invaryantıdır). Yani, (1.3) denklemi aşağıdaki dönüşümle değişmezdir.

$$t' \equiv t \quad , \quad x' \equiv x - ct \quad , \quad u'(x',t') \equiv u(x,t) + \frac{1}{6}c$$

Burada c herhangi bir sabittir.Son yıllarda KdV denklemiyle ilgili pek çok sonuçlar elde edilmiştir.

Diğer yandan, son zamanlarda keşfedilmiş en büyüleyici üstünlüklerden biri olan solitonların etkileşimi gösterilecektir ki Russell tarafından o kritik soruyu sorana dek farkına varılamamıştır. Son zamanlarda geliştirilmiş matematiksel teknikler, su dalgaları üzerine yapılacak yoğun bir çalışmayla bile ancak hayal edilebilecek fiziksel problemlerin ortaya çıkışına sebep olacak bir şekilde sonuçlar ve uzantılar vermiştir.

Bu da , matematiksel modelleme ve genel analiz tekniklerinin gelişiminin gücünü göstermektedir. Bu genellemelerin bazılarının detaylı hesaplamaları Ablowitz ve diğer bazı matematikçilerin çalışmalarında verilmiştir.

KdV denklemi üzerindeki tamamlayıcı sonuçlar veren diğer araştırma makaleleri de Kruskal [10] , Lax, Scott , Chu ve R.Miura [12] tarafından verilmiştir. Dalga yayılımından meydana çıkan doğrusal olmayan kısmi türevli denklemler üzerine olan geriye dönük bilgi ve açıklayıcı çalışmalar için, Leibovich ve Seebass, Newell’ in çalışmalarına bakılabilir.

BÖLÜM 2. KdV DENKLEMİNİN TÜRETİLMESİ

Düzenli yerçekimi kuvvetine sahip bir kanaldaki ideal sıkıştırılamayan akışkan da (suda) yüzey dalgaları göz önüne alınmaktadır . Kanal boyunca ki koordinata x ve buna dik olan koordinata da y denilerek ve kanalın dibinde y = 0 kabul edilir. Dış yerçekimsel kuvvetin ρg büyüklüğüne sahip olsun , ρ sıvının sabit yoğunluğu , g yerçekimi sabiti olsun. İdeal akışkanın hareketinin ana denklemleri aşağıdaki şekildedir: [13]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p - \rho g \vec{j} \tag{2.2}$$

∇ gradyan operatorü , $\vec{v}$ sıvı parçacıklarının hızı , p sıvı içindeki basınç , $\vec{j}$ y-eksenindeki birim vektördür. Sıvının irasyonel hareketi için curl$\vec{v}$=0 (korunumlu kuvvet kriteri) olmasından $\vec{v} = \nabla\varphi$ dir , burada. φ skaler fonksiyonu hız potansiyeli olarak bilinir. (2.1) denkleminden φ için Laplace denklemi :

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0 \quad \text{ise}$$

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.3}$$

elde edilir. φ fonksiyonun düzlemsel hareketi ile diğer bilinmeyenler x ve y nin daha genel olarak ta t nin fonksiyonlarıdır. Bir potansiyel akış için (yani $\vec{v} = \nabla\varphi$) (2.2) denklemini tekrar yazılırsa : [13],[14]

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}\right) = -\nabla p - \rho g\,\vec{j}$$

$$\rho\left(\frac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t} + \underbrace{(\nabla\varphi\cdot\nabla)}_{\Delta\varphi}\nabla\varphi\right) = -\nabla p - \rho g\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t} + (\Delta\varphi\cdot\nabla\varphi) + \frac{\nabla p}{\rho} + g\,\vec{j} = 0$$

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = -g\,\vec{j} \qquad (2.4)$$

Buradan Cauchy- Lagrange integrali ile

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = A(t) \qquad (2.5)$$

elde edilir , burada *A(t)* keyfi integrasyon fonksiyonudur. Sıvı ile hava arasındaki ortak yüzey (arayüzü) şöyle ifade edilsin :

$$f(x,y,t) = y - \eta(x,t) - h_o = 0 \qquad (2.6)$$

h_o, sıvının derinliği ile ilgili bir sabitdir. Sıvının bağımsız yüzeyini tanımlayacak bir bilinmeyen $\eta(x,t)$ fonksiyonunu belirlenmek istenmektedir.

(2.6) yüzeyinin normal birim vektörü ∇f gradiyan vektörüne doğrudaş olan vektördür, bu sebepten .

$$\nabla f = \left(-\frac{\partial\eta}{\partial x}\ ,\ 1\ ,\ 0\right) \quad \text{ise} \quad |\nabla f| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 0}$$

$$\vec{n}_o = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\hat{i} + \hat{j} + 0}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 0}} \qquad (2.7)$$

(2.6) yüzeyi üzerindeki parçacıkların normal sıvı hızı v_n aşağıdaki biçim de olur:

$$v_n = \vec{v}\cdot\vec{n}_o = \vec{v}\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \nabla\varphi\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

$$\vec{v} = \nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \cancel{\varphi_t})$$

$$v_n = \vec{v}\cdot\vec{n}_o = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{\left(-\frac{\partial\eta}{\partial x}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}}$$

$$v_n = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\left(-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot 1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}} \tag{2.8}$$

(2.6) hareketli yüzeyinin normal hızı ;

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Yüzey , akışkanın parçacıklarından meydana geldiği için (2.6) serbest yüzey üzerindeki kinematik koşula göre bu iki hız eşittir. Sonuç olarak,
$y = \eta(x,t) + h_o$ için

$$\frac{\frac{\partial\eta}{\partial t}}{|\nabla f|} = \frac{\varphi_x\,(-\eta_x) + \varphi_y\cdot 1}{|\nabla f|} \qquad \text{ise}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{2.10}$$

denklemi elde edilir. $y = \eta(x,t) + h_o$ serbest yüzeyin üzerindeki dinamik koşuldan (2.6) yüzeyindeki hareket eden parçacıklara her iki yönden etki eden kuvvetler büyüklük olarak eşit olmalıdır. Böylece , $y = \eta(x,t) + h_o$ yüzeyi üzerindeki yüzey gerilimi T ve yüzey üzerindeki havanın basıncı p_o ise

$$p = p_o + T\ (f_{xx} + f_{yy}) \tag{2.11}$$

elde edilir. Bu denklemde eşitliğin sağ tarafındaki p_o haricindeki terimler yüzey gerilim terimleridir[15]. Su gibi sıvılar için yüzey gerilimi çok küçük olduğu için göz ardı edilebilir. Ayrıca , sıvı yüzeyindeki herhangi bir bozulma yüzey üzerindeki havanın da biraz hareketini gerektirir. Ancak, bu hareket den kaynaklanan havadaki basınç değişimi de göz ardı edilebilir ve havanın basıncı bozulmamış ilk değeri olan p_o = sabit atmosfer basıncına eşit alınabilir.

(2.5) denklemindeki *A(t)* , aşağıdaki gibi yeni bir potansiyel seçerek φ içine absorbe edilebileceği de göz önünde bulundurulmalıdır.

$$\varphi - \int A(t)\, dA = \psi \tag{2.12}$$

$$\psi_t = \varphi_t - A(t)$$

A(t) den $\frac{p_o}{p}$ sabitini ayırarak ve (2.12) denkleminin ortaya konduğunu varsayarsak, (2.5) denklemi yeniden yazılırsa ;

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p - p_o}{\rho} + gy = 0 \tag{2.13}$$

(2.11) denklemi kullanarak ve $T \approx 0$ alınırsa ;

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + g\left[\eta(x,t) + h_o\right] = 0 \tag{2.14}$$

(2.12) denklemi sayesinde serbest yüzeyi üzerindeki kinematik koşuldan (2.10) denklemi:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca kanalın dip tarafında $\vec{v}$ hızının y bileşeni sıfır olduğundan :

$$y = 0 \quad \text{için} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{2.16}$$

Böylece yukarıdaki varsayımlar altında ideal akışkanın kanaldaki hareketi $\psi(x, y, t)$ potansiyeli için Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.17}$$

ile $0 < y < \eta(x,t) + h_o$ aralığında, bilinmeyen hareketli $\eta(x,t)$ için (2.14) $-$ (2.16) sınır koşulları ile düzenlenir.

Korteweg ve deVries , kendi orijinal çalışmalarında [16] , (2.17) Laplace denklemini, y de hızlı yakınsak seriler bularak , ψ için bir çözüm elde etmişlerdir. Lord Rayleigh'in (1876) daki bir çalışmasında kullandığı yöntemin aynısını kullandıklarını vurgulamışlardır : Sığ su teorisi , yaklaşık olarak y den bağımsız olarak aşağıdaki açılımı tavsiye eder [17]:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n f_n(x,t) \tag{2.18}$$

(2.18) denklemini (2.17) denkleminde yerine koyarak ve (2.16) denklemindeki sınır koşullarını kullanarak :

$$f_n(x,t) = \frac{(-1)}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} F}{\partial x^{2n}} \qquad f_{2n+1}(x,t) \equiv 0 \tag{2.19}$$

elde edilir.(F herhangi bir fonksiyondur). Son adım (2.18) denklemini verilen $f_n(x,t)$ ile sınır koşulları olan (2.14) ve (2.15) denklemlerinde yerine yazmak olacaktır.

Lineer olmadıkları ve $y=\eta(x,t)+h_o$ uygulandıkları için, terimlerin boyutsuz parametrelerdeki açılımlara göre sıralanması gerekmektedir. Bu işlem derinlik h_o'la karşılaştırınca dalga boyu büyük (veya küçük) olduğu zaman hangi terimlerin baskın olduğunu belirlemek için gerekli olacaktır.

x,y,t,η,φ parametreleri yeniden düzenleyip boyutlandırılırsa :

$$\tilde{x}=\frac{x}{l} \quad , \quad \tilde{y}=\frac{y}{h_o} \quad , \quad \tilde{t}=\frac{c_o t}{l} \quad , \tag{2.20}$$

$$\tilde{\eta}=\frac{\eta}{a} \quad , \quad \tilde{t}=\frac{c_o\psi}{gla} \tag{2.21}$$

l ve a herhangi uzunluk parametreleri , c_o hız parametresidir.

(2.14)-(2.16) denklemleri boyutsuz parametrelerle aşağıdaki şekilde yazılır:

$$y=1+\eta\alpha \quad \text{üzerinde} \quad \eta+\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=0 \tag{2.22}$$

$$y=1+\eta\alpha \quad \text{üzerinde} \quad \frac{\partial\eta}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \tag{2.23}$$

$$y=0 \quad \text{iken} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \tag{2.24}$$

$$\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \qquad 0<y<1+\alpha\eta \tag{2.25}$$

Burada yakınsaklık için tilda $\alpha = \dfrac{a}{h_o}$ ve $\beta = \dfrac{h_o^2}{l^2}$ değişkenleri üzerinden göz ardı edilmiştir.

