T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NEWTON METODU İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alper EKİNCİ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Abdullah YILDIZ**

Eylül 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NEWTON METODU İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alper EKİNCİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 07 /08 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Abdullah YILDIZ	Prof. Dr Refik KESKİN	Yrd. Doç Dr. Mehmet KAYMAK
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının başından sonuna kadar bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Abdullah YILDIZ’a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tezin hazırlanmasında emeği geçen Ömer Faruk YILDIZ, Meryem ATA ve Elif EKİNCİ’ye teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR... ii
İÇİNDEKİLER... iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ... v
ÖZET... vi
SUMMARY... vii

BÖLÜM 1.
LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİN TÜREVLERİ............................ 1
1.1. Giriş.. 1
1.2. Lineer Olmayan Operatörlerin Freshe Türevi................................ 3
1.3. $\mathcal{F}-$türevlenebilir Operatörler İçin Ortalama Değer Teoremi......... 15
1.4. Lineer Olmayan Operatörlerin Gato Türevi.................................. 22
1.5. Yüksek Mertebeden Türevler…………………………………….. 26
1.6. Kapalı Operatörler ……………………………………………….. 34

BÖLÜM 2.
NEWTON METODU……………………………………………..… 46
2.1. Giriş.. 46
2.2. Banach Uzaylarında Lineer Olmayan Operatörlü Denklemler İçin Newton Metodu………………………………………………… 47
2.3. Newton Metodunun Uygulamaları... 59
2.3.1. Lineer olmayan cebirsel denklem sistemine Newton metodunun uygulanması …………………………………… 59
2.3.2. Newton metodunun integral denklemlere uygulanması…….. 64

BÖLÜM 3.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER………………………………………………………... 89

KAYNAKLAR……………………………………………………………….. 90
EKLER……………………………………………………………………….. 91
ÖZGEÇMİŞ………………………………………….……………………….. 99

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}[a,b]$	: $[a,b]\subset\mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$S_r(x_0)$	: x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\|A\|$	: A nın normu
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$A^{-1}(F)$	: F in ters görüntüsü
$(X,\|.\|)$	: Normlu uzay
$\overline{S_r}(x_0)$	: x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$L(X,Y)$	: X den Y ye sınırlı lineer operator kümesi
$\|f\|$	: f fonksiyonelinin normu
$\mathcal{F}-$	: Freshe türevi
$dF(x_0;h)$	: Freshe diferansiyeli
$F''(x_0)$	: 2. dereceden freshe türevi
$(Hessg)(x_0)$	: Hesse matrisi

ÖZET

Anahtar kelimeler: Yaklaşık Çözüm, Newton Metodu, Freshe Türevi, Gato Türevi

Bu çalışmada Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünde Newton metodu incelenmiştir.

Birinci bölümde Newton metodunda kullanılacak fonksiyonellerin türev alma işlemleri için gerekli olan Freshe ve Gato türevleri ile ilgili ayrıntılı bir çalışma yapılmıştır.

İkinci bölümde ; Newton metodunun lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine ve integral denklemlere uygulanması anlatılmıştır. Ayrıca ekler kısmında birkaç problemin Newton metodu ile mathematica çözümü mevcuttur.

APROXIMATE SOLUTION OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NEWTON METHOD

SUMMARY

Key Words: Aproximate Solution, Newton Method, Frechet Derivative, Gateux Derivative

In this study Aproximate solutions of non-linear differential equations with Newton method were analysed.

In first Section a detailed study about Freshe and Gateaux derivatives that we will use in Newton Method, were made.

In second section; Application of Newton Method to the non-linear differential equations and integral equations were presented. In addition, in the appendices section, there are mathematica solutions with Newton method for some problems.

BÖLÜM 1. LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİN TÜREVLERİ

1.1. Giriş

Lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin incelenmesi uygun lineer olmayan operatörlerin yerel olarak lineer operatörlerle yaklaşımları yardımıyla yapılabilir. Bu nedenle normlu uzaylarda lineer olmayan operatörlerin diferansiyel hesabının araştırılması önem taşımaktadır.

Bilindiği gibi, bir $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun herhangi bir $x_0\in(a,b)$ noktasında türeve sahip olması

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0) \tag{1.1}$$

Eşitliğini sağlayan bir $f'(x_0)$ reel sayısının varlığı demektir. Bu eşitliğin $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ şeklindeki fonksiyonlar (genel olarak X ve Y Banach uzayları olmak üzere $f:X\to Y$ şeklindeki operatörler) için bir anlamı yoktur. Ancak uygun bir ifade değişikliği ile bu eşitliğe genel durumda da anlam kazandırılabilir. $\lambda(h)=f'(x_0)h$ şeklinde tanımlanan $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lineer dönüşümü için (1.1) eşitliği

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\lambda(h)}{h}=0 \tag{1.2}$$

eşitliğine denk olur.

(1.2) eşitliği, $f(x_0)+\lambda(h)$ fonksiyonunun x_0 noktası komşuluğunda f fonksiyonuna çok iyi yaklaşan bir fonksiyon olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Dikkatimizi $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lineer dönüşümü üzerinde toplayıp, türev tanımını yeniden formüle edebiliriz.

Bir $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x_0\in(a,b)$ noktasında türeve sahip olması demek $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-\lambda(h)}{h}=0$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lineer dönüşümünün var olması demektir. $x=x_0+h$ ve $w(x)=f(x)-f(x_0)-\lambda(x-x_0)$ dersek $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x_0\in(a,b)$ noktasındaki türev kavramının şu şekilde denk ifadesi de verilebilir.
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ Fonksiyonunun bir $x_0\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir olması demek

$$f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+w(x_0),\ x\in(a,b)$$

olacak şekilde bir $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lineer dönüşümünün ve

$$\lim_{x\to x_0}\frac{w(x)}{x-x_0}=0$$

veya

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|w(x)|}{|x-x_0|}=0$$

Koşulunu sağlayan bir $w:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun var olması demektir.

Bu şekilde tanım X ve Y Banach uzayları olmak üzere $F:X\to Y$ operatörleri için kolayca genelleştirilebilir.

1.2. Lineer Olmayan Operatörlerin Freshe Türevi

Tanım 1.2.1: X ve Y Banach uzayları ve lineer olmayan $F : D \subset X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in \overset{o}{D}$ için

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + w(x - x_0) \qquad (1.3)$$

koşulunu sağlayan $A \in L(X, Y)$ operatörü ve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|w(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \qquad (1.4)$$

olacak şekilde $w : D \to Y$ operatörü varsa $F(x)$ operatörüne $x_0 \in \overset{o}{D}$ noktasında *Freshe türevlenebilir ($\mathcal{F}$ - türevlenebilir)* denir.
(1.3) deki A operatörüne $F(x)$ operatörünün x_0 noktasında Freshe türevi ($\mathcal{F}$ - türevi) denir ve $F'(x_0)$ veya $DF(x_0)$ ile gösterilir. $x - x_0 = h$ alınırsa (1.3) ve (1.4) eşitlikleri sırasıyla

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + w(h) \qquad (1.5)$$

ve

$$\lim_{h \to \theta} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0 \qquad (1.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.2.2: Eğer $F(x): D \subset X \rightarrow Y$ operatörü $x_0 \in \overset{o}{D}$ noktasında $\mathcal{F}$ türevlenebilirse

$$dF(x_0;h) = F'(x_0)h$$

ifadesinde $F(x)$ operatörünün x_0 noktasında h artımına uygun Freshe diferansiyeli ($\mathcal{F}$ - diferansiyeli) denir.

Böylece $dF(x_0;h)$ $\mathcal{F}$ diferansiyeli, h elemanının $F'(x_0)$ lineer operatörü altındaki görüntüsüdür. Eğer $F(x)$ operatörü x_0 noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilir ise $F(x)$ operatörü x_0 noktasında süreklidir. Gerçekten de

$$\lim_{x \to x_0} w(x - x_0) = 0$$

olduğundan (1.3) e göre

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

elde edilir.

Not: $A \in L(X,Y)$ olmak üzere $F(x) = A(x)$ ise $F(x)$ operatörü $\forall x_0 \in X$ noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilirdir ve onun $\mathcal{F}$ - türevi $F'(x_0) = A$ dır. Gerçekten Tanım 1.1.1 dolayısıyla $\forall x_0 \in X$ için

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = A(x_0 + h) - A(x_0) = Ah$$

Olduğu elde edilir.

Türev almada şu genel kuralları göz önüne alalım.

1) $D \subset X$ açık kümesi sabit bir $F : X \rightarrow Y$ operatörü için D üzerinde $F'(x) = \theta$.

2) $F : X \to Y$ ve $G : X \to Y$ $x_0 \in X$ noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilirdir operatörler ve α, β birer skaler olmak üzere

$$(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$$

Operatörü de x_0 noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilirdir ve

$$(\alpha F + \beta G)'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta G'(x_0)$$

dir. Gerçekten F ve G operatörleri x_0 noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilir olduğundan sırasıyla

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + w_1(h),$$
$$G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(x_0)h + w_2(h),$$

ve

$$\lim_{h \to \theta} \frac{\|w_i(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad i = 1, 2$$

dir. Bu durumda

$$H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$$
$$\overline{w}(h) = \alpha w_1(h) + \beta w_2(h)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} H(x_0 + h) - H(x_0) &= \alpha F'(x_0)h + \beta G'(x_0)h + \alpha w_1(h) + \beta w_2(h) \\ &= H'(x_0) + \overline{w}(h) \end{aligned}$$

Ve $\|h\| \to 0$ iken $\|\overline{w}(h)\| = o(\|h\|)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla H operatörü x_0 noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilirdir ve

$$H'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta G'(x_0)\,.$$

3) X, Y ve Z Banach uzayları $G(z): Z \to X$ operatörü $z_0 \in Z$ noktasında $F(x): X \to Y$ operatörü $x_0 = G(z_0) \in X$ noktasında $\mathcal{F}$ türevlenebilir ise $(F \circ G)(z) = F\left[G(z)\right]: Z \to Y$ operatörü z_0 noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilir ve

$$(F \circ G)'(z_0) = F'(x_0)G'(z_0)$$

dir.

İspat: $F(x): X \to Y$ operatörü (x_0) noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilir olduğundan

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + w(x - x_0) \tag{1.7}$$

$w(\theta) = \theta$ kabul edebileceğimizden dolayı $w(h)$ operatörü θ noktasının komşuluğunda süreklidir. Daha sonra $G(z): Z \to X$ operatörü z_0 noktasında $\mathcal{F}$ - türevlenebilir olduğundan

$$G(z) = G(z_0) + G'(z_0)(z - z_0) + w_1(z - z_0) \tag{1.8}$$

ve $\|z - z_0\| \to 0$ iken $\|w_1(z - z_0)\| = \circ(\|z - z_0\|)$. (1.8) den dolayı (1.7) ifadesi

$$F(G(z)) - F(G(z_0)) = F'(x_0)G'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0) \tag{1.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\varepsilon(z - z_0) = F'(x_0)w_1(z - z_0) + w\left[G'(z_0)(z - z_0) + w_1(z - z_0)\right]$$

$\|(z - z_0)\| \to 0$ iken $\|F'(x_0)w_1(z - z_0)\| = \circ(\|z - z_0\|)$ olacağından $\|z - z_0\| \to 0$ iken

$$\begin{aligned}\|G'(z_0)(z - z_0) + w_1(z - z_0)\| &= \circ(\|G'(z_0)(z - z_0) + w_1(z - z_0)\|)\\ &= \circ(\|z - z_0\|)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\|z-z_0\| \to 0$ iken

$$\|\varepsilon(z-z_0)\| = \circ(\|z-z_0\|)$$

olur. Bu eşitlik ve (1.9) dan

$$(F\circ G)'(z_0) = F'(x_0)G'(x_0)$$

olduğu elde edilir.

Örnek 1.2.3: $D \subset \mathbb{R}^2$ bir açık küme ve $F : D \to \mathbb{R}$ operatörü

$$F(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, \qquad x = (x_1, x_2)$$

şeklinde verilmiş olsun. D ye ait olan $x = (x_1, x_2)$ ve $x + h = (x_1 + h_1, x_2 + h_2)$ noktaları için

$$F(x+h) - F(x) = (2x_1 + x_2)h_1 + (x_1 + 2x_2)h_2 + w(h)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$w(h) = h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2 \text{ ve } \|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0$$

iken $w(h) = \circ(\|h\|)$ olduğundan verilen $F : D \to \mathbb{R}$ operatörü her $x = (x_1, x_2)$ $\mathcal{F}$-türevlenebilir ve

$$F'(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2),$$

$$F'(x)h = (2x_1 + x_2)h_1 + (x_1 + 2x_2)h_2 .$$

Örnek 1.2.4: $D \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve

$$F : D \to \mathbb{R}^m \quad f(x) = (f_1(x),..., f_m(x)) \quad x = (x_1,...,x_n) \in D$$

$f_1,..., f_m$ $f_1(x),..., f_m(x)$ fonksiyonları D den $\mathbb{R}$ ye tanımlı reel değerli fonksiyonlardır. $f_1(x),..., f_m(x)$ fonksiyonlarının D üzerinde sürekli $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$ kısmi türevleri varolsun. Bu durumda D ye ait $x = (x_1,...,x_n)$ ve $x + h = (x_1 + h_1,..., x_n + h_n)$ noktaları için

$$\begin{aligned} &f_i(x_1 + h_1,..., x_n + h_n) - f_i(x_1,...,x_n) = \\ &a_{i1}h_1 + ... + a_{in}h_n + w_i(h), i = 1,...,m \end{aligned} \tag{1.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$w(h) = (w_1(h),..., w_m(h)), h = (h_1,...,h_n)$$
$$\|w\| = \sqrt{w_1^2 + ... + w_m^2}, \|h\| = \sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2}$$

olmak üzere $\|h\| \to 0$ iken $\|w(h)\| = \circ(\|h\|)$.

$$A = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right), i = 1,...,m; \ j = 1,...,n$$

matrisine $f : D \to \mathbb{R}^m$ operatörünün jacobi matrisi ya da fonksiyonel matrisi denir. $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ operatörü $f : D \to \mathbb{R}^m$ operatörünün $x \in D$ noktasında $\mathcal{F}$ -türevidir, yani $A = f'(x)$. İleri analiz dersinden bildiğimiz gibi $f : D \to \mathbb{R}^m$ operatörü $x \in D$ noktasında diferansiyellenebilirse bu noktada $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} i = 1,...,m; \ j = 1,...,n$ kısmi türevleri vardır ve (1.10) daki a_{ij} ler

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, i = 1,...,m; \ j = 1,...,n$$

gibi tanımlanır. Eğer

$$g : \Delta \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, g(z) = (g_1(z),..., g_n(z)), z = (z_1,..., z_p) \in D$$

operatörü $z^0 = (z^1,..., z^p) \in \Delta$ noktasında $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M$ operatörü $x^0 = g(z^0) \in D(x^0 = (x_1^o,..., x_n^0)), x_k^0 = g_k(z_1^0,..., z_p^0), k = 1,..., n)$ noktasında $\mathcal{F}-$türevlenebilirse

$$g'(z^0) = (\frac{\partial g_j(z^0)}{\partial z_k}), \ f'(x^0) = (\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j}) \ j = 1,..., n; k = 1,..., p; i = 1,..., m$$

olur. Bu durumda $(f \circ g)(z) = f(g(z)) : \Delta \to \mathbb{R}^m$ operatörü z^0 noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve onun $\mathcal{F}-$ türevi

$$(f \circ g)'(z^0) = f'(x^0) g'(z^0) = (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j} \frac{\partial g_j(z^0)}{\partial z_k}) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m) \text{ operatörü olur.}$$

Örnek 1.2.5: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ operatörü

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)), f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3, f_2(x) = x_1 x_2 x_3, x = (x_1, x_2, x_3)$$

şeklinde verilmiş olsun.

