T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

φ - FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

R. Zafer BEŞOLUK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Temmuz 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

φ - FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

R. Zafer BEŞOLUK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 20 / 07 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Prof. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Metin BAŞARIR	**H. Murat TÜTÜNCÜ**	**Mustafa ERÖZ**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bana zaman ayırıp ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmada bana yardımcı olan Arş. Gör. Selma ALTUNDAĞ'a teşekkür ederim.

R. Zafer BEŞOLUK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
c	: Yakınsak diziler uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak diziler uzayı
w	: Tüm reel veya kompleks sayı dizileri uzayı
$X(\Delta)$	: Fark X dizi uzayı
$\Delta^m(x_k)$	: (x_k) dizisinin m. farkı
$A=(a_{nk})$	: Sonsuz matris $n,k=1,2,3,\ldots$.
$f=(f_n)$	: Modülüs fonksiyonlarının dizisi
$\varphi=(\varphi_k)$	: φ fonksiyonlarının dizisi
N_θ	: Kuvvetli yakınsak lacunary diziler uzayı
$\theta=(k_r)$	: Lacunary dizisi
Λ	: $\lambda=(\lambda_n)$ dizilerinin kümesi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: $\varphi -$fonksiyonu**,** modülüs fonksiyonu, de la Vallee-Poussin ortalaması, lacunary dizisi, istatistiksel yakınsaklık.

“$\varphi -$Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Bazı Dizi Uzayları” isimli bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerde daha önce yapılmış olan çalışmalar derlenmiştir. Özellikle Metin Başarır ve Selma Atundağ [13], [24] tarafından yapılan çalışma üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde $\varphi -$fonksiyonları dizisiyle tanımlı bazı fark dizi uzayları verildi.

Üçüncü bölümde “$\varphi -$fonksiyonları dizisi yardımıyla lacunary kuvvetli $\Delta -$yakınsak dizi uzayları’’ çalışıldı.

Son bölümde ise ikinci ve üçüncü bölümden elde edilen sonuçlar verilmiştir.

SOME DIFFERENCE SEQUENCE SPACES DEFINED BY A SEQUENCE OF $\varphi-$ FUNCTIONS

SUMMARY

Key words: $\varphi-$functions, modulus function, de la Vallee-Poussin mean, lacunary sequence, statistical convergence.

This study which is entitled “Some sequence spaces defined by $\varphi-$functions” contains four chapters. The first three chapters are composed of a compilation of some studies, especially Altundağ and Başarır [13], [24] on this subject.

In the first chapter, some basic definitions and theorems which are used in the following chapters are given.

In the second chapter, some sequence spaces defined by $\varphi-$functions are given.

In the third chapter, lacunary strongly $\Delta-$convergent sequences according to the sequences of $\varphi-$ functions sequences are studied.

The last chapter gives some general results which are obtained from second and third chapter.

BÖLÜM 1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1 Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. X boş olmayan bir küme ve K, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : XxX \to X \qquad\qquad . : KxX \to X$$
$$(x,y) \to x+y \qquad\qquad (\alpha,x) \to \alpha.x$$

ikili işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir [1].

$\forall \alpha,\beta \in K$ ve $\forall x,y,z \in X$ için

1- $x+y=y+x$

2- $(x+y)+z=x+(y+z)$

3- $\forall x \in X$ için $x+e=e+x=x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır.

4- $\forall x \in X$ için $x+(-x)=(-x)+x$ olacak biçimde $-x \in X$ vardır.

5- $1.x=x$

6- $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$

7- $(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$

8- $\alpha.(\beta.x)=(\alpha.\beta).x$

X bir lineer uzay ve M de X 'in bir alt kümesi olsun. $x, y \in M$ ve α, β skaler olmak üzere $\alpha.x + \beta.y \in M$ ise M ye X 'in bir lineer alt uzayı denir [1].

Tanım 1.1.2. X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun $\|.\|: X \to R$ fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ çiftine de bir normlu lineer uzay denir. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

1- $\|x\| \geq 0$

2- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3- $\|\alpha.x\| = |\alpha|.\|x\|$

4- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir [2].

Tanım 1.1.3. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in N$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x_0 'a yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x_0 'a yakınsak ise $\lim_n x_n = 0$ veya $x_n \to x_0$ şeklinde yazılır [2].

Tanım 1.1.4. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 1.1.5. $(X, \|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [2].

Tanım 1.1.6. $x=(x_k)$ $(k=1,2,3,...)$ şeklindeki reel veya kompleks terimli bütün sınırlı veya sınırsız dizilerden oluşan uzay w ile gösterilsin. $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in w$ ve λ bir sabit sayı olmak üzere

$$x+y=(x_k+y_k),\ \lambda x=(\lambda x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır. İyi bilinen c_0, c, l_∞ dizi uzayları sırasıyla, sıfıra yakınsayan diziler uzayı, yakınsak diziler uzayı ve sınırlı diziler uzayı, w dizi uzayının alt uzayıdır ve $\|.\|=\sup_k|x_k|$ normuyla birer Banach uzayıdırlar.

$$l_\infty=\{x=x_k:\sup_k|x_k|<\infty\}$$

sınırlı diziler uzayı,

$$c=\{x=x_k:\lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

yakınsak diziler uzayı ve

$$c_0=\{x=x_k:\lim_k x_k=0\}$$

sıfıra yakınsak diziler uzayıdır.

Tanım 1.1.7. $\theta=(k_r)$ pozitif tam sayıların bir dizisi olmak üzere

1- $k_0=0$

2- $0<k_r<k_{r+1}$

3- $h_r=k_r-k_{r+1}\to\infty \qquad (r\to\infty)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda θ ya Lacunary dizisi denir [3]. Burada θ ile belirlenen aralıklar $I_r=(k_{r-1},k_r]$ ve $\dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilir. Lacunary dizisinin toplam formu $\sum_{n\in I_r} x_n=\sum_{k_{r-1}+1}^{k_r} x_k$ şeklindedir.

Tanım 1.1.8. $x = (x_k)$ kompleks veya reel terimli bir dizi olsun. $K = \{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}$ olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu(K) = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına istatistiksel yakınsak denir ve $st - \lim x = L$ olarak gösterilir. Burada $\mu(K)$, K kümesinin eleman sayısını gösterir [4] .