(2.18) β nın kuvvetleri cinsinden ve (2.24) ve (2.25) denklemleri tekrar yazılarak ;

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}F}{\partial x^{2m}}\beta^m \tag{2.26}$$

(2.26) denklemi (2.22) ve (2.23) sınır koşullarında yerine yazıldığında:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta)\frac{\partial F}{\partial x}\right]-\beta\left(\frac{1}{6}\left[(1+\alpha\eta)\right]^3\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2\frac{\partial\eta}{\partial X}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)=0 \tag{2.27}$$

$$\eta+\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-\frac{\beta}{2}(1+\alpha\eta)^2\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial t}+\alpha\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\alpha\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2\right)=0 \tag{2.28}$$

(2.27) ve (2.28) denklemlerinde $\alpha\beta$ lı terimleri çıkarılırsa :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\big((1+\alpha\eta)w\big)-\frac{1}{6}\beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\alpha w\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{1}{2}\beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=0, \tag{2.30}$$

elde edilir. Burada $w=\dfrac{\partial F}{\partial x}$ dir.

KdV denklemi (2.29) ve (2.30) denklemlerinden tek yönlü hareket eden dalga özelleştirmesiyle türetilir. Sıfırıncı mertebe için (α ve β da) bu denklemlerden aşağıdaki denklemler elde edilir :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \ , \quad w=\eta \tag{2.31}$$

Bir çözüm elde etmek için , α ve β da birinci mertebeden düzeltmelerle

$$w = \eta + \alpha A + \beta B + O(\alpha^2 + \beta^2) \tag{2.32}$$

A ve B , η ye ve x - türevlerine bağlıdır. Buradan , (2.29) ve (2.30) denklemlerinden

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha\left(\frac{\partial A}{\partial x} + 2\eta\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \beta\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right) + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \beta\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right) + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \tag{2.34}$$

denklemleri elde edilir.

(2.31) denkleminden dolayı , birinci mertebeden tüm t türevli terimler negatif x türevle değiştirilebilir. O zaman denklem tutarlı olur , eğer

$$A = -\frac{1}{4}\eta^2 \quad , \quad B = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \qquad \text{ise} \tag{2.35}$$

o zaman , (2.33) ve (2.34) denklemlerinden

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2}\alpha\eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6}\beta\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \tag{2.36}$$

elde edilir**.** $O(\alpha^2 + \beta^2)$ ihmal edilerek ve $u = 1 + \frac{2}{3}\alpha\eta$ alarak , KdV denkleminin normalleştirilmiş biçimi olan :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \tag{2.37}$$

denklemi elde edilir.

BÖLÜM 3. SOLİTON

Sahildeki su dalgalarını incelediğimizde , dalgaların tepe kısmının önde giden çukur kısmından daha hızlı hareket ettiği gözlemleriz. Bunlar başlangıçta beraber hareket ederler. Fakat sonradan tepe kısım yükselir ve uç kısmı genişler ve çukur kısmın içine doğru düşer ve dağılır. Ancak ilerleyiş devam ettiğinden dolayı arkadan gelen dalga öndekini karşıladığından her iki dalganın da şekillerini kaybetmedikleri ve hızlarını koruyarak ilerledikleri gözlemlenir. Bunun en iyi fark edileceği yer gelgit olayıdır. Bu olay klasik dalgalardan faklı bir olaydır. Burada birbiri içinde sönme durumu da vardır. Zaten KdV denklemi de lineer olmadan ilerleyen bu dalgaların özelikleri konusu hakkında çalışma yapar. Bunun olmasının sebebi de solitonların kendine özgü partikül yapısı özelliğinden kaynaklanır. Soliton dalgalar ,aşağıda da değineceğimiz gibi, ilginç bir özelliğe sahiptir. Birbirlerinin içinden geçtikleri zaman şekil ve hız kaybına uğramazlar.

Günümüzde solitonlar çok farklı alanlarda kullanılmaktadır. Sinyal iletimlerinde , gönderilen sinyalin kayba uğramaksızın ve yeterli büyüklükte hedefine varması önemli bir husustur.Lineer dalgalarla bu işlem zor olacaktır.Ancak solitonlar genişliklerini kaybetmeden ilerleye bilmektedirler. Binlerce km boyunca değişmeden sinyal iletimi mümkün olabilmektedir ve çarpışsalar bile birbirlerinden etkilenmemektedirler. Böylece fiber optik kablolar ile her yöne iletilebilmektedirler.

KdV denkleminin ilgilendiğimiz ilk özelliği düzgün-kararlı ilerleyen dalga çözümleri oluşudur. Bunlar zaten 1. bölümde, Russell in “great wave of translation” da solitary dalga ve Cnodial dalga (Korteveg ve deVries’in sinüsodial dalga genellemelerin de) olarak bahsedilmişti. Bu düzgün ilerleyen dalgalar

$$u(x,t) = U(x-ct) \tag{3.1}$$

biçimindeki çözümlerde aranarak elde edilmiştir. Şöyle ki:

$$u_t = U' . \frac{d}{dt}(x-ct) = -cU'$$
$$u_x = U' . \frac{d}{dx}(x-ct) = U'$$
$$u_{xxx} = U'''$$

Bunlar (1.1) denkleminde yerine konulursa ;

$$U''' - 6\,U\,U' - cU' = 0$$
$$U''' - (6U+c)\,U' = 0 \qquad (3.2)$$

elde edilir . (3.2) denklemi integre edilerek;

$$U'' - (3U^2 + cU) = m$$

elde edilir, elde edilen sonuç $2U'$ ile çarpılırsa ;

$$2\,U'U'' - 6\,U^2U' - 2c\,UU' = 2mU'$$

ve denkleminde her iki tarafın integrali alınıp ve aşağıdaki şekle dönüştürülerek ;

$$\frac{d}{du}(U'^2) - \frac{d}{dU}(2U^3) - c\frac{d}{dU}U^2 = 2m\frac{d}{dU}U + n$$

$$(U'^2) - 2U^3 - cU^2 - 2mU = n \qquad (3.3)$$

Birinci mertebeden denklemi elde edilir , m ve n integrasyon sabitleridir. Son olarak değişkenlere ayırma yöntemi ile integral alarak ;

$$\int \frac{dU}{\sqrt{2U^3 + cU^2 + mU + n}} = \pm(x-ct) \qquad (3.4)$$

elde edilir. Çözüm sınıflarından biri Jakobi eliptik fonksiyon olarak yazılabilen ve Cnodial dalgalar olarak adlandırılan , düzenli periyodik dalgalardır. Hali hazırdaki gelişmeler içindeki en ilginci solitary dalgalardır. KdV denkleminin Galilean değişmezinden dolayı, |x| sonsuza giderken , U nun sıfıra yaklaşacağını kabul edilirse , solitary dalgalar

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}a^2 \sec^2 h\left[\frac{1}{2}a(x - x_0 - a^2 t)\right] \tag{3.5}$$

denklemiyle yazılabilirler. Burada a keyfi sabit bir parametre, x_o $t = 0$ anında simetrik dalganın merkezinin yeridir. Ayrıca burada , solitary dalganın sağa doğru a^2 hızıyla büyüklüğü ile orantılı olarak hareket ettiğini dikkate alınmaktadır. Russell' in dediği gibi, dalganı genişliği sanki hızının bir elemanı (öğesi) gibi girdiği ortaya çıkıyor. Onun solitary dalganın hızı için elde ettiği gözlemsel formülü (düzgün hareketli fiziki değişkenler içinde) aşağıdaki gibidir:

$$Hız = \sqrt{g(L + \eta_{\max})}$$

Burada $\eta_{\max}$ dalganın denge seviyesi L nin üzerindeki genişiliğidir. Değişkenlerimizin yeniden boyutlandırılmasını ve Galilean dönüşümünü sıvının düzenli hareketini da göz önüne alarak, a^2 hızına sahip yukarıdaki solitary dalganın , birinci mertebeden $\sqrt{gL}$ dalga hızı düzeltmesiyle yeni solitary dalga hız denklemi :

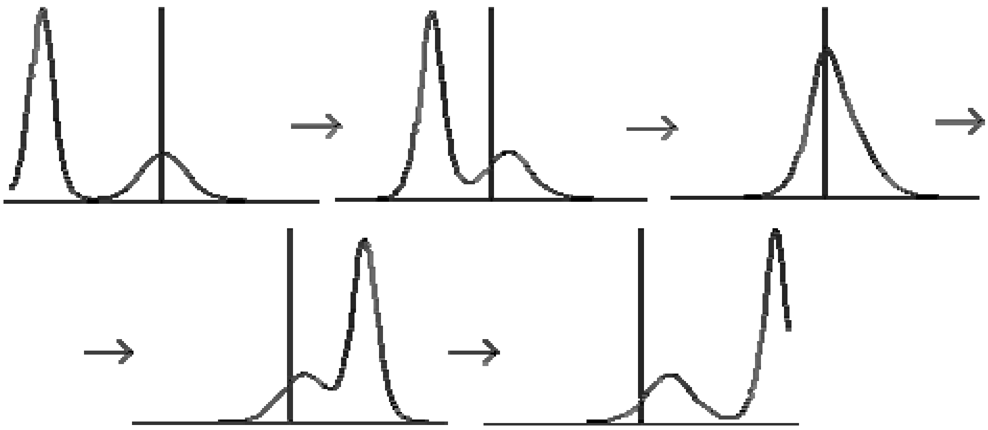
$$Solitary\ \ Dalga\ \ Hızı\ =\ \frac{1}{2}\ \eta_{\max}\sqrt{g/L}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Russell'ın da sözlerinde [1] (syf 323) ve deneysel bağlamda ifade edildiği gibi, akla şu soru geliyor: İki adet translasyon dalgası birbirinin içinden geçerse ne olur?

Bu Russel' in sormayı unuttuğu çok önemli kritik sorudur. Bunun sebebi belki de; Russell'in translasyon dalgası olgusuna büyük bir anlam vermesinden ve bunun yüzey dalgalarının gelişimini açıklamadaki rolünü fark etmemiz gerektiğindedir.

Bunlara ilaveten, O bir solitary dalganın deneysel açıdan mükemmel bir şekilde üretmenin hemen hemen imkansız olduğunu düşünüyordu.

Solitary dalganın hızının genişliğine bağlı olmasından dolayı, şu soruyu ortaya atalım: Farklı genişlikteki iki dalganın süper posizyon durumunu (üst üste gelmesi) başlangıç koşulu olarak aldığımızda, KDV denkleminin çözümünün oluşumu esnasında hangi olgular ortaya çıkmıştır?



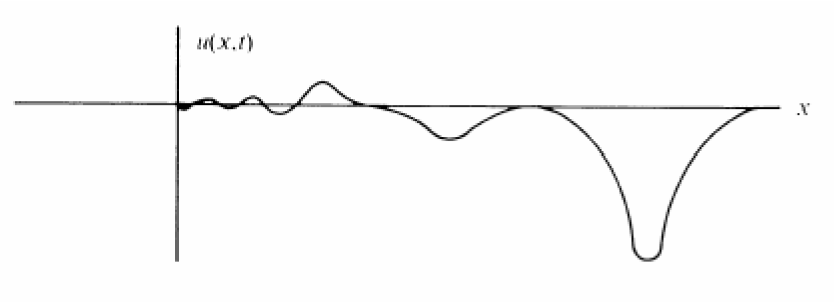
Şekil 1 : İki soliton dalganın etkileşimi

KdV denkleminin içeriğinde sorulan soruyu cevaplamak için, iki adet solitary dalgayı reel eksene uzun olan kısa olanın solunda olacak şekilde yerleştirdiğimiz farz ediyoruz (Şekil 1) Eğer yerleri tam tersine olsaydı uzun dalganın hızından dolayı zaten ayrılıp gideceklerdi. Bunu bir başlangıç koşulu olarak ele alarak , onların gelişimini zaman ilerledikçe gözlemleyelim.