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j} = 1, \ j = 1, 2, 3; \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} = x_2.x_3; \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = x_1.x_3$$

ve $\dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} = x_1.x_2$ kısmi türevleri $\mathbb{R}^3$ üzerinde sürekli olduğundan verilen $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ operatörü $\mathbb{R}^3$ üzerinde $\mathcal{F}-$ türevlenebilirdir ve onun jacobi matrisi

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2x_3 & x_1x_2 & x_1x_2 \end{pmatrix}$$

olur.

Problem 1.2.6: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operatörleri

$$f(x) = (\sin(x_1 + x_2 + x_3), \cos(x_1 + x_2 + x_3), x_1x_2x_3),$$

$x = (x_1, x_2, x_3), g(z) = (z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1z_2), z = (z_1, z_2)$ şeklinde verilmiş olsun. $z^0 = (0,\pi) \in \mathbb{R}^2$ noktasında $(f \circ g)'(z^0)$ $\mathcal{F}-$ türevini bulunuz.

Çözüm: $x^0 = g(z^0) = (\pi, -\pi, 0),$

$$g'(z^0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$f'(x^0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi^2 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$(f \circ g)'(z^0) = f'(x^0).g'(z^0) = \begin{pmatrix} 2+\pi & 0 \\ 0 & 0 \\ -\pi^3 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Problem 1.2.7: $D = [a,b] \times \mathbb{R}$ ve $f(x,u): D \to \mathbb{R}, D$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\mathcal{F}(u)(x) = f(x,u(z))(u \in C[a,b])$$

şeklinde tanımlı lineer olmayan F operatörü verilmiş olsun. $u(x) \in C[a,b]$ olduğunda $F(u)(x) \in C[a,b]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x,u)$ fonksiyonu D üzerinde sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \forall (x_1, x_1), (x_2 x_2) \in D$ için

$$|X_1 - X_2| < \delta, |u_1 - u_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2)| < \varepsilon$$

olur. $u \in C[a,b]$ ise $\delta > 0$ sayısı için öyle $\sigma > 0$ sayısı vardır ki, her bir $x_1, x_2 \in [a,b]$ için

$$|x_1 - x_2| < \sigma \Rightarrow |u(x_1) - u(x_2)| < \delta$$

olur. Dolayısıyla $u \in C[a,b]$ durumunda $\forall \varepsilon > o \exists \sigma > 0 \ni \forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için

$$|x_1 - x_2| < \sigma \Rightarrow |F(u)(x_1) - F(u)(x_2)| = |f(x_1,u(x_1)) - f(x_2,u(x_2))| < \varepsilon$$

olur. Bu ise $u \in C[a,b]$ için $F(u)(x) \in C[a,b]$ olduğunu gösterir.

Problem 1.2.8: $D=[a,b]\times\mathbb{R}$ ve $f(x,u):D\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $f_u(x,u)$ sürekli kısmi türevi olsun. Bu durumda

$$F(u)(x)=f(x,u(x)):C[a,b]\to C[a,b]$$

operatörünün her bir $\in C[a,b]$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $u_0+h\in C[a,b]$ için

$$\begin{aligned} F(u_0+h)-F(u_0) &= f(x,u_0(x)+h(x))-f(x,u_0(x)) \\ &= f_u(x,u_0(x))h(x)+\omega(u_0,h) \end{aligned} \tag{1.11}$$

burada $0\le\theta\le 1$ olmak üzere

$$\omega(u_0,h)(x)=\int_0^1\left[f_u(x,u_0(x)+\theta h(x))-f_u(x,u_0(x)\right]h(x)d\theta. \tag{1.12}$$

$r>0$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin kapalı ve sınırlı

$$D_r=\left\{(x,u)\in\mathbb{R}^2 : X\in[a,b], u_0(x)-r\le u(x)\le u_0(x)+r\right\}$$

kümesini göz önüne alalım. $f_u(x,u)$ fonksiyonu D_r üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\ni\forall(x_1,u_1),(x_2,u_2)\in D_r$ için

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(u_1-u_2)h^2}<\delta\Rightarrow\left|f_u(x_1,u_1)-f_u(x_2,u_2)\right|<\varepsilon$$

olur.

(1.11) ve (1.12) de $\|h\|_\infty\le r$ olsun. Bu durumda her bir $x\in[a,b]$ ve $\theta\in[0,1]$ için $(x,u_0(x)+\theta h(x))\in D_r$ olur. $x_1=x_2=x, u_1=u_0(x)+\theta h(x), u_2=u_0(x)$ denirse her bir $x\in[a,b]$ için, $\|h\|_\infty<\delta\le r$ olacağından

$$\|\omega(u_0,h\|_\infty \le \max\left\{\int_0^1 \left| f_u(x,u_0(x)+\theta h(x)) - f_u(x,u_0(x))\right| \left|h(x)\right| d\theta : x\in[a,b]\right.$$
$$< \varepsilon \|h\|_\infty$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\|h\|_\infty \to 0$ olur. Buradan $\|\omega(u_0,h)\|_\infty = \circ(\|h\|_\infty)$ operatörünün $u_0 \in C[a,b]$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve $F'(u_0) = f_u(x,u_0(x))$ olduğu görülür.

Problem 1.2.9: $D=[a,b]^2\times\mathbb{R}$ ve $f(x,s,u): D\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve onun $f_u(x,s,u)$ kısmi türevi D üzerinde sürekli olsunlar. Bu durumda

$$F(u)(x) = u(x) - \int_a^b f(x,s,u(s))ds \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanan $F: C[a,b]\to C[a,b]$ operatörünün $\forall u_0(x)\in C[a,b]$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olduğunu ve

$$F'(u_0)h = h(x) - \int_a^b f_u(x,s,u_0(s))h(s)ds \tag{1.14}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Her bir $h(x)\in C[a,b]$ için

$$\begin{aligned} F(u_0+h) - F(u_0) &= h(x) \\ &\quad - \int_a^b f_u(x,s,u_0(s))h(s)ds - w(u_0,h) \end{aligned} \tag{1.15}$$

burada $0\le\theta\le1$ olmak üzere

$$w(u_0,h)(x)=-\int_a^b\left\{\int_0^1[\,f_u(x,s,u_0(s)+\theta h(s)) \right. \tag{1.16}$$
$$\left. -f_u(x,s,u_0(s))]h(s)d\theta\right\}ds$$

olduğu açıktır.

$r>0$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$' ün kapalı ve sınırlı

$$T_r=\left\{(x,s,u):x,s\in[a,b],u_0(s)-r\le u\le u_0(s)+r\right\}$$

kümesini göz önüne alalım. $f_u(x,s,u)$ fonksiyonu T_r üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ öyle ki $\forall(x_1,s_1,u_1),(x_2,s_2,u_2)\in T_r$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(s_1-s_2)^2+(u_1-u_2)^2}<\delta$$
$$\Rightarrow\left|f_u(x_1,s_1,u_1)-f_u(x_2,s_2,u_2)\right|<\varepsilon$$

olur. (1.15) ve (1.16) da $\|h\|_\infty<\delta$ olsun. Bu durumda $\forall x,s\in[a,b]$ ve $\theta\in[0,1]$ için $(x,s,u_0(s)+\theta h(s))\in T_r$ olur.

$$x_1=x_2=x,s_1=s_2=s,u_1=u_0(s)+\theta h(s),u_2=u_0(s)$$

denirse $\forall x,s\in[a,b]$ için $\|h\|_\infty<\delta$ olacağından

$$\|w(u_0,h)\|_\infty\le\max\left\{\int_a^b\left[\int_0^1\left|f(x,s,u_0(s)+\theta h(s))\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-f_u(x,s,u_0(s))\right\|h(s)\right|d\theta\right]ds:x\in[a,b]\right\}<\varepsilon\|h\|_\infty$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\|h\|_\infty\to0$ iken $\|w(u_0,h)\|=\circ(\|h\|_\infty)$ olur. Buradan (1.13) ifadesiyle tanımlı F operatörünün $u_0(x)\in C[a,b]$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olduğu (1.14) eşitliğinin doğruluğu görülür.

(1.13) ifadesinde $f(x,s,u)=M(x,s)f(s,u)$ olsun. Eğer $M(x,s)$ fonksiyonu $[a,b]^2$ üzerinde, $f(s,u)$ fonksiyonu ve onun $f_u(s,u)$ kısmi türevi

$$D=\{(s,u)\in\mathbb{R}^2 : s\in[a,b], u\in\mathbb{R}\}$$

üzerinde sürekli fonksiyonlar iseler,

$$F_1(u)(x)=u(x)-\int_a^b M(x,s)f(s,u(s))ds$$

şeklinde tanımlanan $F_1 : C[a,b]$ operatörü $\forall u_0\in C[a,b]$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilirdir ve

$$F_1(u_0)h=h(x)-\int_a^b M(x,s)f_u(s,u_0(s))h(s)ds$$

eşitliği doğrudur.

1.3. $\mathcal{F}-$ Türevlenebilir Operatörler İçin Ortalama Değer Teoremi

Tanım 1.3.1: X Banach uzayı ve $f:[0,1]\to X$ fonksiyonu verilmiş olsun. $[0,1]$ aralığını

$$0=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=1$$

özelliğini sağlayan
$t_0,t_1,...,t_n$ noktaları yardımıyla n tane $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,...,n)$ alt aralığa bölelim. O zaman

$$P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$$

kümesine $[0,1]$ aralığının bir parçalanması denir.

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \|P\| = \max\{\Delta t_k : k = 1,...,n\}, \tau_k \in [t_{k-1}, t_k] (k = 1,...,n)$
olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k$$

limiti sonluysa, f , $[0,1]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilir denir ve bu limit

$$\int_0^1 f(t)dt$$

ile gösterilir.
Böylece tanıma göre

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k \quad \text{dir.}$$

Burada yaklaşım X in normu anlamındadır. Analizden $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları için Riemann integralinin bildiğimiz tüm özelliklerinin ispatları yukarıda tanımlanan integral için de geçerlidir. Burada onların bir kaçını gösterelim.

(a) $A\in L(X,Y)$ (X ve Y Banach uzaylarıdır) ise

$$\int_0^1 A(f(t))dt = A\left(\int_0^1 f(t)dt\right)$$

(b) $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ Riemann anlamında integrallenebilir bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ sabit bir eleman olmak üzere $f(t) = \varphi(t).x_0$ ise

$$\int_0^1 f(t)dt = x_0 \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

(c)

$$\left\| \int_0^1 f(t)dt \right\| \le \int_0^1 \| f(t) \| dt.$$

X ve Y Banach uzayları olmak üzere

$$A : [x_0, x_0 + \Delta x] \to L(X, Y)$$

$([x_0, x_0 + \Delta x] = \{x \in X : x = x_0 + t\Delta x, t \in [0,1]\})$ operatörü verildiğinde tanıma göre

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} A(x)dx &= \int_0^1 A(x_0 + t\Delta x)\Delta x dt \\ &= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_0 + \tau_k \Delta x)\Delta x \Delta t_k \end{aligned} \qquad (1.17)$$

A sürekli operatör ise (1.17) integrali mevcuttur ve onun Y uzayının bir elemanı olduğu açıktır.

Özel olarak $A = F'$ ise burada $F, D \subset X$ açık kümesini Y ye dönüştüren ve $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset D$ kapalı aralığı üzerinde sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir operatör ise kolayca gösterilebilir ki integral hesabının temel teoreminin (Newton-Leibnitz formülünün) bir genelleştirilmesi olan

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)dx = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \qquad (1.18)$$

formülü doğrudur.

Tanım 1.3.2: Eğer $F: X \to Y$ operatörü $x_0 \in X$ noktasının herhangi bir komşuluğunda $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve $F'(x)\mathcal{F}-$ türevi x_0 noktasında sürekli ise F operatörü x_0 noktasında sürekli $\mathcal{F}-$türevlenebilir denir. Eğer

$$F: X \to Y$$

operatörü $D \subset X$ kümesinin her bir noktasında sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ise F operatörü D üzerinde sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir denir.

Analiz dersinden bilindiği gibi eğer $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebiliyorsa, öyle $c \in (a,b)$ noktası vardır ki

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

eşitliği (diferansiyel hesabın ortalama değer teoremi) doğrudur. Kaydedelim ki bu iddia $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (m>1)$ fonksiyonları için genellikle geçerli değildir. Örneğin $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x) = (x_1^3, x_2^2), x = (x_1, x_2)$ fonksiyonu için $a = (0,0)$ ve $b = (1,1)$ olduğunda

$$f(b) - f(a) = F'(c)(b-a)$$

olacak şekilde $c \in [a,b] = \{(1-t, 1-t) : 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ noktası yoktur.

Teorem 1.3.3: (Ortalama Değer Teoremi) $F: X \to Y$ operatörü dışbükey bir $D \subset X$ kümesinde sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda her bir $x_0, x \in D$ noktaları için

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)d\theta \qquad (1.19)$$

Lagrange formülü doğrudur.

İspat: $x = G(\theta) = x_0 + \theta(x - x_0), 0 \le \theta \le 1 (G : [0,1] \to D)$ olmak üzere $F \circ G : [0,1] \to Y$ operatörünü göz önüne alalım. $G'(\theta) = x - x_0$ olacağından zincir kuralı dolayısıyla

$$(F \circ G)'(\theta) = F'(G(\theta)).G'(\theta)$$

veya

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} F(x_0 + \theta(x - x_0)) &= F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \\ &= F'(x_0 + \theta(x - x_0))d(x_0 + \theta(x - x_0))\end{aligned}$$

olur. O zaman (1.18) e göre

$$\begin{aligned}\int_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)d\theta &= \int_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0))d(x_0 + \theta(x - x_0)) \\ &= \int_{x_0}^{x} F'(t)dt = F(x) - F(x_0)\end{aligned}$$

olduğu ve dolayısıyla (1.19) formülünün doğruluğu elde edilir.