Tanım 1.1.9. $\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$ ve $\lambda_1 = 1$ olmak üzere azalmayan, sonsuza giden bir pozitif sayı dizisi $\lambda = (\lambda_n)$ olsun. Bu dizilerin kümesi Λ ile gösterilsin. Genelleştirilmiş de la Vallee-Poussin ortalaması, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k \qquad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to l$ oluyorsa bir $x = (x_k)$ dizisi l sayısına (V, λ)- toplanabilirdir denir [5]. Eğer $\lambda_n = n$ ise, (V, λ)- toplanabilirlik ve kuvvetli (V, λ)- toplanabilirlik sırasıyla $(C,1)$- toplanabilirlik ve $[C,1]$- toplanabilirliğe indirgenir.

Tanım 1.1.10. $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan f fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir.

1- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2- $f(x + y) \le f(x) + f(y) \qquad (x \ge 0, y \ge 0)$

3- f , artan

4- f , 0 da sağdan süreklidir [6].

$|f(x) - f(y)| \le f(|x - y|)$ olduğundan 4 şartından f 'nin $[0, \infty)$ da sürekli olduğu çıkar. İlaveten her $n \in N$ için $f(n.x) \le nf(x)$ dir.2 şartını kullanırsak

$$f(x) = f\left(nx\frac{1}{n}\right) \le nf\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{n} f(x) \le f\left(\frac{x}{n}\right)$$

elde edilir.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin $f(x)=x^p$, $0<p\le 1$ için sınırsızdır, ama $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ sınırlıdır. Ruckle [7] ve Maddox [8], bazı dizi uzaylarını oluşturmak için modülüs fonksiyonlarını kullandılar. Ayrıca modülüs fonksiyonları [9], [10], [11], [12] ve pek çok diğer kaynaklarda çalışılmıştır.

Tanım 1.1.11. $v\ge 0$ için tanımlı, sürekli, azalmayan, $\varphi(0)=0$, $v>0$ için $\varphi(v)>0$ ve $v\to\infty$ için $\varphi(v)\to\infty$ şartlarını sağlayan fonksiyona $\varphi-$fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.12. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ $\varphi-$fonksiyonları dizileri olsun. Eğer yeterince (büyük veya küçük) v değerleri için $c\psi_k(lv)\le b\varphi_k(nv)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $c,b,n,l>0$ sabitleri varsa φ , ψ'den .daha zayıf değildir denir ve $\psi\prec\varphi$ (veya her k için $\psi_k\prec\varphi_k$) şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.13. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ iki $\varphi-$fonksiyonu dizisi olsun. Eğer yeterince büyük veya küçük v için $b_1\varphi_k(k_1v)\le c\psi_k(lv)\le b_2\varphi_k(k_2v)$ eşitsizliğini sağlayan b_1,b_2,c,k_1,k_2,l .pozitif sabitleri varsa φ ve ψ birbirine denktir denir ve $\varphi\sim\psi$ (veya her k için $\varphi_k\sim\psi_k$) şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.14. Bir $\varphi=(\varphi_k)$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer her k için $\varphi_k(2v)\le l\varphi_k(v)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $l>1$ sayısı varsa (her büyük veya küçük v için) φ dizisine Δ_2-şartını sağlar denir.

Eğer bir $\varphi-$fonksiyonu Δ_2-şartını sağlar ise yeterince büyük v için

$$\varphi_k(cv)\le L\varphi_k(v) \tag{1.2}$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı bulunabilir. Ayrıca her $c > 0$ için $c \leq 2^s$ ve yeterince büyük v için

$$\varphi_k(cv) \leq \varphi_k(2^s v) \leq l^s \varphi_k(v) \tag{1.3}$$

olacak şekilde bir s tam sayısı vardır.

BÖLÜM 2. $\varphi -$ FONKSİYONLARI İLE TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARI

2.1. Giriş

Bu bölümde Başarır ve Altundağ [13] tarafından tanımlanan bazı dizi uzayları çalışılacaktır. w tüm reel ve kompleks sayı dizilerinin uzayı ve l_∞, c ve c_0 sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak $x=(x_k)$ dizilerinin $\|x\|=\sup_k |x_k|$ normuna göre Banach uzayları olsun.

Fark dizi uzayı $X(\Delta)$ Kızmaz [14] tarafından $X=l_\infty$, c ve c_0 ve $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ $(k\in N)$ olmak üzere

$$X(\Delta)=\{x=(x_k)\in w:\ (\Delta x_k)\in X\}$$

şeklinde tanımlandı. Ayrıca fark dizi uzayları Et ve Çolak [15] tarafından $X=l_\infty$, c ve c_0 için $\Delta^0 x_k = x_k$ ve her $k\in N$ için $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi genelleştirildi,

$$X(\Delta^m)=\{x=(x_k)\in w:\ (\Delta^m x_k)\in X\}.$$

Bu uzaylar Et ve Başarır [16] tarafından $X=l_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ alınarak paranormlu uzaylara genelleştirildi. Genelleştirilmiş farkın binom temsili, her k$\in$N için

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Ayrıca fark dizi uzayları çeşitli yazarlar tarafından çalışıldı.

[17], [18], [19], [20], [21] de $\varphi -$fonksiyonu kullanılarak tanımlanan bazı dizi uzayları tanımlandı. Bu bölümde $\varphi -$fonksiyonları dizisi ve modülüs fonksiyonları dizisi kullanılarak tanımlanmış fark dizi uzaylarının bazı özellikleri verilecektir.

$\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$, $\varphi = (\varphi_k)$ ve $f = (f_n)$ sırasıyla $\varphi -$fonksiyonları dizisi ve modülüs fonksiyonları dizisi ve m bir pozitif tam sayı olsun. Her k için $u_k \neq 0$ olmak üzere $u = (u_k)$ dizisi alalım. Ayrıca $A = (a_{nk})$ matrisi

1- A negatif değildir, başka bir ifadeyle $a_{nk} \geq 0 \quad n,k = 1,2,3,.....$ dir,

2- Herhangi bir n (ya da k) pozitif tam sayısı için bir k_0 (ya da n_0) pozitif tam sayısı vardır öyleki sırasıyla $a_{nk_0} \neq 0$ (ya da $a_{n_0 k} \neq 0$) dır.

3- $k = 1,2,...$ için $\lim_n a_{nk} = 0$ limiti vardır.

4- $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = K < \infty$,

5- $\sup_n a_{nk} \to 0 \quad k \to \infty$

şartlarını sağlasın. Aşağıdaki dizi uzayını tanımlayalım.

$$V_\lambda^0\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m\right), f_n\right) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_j \frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) = 0 \right\}.$$

Burada $\Delta_u^m x_k = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} u_{k+n} x_{k+n}$, $\Delta_u^0 x_k = (u_k x_k)$ ve $\Delta_u x_k = (u_k x_k - u_{k+1} x_{k+1})$ olmak üzere $\Delta_u^m x_k = u_k \Delta^m x_k = \left(u_k \Delta^{m-1} x_k - u_{k+1} \Delta^{m-1} x_{k+1}\right)$ dir. Ayrıca $f = (f_n)$ modülüs fonksiyonları dizisi $\lim_{v \to 0^+} \sup_n f_n(v) = 0$ şartını sağlasın.