Uzun Dalganın hızının daha fazla olmasından , sonunda kısa dalgayı yakalar , ve bu iki dalga KdV denklemine göre doğrusal bir etkileşime uğrarlar. Bu sürpriz sonuç etkileşimden kaynaklanmaktadır ki burada şekil ve hızı tamamen korunmuş ve sadece pozizyonu hiç etkileşim olamayan yere göre sadece bir miktar değişikliğe uğramıştır. Bu olgu Russell tarafından deneysel olarak gözlenmiştir [1](plate 47)

Bu olgu KdV denklemi için ilk kez numerik olarak Zabusky ve Kruskal [11] tarafından Fermi – Pasta –Ulam'ın doğrusal olmayan ayrık kütle teline yaptıkları süreklilik yaklaşımı çalışmalarında gözlenmiştir. Onların gözlemlerine göre, bir sinüsidal başlangıç profili yerel olarak solitary dalga şeklinde olan bir dizi etkileşim halindeki atımlara dönüşmekteydi. Buradaki kritik gözlem , atımların her etkileşimden sonra kendi kimliklerini korumuş gibi görünüyor olmasıydı. Her ne kadar Fermi, Pasta ve Ulam [5] ayrık tel üzerinde sayısal deneyler yapsalar da çözümlerini hemen kendi lineer modlarına ayrıştırdılar ve dolayısıyla kendi çözüm profillerinin gelişimini gözlemlediler. Doğrusal olmayan etkileşim sürecinde biçimlerini koruyabilmeleri ve parçacıklara benzemelerinden nedeniyle , Zabusky ve Kruskal [11] , bu dalgalara soliton ismini verdiler.

Zabusky iki solitonun sayısal olarak tam etkileşimini gösterdi ve Lax' da [18] analitik ispatını yapmıştır. N tane soliton durumunun analitik ispatı; geliştirilecek çözümün ters saçılım yöntemi kullanarak yapılabileceği ve sonrada çözümün t deki asimptotik davranışı incelenerek yapılabilir. Daha genelleştirecek olursak, KdV denklemleri için başlangıç koşulları solitonların sağa olan hareketini ve titreşimli yayılım durumu da sola doğru hareketini etkilemektedir. (Şekil 2)



Şekil 2 . Başlangıç koşullarının soliton hareketini etkileyişi

Solitonun hızı genişliğine bağlı olduğu için, solitonlar kendilerini en sonunda sağa doğru hareket eden ve soldan sağa doğru monoton artan genlikte bir geçit halinde sonuçlandıracaklardır.Sadece solitonları kapsayan–yani titreşim davranışı göstermeyen bu tip çözümlere saf soliton çözümler yada N-soliton çözümleri denir.

BÖLÜM 4.

KORUNUM KANUNLARI VE HAREKETİN İNTEGRALİ :

KdV denkleminin özel öneme sahip bir diğer özelliği de sonsuz sayıda korunum kanuna sahip oluşudur. Korunum kanunuyla

$$T_t + X_x = 0 \tag{4.1}$$

yapısında ki denklemlerden kastedilmektedir. Burada T korunmuş yoğunluk ve X akış - x , t , u ve u nun yüksek mertebeden türevlerinin fonksiyonları cinsinden ifade edilirler. Burada sadece T ve X in yalnız u ve u nun x cinsinden türevlerinin polinomları şeklindeki korunum kanunlarından bahsedilecektir.

Eğer T, her u değeri için bir x cinsinden türev ise, korunmuş yoğunluk açık ve aşikardır. Bu açıklık ; eğer $T = F_x$ ise o zaman

$$(F_x)_t + (-F_t)_x = 0$$

korunum kanunu elde edebileceğimizden ortaya çıkar. Burada akışdaki t-türevleri oluşum denklemlerinin tekrarlanan kullanımında çıkartılmıştır.

Tarihsel açıdan bakıldığında , Korteweg ve de Vries (1.2) denklemini korunum biçiminde göstermek için seçmişlerdi. Yakın geçmişte, korunum kanunları ön kestirimler çıkarmak ve hareketin integralini elde etmek için kullanımıştır.

Örneğin ; $|x| \to \infty$ iken X sıfır ise, $\int_{-\infty}^{\infty} T\, dx =$ sabitdir.

Buna ilaveten , sonsuz çokluktaki korunum kanunlarını varlığı, KdV denkleminin fiziksel bakımından özel bir denklem olduğunun bir işaretidir. KdV denkleminin üç korunum kanunu aşağıdaki gibidir:

$$u_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = 0 \tag{4.2}$$

$$(u^2)_t + (-4u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2)_x = 0 \tag{4.3}$$

$$(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2)_t + (-\frac{9}{2}u^4 + 3u^2u_{xx} - 6uu_x^2 + u_xu_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2)_x = 0 \tag{4.4}$$

Birinci denklem sadece KdV denklemini korunum şeklinde yeniden ifade etmektedir .

İkinci denklem KdV denklemini önce $2u$ ile çarpıp , korunum şeklinde tekrar yazarak elde edilmiştir. Üçüncü korunum kanunu da önce $3u^2 - u_{xx}$ ile çarpıp sonra türevle uygun ayarlamalar yaparak elde edilmiştir. (burada u_t , u ve u nun x türevlerinden yana (1.3) denklemi kullanılarak elimine edilmiştir.)

Bu korunmuş yoğunluklar bazı fiziksel sistemler için kütle, momentum ve enerji olarak yorumlanabilir. Buradaki ilk üçünün ötesindeki korunmuş yoğunluklar herhangi bir fiziki yoruma sahip olmadığı görünmektedir. $u = v_x$ yer değişimi ile, Kdv denklemi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}v_xv_t - v_x{}^3 - \frac{1}{2}v^2{}_{xx} \tag{4.5}$$

Lagrangian yoğunluğu ile bir varyasyonel ilkeden elde edilebilir. Varyasyonel formulasyon ile, üstteki üç korunum kanunu Noether teoremi'nin sırasıyla *v*,*x*, ve *t* değişmezlerinin sonsuz küçük dönüştürümleri için yapılan uygulamasına tekabül etmektedir.(Gel'fand ve Fomin [19]). KdV denklemi de Galilea dönüşümü altında değişmezdir ve Noether teoreminin uygulaması burada

$$(xu + 3tu^2)_t + (-3xu^2 + xuu_{xx} - u_x - 12tu^3 + 6tuu_{xx} - 3tu_x^2)_x = 0 \tag{4.6}$$

korunum kanunu verir ki , korunmuş yoğunluk ve akış , açık bir şekilde x ve t ye bağlıdır. (4.4) deki üçüncü korunum kanunu

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta\int(u^3+\frac{1}{2}u_x^2)dx}{\delta u}\right) \tag{4.7}$$

ile verilen Kdv denkleminin Hamilton formulasyonun da kullanılabilir ki burada $\frac{\delta}{\delta u}$ Euler yada varyasyonel) türevidir. Uygulamalarda Hamiltonyan sistemler olarak ortaya çıkan çoğu doğrusal olmayan model denklemlerin formüle edilmesinin önemi , Zakharov, Faddeev [9], Glashka ve Newell in son yıllarda yaptıkları çalışmalarıyla inandırıcı olmuştur. Açık korunum kanunlarının türetimi açıktır fakat çok fazla terim içeren korumuş yoğunluklardan dolayı usandırıcıdır. Whitham [20] doğrusal olmayan dağıtıcı dalga denklemleri çalışmasına yaptığı bir varyasyonel yaklaşım gelişiminde , (3.4) deki üçüncü korunum kanunu keşfetmiştir. Dördüncü ve beşinciler ise Kruskal ve Zabusky [11] tarafından bu iki denklemle alakalı çözümlerin doğrusal olmayan varsayımları hakkındaki gelişimlerinde bulunmuştur. Bu iki denklemin doğru-dan kıyaslanması çok aydınlatıcı değildir. Altı tane daha açık korunum kanunu bulunmuştur ve bunlardan sonsuz sayıda olduğu varsayılmaktadır. (Miura, Gardner ve Kruskal, Zabusky [21]).

Sonsuz sayıda polinomsal korunum kanunun varlığının ispatı ise hemen gerçekleşmedi. Aslında, böyle bir ispatı elde etmeden önce, korunmuş yoğunluklar için açık operator formul elde edildi.(mevcut olduğu var sayılarak) Fakat formül korunum kanunlarının varlığının ispatı için kullanılmadı.Böyle birçok korunum kanunların varlığından dolayı, KdV denklemi, doğrusal olmayan kısmi türevli denklemler arasında , diğer birkaçı ile, seçkin bir rol izler. Diğer denklemleri daha genel bir sınıfta inceleyerek ne kadar özel oldukları belirlenmeye çalışılabilir. Örneğin; bu türden bir sınıf

$$w_t-6w^p w_x+w_{xxx}=0\,,\ p=1,2,.. \tag{4.8}$$

ile verilmiştir. Aşağıda daha yüksek mertebeden türev içeren bu denklem sınıfını genelleştireceğiz. Bu sınıftaki ilk denklem tabii ki KdV denklemidir ve ikincisi ise modifiye edilmiş Kdv denklemi denen

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{4.9}$$

denklemdir ve öyle ki arasında lineer olmayan ayrık kütleli yay ile kubik kuvvetli kütleler çalışılırken elde edilen bir denkleme dönüştürülebilir.(Burada dönüşüm kompleks değerli değişken değişimi gerektirmektedir) Bu denklem ayrıca bir çok polinom korunum kanuna sahiptir ve bunların ilk dört korunmuş yoğunluğu(öz kütlesi) aşağıda verilmiştir.

$$T_1 = v \tag{4.10}$$

$$T_2 = v^2 \tag{4.11}$$

$$T_3 = v^4 + v_x^2 \tag{4.12}$$

$$T_4 = v^6 + 5v^2 v_x^2 + \frac{1}{2} v_{xx}^2 \tag{4.13}$$

Bununla birlikte , (4.8) denkleminin $p \geq 3$ için incelenmesi sadece 3 tane korunum kanunun keşfedilmesine sebep olmuştur.