Sonuç 1.3.4: $F : X \to Y$ operatörü dışbükey bir $D \subset X$ kümesinde sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda herhangi $x_1 \in D$ ve $x_2 \in D$ noktaları için

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \le \sup\{\|F'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\| : \theta \in [0,1]\} \|x_1 - x_2\| \qquad (1.20)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Dış bükey $D \subset X$ kümesine ait x_1 ve x_2 noktaları için (1.19) Lagrange formülü dolayısıyla

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^1 F'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)d\theta$$

dır. Buradan

$$\|F(x_2)-F(x_1)\| \le \int_0^1 \|F'(x_1+\theta(x_2-x_1)\| d\theta \|x_1-x_2\|$$
$$\le \sup\{\|F'(x_1+\theta(x_2-x_1)\| : \theta \in [0,1]\}\|x_1-x_2\|$$

olduğu ve dolayısıyla (1.20) eşitsizliğinin doğruluğu elde edilir.

Sonuç 1.3.5: $F: X \to Y$ operatörü dışbükey bir $D \subset X$ kümesinde sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda $x_0+\Delta x \in D$ noktaları için

$$\|F(x_0+\Delta x)-F(x_0)-F'(x_0)\Delta x\| \le \sup\{\|F'(x_0+\theta\Delta x)-F'(x_0)\| : \theta \in [0,1]\}\|\Delta x\| \quad (1.21)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: (1.20) eşitsizliğinde $x_1 = x_0 \in D$ ve $x_2 = x_0+\Delta x \in D$ konulduğunda

$$\|F'(x_0+\theta\Delta x)-F'(x_0)\| \le \sup\{\|F'(x_0+\theta\Delta x)-A\| : \theta \in [0,1]\}\|\Delta x\|$$

olduğu elde edilir. $A \in L(X,Y)$ operatörü için $A(x_0+\Delta x)-A(x_0) = A(\Delta x)$ ve $A' = A$ olduğuna göre son eşitsizliği $F-A$ operatörü için uygularsak

$$\|F(x_0+\Delta x)-F(x_0)-A(\Delta x)\| \le \sup\{\|F'(x_0+\theta\Delta x)-A\| : \theta \in [0,1]\}\|\Delta x\|$$

olur. Burada A yerine $F'(x_0)$ yazarsak (1.21) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

Sonuç 1.3.6: $F: X \to Y$ operatörü dış bükey bir $D \subset X$ kümesinde sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olsun ve D üzerinde $\|F'(x)\| \le l$ olacak şekilde $l > 0$ sayısı mevcut ise F operatörü D üzerinde l katsayısı ile Lipschitz koşulunu sağlar.

İspat: (1.20) eşitsizliğinden bulunur.

Örnek 1.3.7: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, F(x)=(f_1(x),...,f_m(x))$ operatörü $x\in\mathbb{R}^n$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda Lagrange Ortalama Değer formülü $0\le\theta\le 1$ olmak üzere

$$f_i(x_1+h_1,...,x_n+h_n)-f_i(x_1,...,x_n)=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 \frac{\partial f_i(x_1+\theta h_1,...,x_n+\theta h_n)}{\partial x_j}d\theta.h_j, i=1,...,m$$

şeklinde olur.

Teorem 1.3.8: $F:X\to Y$ dış bükey bir $E\subset X$ kümesinde $\mathcal{F}-$ türevlenebilir bir operatör ve E üzerinde

$$\|F(x_1)-F'(x_2)\|\le L\|x_1-x_2\| \qquad (1.22)$$

olacak şekilde bir $L>0$ pozitif sayısı var olsun. Bu durumda herhangi $x_1,x_2\in E$ noktaları için

$$\|F(x_1)-F(x_2)-F'(x_2)(x_1-x_2)\|\le\frac{L}{2}\|x_1-x_2\|^2 \qquad (1.23)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Önce (1.19) Lagrange formülünden, sonra $F'(x)$ $\mathcal{F}-$türevi için (1.22) Lipschitz koşulundan herhangi $x_1,x_2\in E$ için

$$\|F(x_1)-F(x_2)-F'(x_2)(x_1-x_2)\| = \left\|\int_0^1 [F'(x_2+\theta(x_1-x_2))-F_1'(x_2)]\,d\theta\ (x_1-x_2)\right\|$$
$$\le \int_0^1 \|F'(x_2+\theta(x_1-x_2))-F'(x_2)\|d\theta\|x_1-x_2\|$$
$$\le L\int_0^1 \theta d\theta\|x_1-x_2\|^2 = \frac{L}{2}\|x_1-x_2\|^2$$

olduğu ve dolayısıyla (1.23) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

1.4. Lineer Olmayan Operatörlerin Gato Türevi

X ve Y Banach uzayları olmak üzere $x_0 \in X$ noktasının S komşuluğunda tanımlı $F: S \to Y$ operatörü verilmiş olsun.

Tanım 1.4.1: Eğer $\forall h \in X$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} = \delta F(x_0,h)$$

limiti varsa, bu limite F operatörünün x_0 noktasında Lagrange anlamında birinci varyasyonu denir. Burada yaklaşım Y nin normu anlamındadır.

Elbette, $h \in X$ olacağından yeteri kadar küçük $|t|$ için $x_0 + th \in S$ olduğundan (1.24) te $F(x_0+th)$ ifadesi anlamlıdır.

Tanım 1.4.2: $A \in L(X,Y)$ olmak üzere F operatörünün $x_0 \in X$ noktasında $\delta F(x_0,h) = Ah$ şeklinde birinci varyasyonu varsa $F: X \to Y$ operatörü x_0 noktasında Gato türevlenebilir (G- türevlenebilir) denir, A operatörüne ise F operatörünün Gato Türevi (G- türevi) denir ve $A = F'(x_0)$ şeklinde yazılır. Şu halde

$$\delta F(x_0,h) = F'(x_0)h$$

birinci varyasyonuna F operatörünün x_0 noktasında Gato diferansiyeli denir. Eğer $F : X \to Y$ ve $H : X \to Y$ operatörleri $x_0 \in X$ noktasında G- türevlenebilir ise herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları için $\alpha F + \beta h$ operatörü x_0 noktasında G- türevlenebilir ve

$$(\alpha F + \beta H)'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta H'(x_0)$$

dır.

$F : X \to Y$ operatörünün $x_0 \in X$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olsun. x_0 da G- türevi de vardır. x_0 noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ise yeteri kadar küçük h için

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + w(x_0, h)$$

olur. Burada $\|h\| \to 0$ iken $\|w(x_0, h)\| = \circ(\|h\|)$ ve $F'(x_0)$, F operatörünün x_0 noktasında $\mathcal{F}-$ türevidir. Şu halde $0 < |t| < 1$ için

$$F(x_0 + th) - F(x_0) = F'(x_0)th + w(x_0, th)$$

burada $t \to 0$ iken $\|w(x_0, th)\| = \circ(\|h\|)$. Son eşitlikten

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = F'(x_0)h$$

olduğu elde edilir. (1.24) ve (1.25) dolayısıyla F operatörü x_0 noktasında G- türevlenebilir ve onun x_0 noktasında G- türevi $F'(x_0)$ olur.

Örnek 1.4.3:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+yx^3y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ operatörü $(0,0)$ noktasında G- türevlenebilir, fakat $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olmadığını görelim.

Gerçekten de, f fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli olduğu açıktır. Her hangi $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2h_1^3h_2}{t^2h_1^4+h_2^2}=0$$

olduğundan f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında G- türevlenebilir ve $f'(0,0)=0$ olur. Fakat $(\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2})$

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t\|h\|}=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{h_1^3h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

limiti varolmadığından f fonksiyonu (0.0) noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir değildir. $\mathcal{F}-$ türevi için mevcut olan Zincir Kuralı G- türevi için genellikle doğru olmayabilir.

Örnek 1.4.4:

$$f(x_1,x_2)=\left\| \begin{array}{ll} \dfrac{x_2(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}{(x_1^2+x_2^2)^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0) \end{array} \right\|$$

şeklinde $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operatörü ise

$$g(t_1,t_2)=(g_1(t_1,t_2),g_2(t_1,t_2))=(t_1,t_2^2)$$

şeklinde verilmiş olsun. $(f\circ g)(t_1,t_2)=f(g(t_1,t_2)=f(t_1,t_1^2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ operatörünün (0.0) noktasında G- türevlenebilir olmadığını gösterelim.

$$F(t_1,t_2)=f\circ g(t_1,t_2)=\begin{cases}\dfrac{t_2^2(t_1^2+t_2^4)^{3/2}}{(t_1^2+t_2^4)^2+t_2^4}, & (t_1,t_2)\neq(0,0)\\ 0, & (t_1,t_2)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde süreklidir.

$$\frac{F(th_1,th_2)-F(0,0)}{t}=(\frac{th_1,t^2h_2^2}{t})=\frac{h_2^2(h_1^2+t^2h_2^4)^{3/2}}{(h_1^2+t^2h_2^4)^2+h_2^4}$$

olduğundan

$$dF((0,0),(h_1,h_2))=\lim_{t\to0}\frac{F(th_1,th_2)-F(0,0)}{t}=\frac{h_1^3h_2^2}{h_1^4+h_2^4}$$

olduğu elde edilir. $dF((0,0),(h_1,h_2)$ birinci varyasyonu $h=(h_1,h_2)$ ye göre lineer olmadığından $f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ operatörü x_0 noktasında G- türevlenebilir değildir.

Teorem 1.4.5: Eğer $x_0\in X$ noktasının bir $S\subset X$ komşuluğunda

$$H:X\to Y$$

operatörü G- türevlenebilirse ve $H'(x)$ G- türevi S üzerinde sürekli ise H operatörü x_0 noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve H ın $(0,0)$ x_0 noktasında F ve G türevleri eşittir.

İspat: $H'(x)$ G- türevi S üzerinde sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ $\|h\|<\delta$ olacak şekilde her bir $x_0+h\in S$ için $\|H'(x_0+h)-H'(x_0)\|<\varepsilon$.Şu halde $P(x)=H(x)-H'(x_0)(x-x_0)$ operatörü için (1.20) eşitsizliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} &H(x_0+h)-H(x_0)-H'(x_0)h \\ &\qquad \leq \sup\left\{\|H'(x_0+\theta h)-H'(x_0)\| : 0\leq\theta\leq 1\right\}\|h\|<\varepsilon\|h\| \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan H operatörünün x_0 noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve bu noktada onun $\mathcal{F}-$ türevi ile G- türevinin eşit olduğu görülür.

1.5. Yüksek Mertebeden Türevler

X ve Y Banach uzayları, $D\subset X$ açık bir küme ve $F:X\to Y$ D üzerinde(Yani D kümesinin her bir noktasında) $\mathcal{F}-$ türevlenebilir bir operatör olsun. Bu operatörün, $F'(x)$ $\mathcal{F}-$ türevi $\forall x\in D$ için $L(X,Y)$ uzayının bir elemanıdır. Eğer $F'(x):D\to L(X,Y)$ herhangi $x_0\in D$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebiliyorsa F operatörü x_0 noktasında 2. mertebeden $\mathcal{F}-$ türevlenebilirdir denir. $F'(x)$ operatörünün x_0 noktasındaki $\mathcal{F}-$ türevine F operatörünün x_0 noktasında 2. mertebeden $\mathcal{F}-$ türevi denir ve $F''(x_0)$ ile gösterilir. Eğer $F'(x_0):D\to L(X,Y)$ operatörü $x_0\in D$ noktasında $\mathcal{F}-$ diferansiyellenebiliyorsa F operatörü 2. mertebeden $\mathcal{F}-$ diferansiyellenebilirdir denir ve onun 2. mertebeden $\mathcal{F}-$ diferansiyeli $d^2F(x_0,h)$ ile gösterilir. Böylece

$$d^2F(x_0,h)=\left[F'(x_0)h,h'\right]\Big|_{h'=h}=F''(x_0)h^2$$

$L(X,L(X,Y))$ uzayının elemanlarının açık olarak tanımlanması yeteri kadar mümkün olmadığından yeni bir kavramın sunulması amaca uygundur.

$B:X\times X\to Y$ operatörü için

1) $\forall x, x_1, x_2, x', x_1', x_2' \in X$ ve $\forall \alpha, \beta$ sayıları için

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, x') = \alpha B(x_1, x') + \beta B(x_2, x'),$$
$$B(x, \alpha x_1 + \beta x_2') = \alpha B(x, x_1') + \beta B(x, x_2'),$$

2) Öyle $M > 0$ sayısı vardır ki $\forall x, x' \in X$ için

$$\|B(x, x')\| \le M \|x\| \|x'\| \qquad (1.26)$$

koşulları sağlanıyorsa B ye bilineer operatör denir. Lineer operatörlerde olduğu gibi (1.26) eşitsizliğini sağlayan en küçük $M > 0$ sayısına B bilineer operatörün normu denir ve $\|B\|$ ile gösterilir.

$$\|B\| = \sup\{\|B(x, x')\| : \|x\| \le 1, \|x'\| \le 1\} \qquad (1.27)$$

olduğu açıktır.

X den Y ye bütün bilineer operatörler kümesini $B(X^2, Y)$ ile gösterelim. $B(X^2, Y)$ üzerinde toplama ve sayı ile çarpmayı $B, B_1, B_2 \in B(X^2, Y)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(B_1 + B_2)(x, x') = B_1(x, x') + B_2(x, x')$$

ve

$$(\alpha B)(x, x') = \alpha B(x, x')$$

biçiminde tanımlarsak $B(X^2, Y)$ kümesi lineer bir uzay olur. $B(X^2, Y)$ uzayı (1.27) normuna göre bir Banach uzayıdır. $B(X^2, Y)$ uzayı $L(X, L(X, Y))$ uzayı ile sıkı bağlıdır. Bu uzayların lineer eşmetrik uzaylar olduğunu gösterelim. $\forall A \in L(X, Y)$ elemanına

$$B(x,x') = (Ax)(x') \quad (x,x' \in X) \tag{1.28}$$

şeklinde bir $B \in B(X^2, Y)$ elemanını karşı koyalım. Bu operatörün lineer olduğu (yani B operatörünün 1. koşulu sağladığı) açıktır. Bu dönüşümün $L(X, Y(X,Y))$ den $B(X^2, Y)$ ye bir izometrik dönüşüm olduğunu gösterelim.

Gerçekten, $y = B(x,x') = (Ax)(x')$ ise

$$\begin{aligned} \|y\| &\le \|Ax\| \, \|x'\| \\ &\le \|A\| \, \|x\| \, \|x'\| \end{aligned}$$

dır ve dolayısıyla da

$$\|B\| \le \|A\| \tag{1.29}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan, $B \in B(X^2, Y)$ bilineer dönüşümü verildiğinde sabit $x \in X$ için $x' \to A(x)x' = B(x,x')$ dönüşümü X den Y ye bir lineer dönüşümdür. Böylece, $\forall x \in X$ elemanına $L(X,Y)$ uzayının Ax elemanı karşılık getirilebilir. O zaman

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \sup\{\|A(x)x'\| : \|x'\| \le 1\} \\ &= \sup\{\|B(x,x')\| : \|x'\| \le 1\} \\ &\le \|B\| \|x\| \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $A \in L(X, Y(X,Y))$ ve

$$\|A\| \le \|x\| \tag{1.30}$$

olduğu elde edilir. (1.29) ve (1.30) dan $\|A\| = \|B\|$ olduğu görülür. Böylece, $B(X^2, Y)$ ve $L(X, Y(X,Y))$ uzayları arasında mevcut olan (1.28) bağıntısı lineer ve izometrik, dolayısıyla birebir ve örtendir.