Şimdi bu uzayın bazı özel durumlara karşılık gelen dizi uzayları verilecektir.

1- Her x ve k için $\varphi_k(x) = x$ ve her k için $u_k = 1$ olduğunda

$$V_\lambda^0\left(\left(A,\Delta^m\right), f_n\right)=\left\{x\in w:\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left(\left|\Delta^m x_k\right|\right)\right)=0\right\}$$

dizi uzayı elde edilir.

2- Her x ve n için $f_n(x)=x$ ve her k için $u_k=1$ alınırsa

$$V_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta^m\right)=\left\{x\in w:\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta^m x_k\right|\right)\right)=0\right\}$$

olur.

3- $A=I$ ve her k için $u_k=1$ olduğunda

$$V_\lambda^0\left(\left(I,\varphi_n,\Delta^m\right), f_n\right)=\left\{x\in w:\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\varphi_n\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)\right)=0\right\}$$

uzayı elde edilir.

4- $A=I$, her x ve k için $\varphi_k(x)=x$ ve her k için $u_k=1$ olduğunda

$$V_\lambda^0\left(\left(I,\Delta^m\right), f_n\right)=\left\{x\in w:\lim_j \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)=0\right\}$$

uzayı elde edilir.

5- Eğer $A=I$, her x ve k için $\varphi_k(x)=x$ ve her k için $u_k=1$, her n için $f_n=f$ alınırsa Et, Altın ve Altınok [22] tarafından tanımlanan

$$V_\lambda^0\left(\left(I,\Delta^m\right),f\right)=\left\{x\in w:\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)=0\right\}$$

dizi uzayı elde edilir.

6- $A=I$, her x ve k için $\varphi_k(x)=x$, her x ve n için $f_n(x)=x$ ve her k için $u_k=1$ alınırsa

$$V_\lambda^0\left(I,\Delta^m\right)=\left\{x\in w:\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j}\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)=0\right\}$$

dizi uzayı elde edilir.

7- $A=(a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\geq k \text{ ise}\\ 0, & n<k \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$V_\lambda^0\left(\left(C,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=\left\{x\in w:\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)=0\right\}$$

dizi uzayı elde edilir.

Şimdi şu teoremi verelim.

Teorem 2.1.1. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ iki $\varphi-$fonksiyonları dizisi olsun. Bu durumda

1- $\psi\prec\varphi$ ve $\varphi=(\varphi_k)$ yeterince büyük v için Δ_2-şartını sağlar ise $V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset V_\lambda^0\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

2- Yeterince büyük v için $(\varphi_k(v))$ ve $(\psi_k(v))$ dizileri denk ve her ikisi de $\Delta_2 -$şartını sağlar ise $V_\lambda^0((A,\varphi_k,\Delta_u^m), f_n) = V_\lambda^0((A,\psi_k,\Delta_u^m), f_n)$ dir.

İspat: 1- $x=(x_k)\in V_\lambda^0((A,\varphi_k,\Delta_u^m), f_n)$ olsun. $\psi \prec \varphi$ olduğundan $b,c,v_0>0$ ve $|x_k|>v_0$ şartını sağlayan her k için

$$\psi_k(|x_k|)\le b\,\varphi_k(c|x_k|) \tag{2.2}$$

dır. x dizisini $x=x'+x''$ olarak gösterelim. Burada her m için $x'=\Delta_u^m x_k'$, $|\Delta_u^m x_k|<v_0$ için $\Delta_u^m x_k' = \Delta_u^m x_k$ ve k'nın diğer değerleri için $\Delta_u^m x_k'=0$ olarak tanımlansın. $x'\in V_\lambda^0((A,\psi_k,\Delta_u^m), f_n)$ olduğunu görmek kolaydır. L sabiti f ve $\varphi -$fonksiyonunun özellikleri ile bağlantılı olmak üzere kabulden ve (2.2) eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\psi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k''\right|\right)\right) \le \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(b\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(c\left|\Delta_u^m x_k''\right|\right)\right)$$
$$\le \frac{L}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k''\right|\right)\right)$$

elde edilir. $\Delta_2 -$şartını sağlayan bir $\varphi -$fonksiyonunun (1.2) ve (1.3) özelliklerini sağlayacağını hatırlatalım. Sonuç olarak $x''=(x_k'')\in V_\lambda^0((A,\psi_k,\Delta_u^m), f_n)$ olur ve $x\in V_\lambda^0((A,\psi_k,\Delta_u^m), f_n)$ elde edilir.
2- $V_\lambda^0((A,\varphi_k,\Delta_u^m), f_n) = V_\lambda^0((A,\psi_k,\Delta_u^m), f_n)$ eşitliği aynı şekilde ispatlanır.

Teorem 2.1.2. Her k ve yeterince büyük v için $\Delta_2 -$şartını sağlayan $\varphi -$ fonksiyonları dizisi $\varphi=(\varphi_k(v))$ olsun. Bu taktirde $V_\lambda^0((A,\varphi_k\Delta_u^m), f_n)$ lineer uzaydır.

İspat: İlk olarak $x=(x_k)\in V_\lambda^0((A,\varphi_k\Delta_u^m), f_n)$ ve α keyfi bir sayı olmak üzere $\alpha.x\in V_\lambda^0((A,\varphi_k,\Delta_u^m), f_n)$ olduğunu gösterelim. $0<\alpha<1$ için

$$\frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m(\alpha x_k)\right|\right)\right) \le \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

dir.

Eğer $\alpha > 1$ ise $\alpha < 2^s$ olacak şekilde pozitif bir s sayısı vardır ve d ve L, φ ve f fonksiyonları ile bağlantılı sabitler olmak üzere

$$\frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m(\alpha x_k)\right|\right)\right) \le \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(d^s\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$
$$\le \frac{L}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

elde edilir. Δ_2-şartını sağlayan $\varphi-$fonksiyonu (1.2) ve (1.3) yi gerektirir. Böylece $\alpha x \in V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)$ elde edilir.