Aslında daha açık korunum kanunları türetmek için yapılan araştırmalar başta usandırıcı bir çalışma olarak başlamıştır. Sonsuz tane daha var olduğu varsayımını destekler şekilde birbiri ardından dört ilave daha keşfedildi. Diğer yandan, 1966 yazında, sadece dokuz tane polinom korunum kanunu olduğuna dair bir söylenti vardı.Bunun sonucu olarak, M. Miura mevcut olan onuncu korunum kanunu hazırlamak için Peterboro, Kanada yakınlarındaki güzel bir göl kenarında bir haftalık tatilini harcadı. Korunmuş yoğunlukların hesaplanması için bir algoritma geliştirildi (Kruskal, Miura, Gardner, Zabusky) [21] ve Courant matematiksel bilimler enstitüsünden Donald Stevens AECCDC 6600 bilgisayarı için 11. nci korunmuş yoğunluğu başarıyla hesaplayan bir bilgisayar programı geliştirdi. Bu IBM 7094 için Formac sembolünü hünerli bir dil olarak kullanan bir program olması açısından önemli bir başarıydı. Bu işlem Los Alamos bilimsel laboratuarında gerçekleşmiş ve kullanılacak belleği aşmadan önce 5. korunmuş yoğunluğu başarıyla hesaplamıştı.

Modifiye KdV denklemlerinin korunum kanunlarını incelediğimiz de anlaşılacağı gibi, son üç denklem baş terim olarak v^2 nin kuvvetlerini içerirken, diğer yandan KdV denklemlerinin korunum kanunların ise baş terim u nun kuvvetlerini içerirler. Bu sebepten, korunum kanunlarını karşılaştırırken , (4.10)denklemini ihmal edilir ve karşılaştırmayı kalan denklemler arasında yapılırsa : Sonucu da aşağıdaki Teoremle özetlenebilir : Miura [34]

<u>Teorem:</u> Eğer v

$$Qv \equiv v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \qquad (4.14)$$

denkleminin bir çözümü ise,

$$u \equiv v^2 + v_x \qquad (4.15)$$

ifadesi de

$$Pu = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (4.16)$$

denkleminin bir çözümüdür.

<u>İspatı:</u>

$u \equiv v^2 + v_x$ ifadesini Pu da yerine koyduğumuzda, $Pu = (2v + \frac{\partial}{\partial x})Qv$

elde edilir. Bu yüzden eğer $Qv = 0$ ise , u (4.16) da ki KdV denklemini sağlar.

Açıklama : Sağ tarafındaki eklenmiş operatörden dolayı teorem modifiye KdV den KdV ye sadece tek taraflı bir sonuç vermektedir.Yukarıdaki dönüşüm, Burger denkleminin Hopf-Cole dönüşümünün difüzyon denklemine benzerdir. [22] Yalnız burada her ikisini de çözemediğimiz bir lineer olmayan denklemden diğerine dönüşüm vardır. Her ne kadar burada sonsuz sayıda korunum yasasının varlığını ispatlama niyetimizden bariz sapmış gibi görünüyor olsak ta , yukarıdaki dönüşüm verilen ispatın anahtarıdır. Ayrıca KdV denkleminin tam çözümü için ters saçılım yöntemine de bir başlangıç noktası teşkil etmektedir.

İki mevcut ispat eş zamanlı olarak Gardner ve Kruskal ile Miura [21] tarafından bulunmuştur. Bu ispat Gardner tarafından yapılmıştır. Gardnerin (4.15) deki dönüşüm genelleştirmesi ile başlayıp teoremin tersinden gidelim.KdV denklemi bir Galilean değişmezi olduğu halde , hızlı bir inceleme modifiye edilmiş KdV'nin böyle olmadığını gösterir.

Aşağıdaki değişken dönüşümleri yapılırsa :

$$t' = t, \quad x' = x + \frac{3}{2\varepsilon^2} t,$$
$$u(x,t) = u'(x',t') + \frac{1}{4\varepsilon^2}, \qquad (4.17)$$
$$v(x,t) = \varepsilon w(x',t') + \frac{1}{2\varepsilon},$$

Aşağıdaki işlemleri yapılırsa : Q_v denklemde yerine yazılsın :

$$0 \equiv Pu \equiv (2v + \frac{\partial}{\partial x})Qv = (2v + \frac{\partial}{\partial x})(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) \qquad (*)$$

v_t bulunursa:

$$v_t = \left(\varepsilon w(x',t') + \frac{1}{2\varepsilon}\right)_t = \left(\varepsilon w(x',t') + \frac{1}{2\varepsilon}\right)_{x'} \frac{dx'}{dt} + \left(\varepsilon w(x',t') + \frac{1}{2\varepsilon}\right)_{t'} \frac{dt'}{dt}$$

$$v_t = \varepsilon w_{x'} \cdot \frac{3}{2\varepsilon^2} + \varepsilon w_{t'}$$

v_x, v_{xx}, v_{xxx} terimleri bulunursa :

$$v_x = (\varepsilon w + \frac{1}{\varepsilon})_{x'} \cdot \frac{dx'}{dx} + (\varepsilon w + \frac{1}{\varepsilon})_{t'} \cdot \frac{dt'}{dx} = \varepsilon w_{x'} \cdot 1 + 0 = \varepsilon w_{x'}$$

$$v_x = \varepsilon w_{x'}$$

$$v_{xx} = (\varepsilon w_{x'})_{x'} \cdot \frac{dx'}{dx} = \varepsilon w_{x'x'}$$

$$v_{xx} = \varepsilon w_{x'x'}$$

$$v_{xxx} = \varepsilon w_{x'x'x'}$$

Şimdi (*) denkleminde ifadeyi açarken kullanılacak terimler bulunursa:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = v_{tx} - 12v\ v_x^2 - 6v^2 v_{xx} + v_{xxxx}$$

$$v_{tx} = (\frac{3}{2\varepsilon}\cdot w_{x'} + \varepsilon w_{t'})_{x'}.1 = \frac{3}{2\varepsilon}\cdot w_{x'x'} + \varepsilon w_{t'x'}$$

Bulunan ifadeleri yerine yazıp (*) denklemi açılırsa :

$$0 \equiv Pu = 2(\varepsilon w + \frac{1}{2\varepsilon})\left[\frac{3}{2\varepsilon}w_{x'} + \varepsilon w_{t'} - 6(w + \frac{1}{2\varepsilon})^2 \cdot \varepsilon w_{x'} + \varepsilon w_{x'x'x'}\right] + \frac{3}{2\varepsilon}w_{x'x'} +$$
$$+ \varepsilon w_{t'x'} - 12(\varepsilon w + \frac{1}{2\varepsilon})\varepsilon^2 w_{x'}^2 - 6(\varepsilon w + \frac{1}{2\varepsilon})^2 \cdot \varepsilon w_{x'x'} + \varepsilon w_{x'x'x'x'}$$

$$= 3ww_{x'} + 2\varepsilon^2 ww_{t'} - 12\varepsilon^2 ww_{x'} + 2\varepsilon^2 ww_{x'x'x'} + \frac{3}{2\varepsilon^2}w_{x'} + w_{t'} - 6(\varepsilon w + \frac{1}{2\varepsilon})^2 w_{x'} +$$
$$+ w_{x'x'x'} + \frac{3}{2\varepsilon}w_{x'x'} + \varepsilon w_{t'}w_{x'} - 12(\varepsilon w + \frac{1}{2\varepsilon})\varepsilon^2 w_{x'}^2 - 6(\varepsilon w + \frac{1}{2\varepsilon})^2 \varepsilon w_{x'x'} + \varepsilon w_{x'x'x'x'}$$

$$= w_{t'}(1 + 2\varepsilon^2 w) + w_{x'x'x'}(1 + 2\varepsilon^2) - 6\varepsilon^2 w^2 - 6w - \frac{3}{2\varepsilon^2} + \frac{3}{2\varepsilon}w_{x'x'} +$$
$$+ \varepsilon w_{t'}w_{x'} - 6\frac{\left(1 + 2\varepsilon^2 w\right)^2}{4\varepsilon}w_{x'x'} - 12\frac{\left(2\varepsilon^2 w + 1\right)}{2\varepsilon}\varepsilon^2 w_{x'}^2 + \varepsilon w_{x'x'x'x'}$$

$$= (1 + 2\varepsilon^2 w + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x'})w_{t'} - 6w(1 + \varepsilon^2 w) + w_{x'}\frac{(6\varepsilon^2 w - 24\varepsilon^4 w + 3)}{2\varepsilon^2} +$$
$$+ w_{x'x'x'}(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon w_{x'x'x'x'}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(-6\,[w + \varepsilon^2 w]\,w_x + w_{xxx}\right) = \varepsilon\left\{-6(w_x + 2\varepsilon^2 ww_x)w_x \mp 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_{xx} + w_{xxxx}\right\}$$
$$= \left\{-6\varepsilon\, w_x{}^2 - 12\varepsilon^3 ww_x{}^2 - 6\varepsilon ww_{xx} - 6\varepsilon^3 w^2 w_{xx} + \varepsilon w_{xxxx}\right\}$$

$$Pu \equiv (2v + \frac{\partial}{\partial x})Qv = (2v + \frac{\partial}{\partial x})(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) \tag{4.18}$$

Aşağıdaki değişken dönüşümlerini yine yapılırsa :

$$t' = t \qquad x' = x + \frac{3}{2\varepsilon^2} t$$

$$u(x,t) = u'(x',t') + \frac{1}{4\varepsilon^2}$$

$v(x,t) = \varepsilon w(x',t') + \dfrac{1}{2\varepsilon}$ ise $v_t = \varepsilon w_{x'} \cdot \dfrac{3}{2\varepsilon^2} + \varepsilon w_{t'}$ olarak elde edilir.

$v(x,t) = \varepsilon w(x',t') + \dfrac{1}{2\varepsilon}$ ise $v_x = (\varepsilon w + \dfrac{1}{\varepsilon})_x \cdot \dfrac{dx'}{dx} + (\varepsilon w + \dfrac{1}{\varepsilon})_{t'} \cdot \dfrac{dt'}{dx} = \varepsilon w_{x'} \cdot 1 + 0 = \varepsilon w_{x'}$

$$v_x = \varepsilon w_{x'}$$

$$v_{xx} = (\varepsilon w_{x'})_x \cdot \frac{dx'}{dx} = \varepsilon w_{x'x'}$$

$v_{xxx} = \varepsilon w_{x'x'x'}$ olarak elde edilir.

$2v + \dfrac{\partial}{\partial x} = 2\varepsilon w + \dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{\partial}{\partial x'} \cdot \dfrac{dx'}{dx} = \dfrac{1}{\varepsilon}(1 + 2\varepsilon^2 w + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial x'})$ elde edilir.

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = \frac{3}{2\varepsilon} w_{x'} + \varepsilon w_{t'} - 6(w^2\varepsilon^2 + 6w + \frac{6}{4\varepsilon^2})\varepsilon w_{x'} + \varepsilon w_{x'x'x'}$$

$$= \varepsilon \left[w_{t'} - 6(w + \varepsilon^2 w^2) w_{x'} - \cancel{\frac{6}{4\varepsilon^2}\varepsilon w_{x'}} + \cancel{\frac{3}{2\varepsilon} w_{x'}} + w_{x'x'x'} \right]$$

elde edilir. Burada istenen sonuçları elde etmek için ε parametresi seçilmiştir.