İkinci mertebeden $F''(x)\mathcal{F}-$ türevinin $L(X,L(X,Y))$ uzayının bir elemanı olduğu görüldü. Bu söylenenlere göre $F''(x)\mathcal{F}-$ türevi $B(X^2,Y)$ uzayının bir elemanı olduğu açıktır.

Örnek 1.5.1: $X=R^n$ ve $Y=R^m$ olsun X uzayının i. koordinatı 1 ve diğer koordinatları sıfır olan vektörü $x_i(i=1,...,n)$ olsun

$$y_j\in Y(j=1,...,m)$$

vektörleri de benzer özelliklere sahip vektörler olsun. $B\in B(X^2,Y)$ operatörünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}B(x_i,x_i)&=(a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)},...,a_{ij}^{(m)})\\&=\sum_{k=1}^{m}a_{ij}^{(k)}y_k,i,j=1,...,n\end{aligned}$$

dersek koşul 1 dolayısıyla $\forall x,x'\in X\,(x=(\xi_1,...,\xi_n),x'=(\xi_1',...,\xi_n'))$ için

$$\begin{aligned}y&=B(x,x')\\&=B(\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i,\sum_{j=1}^{n}\xi_j' x_j)\\&=\sum_{i.j=1}^{n}\xi_i\xi_j' B(x_i,x_j)\\&=\sum_{k=1}^{m}(\sum_{i.j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j')y_k\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla, eğer $y=(\eta_1,...,\eta_m)=\sum_{k=1}^{m}\eta_k y_k$ ise

$$\eta_k = \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi'_j, k = 1,...,m \tag{1.31}$$

olduğu görülür.

Üç girişli herhangi

$$(a_{ij}^{(k)}), i, j = 1,...,n; k = 1,...,m \tag{1.32}$$

matrisi verildiğinde (1.31) şeklinde tanımlı her B operatörünün lineer bir operatör olduğu açıktır. Böylece, bu durumda her bilineer operatör (1.32) biçiminde üç girişli bir matris tanımlar ve tersine B operatörünün normu X ve Y uzaylarında verilen normlara bağlıdır. $X = R_2^n$ ve $Y = R_2^m$ durumundaq (1.31) de Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
|\eta_k| &= \left| \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi'_j \right| \\
&\le (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \xi'_j \right|^2)^{1/2} \\
&= \Lambda_k \|x\| \|x'\|
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir, burada

$$\Lambda_k = (\sum_{i.j=1}^{n} \left| a_{ij}^{(k)} \right|^2)^{1/2}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^2)^{1/2} \\
&\le (\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k^2)^{1/2} \|x\| \|x'\|
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\|B\| \le (\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k^2)^{1/2}$$
$$= (\sum_{k=1}^{m} \sum_{i.j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)}\right|^2)^{1/2}$$

olduğu elde edilir. $X = R_1^n$ ve $Y = R_1^m$ durumunda

$$\|B\| \le \max\left\{\sum_{i.j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} : k = 1,...,m\right\}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Problem 1.5.2: Örnek 1.2.4 de verilen $f : D \to R^m$ operatörünün 2. mertebeden $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olması için $f_k : D \to R^1 (k = 1,...,m)$ fonksiyonlarının 2. mertebeden tüm kısmi türevlerinin D üzerinde sürekli olması gerek ve yeter koşul olduğunu gösteriniz. Bu koşullar sağlandığında $f = (f_1,..., f_m) : D \to R^m$ operatörünün $f''(x)$ $\mathcal{F}-$ türevini bulunuz.

Çözüm: $f = (f_1,..., f_m) : D \to R^m$ operatörünün $x_0 \in D$ noktasında $f''(x_0)\mathcal{F}-$ türevi var olsun. O zaman bu türev bilineer operatör olduğundan

$$\sigma_1(\theta) = \left\{x \in R^n : \|x\| = 1\right\}$$

üzerinde düzgün olarak

$$f''(x_0)(x, x') = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x_0 + tx')x - f'(x_0)x}{t} \tag{1.33}$$

olur. Öte yandan $f''(x_0)$ bilineer bir operatör olmak üzere

$$B \in B(R^m \times R^n, R^m)$$

olmak üzere $f''(x_0)(x,x') = B(x,x')(a_{ij}^{(k)}), i, j = 1,...,n; k = 1,...,m$ üç girişli matris yardımıyla tanımlandığından (1.33) e göre $x_0 = (\xi_1^{(o)},...,\xi_n^o), x = (\xi_1,...,\xi_n), x' = (\xi_1',...,\xi_n')$ vektörleri için

$$a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j' = \lim_{t\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k(\xi_j^0 + t\xi_j')}{\partial \xi_i}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k(\xi_j^0)}{\partial \xi_i}\xi_i}{t} \tag{1.34}$$

$$k = 1,...,m$$

olur, burada $f(\xi_j) = f(\xi_i,...,\xi_n)$ biçiminde notasyonlardan kullanılmıştır. (1.34) eşitliklerinde x ve x' vektörleri olarak sırasıyla i. ve j. koordinatları 1 ve diğer koordinatları 0 olan vektör seçildiğinde f_k fonksiyonlarının 2. mertebeden kısmi türevlerinin varlığı ve

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2 f_k(x_0)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}, i, j = 1,...,n; k = 1,...,m$$

olduğu elde edilir.

$g : D \to R$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$(hessg)(x_0) = (\frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}), i, j = 1,...,n$$

matrisine g nin x_0 noktasında Hesse Matrisi denir. Bu durmda $h, h' \in R^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g''(x_0)(h,h') &= (h', (hessg)(x_0)h) \\ &= \sum_{i.j=1}^{n}\frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}h_i h_j' \end{aligned}$$

ve

$$d^2 g(x_0;h) = (h,(hessg)(x_0)h)$$
$$= \sum_{i.j=1}^{n} \frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} h_i h_j$$

olur. $f = (f_1,..., f_m)D \to R^m$ dönüşümünün her bir koordinatı için

$$f_k^n(x_0)(h,h') = (h', hessf_k)(x_0)h)$$
$$= \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} h_i h_j^{'}$$

ve

$$d^2 f_k(x_0;h) = (hessf_k)(x_0)h)$$
$$= \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} h_i h_j$$

olduğundan $f = (f_1,..., f_m): D \to R^m$ dönüşümü için

$$f''(x_0)(h,h') = ((h', hessf_1)(x_0)h),...,(h', hessf_m)(x_0)h))$$

ve

$$d^2 f(x_0;h)(h'(hessf_1)(x_0)h),...,(h, hessf_m)(x_0)h)) \text{ olur.}$$

1.6. Kapalı Operatörler

X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere $X \times Y = \{(x,y): x \in X, y \in Y\}$ olsun. Bilindiği gibi $z_1 = (x_1, y_2), z_2 = (x_2, y_2) \in X \times Y$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ olmak üzere

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

tanımı altında $X \times Y$ kümesi bir lineer uzay ve

$$\|(x,y)\| = \|x\|_X \ \|y\|_Y \tag{1.35}$$

normuna göre $X \times Y$ bir Banach uzayı olur. Bu uzaya X ve Y uzaylarının Kartezyen (veya dik) çarpımı denir.

Problem 1.5.1: (1.35) ve

$$\|(x,y)\| = (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{1/p} \, (p \geq 1) \qquad \|(x,y)\| = \max\left\{\|x\|_{X'} \ \|y\|_Y\right\}$$

biçiminde tanımlanan normların denk olduklarını gösteriniz.

$x \in X$ ve θ_Y, Y uzayının sıfır elemanı olmak üzere (x, θ_Y) biçimindeki ikilileri X uzayının elemanları ile özdeşleştirildiğinde X ve benzer olarak Y uzayını $X \times Y$ uzayının bir alt uzayı gibi düşünebiliriz. O zaman $\forall_z = (x,y) \in X \times Y$ elemanı tek olarak $z = (x, \theta_Y) + (\theta_X, y) = x + y$ biçiminde gösterilir.

Z bir Banach uzayı olmak üzere $\forall U \in L(X \times Y, Z)$ sürekli lineer operatörü $U_X(x) = U(x, \theta_Y)), U_Y(y) = U(\theta_X, y))$ biçiminde tanımlanan

$$U_X \in L(X, Z), U_Y \in L(Y, Z)$$

sürekli lineer operatörlerinin (U_X, U_Y) operatörler ikilisini oluşturur. Tersine (U_X, U_Y) operatörler ikilisi verildiğinde

$$U((x,y)) = U_X(x) + U_Y(y)$$

biçiminde tanımlanan U operatörü $X \times Y$ den Z ye sürekli lineer bir operatör olur. $D \subset X \times Y$ kümesini Z Banach uzayına dönüştüren lineer olmayan $F : D \to Z$ operatörü verilmiş olsun. $y_0 \in Y$ elemanını sabit tutarak $D^{(yo)} = \left\{x \in X : (x, y_0) \in D\right\}$

kümesini Z ye dönüştüren $F^{(yo)} = F(., y_0)$ operatörünü göz önüne alalım. Benzer şekilde $D^{(xo)} = \{y \in Y : (x_0, y) \in D\}$ kümesini Z ye dönüştüren $F^{(x_0)} = F(x_0, .)$ operatörü tanımlanır.

Eğer $x_0 \in X$ noktası $D^{(yo)}$ kümesinin bir iç noktası ve

$$F^{(yo)}(x) = F(x, y_0)$$

operatörü $F^{(yo)'}(x_0)$ $\mathcal{F}-$ türevine sahip ise bu türeve $F(x, y)$ operatörünün $(x_0, y_0) \in X \times Y$ noktasında x e göre kısmi $\mathcal{F}-$ türevi denir ve $F_x^{'}(x_0, y_0)$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $F_y^{'}(x_0, y_0)$ kısmi $\mathcal{F}-$ türevi tanımlanır.

$$F_x^{'}(x_0, y_0) \in L(X, Z), F_y^{'}(x_0, y_0) \in L(Y, Z)$$

olduğu açıktır. Eğer $D \subset X \times Y \to Z$ operatörü $(x_0, y_0) \in D$ noktasında $F'(x_0, y_0) = U$ $\mathcal{F}-$türevine sahip ise $F_x^{'}(x_0, y_0) = U_X$ ve $F_y^{'}(x_0, y_0) = U_Y$ olur.

$F((x, y))$ yerinde $F(x, y)$ yazıldığında $F : D \subset X \times Y \to Z$ operatörünü iki değişkenli bir fonksiyon gibi düşünebiliriz. O zaman çok değişkenli fonksiyonların esas özellikleri bu türlü operatörler için genelleştirilebilir. Şimdi bu özelliklerden birisini inceleyelim.

$(x_0, y_0) \in D$ noktasının herhangi bir komşuluğunda $F_x^{'}(x, y), F_y^{'}(x, y)$ kısmi türevleri var olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left\| F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) - F_x^{'}(x_0, y_0)(\Delta x) - F_y^{'}(x_0, y_0)(\Delta y) \right\| \\
&\le \sup\left\{ \left\| F_x^{'}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - F_x^{'}(x_0, y_0) \right\| \left\| \Delta x \right\| : 0 \le \theta \le 1 \right\} \\
&+ \sup\left\{ \left\| F_y^{'}(x_0, y_0 + \theta \Delta y) - F_y^{'}(x_0, y_0) \right\| \left\| \Delta y \right\| : 0 \le \theta \le 1 \right\}
\end{aligned} \tag{1.36}$$

eşitsizliği doğrudur.

Gerçekten de

$$A=\left\|F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0)-F_x^{'}(x_0,y_0)(\Delta x)-F_y^{'}(x_0,y_0)(\Delta y)\right\|$$
$$\leq\left\|F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0+\Delta y)-F_x^{'}(x_0,y_0)(\Delta y)\right\|$$
$$+\left\|F(x_0,y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0)-F_y^{'}(x_0,y_0)(\Delta y)\right\|$$

olduğu açıktır. (1.20) eşitsizliğini her iki toplam için uygularsa

$$A\leq\sup\left\{\left\|F_x^{'}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-F_x^{'}(x_0,y_0)\right\|:0\leq\theta\leq1\right\}\left\|\Delta x\right\|$$
$$+\sup\left\{\left\|F_x^{'}(x_0,y_0+\theta\Delta y)-F_y^{'}(x_0,y_0)\right\|:0\leq\theta\leq1\right\}\left\|\Delta y\right\|$$

olduğu ve dolayısıyla (1.36) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

X,Y ve Z Banach uzayları ve $F:X\times Y\to Z$ olmak üzere

$$F(x,y)=0 \tag{1.37}$$

biçimnde bir denklem verilmiş olsun. Eğer tanım kümesi $G\subset X$ olan $y(x)$ operatörü $\forall x\in G$ için $F(x,y(x))\equiv0$ denkliğini sağlanıyorsa, $y(x):G\subset X\to Y$ operatörü (1.37) denkleminin çözümüdür denir.

(1.37) denkleminin $y=y(x)$ biçimindeki her çözümüne (1.37) denkleminin tanımladığı Kapalı operatör (veya Kapalı fonksiyon) denilir. (1.37) $\forall x\in G$ için denkleminin tek bir veya birden fazla çözümü olabilir.

Teorem 1.6.6: $F(x,y):R^2\to R$ fonksiyonu $(x_0,y_0)\in R^2$ noktasının bir $D\subset R^2$ komşuluğunda sürekli ve bu komşulukta $F(x,y)$ fonksiyonunun $(x_0,y_0)\in D$ noktasında sürekli $F_y(x,y)$ kısmi türevi var olsun. Eğer

$$F(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)\neq0$$

ise öyle $\rho > 0$ ve $r > 0$ sayıları vardır ki $\forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ için $F(x, y) = 0$ denkleminin $y_0 = y(x_0)$ olacak şekilde tek $y = y(x) \in (y_0 - r, y_0 + r)$ çözümü vardır ve $y(x)$ fonksiyonu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ üzerinde süreklidir. Ek olarak F nin (x_0, y_0) noktasında sürekli $F_X(x, y)$ kısmi türevi varsa, $y(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

dır.

Genellikle Teorem (1.6.6) Banach uzayları için geçerlidir.

$$D(x_0, y_0) = \left\{ x \in X, y \in Y : x \in S_{\rho_1}(x_0), y \in S_{r_1}(y_0) \right\}$$

kümesi üzerinde $F(x, y) : X \times Y \to Z$ operatörü verilmiş olsun.