İkinci olarak $x, y \in V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)$ ve α, β keyfi sabitler olsun. $\alpha x + \beta y \in V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)$ olduğunu gösterelim. L_1, L_2 yukarıdaki gibi tanımlanan sabitler olmak üzere

$$\frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m(\alpha x_k+\beta y_k)\right|\right)\right) \le \frac{L_1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$
$$+\frac{L_2}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m y_k\right|\right)\right)$$

olur. $\alpha x + \beta y \in V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)$ elde edilir.

Şimdi teorem 2.1.3'ün ispatı için gerekli önermeyi verelim.

Önerme 2.1.1. f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olsun. Her $v \ge \delta$ için $f(v) \le 2f(1)\delta^{-1}v$ dir [23].

Teorem 2.1.3. $\varphi = (\varphi_k)$ ve $f = (f_n)$, sırasıyla $\varphi-$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu taktirde $V_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right) \subset V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)$ dir.

İspat: $x \in V_\lambda^0(A, \varphi_k, \Delta_u^m)$ ve $\sup_n f_n(1) = M$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $x \in [0, \delta]$ ve her n için $f_n(x) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ seçelim.

$$\frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) = S_1 + S_2$$

yazalım. Burada

$$S_1 = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

ile verilir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \le \delta$$

üzerinden toplam alınır.

$$S_2 = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

ile verilir ve bu toplam da

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) > \delta$$

üzerinde alınır. f modülüs fonksiyonunun tanımından

$$S_1 \le \frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} f_n(\delta) < \frac{1}{\lambda_j}(\lambda_j \varepsilon) = \varepsilon$$

ve Önerme 2.1.1'den

$$S_2 \le 2M \frac{1}{\delta} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $x \in V_\lambda^0 \left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right), f_n \right)$ dir.

Teorem 2.1.4. $\varphi = (\varphi_k)$ ve $f = (f_n)$ sırasıyla $\varphi -$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{v \to \infty} \inf_n \frac{f_n(v)}{v} > 0$ ise

$$V_\lambda^0 \left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right), f_n \right) = V_\lambda^0 \left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right)$$

dir.

İspat: Eğer $\lim_{v \to \infty} \inf_n \frac{f_n(v)}{v} > 0$ ise her $v > 0$ ve $n \in N$ için $f_n(v) > cv$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır. $x \in V_\lambda^0 \left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right), f_n \right)$ olsun. Açık olarak

$$\frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} f_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right) \right) \ge \frac{1}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} c \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right) \right) = \frac{c}{\lambda_j} \sum_{n \in I_j} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right)$$

dır. Böylece $x \in V_\lambda^0 \left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right)$ dir. Teorem (2.1.3) kullanılarak ispat tamamlanır.

2.2. $\mathrm{S}_\lambda^0 \left(\mathrm{A}, \varphi_\mathrm{k}, \Delta_\mathrm{u}^\mathrm{m} \right)$ - İstatistiksel Yakınsaklık

$A = (a_{nk})$ sonsuz matris, $x = (x_k) \in w$, $\varphi = (\varphi_k)$ $\varphi -$fonksiyonları dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ pozitif sayısı verilsin.

$$K_\lambda^j \left(\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right), \varepsilon \right) \right) = \left\{ n \in I_j : \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right) \ge \varepsilon \right\}$$

alalım. $\mu\left(K_\lambda^j \left(\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right), \varepsilon \right) \right) \right)$, $K_\lambda^j \left(\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m \right), \varepsilon \right) \right)$'a ait eleman sayısını belirtmek üzere eğer her $\varepsilon > 0$ ve her k için

$$\lim_j \frac{1}{\lambda_j}\mu\left(K_\lambda^j\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)=0$$

ise x dizisi sıfır sayısına $\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$-istatistiksel yakınsaktır denir. Sıfıra $\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$-istatistiksel yakınsak olan $x=(x_k)$ dizilerinin kümesi $S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ ile gösterilir. Yani

$$S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)=\left\{x=(x_k):\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\mu\left(K_\lambda^j\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)=0\right\}$$

dir.

$\lambda_n=n$ alınırsa $S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ uzayı $S^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ uzayına indirgenir.

Eğer $A=I$ ve her k ve x için $\varphi_k(x)=x$ ise $S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ uzayı

$$S_\lambda^0\left(\Delta_u^m\right)=\left\{x=(x_k):\ \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\mu\left\{k\in I_j:\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon\right\}=0\right\}$$

uzayına indirgenir.

Teorem 2.2.1. $\varphi=(\varphi_k(v))$ ve $\psi=(\psi_k(v))$ $\varphi-$fonksiyonlarının iki dizisi olsun.

1- Eğer $\psi\prec\varphi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k Δ_2-şartını sağlarsa

$$S_\lambda^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)\subset S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dir.

2- Eğer $\varphi\sim\psi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k ve ψ_k Δ_2-şartını sağlarsa

$$S_\lambda^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)=S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dır.

İspat: 1- $x\in S_\lambda^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)$ olsun. Kabulden $\psi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\leq b\varphi_k\left(c\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)$ ve L sayısı φ fonksiyonunun özellikleri ile bağlantılı olmak üzere $b,c>0$ ve her m için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\psi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \le b\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(c\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \le L\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)$$

dir.

Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\psi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \ge \varepsilon$ olması, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \ge \varepsilon$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak

$$K_\lambda^j\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right) \subset K_\lambda^j\left(\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)$$

elde edilir ve

$$\lim_j \frac{1}{\lambda_j}\mu\left(K_\lambda^j\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right) \le \lim_j \frac{1}{\lambda_j}\mu\left(K_\lambda^j\left(\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)$$

olur.

2- $S_\lambda^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right) = S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ eşitliği benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.2.2. Eğer $\liminf_j \frac{\lambda_j}{j} > 0$ ise $S^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right) \subset S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

İspat: Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \le j:\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \ge \varepsilon\right\} \supset \left\{n \in I_j:\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \ge \varepsilon\right\}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{j}\mu\left(\left\{n \le j:\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \ge \varepsilon\right\}\right) &\ge \frac{1}{j}\mu\left(\left\{n \in I_j:\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \ge \varepsilon\right\}\right)\\ &= \frac{\lambda_j}{j}\frac{1}{\lambda_j}\mu\left(\left\{n \in I_j:\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right) \ge \varepsilon\right\}\right)\end{aligned}$$

olur. $j \to \infty$ için limit alınır ve $\liminf_j \frac{\lambda_j}{j} > 0$ olduğu kullanılırsa

$$S^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right) \subset S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n(v)>0$ (v>0) ise $V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

İspat: Eğer $\inf_n f_n(v)>0$ ise $v>0$ ve $n\in N$ için $f_n(v)\geq\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha>0$ sayısı vardır. $x\in V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) &\geq \frac{1}{\lambda_j}\sum_{\substack{n\in I_j \\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon}} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) \\
&\geq \frac{\alpha}{\lambda_j}\mu\left(\left\{n\in I_j : \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon\right\}\right)
\end{aligned}
$$

dır. Buradan $x\in S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ elde edilir.