Yukarıdaki yerlerine koyup parantezleri açılırsa :

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}\right) = \frac{1}{\varepsilon}(1 + 2\varepsilon^2 w + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x'}) \cdot \varepsilon \left[w_{t'} - 6(w + \varepsilon^2 w^2) w_{x'} + w_{x'x'x'} \right]$$

$$= (1 + 2\varepsilon^2 w + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x'}) \left[w_{t'} - 6(w + \varepsilon^2 w^2) w_{x'} + w_{x'x'x'} \right] = \mathfrak{R}[\mathfrak{L} w] \tag{4.19}$$

denklemi elde edilir. Burada apostrof işaretleri atılmıştır. Galile dönüşümü KdV denklemini değişmez olarak bırakır. Ancak , (4.15) dönüşümü

$$u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 \tag{4.20}$$

biçimine gelir ki , buna Gardner genellemesi denir.

Yeni değişkenlerin sunulmasından dolayı , sonsuz çoklukta korunum yasasının var olduğunun ispatına başlangıç noktası olarak ε den bağımsız olan u ve x , t ve ε nin bir fonksiyonu olan ve (4.20) denklemindeki dönüşümden yinelemeli olarak elde edilecek w ile başlanmıştır.. w nin ε cinsinden ve katsayıları u ve u nun x türevlerinin fonksiyonu cinsinden olan kuvvet serisi aşağıdaki biçimde olsun.

$$w(x,t;\varepsilon) = w_o + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3 + ... \tag{4.21}$$

Fakat (4.19) denklemi

$$(1+\varepsilon\,\mathcal{M})[\mathfrak{L}w]=0 \tag{4.22}$$

şeklinde yazabilir.
burada parantezler içindeki ifadeler ε nun kuvvet serisine açılabilir. Bu tekrar çözüldüğünde

$$\mathfrak{L}w = w_t + (-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + w_{xx})_x = 0 \tag{4.23}$$

denklemini elde edilir ki bu aslında Gardner Denklemidir. Fakat (4.23) denklemine bakıldığında ε nun kuvvetlerinin katsayıları KdV denklemi için bir korunum yasasıdır ve bunlardan sonsuz sayıda vardır.

ε nun çift kuvvetlerinin katsayılarının aşikar olmayan korunum yasalarını verdiği gösterilebilir oysa ε nin tek kuvvetlerinin katsayıları da aşikar korunum yasalarını verir.(Miura, Gardner, Kruskal [21]).Bunlara ilaveten , (4.15) ve (4.20) denklemleri arasındaki bağıntı sayesinde , modifiye KdV denklemleri ve Gardner denklemi içinde sonsuz çoklukta korunum yasası vardır. Daha genelleştirerek , (4.8) denklemi yerine

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u^{p}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^{r}u}{\partial x^{r}}=0 \tag{4.24}$$

denklem sınıfını göz önüne alınırsa (bütün katsayılar kolaylık olsun diye bire eşitlenmiştir) , öyle ki buradan korunum yasaları hakkında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

a) Eğer r çift ise (mesela Burger denkleminde p =1 için r =2 idi), sadece bir tane korunum yasası vardır o da denklemin korunum yasası biçiminde yazılan kendisidir.

b) Eğer r tek ise, r = 2q+1 ve q = 0,1,… olsun, herhangi p≥ 0 için korunmuş yoğunlukla birlikte her zaman üç adet korunum yasası vardır.

$$\begin{aligned} &T_1 = u\,, \\ &T_2 = u^2\,, \\ &T_3 = u^{p+2}+\frac{1}{2}(-1)^{p}(p+1)(p+2)\left(\frac{\partial^{q}x}{\partial x^{q}}\right)^{2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

q = 0 için , $v_t + vv_x = 0$

denklemini elde etmek için sadece $v = u^p + 1$ yeni değişkenini tanımlamaya ihtiyacımız vardır, ki bu denklemin sonsuz tane korunum yasası vardır ve aslında v’nin herhangi türevlene bilir fonksiyonun da olduğu gibi.

p = 0 için, denklem lineerdir ve $T = \left(\frac{\partial^{n}u}{\partial x^{n}}\right)^{2}$, n = 0,1,2… korunmuş yoğunlukla birlikte sonsuz çoklukta korunum yasası vardır p =1 ve p = 2 ve q = 1 durumları sırasıyla KdV denklemine ve modifiye KdV denklemine karşılık gelir. Diğer durumların hepsinde sadece (3.25) deki üç adet (polinom) korunum yasaları vardır.

Buradaki sonuçlar tablo 1 de özetlenmiştir. Bu denklemlerin bazılarının sonsuz çoklukta korunum yasaları var iken , diğerlerinin sadece üç tane olması anlaşılamamıştır. Burada şu söylenmek istenmektedir ; başka çeşit korunum yasalarının da olması mümkündür mesela Wahlquist ve Estabrook'ın buldukları. Bu bilim adamları bunu yakın geçmişte diferansiyel formlar kullanarak Backlund dönüşümünü geliştirme çalışmalarında yapmışlardır.

Tablo 1 . p ve q değerleri için korunum kanunları sayıları tablosu

q \ **p**	0	1	2	$p \geq 3$
0	∞	∞	∞	∞
1	∞	∞	∞	3
$q \geq 2$	∞	3	3	3

BÖLÜM 5. TERS SAÇILIM METODU

Bu çalışmada ki belki de en önemli sonuç , KdV denkleminin başlangıç değer probleminin tam çözümü için bir metodun geliştirilmesi olmuştur.(Gardner, Greene, Kruskal [23])

Bu metodun sunulmasına kadar , bilinen tam çözümler sadece solitary dalgalar ve cnodial dalgalardı. Bu metod bize saf soliton çözümlerini açık bir şekilde elde edilmesi ve genel çözümler hakkında nitel bilgiler elde etmek için bir yöntem geliştirilmesini sağlamıştır.

Bahsedilen başlangıç değer problemi (1.2) denkleminde ki $-\infty < x < \infty$, aralığında $t > 0$ ile tanımlı KdV denklemidir. Başlangıç koşulu ;

$$u(x,0) = f(x), \ -\infty < x < \infty \text{ ,dır.} \tag{5.1}$$

öyle ki , *f(x)* aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\sum_{i=0}^{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right| dx < \infty \tag{5.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|) \left| f(x) \right| dx < \infty \tag{5.3}$$

Bona ve Smith [24] ilk koşulun KdV denkleminin klasik çözümünün varlığını garanti ettiğini göstermiştir, Faddeev ‘de [25] ikinci koşulun öz değer probleminin aşağıda değinilen bir çözümünü varlığını sağlama aldığını göstermiştir. KdV denkleminin çözümlerinin tekliği Lax [40] tarafından ispatlanmıştır. Metodumuzun orijinal buluşunu (4.15) denklemindeki dönüşüme

$$u = v^2 + v_x \tag{5.4}$$

geri dönerek harekete geçirilir .Eğer *u* yu bilinmeyen olarak ele alırsak, bu sefer *v* için Ricatti denklemine benzer ve

$$v = \frac{\psi_x}{\psi} \tag{5.5}$$

şeklinde standard dönüşümüyle bunu lineer hale getirilebilir. Buradan işlemler yapılırsa :

$$v = \frac{\psi_x}{\psi} \qquad \text{ise} \qquad v_x = \frac{\psi_{xx}\psi - \psi_x^2}{\psi^2}$$

Sonra bulunanlar *u* da ((5.4)denkleminde) yerine koyulursa :

$$u = \cancel{\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2} + \frac{\psi_{xx}}{\psi} - \cancel{\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2} \Rightarrow \psi_{xx} - u\psi = 0 \qquad \text{elde edilir.}$$

Bu bir fizikçi için adeta zamandan bağımsız Schrödinger denklemine tanıdık gelir ancak enerji seviyesi terimi burada eksiktir.Bunu telafi etmek için, *u* nun Galileyan dönüşümü altında değişmez olan KdV denklemin bir çözümü olduğunu kullanalım.Bu dönüşüm altında *u* bir sabit ile yer değiştirilebilir ve x- türevleri değişmeden kalabilir. Bu yüzden, genelliği bozmadan yukarıdaki denklemi aşağıdaki ile değiştirebiliriz.

$$\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0 \tag{5.6}$$

ki bu kuantum mekaniğinden zamana bağlı olmayan Schröndinger denklemidir. Burada u potansiyel rolünü oynar, λ , enerji seviyesi, ψ de dalga fonksiyonudur.

Bu denklemde şuna dikkat etmelidir ki, t burada sadece bir parametre rolü oynar ve bu yüzden zamana bağlı Schröndinger denkleminde ki zamanla karıştırılmamalıdır. Kuantum mekaniğindeki her zaman ki alışıla gelmiş bir problem olan , verilen u potansiyeli için sınır koşul enerji seviyesini ve dalga fonksiyonunu bulmaya yani öz değer ve uygun ve uygun olmayan öz fonksiyonları bulmaya doğrudan saçılım problemi denir.

Önemli olan problem u yu bulmak olursa buna ters saçılım problemi denir. Önce bu problemi olağan kuantum mekaniği içeriği içinde -yani t sabit iken- nasıl çözüleceğini özetleyeceğiz. Sonrada t ye bağımlılığın nasıl dikkate alınacağı göstereceğiz ve dolayısıyla KdV denkleminin başlangıç değer probleminin bir çözümüne etkisine bakılacaktır.

Ters problemin çözümü , saçılım verisi denen bir önsel bilgi gerektirir ,buna saçılım verisi denir ve bu ayrık öz değerler ile buna karşılık gelen öz fonksiyonların normalleştirme katsayıları ve yansıma katsayılarını içerir.

1. Ayrık öz değerler ; Problemin öz değerleri $\lambda_n = - k_n^2$, $n = 1,...,N$ değerleridir öyle ki ψ_n öz fonksiyon çözümleri dördül integrabldır.

2. Normalleşme katsayıları ; λ_n öz değerine karşılık gelen ψ_n öz fonksiyon normalleştirilmiş ise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\ \mathrm{dx} = 1 \tag{5.7}$$

o zaman normalleşme katsayısı

$$\lim_{x\to\infty} e^{k_n x}\, \psi_n(x) = \mathrm{c}_n \tag{5.8}$$

ile tanımlanır.

3. Yansıma katsayısı ; ψ dalga fonksiyonunu u potansiyeli ile etkileşime girmek için sonsuzdan içeriye gönderilmiş sabit – düzenli düzlem dalgalarının uzaysal bağımlı bir parçası olarak göz önünde canlandırılmaktadır.

Bu etkileşimin sonucu sonsuzdan geriye doğru bir bölümün yansıması ile potansiyel tarafından iletilmiş kalıntıdan meydana gelir. Kompleks değerli gösterimde , aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\psi(x,t) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, & x \to \infty \\ a(k)e^{-ikx}, & x \to \infty \end{cases} \tag{5.9}$$

burada exp*(-ikx)* ve exp(*ikx*) sırasıyla sola ve sağa giden dalgaları temsil ederler. *b(k)* ve *a(k)* sırasıyla yansıma ve iletim katsayılarıdır. Bu iki katsayılarda enerjinin korunumu ile ilgilidirler:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{5.10}$$

İletim katsayısına ters problemin çözümü için gerek duyulmayacaktır. Bu niceliklerin bilindiğini varsayarak, aşağıdaki fonksiyon tanımlansın:

$$B(\zeta) \equiv \sum_{n=1}^{N} c_n^2 e^{-k_n\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k)\, e^{k_n\zeta} dk \tag{5.11}$$

Burada toplam sembolü ayrık spektrumdan katkılara karşılık gelirken , integral ise sürekli spektrumdan, yansıma katsayısının Fourier integralinden katkılara karşılık gelir.