Teorem 1.6.7: $F(x, y) : X \times Y \to Z$ operatörü

$$D(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in X \times Y : x \in S_{\rho_1}(x_0), y \in S_{r_1}(y_0) \right\}$$

kümesinde sürekli ve bu küme üzerinde $F(x, y)$ operatörünün (x_0, y_0) noktasında sürekli olan $F_y(x, y)$ kısmi $\mathcal{F}-$ türevi var olsun. Daha sonra,

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ ve } F_y(x_0, y_o) : L(X \times Y, Z)$$

operatörünün sürekli tersi var olsun. Bu durumda öyle $0 < \rho < \rho_1$ ve $0 < r < r_1$ sayıları vardır ki, $\forall x \in S_\rho(x_0)$ için $F(x, y) = 0$ denkleminin $S_r(y_0)$ yuvarında tek bir $y = y(x)$ çözümü vardır, hem de $y(x) : S_\rho(x_0) \to Y$ operatörü $S_\rho(x_0)$ üzerinde sürekli ve $y(x_0) = y_0$ dır. Yine, $F(x, y)$ operatörünün $D(x_0, y_0)$ üzerinde $F_r(x, y)$ kısmi $\mathcal{F}-$ türevi varsa ve bu türev (x_0, y_0) noktasında sürekli ise, kapalı $y = y(x)$ operatörü x_0 noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve

$$y'(x_0) = -\left[F_y(x_0, y_0)\right]^{-1} F_r(x_0, y_0) \tag{1.38}$$

dır.

İspat: $x \in S_{\rho_1}(x_0) \subset X$ için

$$\phi(r)y = y - \left[F_y^{'}(x_0, y_0)\right]^{-1} F(x, y) : S_{r_1}(y_0) \to Z \tag{1.39}$$

operatörünü göz önüne alalım. O zaman

$$y = \phi(r)y \tag{1.40}$$

denkleminin $F(x, y) = 0$ denklemine denk olduğu açıktır.

(1.39) denkleminin çözümünün varlığını daralma dönüşüm prensibi yardımıyla göstereceğiz. Her $z, y \in \overline{S_r(y_0)}$ ve

$$x \in \overline{S_\rho(y_0)}\ (0 < \rho < \rho_1, 0 < r < r_1)$$

için

$$F(x, y) - F(x, y) - F_y(x_0, y_0)(z - y) = \int_0^1 \left[F_y(y + \theta(z - y)) - F\ (x_0, y_0)\right] d\theta(z - y)$$

eşitliğinden

$$\left\|F(x, y) - F(x, y) - F_y(x_0, y_0)(z - y)\right\| \le C(\rho, r)\left\|z - y\right\|$$

olduğu elde edilir, burada

$$C(\rho, r) = \sup\left\{ \left\| F_y(x,y) - F_y(x_0, y_0) \right\| : x \in \overline{S}_\rho(x_0), y \in \overline{S}_r(y_0) \right\}$$

$F_y(x,y)$ operatörü (x_0, y_0) noktasında sürekli olduğundan

$$\lim_{(\rho.r)\to(0.0)} C(\rho, r) = 0.$$

Dolayısıyla, öyle $\rho_0 \in (0, \rho_r)$ ve $r_0 \in (0, r_1)$ sayıları bulunabilir ki, her $\rho(0, \rho_0]$ ve $\forall r \in (0, r_0)$ için

$$\left\| \left[F_y(x_0, y_0) \right]^{-1} \right\| C(\rho, r) \le q < 1$$

olur, burada q sayısı, ρ ve r den bağımsız, fakat ρ_0 ve r_0 ile bağımlıdır. O halde (1.39) formülü yardımıyla tanımlı

$$\phi_{(x)}(y) = y - \left[F_y(x_0, y_0) \right]^{-1} F(x,y)$$

operatörü için $\forall z, y \in \overline{S_{r(y_0)}}$ ve $x \in \overline{S}_\rho(x_0)(0 < \rho \le \rho_0, 0 < r \le r_0)$ için

$$\begin{aligned} \left\| \phi_{(x)}(z) - \phi_{(x)}(y) \right\| &= \left\| \left[F_y(x_0, y_0) \right]^{-1} \left[F(x,y) - F_y(x_0, y_0)(z-y) \right] \right\| \\ &\le \left\| \left[F_y(x_0, y_0) \right]^{-1} \right\| C(\rho, r) \left\| z - y \right\| \\ &\le q \left\| z - y \right\| \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $S_r(y_0)$ yuvarında $\phi_{(x)} : \overline{S_r(y)} \to Z$ operatörü daralma operatörü olur. Şimdi gösterelim ki, yeteri kadar küçük r için $\phi(\overline{S_r(y_0)}) \subset \overline{S_r(y_0)}$ olur.

$$\left\|\phi_{(x)}(y_0)-y_0\right\| = \left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\left\|F_y(x,y_0)\right\|$$
$$\leq \left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\left\|F(x,y_o)\right\|$$

olduğu açıktır. $F(x,y_0)$ operatörü $x=x_0$ noktasında sürekli olduğundan $\lim_{x\to x_0} F(x,y_0)=F(x_0,y_0)=0$ ve şu halde öyle $\rho'\in(0,\rho_0)$ sayısı vardır ki, her $x\in\overline{S_{\rho'}(x_0)}$ için $\left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\left\|F(x,y_0)\right\|\leq(1-q)r$ olur. Bu durumda

$\forall x\in\overline{S_{\rho'}(x_0)}$ ve $y\in\overline{S_r(y_0)}$ için

$$\left\|\phi_{(x)}(y)-y_0\right\| = \left\|\phi_{(x)}(y)-\phi_{(x)}(y_0)+\phi_{(x)}(y_0)-y_0\right\|$$
$$\leq \left\|\phi_{(x)}(y)-\phi_{(x)}(y_0)\right\|+\left\|\phi_{(x)}(y_0)-y_0\right\|$$
$$\leq q\left\|y-y_0\right\|+(1-q)r\leq r$$

olduğu ve dolayısıyla $\phi_{(x)}(\overline{S}_r(y))\subset\overline{S}_r(y)$ olduğu elde edilir. Buradan bildiğimiz gibi

$$y=\phi_{(x)}(y)$$

denkleminin, dolayısıyla $F(x,y)=0$ denkleminin tek bir $y^*=y(x)\in\overline{S}_r(y_0)$ çözümü vardır.

$\phi_{(x)}$ operatörünün $\overline{S}_r(y)=0$ yuvarında sabit noktası tek olduğuna göre $y(x_0)=y_0$ eşitliğinin doğruluğu açıktır. Nihayet, her $x\in\overline{S_{\rho'}(x_0)}$ için

$$\left\|y(x)-y(x_0)\right\| = \left\|\phi_{(x)}(y)-y_0\right\|$$
$$\leq g\left\|y(x)-y_0\right\|+\left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\left\|F(x,y_0)\right\|$$

olduğundan

$$\|y(x)-y_0\| \le (1-g)^{-1}\left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\|F(x,y_0)\|$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $\lim_{x\to x_0} y(x)=y_0=y(x_0)$ olduğu ve dolayısıyla kapalı $y(x)$ operatörünün x_0 noktasında sürekli olduğu açıktır.

Şimdi $y=y(x)$ kapalı operatörünün $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olduğunu ispat edelim

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x) \\ &= y_0-\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}F_x(x_0,y_0)(x-x_0) \end{aligned} \tag{1.41}$$

olsun. F_x ve F_y kısmi $\mathcal{F}-$ türevleri (x_0,y_0) noktasında sürekli olacaklarından F operatörü türevlenebilirdir. Ayrıca,

$$F(x,y_1)=F(x_0,y_0)+F_y(x_0,y_0)(y_1-y_0)+F_x(x-x_0)+\Psi(x,y_1)$$

burada $(x,y_1)\to(x_0,y_0)$ iken $\|\Psi(x,y_1)\|=o(\|x-x_0\|+\|y_{1-}y_0\|.y_1$ için (1.41) formülünden ve $F(x_0,y_0)=0$ eşitliğine göre $F(x,y_1(x))=\Psi,y_1(x))$ olduğundan

$$\|F(x,y_1(x))\|=o(\left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}F_x(x_0,y_0)\right\|+\|x-x_0\|)$$

olduğu ve dolayısıyla $x\to x_0$ iken

$$\|F(x,y_1(x))\|=o(\|x-x_0\|) \tag{1.42}$$

olduğu elde edilir. Nihayet

$$\begin{aligned}\|y-y_1\| &= \left\|y-y_1-\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}F(x,y)\right\| \\ &\le \left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\left\|F(x,y)-F_y(x_0,y_0)(y-y_1\right\| \\ &\le \left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\left\|F(x,y_1)\right\| \\ &\le \left\|\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}\right\|\left\|F(x,y)-F(x,y_1)-F_y(x_0,y_0))(y-y_1)\right\|\end{aligned} \tag{1.43}$$

olur. Ortalama değer teoremi dolayısıyla

$$\forall x\in \overline{S}_{\rho}(x_0) \text{ ve } y,y_1\in \overline{S}(y_0)$$

için

$$\left\|F(x,y)-F(x,y_1)-F_y(x_0,y_0)(y,y_1)\right\|\le C(\rho,r)\left\|y-y_1\right\|$$

olduğu elde edilir. O zaman (1.42) ve (1.43) ifadeleri dolayısıyla $x\to x_0$ iken $\left\|y(x)-y_1(x)\right\|=o(\left\|x,x_0\right\|)$ olur. Başka bir deyişle bu formül $x\to x_0$ iken

$$y(x)-y_0=-\left[F_y(x_0,y_0)\right]^{-1}F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+o(\left\|x-x_0\right\|)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durmda $y(x)$ kapalı operatörü x_0 noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve (1.42) nin doğru olduğu görülür.

$F:X\subset Y\to Z$ operatörü $D(x_0,y_0)$ üzerinde x ve y ye göre kısmi $\mathcal{F}-$ türevlere sahip olmadığı durumda şu teorem ispat edilebilir.

Teorem 1.6.8: $\rho < \rho_1, r < r_1$ olmak üzere $y, u \in S_r(y_0), x \in S_\rho(x_0)$ için

$$\|F(x,y) - F(x,y) - A(y-u)\| \leq \delta(\rho,r)\|y-u\|$$

ve

$$\lim_{(\rho.r)\to(0.0)} \delta(\rho,r) < \|A^{-1}\|^{-1}$$

olacak şekilde sürekli tersi olan $A \in L(X,Y)$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $F((x_0, y_0) = 0$ ve $F(x, y_0)$ operatörü x_0 noktasında sürekli ise öyle $\rho' \in (0,\rho), r' \in (0,r)$ sayıları vardır ki, her $x \in S_{\rho'}(x_0)$ için $F(x,y) = 0$ denkleminin $S_{r'}(y_0)$ yuvarında $y = y(x)$ çözümü vardır, hem de $y(x_0) = x_0$ dır ve $y(x)$ operatörü x_0 noktasında süreklidir.

Problem 1.6.9: x ve y reel değişkenler olmak üzere

$$f(x,y) = 0 \tag{1.44}$$

denklemi verilmiş olsun. $f(x,y)$ fonksiyonu

$$D(x_0, y_0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x, x_0| < \rho, |y - y_0| < r\right\}$$

dikdörtgeninde tanımlı, $f(x_0, y_0) = 0$ ve $f(x, y_0)$ fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olsun. Ek olarak, her $(x,y) \in D(x_0,y_0), (x,u) \in D(x_0,y_0), y \neq u$ için

$$m \leq \frac{f(x,y) - f(x,u)}{y-u} \leq M \tag{1.45}$$

olacak şekilde m ve $M(0<m<M)$ sayıları var olsun. Bu durumda (x_0, y_0) noktasının yeteri kadar küçük komşuluğunda (1.44) denkleminin x_0 noktasında sürekli ve $y(x_0)=y_0$ olacak şekilde tek bir $y=y(x)$ çözümünün varlığını gösteriniz

Çözüm: Teorem 1.5.8 e göre $D(x_0, y_0)$ üzerinde

$$\left| f(x,y)-f(x,y)-a(y-u)\right| \leq qa\left|y-u\right| \tag{1.46}$$

eşitsizliğini sağlayan $a\in\mathbb{R}$ ve $0<q<1$ sayılarının varlığının gösterilmesi yeterlidir. Her $a\in\mathbb{R}$ sayısı için (1.43) a göre

$$\begin{aligned} m-a &\leq \frac{f(x,y)-f(x,u)}{y-u}-a \\ &\leq M-a \end{aligned}$$

olur.

$$a=\frac{m+M}{2}$$

olmak üzere

$$-\frac{M-m}{2}\leq\frac{f(x,y)-f(x,z)}{y-z}-a\leq\frac{M-m}{2}$$

olduğu ve dolayısıyla (1.46) eşitsizliği

$$a=\frac{m+M}{2}, q=\frac{M-m}{M+m}$$

sayıları için sağlanır. Benzer olarak, $D(x_0, y_0)$ üzerinde

$$-M \leq \frac{f(x,y)-f(x,z)}{y-z} \leq -m$$

hali incelenir. Bu durumda f fonksiyonu $-f$ fonksiyonu ile değiştirilmek üzere bir önce incelenen hale getirilir.

BÖLÜM 2. NEWTON METODU

2.1. Giriş

Lineer olmayan fonksiyonel(cebirsel, diferansiyel, integral vb.) denklemlerin incelenmesinde en çok kullanılan metodlardan biri de Newton metodudur. İlk kez bu metod reel değişkenli ve reel değerli $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x)=0 \tag{2.1}$$

şeklindeki denklemler için Newton tarafından ileri sürülmüş ve Banach uzaylarında verilen operatörlü denklemler için L.V Kantorovic tarafından genelleştirilmiştir.

Newton metodunun (9.1) şeklinde olan skaler denklemler ($F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ halinde) için tanımlayalım. (9.1) denkleminin x^* kökü komşuluğunda F kesin artan ve yukarı dışbükey bir fonksiyon olsun. x^* köküne yeteri kadar yakın olan x_0 başlangıç yaklaşımı seçilerek $M_0(x_0,F(x_0))$ noktasında $y=F(x)$ eğrisine çizilen $y=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)$ teğet denklemlerini yazalım. $F'(x_0)\neq 0$ olduğunda bu doğru ile x ekseninin kesiştiği nokta $x_1=x_0-\dfrac{F(x_1)}{F'(x_1)}$ olur. Sonra $M_1(x_1,F(x_1))$ noktasında $y=F(x)$ eğrisine çizilen teğet denklemi

$$Y=F(x_1)+F'(x_1)(x-x_1)$$

yazılır ve $F'(x_1)\neq 0$ olduğunda bu doğrunun x ekseni ile kesiştiği

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

nokta bulunur. $F'(x_{n-1}) \neq 0, n = 2,3...$ olduğunda bu proses benzer şekilde devam ettirildiğinde

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, n = 1,2... \tag{9.2}$$

biçiminde tanımlanan $(x_n) \subset \mathbb{R}$ alt dizisi kurulmuş olur. $\left|x_0 - x^*\right|$ yeteri kadar küçük olduğunda (x_n) dizisi x^* köküne yüksek hızda yaklaşır. Skaler denklemler için verilen bu yönteme Newton teğetler metodu adı verilir.

2.2. Banach Uzaylarında Lineer Olmayan Operatörlü Denklemler İçin Newton Metodu

X ve Y Banach uzayları ve $F : X \to Y$ lineer olmayan bir operatör olmak üzere

$$F(x) = 0 \tag{9.3}$$

şekildeki denklemi göz önüne alalım. F operatörü $r > 0$ yarıçaplı $S_r(x_0)$ yuvarında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olmak üzere sonraki yaklaşımların

$$x_n = x_{n-1} - \left[F'(x_{n-1})\right]^{-1} F(x_{n-1}), n = 1,2... \tag{9.4}$$

formülleri (iterasyon prosesi) yardımı ile hesaplanması önerilir.