Teorem 2.2.4. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\sup_v\sup_n f_n(v)<\infty$ ise $S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dır.

İspat: $T(v)=\sup_n f_n(v)$ ve $T=\sup_v T(v)$ olduğunu kabul edelim. $x\in S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ olsun. Her $n\in N$ ve $v>0$ için $f_n(v)\leq T$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}\sum_{n\in I_j} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) &= \frac{1}{\lambda_j}\sum_{\substack{n\in I_j \\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon}} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) \\
&\quad+\frac{1}{\lambda_j}\sum_{\substack{n\in I_j \\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)<\varepsilon}} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_j}T\left(\mu\left(\left\{n\in I_j : \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon\right\}\right)\right)+T(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

olur. $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa $x \in V_{\lambda}^{0}\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m\right), f_n\right)$ elde edilir.

Sonuç 2.2.1. $f = \left(f_n\right)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n(v) > 0$ (v>0) ve $\sup_v \sup_n f_n(v) < \infty$ ise $V_{\lambda}^{0}\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m\right), f_n\right) = S_{\lambda}^{0}\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m\right)$ dir.

BÖLÜM 3. φ-FONKSİYONLARI TARAFINDAN TANIMLANAN LACUNARY KUVVETLİ Δ -YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

3.1. Giriş

Bu bölümde Başarır ve Altundağ [24] tarafından tanımlanan bazı dizi uzayları çalışılacaktır. Lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı N_θ aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$N_\theta = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r\to\infty} h_r^{-1} \sum_{i\in I_r} |x_i - s| = 0 \quad \text{bazı } s\text{'ler için} \right\}$$

dır [3].

$\theta = (k_r)$ bir Lacunary dizisi, $\varphi = (\varphi_k)$ ve $f = (f_n)$ sırasıyla $\varphi-$fonksiyonları dizisi ve modülüs fonksiyonları dizisi, m pozitif bir tam sayı ve her k için $u_k \neq 0$ olmak üzere $u = (u_k)$ herhangi bir dizi olsun. Bununla birlikte, $A = (a_{nk})$ matrisi 2. bölümdeki özellikleri sağlasın. Bu takdirde

$$V_\theta^0\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m\right), f_n\right) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) = 0 \right\}$$

uzayı tanımlansın. Eğer $x \in V_\theta^0\left(\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m\right), f_n\right)$ ise x dizisine bir f modülüs dizisine gore sıfıra Lacunary kuvvetli $\left(A, \varphi_k, \Delta_u^m\right)$ - yakınsaktır denir.

Bu bölüm boyunca $f = (f_n)$ modülüs fonksiyon dizisinin $\lim_{v\to 0^+} \sup_n f_n(v) = 0$ özelliğini sağladığını kabul edeceğiz.

Şimdi bu uzayın bazı özel durumlara karşılık gelen dizi uzaylarını verelim.

1- Eğer $\theta = (2^r)$ alınırsa

$$V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)=\left\{x\in w:\ \lim_k \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)=0\right)\right\}$$

uzayı elde edilir.

2- Her x ve k için $\varphi_k(x)=x$ ve her k için $u_k=1$ olduğunda

$$V_\theta^0\left(\left(A,\Delta^m\right), f_n\right)=\left\{x\in w:\ \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left(\left|\Delta^m x_k\right|\right)\right)=0\right\}$$

uzayı elde edilir.

3- Her x ve n için $f_n(x)=x$ ve her k için $u_k=1$ alınırsa

$$V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta^m\right)=\left\{x\in w:\ \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta^m x_k\right|\right)\right)=0\right\}$$

olur.

4- $A=I$ ve her k için $u_k=1$ alındığında

$$V_\theta^0\left(\left(I,\varphi_n,\Delta^m\right), f_n\right)=\left\{x\in w:\ \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\varphi_n\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)\right)=0\right\}$$

uzayı elde edilir.

5- $A=I$, her x ve k için $\varphi_k(x)=x$ ve her k için $u_k=1$ alındığında

$$V_\theta^0\left(\left(I,\Delta^m\right), f_n\right)=\left\{x\in w:\ \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)=0\right\}$$

olur.

6- $A=I$, her x ve k için $\varphi_k(x)=x$, her k için $u_k=1$ ve her x ve n için $f_n(x)=f(x)$ alınırsa

$$V_\theta^0((I,\Delta^m),f)=\left\{x\in w:\ \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)=0\right\}$$

dır.

7- $A=I$, her x ve k için $\varphi_k(x)=x$, her k için $u_k=1$ ve her x ve n için $f_n(x)=x$ alırsak

$$V_\theta^0(I,\Delta^m)=\left\{x\in w:\ \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r}\left(\left|\Delta^m x_n\right|\right)=0\right\}$$

elde edilir.

8- $A=(a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\geq k \ \text{ ise}\\ 0, & n<k \ \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$V_\theta^0((C,\varphi_k,\Delta_u^m),f_n)=\left\{x\in w:\ \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)=0\right\}$$

uzayı elde edilir.

Teorem 3.1.1. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ iki $\varphi-$fonksiyonları dizisi olsunlar ve $\varphi=(\varphi_k(v))$ yeterince büyük v için Δ_2-şartını sağlasın.

1- Eğer $\psi\prec\varphi$ ve $\varphi=(\varphi_k(v))$ yeterince büyük v için Δ_2-şartını sağlar ise $V_\theta^0((A,\varphi_k,\Delta_u^m),f_n)\subset V_\theta^0((A,\psi_k,\Delta_u^m),f_n)$,

2- Eğer yeterince büyük v için $(\varphi_k(v))$ ve $(\psi_k(v))$ dizileri denk ve $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ dizileri Δ_2-şartını sağlar ise $V_\theta^0((A,\varphi_k,\Delta_u^m),f_n)=V_\theta^0((A,\psi_k,\Delta_u^m),f_n)$ dir.