Bu fonksiyon Gelfand - Levitan (ve daha doğrusu Marcenko) lineer integral denkleminde

$$K(x,y) + B(x,y) + \int_{x}^{\infty} B(x+z)K(z,y)\,\mathrm{dz} = 0 \tag{5.12}$$

çekirdek ve türdeş (homojen)olmayan terim olarak işe yarar. Ters problemin çözümü

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x) \tag{5.13}$$

denkleminden elde edilir.

Ters saçılım problemi hakkındaki daha detaylı arama için Gelfand ile Levitan] ve Kay'ın çalışmalarına bakılabilir.

Buradaki birincil amaç KdV denkleminin çözümüdür ve t parametresi üzerinde u potansiyeline bağımlılığını hesaba katmayı gerektirir. Sonuç olarak da öz değerlere, yansımaya, aktarım katsayılara ve t ye bağlı dalga fonksiyonlarını da hesaba katmalıdır.

Fakat eğer verilen bilgilere bakarsak, sadece $t = 0$ iken sadece u yu ve u nun oluşum denklemini biliyoruz. Verilen bilgiyi çıkartabilmek amacıyla ψ için bir oluşum denklemi türetelim. Ayrıca yansıma ve aktarım katsayılarının oluşumları |x| sonsuza giderken ψ nin asimptotik davranışlarıyla belirlenir.

(5.6) denklemini u için çözülürse ;

$$\psi_{xx} - (u-\lambda)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad u\psi - \lambda\psi = \psi_{xx} \Rightarrow u = \frac{\psi_{xx} + \lambda\psi}{\psi}$$

$$u_t = \frac{(\psi_{xxt} + \lambda_t\psi + \lambda\psi_t)\psi - (\psi_{xx} + \lambda\psi)\psi_t}{\psi^2} \quad \text{ise} \quad \psi^2 u_t = \psi\psi_{xxt} + \psi^2\lambda_t - \psi_t\psi_{xx}$$

$$u_x = \frac{(\psi_{xxx} + \lambda\psi_x)\psi - (\psi_{xx} + \lambda\psi)\psi_x}{\psi^2} \quad \text{ise} \quad \psi^2 u_x = \psi\psi_{xxx} - \psi_x\psi_{xx}$$

(5.6) denkleminden $\psi_{xx} + \lambda\psi = u\psi$ elde edilir. (1.2) $u_t + uu_x + u_{xx} = 0$ denkleminde yerine koyarak

$$\psi^2(u_t - 6uu_{xx} + u_{xxx}) = 0 \quad \text{ve} \quad \psi^2 \text{ ile çarpılırsa :}$$

$$\psi^2 u_t - \psi^2 6uu_{xx} + \psi^2 u_{xxx} = 0$$

$$\overbrace{(\psi\psi_{xxt} + \psi^2\lambda_t - \psi_t\psi_{xx})}^{\psi^2 u_t} - 6u\overbrace{(\psi\psi_{xxx} - \psi_x\psi_{xx})}^{\psi^2 u_{xx}} + \psi^2 u_{xxx} = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \{\psi\psi_{xxt} - \psi_t\psi_{xx}\} - 4\psi u_x \underbrace{\{\psi_{xx} + \lambda\psi\}}_{u\psi} - 2uu_x\psi^2 + \psi^2 u_{xxx} = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \{\psi\psi_{xxt} - \psi_t\psi_{xx}\} - 4\psi u_x\psi_{xx} - 2(2\lambda)\psi^2 u_x - 2uu_x\psi^2 + \psi^2 u_{xxx} = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \{\psi\psi_{xxt} - \psi_t\psi_{xx}\} - 4\psi\psi_{xx}u_x - 2(2\lambda + u)\psi^2 u_x + \psi^2 u_{xxx} = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \psi\psi_{xxt} - \psi_t\psi_{xx} - 4\psi\psi_{xx}u_x - 2(2\lambda + u)\overbrace{(\psi\psi_{xxx} - \psi_x\psi_{xx})}^{\psi^2 u_x} + \psi^2 u_{xxx} = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \{\psi\psi_{xxt} - \underline{3\psi\psi_{xx}u_x} - 2(2\lambda+u)\psi\psi_{xx} + \psi^2\psi_{xxx}\} - \{\psi_t\psi_{xx} - 2(2\lambda+u)\psi_x\psi_{xx} + \underline{\psi\psi_{xx}u_x}\}$$

$$\psi^2\lambda_t + \psi\{\psi_{xxt} - 3\psi_{xx}u_x - 2(2\lambda+u)\psi_{xx} + \psi\psi_{xxx}\} - \psi_{xx}\underbrace{\{\psi_t - 2(2\lambda+u)\psi_x + \psi u_x\}}_{R} = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \psi\left[\psi_{tx} - u_x\psi_x - 2(2\lambda + u)\psi_{xx} + \psi u_{xx}\right]_x - \psi_{xx}R = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \psi\left[\underbrace{\psi_{tx} - u_x\psi_x - 2(2\lambda + u)\psi_{xx} + \psi u_{xx}}_{R}\right]_x - \psi_{xx}R = 0$$

$$\psi^2\lambda_t + \psi R_{xx} - \psi_{xx}R = 0 \Rightarrow \lambda_t\psi^2 + (\psi R_x - \psi_x R)_x = 0 \tag{5.14}$$

$$R = \psi_t - 2(2\lambda + u)\psi_x + \psi u_x \tag{5.15}$$

Elde edilir ki, burada ψ nin üçüncü mertebeden ve yüksek mertebeden türevleri (5.6) kullanılarak elimine edilmiştir.

Şimdi ayrık spektrum ve sürekli spektrum için iki durumu inceleyeceğiz. Ayrık spektrum için(boş olmadığını varsayalım) , ψ_n öz fonksiyonunu normalize edelim ve (5.14) denklemini - $\infty, +\infty$ arasında integre edelim,
Bu da

$$\lambda_{n_t} = 0, n = 1,2.. \tag{5.16}$$

verir ki bu yüzden ayrık öz değerler t parametresinden bağımsızdır. Bunu şöyle görebiliriz: biz t parametresini değiştirdikçe her ne kadar potansiyel KdV denklemine göre değişse de , potansiyelin sınır koşul enerji seviyesi değişmeden kalır.

Böylece başlangıç koşulla verilen KdV denklemi hepsi aynı sınır koşul enerji seviyeli bir parametreli potansiyel ailesi tanımlar. Ayrık öz değerler KdV denklemi için hareketin sabitleridir.

Sürekli-devamlı spektrum için, $\lambda = k^2$ sabit kabul edelim. Ayrık spektrum için;

$$\psi R_{xx} - \psi_{xx} R = 0 \tag{5.17}$$

Denklemi kalır ve (4.6) dan şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$R_{xx} - (u - \lambda)R = 0 \tag{5.18}$$

Böylece genel çözüm :

$$R = \psi_t - 2(2\lambda + u)\psi_x + \psi u_x = C\psi + D\varphi \tag{5.19}$$

şekilde verilebilir ki burada ψ ve φ (5.6) denkleminin doğrusal olarak bağımlı çözümleridir ve

$$\varphi = \psi \int^x \frac{dx}{\psi^2} \tag{5.20}$$

Ayrık spektrum ve sürekli spektrum durumları (x in , sırasıyla -∞ ve +∞ a giderken) için ψ nin asimptotik davranışını tercihimiz sayesinde basit bir hesaplama D = 0 olduğunu gösterir.

Normalleşme katsayılarının ve yansıma katsayılarının t ye bağımlılığını belirlemek için , (4.19) denkleminin asimptotik davranışını x sonsuza giderken incelenecektir . (D = 0 ile birlikte)

Normalleşme katsayıları için , önce (4.19) denklemi ψ ile çarpılırsa sonrada $2(u+2\lambda)\psi\psi_x$ terimi ekleme ve çıkartılması ile :

$$\psi\psi_t - 2(2\lambda+u)\psi\psi_x + \psi^2 u_x = C\psi^2 + D\varphi\psi$$

$$\psi\psi_t + \overbrace{2(u+2\lambda)\psi\psi_x - 4(u+2\lambda)\psi\psi_x}^{-2(u+2\lambda)\psi\psi_x} + u_x\psi^2 = C\psi^2 + D\varphi\psi$$

$$\psi\psi_t + 2u\psi\psi_x + \underbrace{4\lambda\psi\psi_x - 4u\psi\psi_x}_{-4\underbrace{(u-\lambda)\psi}_{\psi_{xx}}\psi_x} - 8\lambda\psi\psi_x + u_x\psi^2 = C\psi^2 + D\varphi\psi$$

$$\psi\psi_t + 2u\psi\psi_x - 4\psi_x\psi_{xx} - 8\lambda\psi\psi_x + u_x\psi^2 = C\psi^2 + D\varphi\psi$$

$$\frac{1}{2}(\varphi^2)_t + (u\psi^2)_x - 2(\psi_x^2)_x - (4\lambda\psi^2)_x = c\psi^2$$

$$\frac{1}{2}(\varphi^2)_t + (u\psi^2 - 2\psi_x^2 - 4\lambda\psi^2)_x = c\psi^2 \tag{5.21}$$

denklemi elde edilir. x cinsinden $-\infty$ den $+\infty$ a integre ederek ve ψ nin normalize edildiğini varsayarak , c = 0 olduğunu buluruz, öyle ki ψ^2 korunmuş yoğunluktur. Sonra ψ nin asimptotik davranışı kullanarak,

$$(c_n)_t - 4k_n^3 c_n = 0$$

elde edilir ki , bu da

$$c_n(t) = c_n(0)\exp(4k_n^3 t) \tag{5.22}$$

çözümüne sahiptir.

Yansıma katsayısı için , $C = 4ik^3$ koşulunu elde edilir ve bu yüzden $b_t - 8ik^3 b = 0$, $a_t = 0$ dır ve çözümleri

$$b(k;t) = b(k;0)\ \exp(8\mathrm{i}k^3 t) \tag{5.23}$$
$$a(k;t) = a(k;0) \tag{5.24}$$

denklemleridir. Bu sonuçlar aşağıda verilen teorem ile özetlenmeye çalışılmıştır :

Teorem:

Eğer *u(x,t)* KdV denklemine göre oluşursa ve başlangıç verileri (5.2) ve (5.3) denklemlerini sağlarsa ;

$$\begin{aligned} &\lambda_n\ (t) = \lambda_n\ (0)\ , \qquad n = 1,2,.....,\mathrm{N} \\ &c_n(t) = c_n(0)\ \exp(4k_n^3 t)\ \ , \quad n = 1,2,.....,\mathrm{N} \\ &b(k;t) = b(k;0)\ \exp(8\mathrm{i}k^3 t) \\ &a(k;t) = a(k;0) \end{aligned} \tag{5.25}$$

Bura da $\lambda_n\ (0)$, $c_n(0)$, $b(k;0)$ ve $a(k;0)$ KdV denkleminin başlangıç verileri *u(x,0) = f(x)* göre belirlenir .