Sonsuz boyutlu uzaylar halinde $\left[F'(x_{n-1})\right]^{-1}$ ters operatörlerin bulunması, yeteri kadar karmaşık bir problem olduğundan (9.4) formülleri yardımıyla bulunan (x_n) dizisi yerine terimleri

$$x_n = x_{n-1} - \left[F'(x_0)\right]^{-1} F(x_{n-1}), n = 1, 2... \quad (9.5)$$

biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin göz önüne alınması daha uygundur. (9.5) dizisini bulmak için $\left[F'(.)\right]^{-1}$ ters operatörü her adımda değil, yalnız x argumantının tek bir $x = x_0$ değerinde bulunur. (9.5) dizisi (9.4) dizisiyle mukayesede daha yavaş hızla yaklaşmasına rağmen hesaplama açışına göre (9.5) algoritmasından daha faydalıdır. Kaynaklarda (9.4) yerine esas, (9.5) yöntemine ise şekli değiştirilmiş Newton metodu adı verilir.

Teorem 2.2.1: X ve Y Banach uzayları olmak üzere $F : X \to Y$ operatörü aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $r > 0$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere F operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathcal{F}-$ türevlenebilirdir.

2) $F'(x)$ türevi $S_r(x_0)$ yuvarında $\ell > 0$ katsayısıyla Lipschitz koşulunu sağlar.

3) $F'(x) : S_r(x_0) \to L(X,Y)$ operatörünün sürekli tersi var ve

$\forall x \in S_r(x_0)$

için

$$\left\|\left[F'(x)\right]^{-1}\right\| \le m \quad (9.6)$$

olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı vardır.

4) $\left\|F(x_0)\right\| \le \eta$

Bu durumda eğer

$$q = \frac{1}{2} m^2 \ell n < 1$$

ve

$$r' = mn\sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1} < r \qquad (2.7)$$

ise (2.3) denkleminin (2.4) Newton iterasyon prosesinin yaklaştığı bir

$$x^* \in \overline{S_r(x_0)}$$

çözümü vardır ve terimleri (2.4) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin x^* a yaklaşma hızı

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le mn \frac{q^{2^n - 1}}{1 - q^{2n}}$$

eşitsizliği yardımıyla verilir.

İspat: Teoremi tümevarım yöntemi yardımıyla ispatlayalım. İşlemlerde kolaylık sağlanması için

$$\begin{aligned} r(x) &= \left[F'(x)\right]^{-1}, r_n = r(x_n), \\ F_n &= F(x_n), \\ F_n' &= F'(x_n) \end{aligned}$$

şeklinde notasyonlar kullanalım. (2.4) Newton iterasyon prosesi bu notasyonlar yardımıyla

$$x_{n+1} = x_n - r_n F_n, \; n = 0, 1, 2... \qquad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir.

Önce $(x_n) \subset \overline{s_{r'}(x_0)}$ olduğunu gösterelim. $x_1 - x_0 = r_0 F_0$ olduğundan $\left\| x_1 - x_0 \right\| \le \left\| r_0 \right\| \left\| F_0 \right\| \le mn$ ve (2.7) dolayısıyla $x_1 \in \overline{s_{r'}(x_0)}$ olduğu elde edilir.

$$F_0 + F_0'(x_1 - x_0) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1 - F_0 - F_0'(x_1 - x_0) \\ &= F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan (1.23) eşitsizliği dolayısıyla

$$\|F_1\| \leq \frac{1}{2}\ell\|x_1 - x_0\|^2$$

elde edilir. Herhangi $n > 1$ doğal sayısı için $x_n \in \overline{s_{r'}(x_0)}$ olduğunu ve

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq mnq^{2^n - 1} \tag{2.9}$$

$$\|F_n\| \leq \frac{1}{2}\ell\|x_n - x_{n-1}\|^2 \tag{2.10}$$

eşitsizliklerinin doğruluğunu varsayalım. Şimdi $x_{n+1} \in \overline{s_{r'}(x_0)}$ olduğunu ve

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq mnq^{2^n - 1} \tag{2.11}$$

$$\|F_{n+1}\| \leq \frac{1}{2}\ell\|x_{n+1} - x_n\|^2 \tag{2.12}$$

eşitsizliklerinin doğruluğunu gösterelim. (2.8), (2.6), (2.10) ve (2.9) sebebiyle

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|r_n\|\|F_n\| \\ &\leq m\|(F_n)\| \\ &\leq \frac{1}{2}m\ell\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}m\ell(m\eta)^2 q^{2^n - 2} \\ &= m\eta(\frac{1}{2}m^2\ell n)q^{2^n - 2} \\ &= m\eta q^{2^n - 1} \end{aligned}$$

olduğu ve bu sebepten (2.11) eşitsizliğinin doğruluğu görülür. (2.7) ye göre

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_0\| &\le \|x_{n+1}-x_n\|+\|x_n-x_{n-1}\|+\ldots+\|x_2-x_1\|+\|x_1-x_0\| \\ &\le m\eta+m\eta q+m\eta q^3+\ldots+m\eta q^{2^n-1} \\ &\le m\eta\sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1} \\ &= r'\end{aligned}$$

olduğundan $x_{n+1}\in\overline{S_{r'}(x_0)}$ olur.

(2.8) e göre $F_n+F_n'(x_{n+1}-x_n)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}F_{n+1} &= F_{n+1}-F_n-F_n'(x_{n+1}-x_n) \\ &= F(x_{n+1})-F(x_n)-F'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\end{aligned}$$

olur ve (1.23) eşitsizliği gereğince

$$\|F_{n+1}\|\le\frac{1}{2}\ell\|(x_{n+1}-x_n)\|^2$$

eşitsizliğinin doğruluğu elde edilir.

Şimdi (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (2.11) eşitsizliği kullanılarak her bir $p\ge 1$ doğal sayısı için

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\| &\le \|x_{n+p}-x_{n+p-1}\|+\|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}\|+\ldots+ \\ &+\|x_{n+1}-x_n\|\le m\eta\sum_{k=n}^{n+p-1} q^{2^k-1}\end{aligned} \tag{2.13}$$

olduğu elde edilir. $\sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1}$ serisi yakınsak olduğundan $\forall p\in N$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+p}-x_n\right\|=0$$

olduğu ve dolayısıyla ve (2.4) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. X tam bir uzay olduğundan (x_n) yakınsak bir dizidir. $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ diyelim. $(x_n)\subset \overline{S_{r'}(x_0)}$ ve $\overline{S_{r'}(x_0)}$ yuvarı kapalı olduğundan $x^*\subset \overline{S_{r'}(x_0)}$ dır.

Şimdi x^* elemanının $F(x)=0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. Bu nedenle (2.8) eşitliğinden $n\to\infty$ iken limite geçilmesi yeterlidir. O zaman $x^* = x^* - r(x^*)F(x^*)$ olduğu ve $r(x^*)=\left[F'(x^*)\right]^{-1}$ operatörünün tersi var olduğundan $F(x^*)=0$ olduğu görülür.

(2.13) eşitsizliğinde $p\to\infty$ iken limite geçersek

$$\begin{aligned}\left\|x^*-x_n\right\| &= m\eta\sum_{k=n}^{\infty} q^{2^k-1}\\ &= m\eta\sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n 2^s-1}\\ &= m\eta q^{2^n-1}\sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n(2^s-1)}\end{aligned}$$

olur. Her $s\geq 0$ tam sayısı için $2^s-1\geq s$ ve dolayısıyla $q^{2^n(2^s-1)}\leq q^{2^n s}$ ve $0<q<1$ olduğundan $\sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n(2^s-1)} \leq \sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n s} = \dfrac{1}{1-q^{2^n}}$ olur. Bu durumda son eşitsizlikten

$$\left\|x_n-x^*\right\| \leq \frac{m\eta q^{2^n-1}}{1-q^{2^n}}$$

ifadesinin doğruluğu elde edilir. Böylelikle teorem ispatlanır.

Teorem 2.2.2: X Banach uzayı olmak üzere, $F: X \to X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \ell \|x - y\| \tag{2.14}$$

olacak şekilde $\ell > 0$ sayısı mevcut olsun. Ayrıca, $F'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F'(x_0)]^{-1}$ tersi mevcut ve

$$\left\|[F'(x_0)]^{-1}\right\| \leq m, \quad \left\|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\right\| \leq \eta \tag{2.15}$$

olacak şekilde $m > 0, \eta > 0$ sayıları var olsun. Eğer $2m\ell\eta < 1$ ve

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m\ell\eta}}{m\ell} \leq r$$

ise (2.3) denkleminin $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve terimleri (2.5) biçiminde tanımlanan Newton iterasyon prosesi x^* çözümüne

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m\ell\eta})^n}{\sqrt{1 - 2m\ell\eta}} m\eta \tag{2.16}$$

hızla yaklaşır.

İspat: Önce, $\phi(x) = x - [F'(x_0)]^{-1} F(x)$ operatörünün $\overline{S_{r_0}(x_0)}$ yuvarını kendisine dönüştürdüğünü gösterelim. (2.15) koşulları ve (1.23) eşitsizliği dolayısıyla $\forall x \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ için

$$
\begin{aligned}
\|\phi(x)-x_0\| &\leq \|\phi(x)-\phi(x_0)\| + \|\phi(x_0)-x_0\| \\
&= \left\| \left[F'(x_0)\right]^{-1}(F(x)-F(x_0)-F'(x_0)(x-x_0) \right\| + \left\| \left[F'(x_0)\right]^{-1} F(x_0) \right\| \\
&\leq \|F(x)-F(x_0)-F'(x_0)(x-x_0)\| + \eta \leq \frac{m\ell}{2}\|x-x_0\|^2 + \eta \\
&\leq \frac{1}{2} m\ell r_0^2 + \eta
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. r_0 sayısı $\frac{1}{2}m\ell r^2 - r + \eta = 0$ denkleminin küçük kökü olduğundan son eşitsizliğin sağ tarafı r_0 a eşit olur. Böylece, her $x \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ için $\|\phi(x)-x_0\| \leq r_0$ ve dolayısıyla

$$
\phi(\overline{S_{r_0}(x_0)}) \subset \overline{S_{r_0}(x_0)}
$$

olur. Şimdi $\phi(x)$ operatörünün $S_{r_0}(x_0)$ yuvarında bir daralma operatörü olduğunu gösterelim. Herhangi $x, y \in S_{r_0}(x_0)$ için

$$
\begin{aligned}
\phi(x)-\phi(y) &= x - y - \left[F'(x_0)\right]^{-1}(F(x)-F(y)) \\
&= \left[F'(x_0)\right]^{-1}\left[F'(x_0)(x-y) - F(x) + F(y)\right] \\
&= \left[F'(x_0)\right]^{-1}\int_0^1 \left[F'(x_0) - F'(y+\theta(x-y)\right] d\theta (x-y)
\end{aligned}
$$

eşitliği doğru olduğundan (2.14) koşulu gereğince

$$
\begin{aligned}
\|\phi(x)-\phi(y)\| &\leq m\int_0^1 \|F'(x_0) - F'(y+\theta(x-y))\| d\theta \|(x-y)\| \\
&\leq m\ell \int_0^1 \|x_0 - y + \theta(x-y))\| d\theta \|(x-y)\| \\
&\leq m\ell r_0 \|(x-y)\|
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla, $m\ell r_0 = 1-\sqrt{1-2m\ell n} < 1$ olduğundan $\phi(x)$ operatörü $s_r(x_0)$ yuvarında $q = 1-\sqrt{1-2m\ell n}$ katsayısıyla Lipschitz koşulunu sağlar.

$$1-q = \sqrt{1-2m\ell n}$$

ve

$$\left\|\phi(x_0) - x_0\right\| = \left\|\left[F'(x_0)\right]^{-1} F(x_0)\right\| \le \eta$$

olduğundan $x = \phi(x)$ denkleminin ve $F(x) = 0$ denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve (2.5) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne (2.16) hızla yaklaşır.

Şimdi $F(x)$ operatörünün $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ şeklinde gösterilebildiğini varsayalım. Eğer $F_1(x)$ operatörünün $F_1'(x)$ $\mathcal{F}$ türevinin $\left[F_1(x)\right]^{-1}$ tersi varsa ve kolayca hesaplanabiliyorsa ve $F_2(x)$ operatörü norma göre yeteri kadar küçük bir operatör ise

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \qquad (9.17)$$

denkleminin yaklaşık çözümünün bulunması için terimleri

$$x_n = x_{n-1} - \left[F_1'(x_{n-1})\right]^{-1} (F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})), n = 1, 2, ... \qquad (9.18)$$

biçiminde veya

$$x_n = x_{n-1} - \left[F_1'(x_0)\right]^{-1} (F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})), n = 1, 2, ... \qquad (2.19)$$

biçiminde tanımlanan iterasyon proseslerinden birisinin kullanması faydalı olur. Örneğin, (2.19) prosesinin yakınsaklığına dair şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 2.2.3: X bir Banach uzayı, $F_1 : X \to X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathcal{F}-$ türevlenebilir ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\| \le \ell_1 \|x - y\| \tag{2.20}$$

olacak şekilde $\ell_1 > 0$ sayısı ve $F_1'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $\|F_1(x_0)\|^{-1}$ tersi mevcut ve

$$\|F_1(x_0)\|^{-1} \le m_1 \left\| [F_1'(x_0)]^{-1} F_1(x_0) \right\| \le \eta_1 \tag{2.21}$$

olacak şekilde $m_1 > 0, \eta_1 > 0$ sayıları var olsun. $F_2 : X \to X$ operatörü için $\forall x \in S_r(x_0)$ olmak üzere

$$\left\| [F_1'(x_0)]^{-1} F_2(x) \right\| \le \eta_2 \tag{2.22}$$

ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F_2(x) - F_2(y)\| \le \ell_2 \|x - y\| \tag{2.23}$$

olacak şekilde $\eta_2 > 0, \ell_2 > 0$ sayıları var olsun. Eğer

$$m_1^2 \ell_2^2 < 1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)$$

ve

$$\delta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)}}{m_1 \ell_1} \le r$$

ise (2.17) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_r(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (2.19) biçimnde tanımlanan iterasyon prosesi x^* çözümüne

$$q_1 = 1 - \sqrt{1 - 2m_1\ell_1(\eta_1 + \eta_2)} + m_1\ell_2$$

olmak üzere

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le \frac{q_1^n}{1 - q_1}(\eta_1 + \eta_2), n = 1, 2, ... \tag{3.24}$$

hızla yaklaşır.