İspat: 1- $x=(x_k)\in V_\theta^0\left((A,\varphi_k,\Delta_u^m),f_n\right)$ olsun. $\psi\prec\varphi$ olduğundan $b,c,v_0>0$ ve $|x_k|>v_0$ şartını sağlayan her k için

$$\psi_k(|x_k|)\le b\,\varphi_k(c|x_k|) \tag{3.1}$$

dır. x dizisini $x=x'+x''$ olarak gösterelim. Burada her m için $x'=\Delta_u^m x_k'$, $|\Delta_u^m x_k|<v_0$ için $\Delta_u^m x_k'=\Delta_u^m x_k$ ve k'nın diğer değerleri için $\Delta_u^m x_k'=0$ olarak tanımlansın. $x'\in V_\theta^0\left((A,\psi_k,\Delta_u^m),f_n\right)$ olduğunu görmek kolaydır. L sabiti f ve φ fonksiyonunun özellikleri ile bağlantılı olmak üzere kabulden ve (3.1) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\psi_k\left(|\Delta_u^m x_k''|\right)\right)&\le\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(b\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(c|\Delta_u^m x_k''|\right)\right)\\&\le\frac{L}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(|\Delta_u^m x_k''|\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Δ_2-şartını sağlayan bir $\varphi-$fonksiyonunun (1.2) ve (1.3) özelliklerini sağlayacağını hatırlayalım. Sonuç olarak $x''=(x_k'')\in V_\theta^0\left((A,\psi_k,\Delta_u^m),f_n\right)$ olur ve $x\in V_\theta^0\left((A,\psi_k,\Delta_u^m),f_n\right)$ elde edilir.

2- $V_\theta^0\left((A,\varphi_k,\Delta_u^m),f_n\right)=V_\theta^0\left((A,\psi_k,\Delta_u^m),f_n\right)$ eşitliği aynı şekilde ispatlanır.

Teorem 3.1.2. $\varphi=(\varphi_k(v))$ her k ve yeterince büyük v için Δ_2-şartını sağlayan $\varphi-$fonksiyonları dizisi olsun. Bu taktirde $V_\theta^0\left((A,\varphi_k\Delta_u^m),f_n\right)$ lineer uzaydır.

İspat: İlk olarak $x=(x_k)\in V_\theta^0\left((A,\varphi_k\Delta_u^m),f_n\right)$ ve α keyfi bir sayı olmak üzere $\alpha.x\in V_\theta^0\left((A,\varphi_k,\Delta_u^m),f_n\right)$ olduğunu gösterelim. $0<\alpha<1$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(|\Delta_u^m(\alpha x_k)|\right)\right)\le\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(|\Delta_u^m x_k|\right)\right) \text{ dir.}$$

Eğer $\alpha>1$ ise $\alpha<2^s$ olacak şekilde pozitif bir s sayısı vardır ve d ve L, φ ve f fonksiyonları ile bağlantılı sabitler olmak üzere

$$\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m(\alpha x_k)\right|\right)\right) \le \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(d^s\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$
$$\le \frac{L}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

elde edilir. Δ_2-şartını sağlayan $\varphi-$fonksiyonu (1.2) ve (1.3) yi gerektirir.
Böylece $\alpha x\in V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ elde edilir.
İkinci olarak $x,y\in V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ olsun ve α, β keyfi sabitler olsun. $\alpha x+\beta y\in V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ olduğunu gösterelim. L_1 ve L_2 yukarıdaki gibi tanımlanan sabitler olmak üzere

$$\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m(\alpha x_k+\beta y_k)\right|\right)\right) \le \frac{L_1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$
$$+\frac{L_2}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m y_k\right|\right)\right)$$

olur. $\alpha x+\beta y\in V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ elde edilir.
Şimdi teorem (3.1.3)'ün ispatı için gerekli önermeyi verelim.

Önerme 3.1.1. f bir modülüs fonksiyonu ve $0<\delta<1$ olsun. Her $v\ge\delta$ için $f(v)\le 2f(1)\delta^{-1}v$ dir [23].

Teorem 3.1.3. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $f=(f_n)$, sırasıyla $\varphi-$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının birer dizisi olsun. Bu taktirde $V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

İspat: $x\in V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ ve $\sup_n f_n(1)=M$ olsun. $\varepsilon>0$ verilsin. Her $x\in[0,\delta]$ ve her n için $f_n(x)<\varepsilon$ olacak şekilde $0<\delta<1$ seçelim.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)=S_1+S_2$$

yazalım. Burada

$$S_1 = \frac{1}{h_r} \sum_{n \in I_r} f_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right) \right)$$

ile verilir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right) \leq \delta$$

üzerinden toplam alınır.

$$S_2 = \frac{1}{h_r} \sum_{n \in I_r} f_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right) \right)$$

ile verilir ve bu toplam da

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right) > \delta$$

üzerinde alınır. f modülüs fonksiyonunun tanımından

$$S_1 \leq \frac{1}{h_r} \sum_{n \in I_r} f_n(\delta) < \frac{1}{h_r} (h_r \varepsilon) = \varepsilon$$

ve Önerme 3.1.1'den

$$S_2 \leq 2M \frac{1}{\delta} \frac{1}{h_r} \sum_{n \in I_r} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \varphi_k \left(\left| \Delta_u^m x_k \right| \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $x \in V_\theta^0 \left(\left(A\varphi_k, \Delta_u^m \right), f_n \right)$ dir.

Teorem 3.1.4. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $f=(f_n)$ sırasıyla, $\varphi-$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının birer dizisi olsun. Eğer $\lim_{v\to\infty}\inf_n \frac{f_n(v)}{v}>0$ ise

$$V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right) \text{ dir.}$$

İspat: Eğer $\lim_{v\to\infty}\inf_n \frac{f_n(v)}{v}>0$ ise her $v>0$ ve $n\in N$ için $f_n(v)>cv$ olacak şekilde bir $c>0$ sayısı vardır. $x\in V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ olsun. Açık olarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) &\geq \frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} c\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)\\ &= \frac{c}{h_r}\sum_{n\in I_r}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\end{aligned}$$

dır. Böylece $x\in V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir. Teorem (3.1.3) kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. $\theta=(k_r)$ bir Lacunary dizisi ve $f=(f_n)$ bir modülüs fonksiyonları dizisi olsun.

1- $\lim\inf q_r>1$ ise $V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$,

2- $\lim\sup q_r<\infty$ ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$,

3- $1<\lim\inf q_r\leq\lim\sup q_r<\infty$ ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$

dir.

İspat: Bu teorem [9]'da verilen teknikle ispat edilebilir. Bu nedenle ispat burada verilmeyecektir.

Sonuç 3.1.1. $\lim_{v\to\infty}\frac{f_n(v)}{v}>0$ ve $1<\lim\inf q_r\leq\lim\sup q_r<\infty$ ise

$$V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$$

dir.