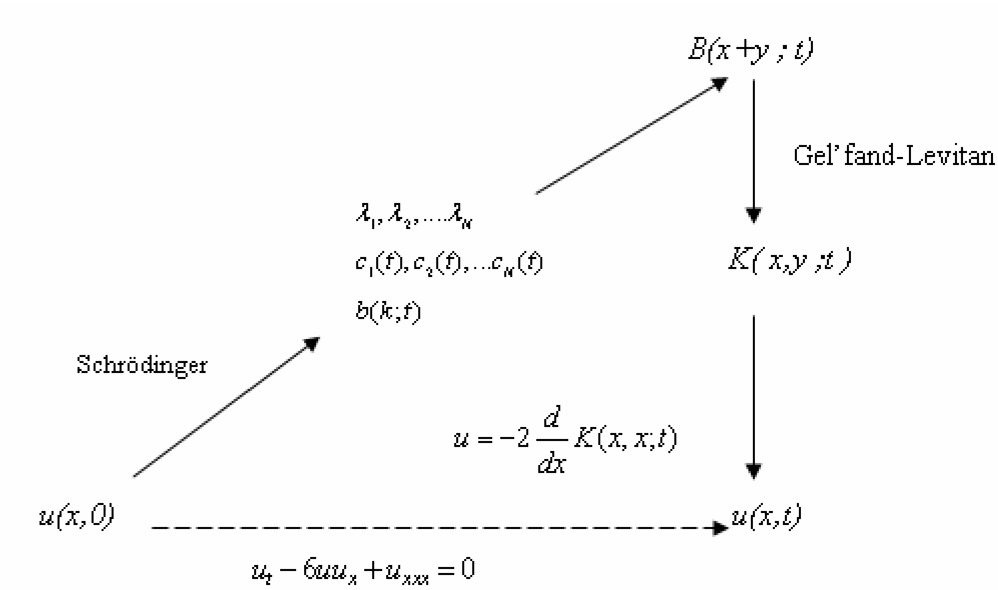
KdV denklemini çözmek için metodumuzun taslağı (Şekil 4 de) çizilmiştir.(1.2) ve (5.1) ile verilen başlangıç değerleriyle, önce aşağıdaki öz değer problemi çözülürse :

$$\psi_{xx}\ \text{-}\ (\, f(x) - \lambda)\psi = 0 \tag{5.26}$$

buradan $\lambda_n\ (0)$, $c_n(0)$, $b(k;0)$ elde edilir. Daha sonra herhangi bir t zamanında, bu nicelikler (5.25) denklemiyle ve

$$B(\zeta;t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(0)\exp(8k_n^3 t\ \text{-}\ \mathrm{k}_n\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k;0)\exp[i(8k^3 t + k\zeta)]\ dk \tag{5.27}$$

ile verilirler.



Şekil 3. Ters saçılım metodu şeması

Yukarıdaki şema her t zamanı için Gelfand - Levitan denklemini ((4.12 denklemi) tanımlar ve bunun çözümü K(x,y;t) KdV denkleminin istenen çözümü olan (5.28) denklemine

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K(x,x;t) \tag{5.28}$$

neden olur.

BÖLÜM 6. KdV DENKLEMİNİN PERİYODİK VE TEK SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

KdV denklemi koşan dalga denklemi çözümü aşağıdaki gibidir [26]:

$$U(x,t) = q(x-at) \tag{6.1}$$

burada a , bu tür dalgaların yayılım hızıyla ilgili herhangi bir sabitdir. Böyle bir çözümün varlığından emin olmak için KdV denkleminde uygulamak gerekir.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{6.2}$$

(6.1) denklemini (6.2) de yerine yazılırsa ve $\varepsilon = x - at$ denilirse ,

$$U_t = q_\varepsilon \cdot \varepsilon_t = -\,a\,q' \qquad \left(q_\varepsilon = q' = \frac{dq}{d\varepsilon} \right)$$

$$U_x = q_\varepsilon \cdot \varepsilon_x = q_\varepsilon = q'$$

$$U_{xx} = q_{\varepsilon\varepsilon} = q''$$

$$U_{xxx} = q'''$$

$$q''' - 6\,qq' - aq' = 0 \tag{6.3}$$

denklemi elde edilir . (6.3) denklemi integre edilirse ;

$$q'' - 3\,q^2 q' - aq = \text{sabit} \tag{6.4}$$

(sabiti sıfır kabul edilebilir.)

Şimdi $\qquad V(q) = -q^3 - \dfrac{a}{2}q^2 \qquad (6.5)$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlansın. O zaman

$$\frac{dV}{dq} = -3q^2 - aq \quad \text{olur.}$$

(6.4) denkleminden

$$\frac{d^2q}{d\varepsilon^2} + \frac{dV}{dq} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2q}{d\varepsilon^2} = -\frac{dV}{dq} \tag{6.6}$$

(6.6) denklemi Hamilton sistemi şeklinde yazılırsa ;

$$\frac{dq}{d\varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{d\varepsilon} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{6.7}$$

Burada Hamilton $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2} + V(q) \equiv \dfrac{p^2}{2} - q^3 - \dfrac{a}{2}q^2 \;, \quad p = \dfrac{dq}{d\varepsilon}$ (6.8)

burada p momemtum dur.

Eğer toplam enerji $E = \dfrac{\dot{q}^2(0)}{2} - q^3(0) - \dfrac{a}{2}q^2(0) \quad , \; (\dot{q} = p)$

negatif fakat $\dfrac{-a^3}{54}$ den büyük ise hareket periyodik olur ve de (6.4) denkleminin çözümü h periyodu ile ε nin periyodik fonksiyonu olur.

$$q(\varepsilon + h) = q(\varepsilon) \tag{6.9}$$

h periyodu ;

$$h = 2\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{2q^3 + aq^2 + 2E}} \tag{6.10}$$

şeklinde tanımlanır.

q_1 ve q_2 $\qquad 2q^3 + aq^2 + 2E = 0$ (6.11) denkleminin iki negatif köküdür.

E nin $\frac{-a^3}{54} < E < 0$ şartını sağlayan herhangi bir değeri için (6.11) denkleminin farklı iki negatif kökü vardır.E nin başlangıç enerjisi

$$E = \frac{1}{2}\dot{q}^2(0) - q^3(0) - \frac{a}{2}q^2(0) \tag{6.12}$$

için (6.7) denkleminin açık çözümü eliptik fonksiyonlarla elde edilebilir.

(6.8) deki $H(q,p)$, ε dan bağımsız olduğu için H = sabit (6.8) sisteminin ilk integralidir.

$$\frac{p^2}{2} - q^3 - \frac{a}{2}q^2 = sabit = E \tag{6.13}$$

Oysa (6.13) denklemi , (6.4) denklemini $q'(\varepsilon)$ ile çarpıp integre ederek de elde edilebilirdi.

(6.13) denkleminde p yerine $\frac{dq}{d\varepsilon}$ yazılarak

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\varepsilon}\right)^2 = E + q^3 + \frac{a}{2}q^2 \tag{6.14}$$

elde edilir.

E : $\frac{-a^3}{54} < E < 0$ olduğu için , (6.14) denklemin sağ tarafındaki kökler reeldir ve farklıdır , ikisi negatif biri pozitiftir. Dolayısıyla (6.14) sağ tarafı tekrar yazılırsa ,

$$E + q^3 + \frac{a}{2}q^2 = (q-\alpha_1)(q-\alpha_2)(q-\alpha_3) \tag{6.15}$$

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ dür.

(6.15) ve (6.14) denklemlerinden hareket $\alpha_1 \leq q \leq \alpha_3$ bölgesine kısıtlanır.

Şimdi yeni bir fonksiyon tanımlansın ,

$$y^2(\varepsilon) = q(\varepsilon) - \alpha_1 \qquad (6.16)$$

Burada (6.14) ve (6.15) denklemi yeniden yazılarak

$$\frac{1}{2}(2.y.y')^2 = \left(y^2 + \alpha_1 - \alpha_1\right)\left(y^2 - \alpha_2 + \alpha_1\right)\left(y^2 - \alpha_3 + \alpha_1\right)$$

$$2(y')^2 = \underbrace{\left(y^2 - \alpha_2 + \alpha_1\right)}_{<0}\underbrace{\left(y^2 - \alpha_3 + \alpha_1\right)}_{<0} \qquad (6.17)$$

$$2(y')^2 = \left(y^2 - \left(\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2\right)\left(y^2 - \left(\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}\right)^2\right)$$

$$\sqrt{2}y' = \sqrt{\underbrace{\left(\alpha_2 - \alpha_1 - y^2\right)}_{>0}\underbrace{\left(\alpha_3 - \alpha_1 - y^2\right)}_{>0}}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)(\alpha_2 - \alpha_1)\left(1 - \frac{y^2}{\alpha_2 - \alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_1}\right)(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{y'}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}\right)\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1} = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}\sqrt{\left(1 - \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}\cdot\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}}\right)^2\right)}$$

buradan $\qquad w = y\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1} \quad , \quad k^2 = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1} \qquad (6.19)$

ile

$$\frac{\sqrt{2}w'}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}} = \sqrt{1 - w^2}\sqrt{1 - k^2 w^2}$$

$$\int \frac{dw}{\sqrt{\left(1 - w^2\right)\left(1 - k^2 w^2\right)}} = \int \frac{1}{\sqrt{2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}} d\varepsilon \qquad (6.18)$$

elde edilir.Burada sol taraf eliptik integraldir.

$$w = \sin\varphi \qquad (6.20)$$

değişken dönüşümü yapılırsa , $\quad (\, dw = \cos\varphi \; d\varphi \,)$

$$\int \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\left(1-\sin^2\varphi\right)\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)}} = \sqrt{\frac{(\alpha_3-\alpha_1)}{2}}(\varepsilon-c) \quad (6.21)$$

elde edilir, c sabiti $q(\varepsilon)=\alpha_1$ de ε nun değeridir. (6.21) deki integral eliptik integralin genliği olarak bilinir :

$$\varphi = am\left[\sqrt{2(\alpha_3-\alpha_1)}(\varepsilon-c),k\right] \quad (6.22)$$

Genliğin sinüsü Jakobi eliptik fonksiyon olarak belirtilir .

$$\sin\varphi = \sin am\left[\sqrt{2(\alpha_3-\alpha_1)}(\varepsilon-c),k\right] = sn\left[\sqrt{2(\alpha_3-\alpha_1)}(\varepsilon-c),k\right] \quad (6.23)$$

Genliğin cosinüsü :

$$cnz \equiv \cos am\, z = \sqrt{1-sn^2 z} \quad (6.24)$$

ile gösterilir.

(6.20) ve (6.19) denklemlerinden

$$y = (\alpha_2-\alpha_1)\, sn\left[\sqrt{2(\alpha_3-\alpha_1)}(\varepsilon-c),k\right] \quad (6.25)$$

elde edilir. Son olarak (6.16) ve (6.24) denklemlerinin yardımı ile

$$q(x) = \alpha_2 + (\alpha_1-\alpha_2)\, cn^2\left[\sqrt{2(\alpha_3-\alpha_1)}(\varepsilon-c),\sqrt{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_1}}\right] \quad (6.26)$$

cnz ve *snz* , *sinz* ve *cosz* fonksiyonlarına 4K periyodu ile benzerdir , K ise birinci türden eliptik integraldir .