İspat:

$$\phi_1(x) = x - \left[F_1'(x)\right]^{-1} F_1(x),$$
$$\phi_2(x) = -\left[F_1'(x_0)\right]^{-1} F_2(x)$$

ve

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x), x \in S_r(x_0)$$

olmak üzere (2.17) denklemi

$$x = \phi(x)$$

denklemi şeklinde yazılabilir. $\phi(x)$ operatörünün $\overline{S_r(x_0)}$ yuvarını kendisine dönüştürdüğünü gösterelim. Her $\forall x^* \in \overline{S_r(x_0)}$ için

$$\begin{aligned}\phi(x) - x_0 &= \left[F_1'(x_0)\right]^{-1}(F_1'(x_0)(x - x_0) - F_1(x) + F_1(x_0)) \\ &\quad - \left[F_1'(x_0)\right]^{-1} F_1(x_0) - \left[F_1'(x_0)\right]^{-1} F_2(x_0)\end{aligned}$$

eşitliği doğru olduğundan (2.20)- (2.22) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left\| \phi(x) - x_0 \right\| \le \frac{1}{2} m_1\ell_1\delta_0^2 + \eta_1 + \eta_2$$

olduğu elde edilir. δ_0 sayısı $\frac{1}{2}m_1\ell_1\delta^2-\delta+\eta_1+\eta_2=0$ denkleminin küçük kökü olduğundan son eşitsizliğin sağ yanı δ_0 a eşit olur. Böylece

$$x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$$

için $\|\phi(x)-x_0\|\le\delta_0$ ve dolayısıyla da $\phi(\overline{S_{\delta_0}(x_0)})\subset\overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ olur.

Şimdi $\phi(x)$ operatörünün $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında bir daralma operatörü olduğunu gösterelim. Herhangi $x,y\in S_{\delta_0}(x_0)$ için

$$\begin{aligned}\phi(x)-\phi(y)=x-y-\left[F_1'(x_0)\right]^{-1}(F_1(x)-F_2(y))\\ -\left[F_1'(x_0)\right]^{-1}(F_2(x)-F_2(y))\end{aligned}$$

olduğundan (2.20), (2.21) ve (2.23) koşulları gereğince

$$\|\phi(x)-\phi(y)\|\le(m_1\ell_1\delta_0+m_1\ell_2)\|x-y\|$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla $m_1^2\ell_2^2<1-2m_1\ell_1(\eta_1+\eta_2)$ durumunda $m_1\ell_1\delta_0+m_1\ell_2<1$ olduğundan $\phi(x)$ operatörü $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında,

$$q_1=1-\sqrt{1-2m_1\ell_1(\eta_1+\eta_2)}+m_1\ell_2$$

katsayısıyla Lipschitz koşulunu sağlar.

$$1-q_1=\sqrt{1-2m_1\ell_1(\eta_1+\eta_2)}-m_1\ell_2$$

ve

$$\|\phi(x_0)-x_0\|\le(1-q_1)\delta_0$$

olduğundan, (2.17) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve (2.19) şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne (2.24) hızla yaklaşır.

2.3. Newton Metodunun Uygulamaları

2.3.1. Lineer olmayan cebirsel denklem sistemine Newton metodunun uygulanması

Newton metodu lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümünün bulunmasında kullanılabilir. Bunun için

$$\begin{cases} f_1(x_1,...,x_m)=0 \\ f_2(x_1,...,x_m)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1,...,x_m)=0 \end{cases} \tag{2.25}$$

denklem sistemini göz önüne alalım. m boyutlu $X=\mathbb{R}^m$ uzayında

$$F(x)=(f_1(x_1,...,x_m),...,f_m(x_1,...,x_m)), x=(x_1,...,x_m)$$

biçiminde tanımlanan $F:X\to X$ operatörü yardımıyla (2.25) sistemi

$$F(x)=0$$

operatör denklemi şeklinde yazılabilir. $x^{(0)}=(x_1^{(0)},...,x_{,m}^{(0)})$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$F'(x^{(0)})(x-x^{(0)})+F(x^{(0)})=0$$

denklemi

$$F'(x^{(0)}) = \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, ..., m \qquad (2.26)$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j(x_j^{(0)}, ..., x_m^{(0)})}{\partial x_i}(x_i - x_i^{(0)}) = -f_j(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}), \; j = 1, ..., m$$

biçiminde yazılabilir ve bu denklem sisteminin $x = (x_1, ..., x_m)$ çözümü 1.yaklaşım olarak kabul edilebilir ve $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, ..., x_m^{(1)})$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde sonraki yaklaşımlar bulunur. Banach uzayında Teorem 2.2.2 ye göre (2.25) denklem sistemi için şu teorem doğrudur.

Teorem 2.3.1: $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ başlangıç yaklaşımı ve

$$f_1, ..., f_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları için;

1) (2.26) matrisinin determinantı $\Delta = \det F'(x^{(0)}) \neq 0$ ve

$$A_{ji}, i, j = 1, ..., m$$

sayıları $\dfrac{\partial f_j(x^{(0})}{\partial x_i}$ elemanının kofaktörü olmak üzere

$$\frac{1}{|\Delta|}\sum_{i=1}^{m} |A, i| \leq m_0, \; j = 1, ..., m;$$

2)

$$\forall x, y \in \overline{S_r(x^(0))} = \left\{ x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : \left| x_i - x_i^{(0)} \right| \leq r, i = 1, ..., m \right\}$$

noktaları için

$$\left\|F'(x)-F'(y)\right\|_\infty = \max\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial f_j(y)}{\partial x_i}\right| : j=1,...,m\right\}$$
$$\leq \ell_0 \left\|x-y\right\|_\infty ;$$

3) $\left\|\left[F'(x^{(0)})\right]^{-1}.F(x^{(0)})\right\|_\infty \leq \eta_0;$

4) $2m_0\ell_0\eta_0 < 1$

olacak şekilde m_0, ℓ_0, η_0 sayıları mevcut olsun. Bu durumda

$$r_0 m_0 \ell_0 = 1-\sqrt{1-2m_0\ell_0 n_0} < rm_0\ell_0$$

ise (2.25) denklem sisteminin tek bir $x^* = (x_1^*,...,x_m^*) \in \overline{S_r(x^{(0)})}$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j(x_1^{(09},...,x_m^{(0)})}{\partial x_i}(x_i^{(n)}-x_i^{(n-1)}) = -f_j(x_1^{(n-1)},...,x_m^{(n-1)})$$

$j=1,...,mn=1,2...$ veya kısaca
$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \left[F'(x^{(0)})\right]^{-1} F(x^{(n-1)}), n=1,2,...$

biçiminde tanımlanan

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)},...,x_m^{(n)}), n=1,2,...$$

dizisinin limiti olarak bulunabilir. $(x^{(n)})$ dizisi x^* çözümüne

$$\left\|x^{(n)}-x^*\right\|_\infty \leq \frac{(1-\sqrt{1-2m_0\ell_0\eta_0})^n}{\sqrt{1-2m_0\ell_0\eta_0}} m_0\eta_0$$

hızla yaklaşır.

Problem 2.3.2: Başlangıç yaklaşımı $x^{(0)} = (x_1^{(0)} x_2^{(0)}) = (0,0)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31 = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1 = 0 \end{cases} \tag{9.27}$$

denklem sisteminin Newton metodu ile çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$F(x) = (x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31, x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1), x = (x_1, x_2)$

operatörü yardımıyla (2.27) denklem sistemi $F(x) = 0$ operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. F operatörünün $\mathcal{F}-$ türevi;

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 + 30 \\ -16 & 2x_2 - 2 \end{pmatrix}, x = (x_1, x_2)$$

matrisi olduğundan

$$F'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ -16 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\left[F'(x^{(0)})\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{240} & \frac{-1}{16} \\ \frac{1}{30} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[F'(x^{(0)})\right]^{-1} F(x^{(0)}) = \left(\frac{1}{15}, \frac{-31}{30}\right)$$

olur. Buradan

$$\left\| \left[F'(x^{(0)}) \right]^{-1} \right\|_{\infty} = \max\left\{ \frac{1}{240} + \frac{1}{16}, \frac{1}{30} \right\} = \frac{1}{15} = m_0,$$

$$\left\| \left[F'(x^{(0)}) \right]^{-1} F(x^{(0)}) \right\|_{\infty} = \frac{31}{30} = \eta_0$$

olur.

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31,$$
$$f_2(x) = x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1.\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları için

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2 + 30,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} 0 - 16,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_2 - 2$$

olduğundan $\ell_0 = 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\| F'(x) - F'(y) \right\|_{\infty} &= \max\left\{ \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_j(y)}{\partial x_i} \right| : j = 1, 2 \right\} \\ &\leq \ell_0 \left\| x - y \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$$2m_0 \ell_0 \eta_0 = \frac{62}{225} < 1,$$
$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2m_0 \ell_0 \eta_0}}{m_0 \ell_0} \\ &= \frac{15 - \sqrt{101}}{4} \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.3.1 dolayısıyla (2.27) denklem sisteminin $(\mathbb{R}^2;\|.\|_\infty)$ uzayının $\overline{S_{r_o}(x^{(0)})}$ yuvarında tek bir çözümü vardır. Bu çözümün $x^* = (1,0)$ olduğu açıktır.

2.3.2. Newton metodunun integral denklemlere uygulanması

Lineer olmayan Fredholm integral denklemini göz önüne alalım. Burada $f(t,s,x)$ sürekli ve x değişkenine göre 1. mertebeden sürekli kısmi türeve sahip olan bir fonksiyondur. $X = (C[a,b],\|.\|_\infty)$ Banach uzayında

$$F(x)(t) = x(t) - \int_a^b f(t,s,x(s))ds, a \le t \le b$$

biçiminde tanımlanan $F : X \to X$ operatörü yardımıyla (2.28) denklemi $F(x) = 0$ operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. Bu denklem için (2.5) Newton iterasyon prosesi şu şekilde kurulur. $x_0 \in C[a,b]$ başlangıç yaklaşımı olan $x_1(t)$ fonksiyonu

$$F'(x_0)h_1 = -F(x_0) \qquad (2.29)$$

denkleminden ($h_1(t) = x_1(t) - x_0(t)$ bilinmeyen fonksiyondur) bulunur.

Problem 1.1.9 dolayısıyla

$$F'(x_0)h_1 = h_1(t) - \int_a^b f_x(t,s,x_0(s))ds \qquad (2.29)$$

olduğundan (2.29) denklemi çekirdeği $k(t,s) = f_x(t,s,x_0(s))$ olan

$$h_1(t) - \int_a^b k(t,s)h_1(s)ds = g_0(t)$$

lineer integral denklemi biçiminde yazılabilir, burada

$$h_1(t) = x_1(t) - x_0(t), g_0(t) = \int_a^b f(t,s)h_n(s)ds = g_{(n-1)}(t)$$

dır. Sonraki $x_{n(t)}$, $n = 2,3,...$ yaklaşımlar

$$h_n(t) - \int_a^b k(t,s)h_n(s)ds = g_{n-1}(t)$$

denkleminden bulunur, burada

$$h_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t),$$

$$g_{n-1}(t) = \int_a^b f(t,s,x_{n-1}(s))ds - x_{n-1}(t), n = 2,...$$

$r > 0$ olmak üzere

$$G = \{(t,s,x) \in \mathbb{R}^3 : a \le t,s \le b, -r \le x \le r\}$$

olsun. Teorem 2.2.2 dolayısıyla şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 2.3.8: $x_0(t) \in C[a,b]$ başlangıç yaklaşımı ve $f(t,s,x)$ fonksiyonu için:

1) $f(t,s,x)$ ve $f_x(t,s,x)$ fonksiyonları G üzerinde sürekli ve

$$\forall (t,s) \in [a,b]^2 \text{ ve } x_1, x_2 \in [-r,r]$$

için

$$|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)| \le \ell_0 |x_1 - x_2|;$$

2) $R(t,s)$ fonksiyonu $k(t,s) = f_x(t,s,x_0(s))$ çekirdeğinin resolvantası olmak üzere

$$\max\left\{ \int_a^b |R(t,s)| ds : t \in [a,b] \right\} \le m_0;$$

3) $\|g_o\|_\infty \le p_o$;

4) $q_o = 2(b-a)(1+m_0)^2 \ell_0 p_0 < 1$

olacak şekilde negatif olmayan m_0, ℓ_0 ve p_0 sayıları mevcut olsun. Bu durumda

$$r_0(b-a)(1+m_0)\ell_0 = 1-\sqrt{1-q_0} < r(b-a)(1+m_0)\ell_0$$

ise (2.28) denkleminin $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t)) = \int_a^b f(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b R(t,s)\left[\int_a^b f(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi - x_{n-1}(s)\right]ds$$

$n = 1, 2, \ldots$ biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ çözümüne

$$\left\| x_n - x^* \right\|_\infty \leq \frac{(1-\sqrt{1-q_0})^n}{\sqrt{1-q_0}}(1+m_0)p_0$$

hızla yaklaşır.

Gerçekten, Teorem 2.3.8 koşulları altında $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\left\| F'(x) - F'(y) \right\|_\infty \leq (b-a)\ell_0 \left\| x-y \right\|_\infty$$

ve

$$\left\| \left[F'(x_0)\right]^{-1} \right\|_\infty \leq 1+m_0,$$

$$\left\| \left[F'(x_0)\right]^{-1} F(x_0) \right\|_\infty \leq (1+m_0)p_0$$

ifadeleri doğru olduğundan Teorem 2.2.2 deki m, ℓ, η sayıları sırasıyla $1+m_0, (b-a)\ell_0, (1+m_0)p_0$ sayıları olarak alırsak, Teorem 2.2.2 nin koşullarının sağlandığı ve dolayısıyla Teorem 2.3.8 in doğruluğu görülür.

$$Q(t,s,x) = f(t,s,x) - H(t,s,x)$$

ve

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_a^b H(t,s,x(s))ds,$$

$$F_2(x)(t) = -\int_a^b Q(t,s,x(s))ds$$

olmak üzere (2.28) denklemini

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \tag{2.30}$$

şeklinde yazalım. Bu denklem için (2.19) iterasyon prosesi şu şekilde kurulur. $x_0 \in C[a,b]$ herhangi başlangıç yaklaşım olmak üzere birinci yaklaşım olan $x_1(t)$ fonksiyonu

$$F_1^{'}(x_0)h_1 = F_1(x_0) - F_2(x_0) \tag{2.31}$$

denkleminden bulunur. ($h_1(t) = x_1(t) - x_0(t)$ bilinmeyen fonksiyondur)

$$F_1^{'}(x_0)h_1 = h_1(t) - \int_a^b H_x(t,s,x_0(s))h_1(s)ds$$

olduğundan (2.31) denklemi çekirdeği $\tilde{k}(t,s) = H_x(t,s,x_0(s))$ olan

$$h_1(t) - \int_a^b \tilde{k}(t,s)h_1(s)ds = \tilde{g}_0(t)$$

lineer integral denklemi şeklinde yazılabilir, burada $h_1(t) = x_1(t) - x_0(t)$ ve

$$\tilde{g}_0(t) = \int_a^b H(t,s,x_0(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_0(s))ds - x_0(s)$$

dır. Sonraki $x_n(t), n = 2,3,\ldots$ yaklaşımlar

$$h_n(t) - \int_a^b \tilde{k}(t,s)h_n(s)ds = g_{\tilde{n-1}}(t)$$

denkleminden bulunur. Burada $h_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)$ ve

$$g_{\tilde{n-1}}(t) = \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds - x_{n-1}(t), n = 2,3,\ldots$$

Teorem 2.2.3 dolayısıyla şu teorem ispat edilebilir.