3.2. $S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ - İstatistiksel Yakınsaklık

$A=\left(a_{nk}\right)$ sonsuz matris, $\theta=\left(k_r\right)$ bir Lcunary dizisi ve $\varphi=\left(\varphi_k\right)$ $\varphi-$fonksiyonları dizisi olsun ve $\varepsilon>0$ sayısı verilsin.

$$K_\theta^r\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)=\left\{n\in I_r:\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon\right\}$$

yazalım. $\mu\left(K_\theta^r\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)$, $K_\theta^r\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)$'a ait eleman sayısını belirtmek üzere, eğer her $\varepsilon>0$ ve her k için

$$\lim_r\frac{1}{h_r}\mu\left(K_\theta^r\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)=0$$

ise $x=\left(x_k\right)$ dizisi sıfır sayısına Lacunary $\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ - istatistiksel yakınsaktır denir. Sıfıra Lacunary $\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ - istatistiksel yakınsak olan $x=\left(x_k\right)$ dizilerinin kümesi $S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ ile gösterilir ve

$$S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)=\left\{x=\left(x_k\right):\ \lim_r\frac{1}{h_r}\mu\left(K_\theta^r\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)=0\right\}$$

yazılır. $\theta=\left(2^r\right)$ alınırsa $S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ uzayı $S^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ uzayına indirgenir.

Eğer $A=I$, her k ve x için $\varphi_k\left(x\right)=x$ ise $S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ uzayı

$$S_\theta^0\left(\Delta_u^m\right)=\left\{x=\left(x_k\right):\ \lim_r\frac{1}{h_r}\mu\left(\left\{k\in I_r:\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon\right\}\right)=0\right\}$$

uzayına indirgenir.

Teorem 3.2.1. $\theta=\left(k_r\right)$ bir Lacunary dizisi, $\varphi=\left(\varphi_k\left(v\right)\right)$ ve $\psi=\left(\psi_k\left(v\right)\right)$ $\varphi-$fonksiyonlarının iki dizisi olsun

1- Eğer $\psi\prec\varphi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k Δ_2-şartını sağlarsa

$$S_\theta^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)\subset S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dir.

2- Eğer $\varphi\sim\psi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k ve ψ_k Δ_2-şartını sağlarsa

$$S_\theta^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)=S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dir.

İspat: 1- $x\in S_\theta^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)$ olsun. Kabulden $\psi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\leq b\varphi_k\left(c\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)$ ve L sayısı $\varphi-$fonksiyonunun özellikleri ile bağlantılı olmak üzere $b,c>0$ ve her m için

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\psi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\leq b\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(c\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\leq L\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)$$

dir. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\psi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon$ olması $\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak

$$K_\theta^r\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\subset K_\theta^r\left(\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)$$

elde edilir ve

$$\lim_r\frac{1}{h_r}\mu\left(K_\theta^r\left(\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)\leq\lim_r\frac{1}{h_r}\mu\left(K_\theta^r\left(\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),\varepsilon\right)\right)\right)$$

olur.

2- $S_\theta^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)=S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ eşitliği benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3.2.2. $f=\left(f_n\right)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n\left(v\right)>0$ ($v>0$) ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

İspat: Eğer $\inf_n f_n\left(v\right)>0$ ise $v>0$ ve $n\in N$ için $f_n\left(v\right)\geq\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha>0$ sayısı vardır. $x\in V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ olsun.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) \geq \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{n\in I_r \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon}} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

$$\geq \frac{\alpha}{h_r}\mu\left(\left\{n\in I_r : \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon\right\}\right)$$

dır. $x\in S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ olur.

Teorem 3.2.3. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\sup_v \sup_n f_n(v)<\infty$ ise $S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)$ dır.

İspat: $T(v)=\sup_n f_n(v)$ ve $T=\sup_v T(v)$ olduğunu kabul edelim. $x\in S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ olsun. Her $n\in N$ ve $v>0$ için $f_n(v)\leq T$ olduğundan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{n\in I_r} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right) = \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{n\in I_r \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon}} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

$$+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{n\in I_r \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)<\varepsilon}} f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{h_r}T\left(\mu\left(\left\{n\in I_r : \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\varphi_k\left(\left|\Delta_u^m x_k\right|\right)\geq\varepsilon\right\}\right)\right)+T(\varepsilon)$$

olur. $\varepsilon\to 0$ için limit alınırsa $x\in V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)$ elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n(v)>0$ ($v>0$) ve $\sup_v \sup_n f_n(v)<\infty$ ise $S_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right), f_n\right)=V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar özet olarak verilecektir.

Teorem 4.1.1. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ iki $\varphi-$fonksiyonları dizisi olsun. Bu durumda

1- $\psi \prec \varphi$ ve $\varphi=(\varphi_k)$ yeterince büyük v için Δ_2-şartını sağlar ise $V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset V_\lambda^0\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

2- Yeterince büyük v için $(\varphi_k(v))$ ve $(\psi_k(v))$ dizileri denk ve her ikisi de Δ_2-şartını sağlar ise $V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V_\lambda^0\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

Teorem 4.1.2. Her k ve yeterince büyük v için Δ_2-şartını sağlayan $\varphi-$fonksiyonları dizisi $\varphi=(\varphi_k(v))$ olsun. Bu taktirde $V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k\Delta_u^m\right),f_n\right)$ lineer uzaydır.

Teorem 4.1.3. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $f=(f_n)$, sırasıyla $\varphi-$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu taktirde $V_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

Teorem 4.1.4. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $f=(f_n)$ sırasıyla $\varphi-$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{v\to\infty}\inf_n \frac{f_n(v)}{v}>0$ ise

$$V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dir.

Teorem 4.1.5. $\varphi=(\varphi_k(v))$ ve $\psi=(\psi_k(v))$ $\varphi-$fonksiyonlarının iki dizisi olsun.

1- Eğer $\psi \prec \varphi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k Δ_2 $-$şartını sağlarsa

$$S_\lambda^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)\subset S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dir.

2- Eğer $\varphi \sim \psi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k ve ψ_k Δ_2 $-$şartını sağlarsa

$$S_\lambda^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)= S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dır.

Teorem 4.1.6. Eğer $\liminf_j \dfrac{\lambda_j}{j} > 0$ ise $S^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir

Teorem 4.1.7. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n(v)>0$ (v>0) ise $V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

Teorem 4.1.8. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\sup_v\sup_n f_n(v)<\infty$ ise $S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dır.

Teorem 4.1.9. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ iki $\varphi-$fonksiyonları dizisi olsunlar ve $\varphi=(\varphi_k(v))$ yeterince büyük v için Δ_2 $-$şartını sağlasın.