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (6.27)$$

(6.26) daki cn fonksiyonu KdV denkleminin bu türden çözümü olduğu için knodial dalga olarak adlandırılır. $E \rightarrow 0$ giderken , (6.27) den $\alpha_3 \rightarrow \alpha_2$ olur ve böylece k =1 Bu durumda $4K \rightarrow \infty$ gider yani E sıfıra yaklaşır

Şimdi E = 0 olarak kabul edilirse , bu durumda (6.14) den

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{dy}{y\sqrt{2y+a}} = \varepsilon \tag{6.28}$$

Burada $\varepsilon = 0$ ve q = $\frac{-a}{2}$ kabul edilmiştir . ((6.12) den $q_\varepsilon(0) = 0$ dır)

(6.28) denkleminde $q \le 0$ olacağından $y = -z^2$ dönüşümünden

$$\varepsilon = \int_{\sqrt{a/2}}^{\sqrt{-q}} \frac{dz}{z\sqrt{\frac{a}{2} - z^2}} = \frac{-2}{\sqrt{a}} \sec h^{-1} \frac{\sqrt{-2q}}{\sqrt{a/2}} \tag{6.29}$$

Bu denklemde aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$q(\varepsilon) = -\frac{a}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{a}}{2} \varepsilon \right) \tag{6.30}$$

Sonuç olarak (6.1) denklemine göre KdV denkleminin çözümü ;

$$U(x,t) = -\frac{a}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{a}}{2}(x - at) \right) \tag{6.31}$$

(6.31) çözümüne solitary veya KdV denkleminin izole edilmiş dalga çözümü denir.

a > 0 için (6.31) KdV denkleminin soliton dalga çözümü x için simetriktir.

$u(x,0) = \frac{-a}{2}$ ve $u(x,t)$ ve tüm türevleri $|x| \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider.

BÖLÜM 7. KdV DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİ

KdV denklemi için aşağıdaki başlangıç değer problemi incelenmektedir :

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad -\infty < x < \infty \tag{7.2}$$

(7.1) ve (7.2) denklemleriyle ifade edilen problemin $u_1(x,t)$ ve $u_2(x,t)$ gibi çözümü olduğunu farz edilsin : Öyleki

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - 6u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = 0, \quad u_1(x,0) = f(x) \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - 6u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} = 0, \quad u_2(x,0) = f(x) \tag{7.4}$$

Bu çözümlerin farkı v olarak tanımlasın [14] , öyleki :

$$v = u_1 - u_2 \tag{7.5}$$

Buradan $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t}$ yazılabilir .

(7.3) ve (7.5) denkleminden ;

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) - 6\left[u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right] + \frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_1 - u_2) = 0$$

$$(u_1 - u_2)(x,0) = 0$$

yazılabilir.

Yukarı denklemde parantez içindeki ifadeye terim ekleyip çıkarılsa ;

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_2)-6\left[u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}-u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}-u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]+\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_1-u_2)=0$$

Sonra bu terimler düzenlenirse ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_2)-6\left[u_1\frac{\partial}{\partial x}(u_1-u_2)+(u_1-u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]+\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_1-u_2)=0$$

Yukarı denklemden

$$\left\{v_t-6[u_1v_x+vu_{2_x}]+v_{xxx}\right\}=0 \tag{7.6}$$

$$v(x,0)=0 \tag{7.7}$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki enerji integrali göz önünde bulundurulsun :

$$E(t) \ =\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x,t)\ dx \tag{7.8}$$

(7.8) denkleminin zamana göre türevi alınırsa :

$$\frac{dE}{dt} \ =\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t)\ \frac{\partial v}{\partial t}dx \tag{7.9}$$

(7.6) denkleminde elde edilen (7.9) da yerine koyularak ;

$$=\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t)\left[6u_1\ \frac{\partial v}{\partial x}+\ 6v\frac{\partial u_2}{\partial x}-\ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]dx$$

v(x,t) ifadesi dağıtılarak ve integral parçalara ayrılarak ;

$$=\int_{-\infty}^{\infty} 6\ \underbrace{u_1 v\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(v^2\right)}\ dx\ +\ 6\int_{-\infty}^{\infty} v^2\frac{\partial u_2}{\partial x}\ dx\ -\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} vv_{xxx}}_{v.u_{xx}\,-\,\underbrace{\int v_x v_{xx}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(v_x^2\right)}}\ dx$$

integral kuralları ve üçüncü integralde kısmi integrasyon yapılarak ,

$$= \left[\underbrace{3u_1v^2}_{0} - \underbrace{v.v_{xx}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{(v_x)^2}_{0} \right] \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + 6\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} dx - 3\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} dx$$

elde edilir . Sonuç olarak

$$\frac{dE}{dt} = 3\int_{-\infty}^{\infty} \left(2\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) v^2 dx \tag{7.10}$$

elde edilir. $0 \le t < T$ aralığında $M = \max \left| 2\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|$ olsun. Yani

$$\frac{dE}{dt} = 3\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(2\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)}_{M = \max \left| 2\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|} v^2 dx \tag{7.11}$$

(7.10) denkleminden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$\frac{dE}{dt} \le 3M.E(t) \tag{7.12}$$

(7.12) denklemini $e^{-3M.t}$ ile çarpılarak aşağıdaki gibi yazılsın :

$$\frac{d}{dt}\left[E(t).\, e^{-3M\,t} \right] \le 0 \,, \quad \text{buradan da} \tag{7.13}$$

$$E(t).\, e^{-3M\,t} \le E(0) \quad \text{elde edilir} \tag{7.14}$$

$$E(t) \le E(0).\, e^{3M\,t} \tag{7.15}$$

(7.8) ve (7.15) denklemlerinden $E(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x,0)dx$, $E(0) = 0$ ve $E(t) \ge 0$

olmasından ve (7.15) den $E(t) = 0$ bulunur . Böylece , $v(x,t) = 0$ olmalıdır

yani $u_1 = u_2$, bu da (7.1) ve (7.2) de ki problemin çözümünün tek olduğunu gösterir.

SONUÇLAR :

Bu çalışmada , son 50 yıl içinde KdV denkleminden elde edilen bir takım sonuçların bir kaçını sunma amacı güdülmüştür. Özelliklede Gardener , Grene , Kruskal ve Miura tarafından elde edilen sonuçlar üzerine sınırlandırılmış bir araştırma olmuştur. Bu çalışmanın amaçlarının bir kaçı şöyle sıralanabilir .(i) Russell ‘in dalgalar üzerindeki çok yüksek doğruluk oranına sahip gözlemlerini 100 yıla yakın bir gecikmeyle bile olsa haklı çıkdığını göstermek, (ii) bu araştırma alanının bilim adamları için sürekli bir merak uyandıracak bir öneme sahip olacağını göstermek . Daha fazla araştırmacının bu gelişen cazibedar alanda çalışarak çok daha fazla problem ve çözüm ortaya koyacağını umut ediyoruz.

KAYNAKLAR

[1] RUSSELL, J.S. , Report on waves, Rep. 14 th Meeting of British Ass.for the Advancement of Science,London, pp. 311–390 +11 plates , 1844

[2] GARDNER , C.S, MORIKAWA, G.K , Similarity in the asymptotic behavior of collision free hydromagnetic waves and water waves, New york Univ,Courant Inst. Math. Sci.Rep., NYO,1960.

[3] Asymptotology in numerical computation :Progress and plans on Fermi – Pasta-Ulam problem, IBM data progressing Div, White plains, pp43-62, NY, 1965.

[4] ZABUSKY , N.J ,Phenomena associated with oscillations of a nonlinear model string , Prentice-Hall , Englewood Cliffs , N.J , pp 99-133 ,1963

[5] FERMI, E. , PASTA, J. , ULAM , S. , Studies of nonlinear problems , Los Alamos Report , reproduced in Newell , pp 143-156, 1955

[6] BEREZIN , Y.A , KARPMAN, V.I , Nonlinear evolution of distrubances in plasma and other dispersive media, Soviet Phys. JETP , pp1049-1056, 1967

[7] WASHIMI , H. , TANIUTI , T. , Progagation of ion-acoustic solitary waves of small amp. phys.Lett. pp 996-998 , 1966

[8] WIJNGAARDEN, VAN L. , Pheneomena associated with the oscilations of a nonlinear model string.Prentice-Hall , N.J, pp 99-133 , 1963

[9] ZAKHAROV, V.E , FADDEEV, L.D , Korteweg –de Vries equation.A completely integrable Hamiltonian system , pp 280-287 , 1972

[10] The Korteweg deVries equation and related evolution equations , Nonlinear wave motion , A.C Newell , A.M.Society , pp 61-83, 1974

[11] ZABUSKY , N.J , KRUSKAL , M.D , Interaction of solitons in a collisionless plasma and the resurrence of initial states, Phy.Lett, 1972

[12] The Korteweg de Vries equation: A model equation for nonlinear dispersive waves , Cornell Univ.Press , Ithaca, N.Y, pp 212-234, 1974

[13] WHITHAM , G.B , linear and nonlinear waves , N.Y, wiley-sons, 1974

[14] NURIYEV, B.R , Lectures on mechanics II , Metu , Ank, 1993

[15] ZAUDERER , E. , Partial diff. equations of applied maths, N.Y , 1983

[16] KORTEWEG, D.J, VRIES, G, On the change of from long waves advancing in rect. canaal, Phil.magazine ,422-443, 1895

[17] RAYLEIGH LORD, On waves , Phil.Magazine , pp 257-279, 1876

[18] LAX , P.D , Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves,pure appl.math , 467-490,1968

[19] GEL'FAND, I.M , FOMIN, S.V ,Calculus of Variations , Prentice-Hall ,E.Cliffs , N.J , 1963

[20] WHİTHAM, G.B , Nonlinear dispersive waves ,proc.roy.soc.. 238-261, 1965

[21] KRUSKAL , MIURA, GARDNER, ZABUSKY, KdV equation and generalizations, Uniqueness and existence of poly.cons.laws , 952-960, 1970

[22] HOPF , E. , The partial diff. equations $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, 201-230 , 1950

[23] GARDNER , GREENE , KRUSKAL ,Method for solving KdV equation , Phy Lett , 1095-1097 ,1967

[24] BONA AND SMITH , The initial value problem for KdV equation , Phil.Trans.Roy.Soc. London, 555-604 , 1975

[25] FADEEV On relation between S-matrix and potential for one dimensinal Schro. operator , Sov.Phy D. 747-751, 1958

[26] NURIYEV , B.R. , A first course in soliton theory , Metu ,Ank, 1993

ÖZGEÇMİŞ

Ender Özdemir, 10.09.1970 de Polatlı’ da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Polatlı’da tamamladı. 1987 yılında Polatlı Lisesinden mezun olarak Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı.1993 yılında şeref öğrencisi derecesiyle mezun oldu. 16 yıldır farklı eğitim kurumlarına matematik ve geometri öğretmenliği yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.