1- Eğer $\psi \prec \varphi$ ve $\varphi=(\varphi_k(v))$ yeterince büyük v için Δ_2 $-$şartını sağlar ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset V_\theta^0\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

2- Eğer yeterince büyük v için $(\varphi_k(v))$ ve $(\psi_k(v))$ dizileri denk ve $\varphi=(\varphi_k)$ ve $\psi=(\psi_k)$ dizileri Δ_2 $-$şartını sağlar ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V_\theta^0\left(\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

Teorem 4.1.10. $\varphi=(\varphi_k(v))$ her k ve yeterince büyük v için Δ_2 $-$şartını sağlayan $\varphi-$fonksiyonları dizisi olsun. Bu taktirde $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k\Delta_u^m\right),f_n\right)$ lineer uzaydır.

Teorem 4.1.11. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $f=(f_n)$, sırasıyla $\varphi-$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının birer dizisi olsun. Bu taktirde $V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dir.

Teorem 4.1.12. $\varphi=(\varphi_k)$ ve $f=(f_n)$ sırasıyla, $\varphi-$fonksiyonlarının ve modülüs fonksiyonlarının birer dizisi olsun. Eğer $\lim_{v\to\infty}\inf_n \frac{f_n(v)}{v}>0$ ise

$$V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$$

dir.

Teorem 4.1.13. $\theta=(k_r)$ bir Lacunary dizisi ve $f=(f_n)$ bir modülüs fonksiyonları dizisi olsun.

1- $\liminf q_r>1$ ise $V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$,

2- $\limsup q_r<\infty$ ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$,

3- $1<\liminf q_r\le\limsup q_r<\infty$ ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$

dir.

Teorem 4.1.14. $\theta=(k_r)$ bir Lacunary dizisi, $\varphi=(\varphi_k(v))$ ve $\psi=(\psi_k(v))$ $\varphi-$fonksiyonlarının iki dizisi olsun

1- Eğer $\psi\prec\varphi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k Δ_2-şartını sağlarsa $S_\theta^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)\subset S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

2- Eğer $\varphi\sim\psi$ ve yeterince büyük v ve her k için φ_k ve ψ_k Δ_2-şartını sağlarsa $S_\theta^0\left(A,\psi_k,\Delta_u^m\right)=S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

Teorem 4.1.15. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n(v)>0$ $(v>0)$ ise $V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)\subset S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

Teorem 4.1.16. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\sup_v\sup_n f_n(v)<\infty$ ise $S_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)\subset V_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)$ dır.

Sonuç 4.1.1. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n(v)>0$ (v>0) ve $\sup_v\sup_n f_n(v)<\infty$ ise $V_\lambda^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=S_\lambda^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

Sonuç 4.1.2. $f=(f_n)$ modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $\inf_n f_n(v)>0$ ($v>0$) ve $\sup_v \sup_n f_n(v)<\infty$ ise $S_\theta^0\left(\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right),f_n\right)=V_\theta^0\left(A,\varphi_k,\Delta_u^m\right)$ dir.

KAYNAKLAR

[1] MADDOX, I.J., Elements of Functional Analysis, Camb. Univ. Pres. 1970.

[2] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons New York,1978.

[3] FREEDMAN, A.R., Sember, J.J., Raphael, M., Some Cesaro-type summability spaces. Proc. London Math. Soc., 37,508-520,1978.

[4] FRIDY, J.A., On statistical convergence, Analysis 5, 301-313, 1985.

[5] LEINDLER, L., UBER DE LA VALE POUNSISCHE, Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 16, 375-378, 1965.

[6] NAKANO, H., Concave Modulus. J. Math. Soc. Japon, 5 , 29-49, 1953.

[7] RUCKLE, W. H., FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math., 25, 973-978, 1973.

[8] MADDOX, I. J., Sequence spaces defined by a modulus, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100, 161-166, 1986.

[9] PEHLİVAN, S., FISHER, B., Lacunary strong convergence with respect to a sequence of modulus functions, Comment. Math. Univ. Carolinae, 36 (1), 71-78, 1995.

[10] BİLGİN, T., On statistical convergence, An. Univ. Timisoara Ser. Math. Inform., 32 (1), 3-7, 1994.

[11] MALKOWSKY, SAVAŞ, E., Some λ-sequence spaces defined by a modulus, Archivum Mathematicum, 36, 219-228, 2000.

[12] SAVAŞ, E., On some generalized sequence spaces defined by a modulus, Indian J. Pure and Appl. Math., 30 (5), 459-464, 1999.

[13] BAŞARIR, M., ALTUNDAĞ, S., Some difference sequence spaces defined by a sequence of $\varphi-$functions, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57, 149-160, 2008.

[14] KIZMAZ, H., On Certain Sequence Spaces, Canad. Math. Bull., 24, 169-176, 1981.

[15] ET, M., ÇOLAK, R., On Some Generalized Difference Sequence Spaces, Soochow Journal of Math., 21 (4), 377-386, 1995.

[16] ET, M., BAŞARIR, M., On Some New Generalized Difference Sequence Spaces, Period. Math. Hung., 35, 169-175, 1997.

[17] BATAINEH, AHMAD,H.A., Azar, L.E., On new difference sequence spaces defined by a sequence of Orlicz functions, J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser., 16, 51-56, 2003.

[18] BİLGİN, T., Some new difference sequence spaces defined by an Orlicz functions, Filomat, 17, 1-8, 2003.

[19] MALKOWSKY, E., PARASHAR, S.D., Matrix transformations in spaces of bounded and convergent difference sequences of order m, Analysis, 17, 87-97, 1997.

[20] WASZAK, A., Some remarks on strong convergence in modular spaces of sequences, Fasc. Math., 35, 151-162, 2005.

[21] WASZAK, A., On the strong convergence in some sequence spaces, Fasc. Math., 73, 125-137, 2002.

[22] ET, M., ALTIN, Y., ALTINOK, H., On some generalized difference sequence spaces defined by a modulus function, Filomat, 17, 23-33, 2003.

[23] PEHLİVAN, S., FISHER, B., Some sequence spaces defined by a modulus function, Math. Slovaca, 45 , 1994.

[24] BAŞARIR, M., ALTUNDAĞ, S., On lacunary strong Δ-convergence with respect to a sequence of $\varphi-$ functions, basılmamış.

ÖZGEÇMİŞ

Recep Zafer BEŞOLUK, 27.07.1974 tarihinde Sakarya'nın Hendek İlçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Hendek'te tamamladı. 1994 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fizik bölümüne girdi, bir yıl sonra aynı üniversitenin Matematik bölümüne geçiş yaptı. 1998 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünü bitirdi. 1998 yılından itibaren Matematik öğretmenliği yapmaktadır.