Teorem 2.3.9: $x_0(t) \in C[a,b]$ başlangıç yaklaşımı ve $H(t,s,x), Q(t,s,x)$

Fonksiyonları için

1) $H(t,s,x)$ ve $H_x(t,s,x)$ fonksiyonları G üzerinde sürekli ve $\forall (t,s) \in [a,b]^2$ ve $\forall x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$\left|H_x(t,s,x_1) - H_x(t,s,x_2)\right| \le \ell_0^{'} \left|x_1 - x_2\right|;$$

2) $\tilde{R}(t,s)$ fonksiyonu $\tilde{k}(t,s) = H_x(t,s,x_0(s))$ çekirdeğinin rezolvantası olmak üzere

$$\max\left\{\int_a^b \left|\tilde{R}(t,s)\right| ds : t \in [a,b]\right\} \le m_0^{'};$$

3) $\|F_1(x_0)\|_\infty \le p_0^{'}$;

4) $\max\left\{\int_a^b |Q(t,s,x)|\, ds : t \in [a,b], |x - x_0(s)| \le r\right\} \le \eta_0^{'}$;

5) $\forall (t,s) \in [a,b]^2$ ve $\forall x_1, x_2 \in [-r, r]$ için

$|Q(t,s,x_1) - Q(t,s,x_2)| \le L_0^{'} |x_1 - x_2|$;

6) $q_0^{'} = 1 - 2(1 + m_0^{'})^2 (b-a)\ell_0^{'}(p_0^{'} + \eta_0^{'}) > (m_0^{'} L_0^{'})^2$ olacak şekilde negatif olmayan $m_0^{'}, \ell_0^{'}, p_0^{'}, \eta_0^{'}, L_0^{'}$ sayıları mevcut olsun.

Bu durumda $(1+m_0^{'})(b-a)\ell_0^{'}\delta_0 = 1 - \sqrt{1-q_0^{'}} < r(1+m_0^{'})(b-a)\ell_0^{'}$ ise (2.30) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds$$

$$+\int_a^b \tilde{R}(t,s)\left[H(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi + Q(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi - x_{n-1}(s)ds\right],$$

$$n = 1, 2, ...$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulunabilir ve

$$q_2 = 1 - \sqrt{1 - q_0^{'}} + (1 + m_0^{'})(b-a)L_0^{'}$$

olmak üzere $(x_n(t))$ dizisinin x^* çözümüne yaklaşma hızı

$$\left\|x_n - x^*\right\|_\infty \le \frac{q_2^n}{1-q_2}(1 + m_0^{'})(p_0^{'} + \eta_0^{'})$$

eşitsizliği yardımıyla verilir.

Gerçekten, Teorem 2.3.9'un koşulları altında $\forall\ x\ y \in S_r(x_0)$ için

$$\left\| F_1^{'}(x_0) - F_1^{'}(y) \right\|_\infty \leq (b-a)\ell_0^{'}$$

ve

$$\left\| \left[F_1^{'}(x_0) \right]^{-1} \right\|_\infty \leq 1 + m_0^{'}, \left\| \left[F_1^{'}(x_0) \right]^{-1} F_1(x_0) \right\|_\infty \leq (1 + m_0^{'} p_0^{'}$$

olur. Ayrıca, $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\left\| \left[F_1^{'}(x_0) \right]^{-1} F_2(x) \right\|_\infty \leq (1 + m_0^{'})\eta_0^{'}$$

ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\left\| [F_2(x) - F_2(y) \right\|_\infty \leq L_0^{'}(b-a) \left\| x - y \right\|_\infty$$

İfadeleri doğru olduğundan Teorem 2.2.3 teki $\ell, m_1\eta_1, \eta_2$ ve ℓ_2 sayıları olarak sırasıyla

$(b-a)\ell_0^{'}, 1+m_0^{'}, (1+m_0^{'})p_0^{'}, (1+m_0^{'})\eta_0^{'}$ ve $(b-a)L_0^{'}$ sayılarını alırsak Teorem 2.2.3 ün koşullarının sağlandığı ve dolayısıyla Teorem 2.3.9 un doğruluğu görülür.

Teorem 2.3.8 in koşulları x_0 başlangıç yaklaşımın (2.28) denkleminin çözümüne yeteri kadar yakın olduğu durumunda sağlanabilir. Benzer durum Teorem 2.3.9 için de geçerlidir. Bu nedenle söz konusu özelliğe sahip başlangıç yaklaşımların iyi seçilmesi önem taşımaktadır.

Eğer Teorem 2.3.9 da adı geçen $H(t,s,x)$ fonksiyonu $f(t,s,x)$ fonksiyonuna yeteri kadar yakın bir fonksiyon ise

$$x(t) = \int_a^b H(t, s, x(s))ds \tag{2.32}$$

denkleminin çözümünün (2.28) ve (2.30) denklemleri için başlangıç yaklaşım olarak kabulü faydalı olur. Örneğin, $H(t,s,x)$ fonksiyonu olarak $f(t,s,x)$ fonksiyonunun herhangibir tam ortanormal $(w_k(s))_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemine göre

$$f(t,s,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t,x) w_k(s)$$

Fourier serisinin m. Kısmi toplamı, yani

$$H(t,s,x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(t,x) w_k(s)$$

fonksiyonu seçilebilir. Bu durumda (2.32) denklemi dejenere çekirdekli bir lineer integral denklem olduğundan bu denklemin $\tilde{R}(t,s)$ resolvantası kolayca bulunabilir.

Örnek 2.3.10:

$$x(t) = \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2} x^2(s) \sin ts \right] ds \tag{2.33}$$

integral denklemi için bir $x_0(t)$ başlangıç yaklaşım bulalım.

$$\sin ts = st - \frac{s^3 t^3}{6} + \frac{s^5 t^5}{120} - \ldots$$

Taylor formülünden yararlanarak $f(t,s,x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 \sin ts$ fonksiyonuna yakın olan

$$H(t,s,x) = 1 + \frac{1}{2} tsx^2$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda (2.32) denklemi

$$x(t) = \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2} tsx^2(s) \right] ds \tag{2.34}$$

biçiminde olur. (2.34) denkleminin çözümü

$$c = \frac{1}{2} \int_0^1 s x^2(s) \, ds \tag{2.35}$$

olmak üzere $x(t) = 1 + ct$ şeklindedir. $x(t)$'nin bu ifadesini (2.35) te yerine koyarsak

$$3c^2 - 16c + 6 = 0$$

denklemi elde edilir. $c = 0,405887$ bu denklemin bir çözümü olduğundan $x_0(t) = 1 + 0,405887t$ fonksiyonu (2.33) denklemi için bir başlangıç yaklaşım olarak seçilebilir.

Problem 2.3.11: $x_0(t) = 0,9t$ başlangıç yaklaşım olmak üzere;

$$x(t) = \int_0^1 tsx^2(s)ds + \frac{3}{4}t \tag{2.36}$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

Çözüm: Teorem 2.3.8 in koşullarının gerçeklendiğini gösterelim.
$f(t,s,x) = tsx^2$ ve $f_x(t,s,x) = 2tsx$ fonksiyonları

$$G = \left\{(t,s,x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le t \le 1, 0 \le s \le 1, -\infty < x < \infty\right\}$$

üzerinde sürekli olduğu ve $\forall(t,s) \in [0,1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ için

$$\left| f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)\right| = 2ts\left|x_1 - x_2\right| \le 2\left|x_1 - x_2\right|$$

olduğu açıktır. Böylece $\ell_0 = 2$ olduğu elde edilir. Şimdi $x_0(t) = 0,9t$ başlangıç yaklaşım olmak üzere $k(t,s) = f_x(t,s,x_0(s)) = 1.8ts^2$ çekirdeğinin $R(t,s)$ rezolvantasını bulalım. Bu nedenle

$$F(x)(t) = x(t) - \int_0^1 tsx^2(s)ds - \frac{3}{4}t$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörünün $x_0(t) = 0.9t$ noktasında $\mathcal{F}-$türevi

$$F'(x_0)h = h(t) - 2\int_0^1 tsx_0(s)h(s)ds$$

$$= h(t) - 1.8\int_0^1 ts^2 h(s)ds$$

olduğundan $q(t) \in C[0,1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$h(t) - 1.8\int_0^1 ts^2 h(s)ds = q(t) \qquad (2.37)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (2.37) denkleminin çözümü $c = \int_0^1 s^2 h(s)ds$ olmak üzere $h(t) = 1.8ct + q(t)$ biçiminde olduğu görülür. Bu c sayısını bulmak için

$$h(s) = 1.8cs + q(s)$$

eşitliğini s^2 ile çarparak bulunan eşitliğin $[0,1]$ üzere integrali alınması gerekir.

$$\int_0^1 s^2 h(s)ds = 1.8c\int_0^1 s^3 h(s)ds + \int_0^1 s^2 q(s)ds$$

olduğu ve dolayısıyla

$$c = \frac{20}{11}\int_0^1 s^2 q(s)ds$$

bulunur. Böylece, (2.37) denkleminin çözümü

$$h(t) = q(t) + \frac{36}{11}\int_0^1 ts^2 q(s)ds$$

olur. Buradan $R(t,s) = \frac{36}{11}ts^2$ olduğu görülür.

$$\int_0^1 |R(t,s)|ds = \frac{12}{11}t$$

olduğundan

$$\max\left\{\int_0^1 |k(t,s)|\,ds \in [0,1]\right\} = \frac{12}{11}$$

olur. Öte yandan

$$g_o(t) = -\frac{9}{10}t + \frac{81}{100}\frac{1}{4}t + \frac{3}{4}t = \frac{21}{400}t$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty = \max\left\{\frac{21}{400}t : t \in [0,1]\right\} = \frac{21}{400}$$

Böylece $\ell_0 = 2, m_0 = \frac{12}{11}, p_0 = \frac{21}{400}$ ve $b-a=1$ olduğundan

$$q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 \ell_0 p_0 = \frac{11109}{12100} < 1$$

olduğu görülür. Bu durumda Teorem 2.3.8 dolayısıyla $r_0 = \frac{110-\sqrt{991}}{460}$ olmak üzere (2.36) denkleminin $x^*(t) \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = \frac{3}{4} + t\int_0^1 s x_{n-1}^2(s)\,ds + \frac{36}{11}t\int_0^1 s^2\left[-x_{n-1}(s) + s\int_0^1 \xi x_{n-1}^2(\xi)\,d\xi + \frac{3}{4}s\right]ds$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t) = t$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \le \frac{460}{\sqrt{991}}\left(\frac{110-\sqrt{991}}{110}\right)^n, \; n = 1,2,\ldots$$

hızla yaklaşır.

Problem 2.3.12: $x_0(t) = 0,01 + \cos 2\pi t$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$x(t) = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s x^2(s)ds + \cos 2\pi t \qquad (2.38)$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

Çözüm: Teorem 2.3.8 in koşullarının gerçeklendiğini gösterelim.

$$f(t,s,x) = -\frac{\pi}{2} t \sin 2\pi s x^2$$

ve

$$f_x(t,s,x) = -\pi t \sin 2\pi s x$$

Fonksiyonları

$$G = \left\{(t,s,x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le t \le 1, 0 \le s \le 1, -\infty < x < +\infty\right\}$$

üzerinde sürekli olduğu ve $\forall (t,s) \in [0,1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ için

$$\left| f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)\right| = \pi t \left|\sin 2\pi s\right| \left|x_1 - x_2\right| \le \pi \left|x_1 - x_2\right|$$

olduğu açıktır. Böylece $\ell_0 = \pi$ olur.

Şimdi $k(t,s) = f_x(t,s,x_0(s)) = -\pi t \sin 2\pi s(0,01 + \cos 2\pi s)$ çekirdeğinin $R(t,s)$ resolvantasını bulalım. Bu nedenle

$$F(x)(t) = x(t) + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s x^2(s)ds - \cos 2\pi t$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörünün $x_o(t)$ noktasında $\mathcal{F}-$türevi

$$F'(x_0)h = h(t) + \pi \int_0^1 t \sin 2\pi s x_s h(s)ds$$

$$= h(t) + \pi \int_0^1 t \sin 2\pi s(0,01 + \cos 2\pi s) h(s) ds$$

olduğundan $q(t) \in C[0,1]$ herhangibir fonksiyon olmak üzere

$$h(t) + \pi \int_0^1 t \sin 2\pi s(0,01 + \cos 2\pi s) h(s) ds = q(t) \quad (2.39)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (2.39) denkleminin çözümü

$$c = \int_0^1 \sin 2\pi s(0,01 + \cos 2\pi s) h(s) ds$$

olmak üzere $h(t) = -\pi ct + q(t)$ biçiminde olduğu görülür. Bu c sayısını bulmak için $h(s) = -\pi cs + q(s)$ eşitliğini $\sin 2\pi s(0,01 + \cos 2\pi s)$ ile çarparak bulunan eşitliğin $[0,1]$ üzerinde integrali alınması gerekir. O zaman

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sin 2\pi s(0,01 + \cos 2\pi s) h(s) ds \\ &= -\pi c \int_0^1 s(0,01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s ds \\ &\quad + \int_0^1 (0,01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s q(s) ds \end{aligned} \quad (2.40)$$

olduğu ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 s(0,01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s ds &= 0,01 \int_0^1 s \sin 2\pi s ds + \int_0^1 s \cos 2\pi s \sin 2\pi s ds \\ &= 0,01.(-\frac{1}{2\pi}) + (-\frac{1}{8\pi}) \\ &= -\frac{13}{100\pi} \end{aligned}$$

olduğundan (2.40) eşitliği dolayısıyla

$$c = \frac{100}{87}\int_0^1 (0,01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s q(s) ds$$

olur. Böylece, (2.39) denkleminin çözümü

$$h(t) = q(t) - \frac{100\pi}{87} t(0.01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s q(s) ds$$

olur. Buradan $R(t,s) = -\frac{100\pi}{87} t(0.01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s$ olduğu görülür.

$$\int_0^1 \left|R(t,s\right| ds = -\frac{100\pi}{87} t \int_0^1 \left|0.01 + \cos 2\pi s\right|\left|\sin 2\pi s\right| ds \le \frac{101}{87} t$$

olduğundan

$$\max\left\{\int_0^1 \left|R(t,s)\right| ds : t \in [0,1]\right\} \le \frac{101}{87}$$

ve dolayısıyla $m_0 = \frac{101}{87}$ olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} g_0(t) &= x_0(t) + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s x_0^2(s) ds - \cos 2\pi t \\ &= 0.01 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s (0.01 + \cos 2\pi s)^2 ds \\ &= 0.01 + (0.01)^2 \frac{\pi}{2} t \int_0^1 \sin 2\pi s ds + 0.01\pi t \int_0^1 \sin 2\pi s \cos 2\pi s ds \\ &+ \quad + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s \cos^2 2\pi s ds \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

olduğundan $\left\|g_0\right\|_\infty = 0.01$

Böylece $\ell_0 = \pi, m_0 = \frac{101}{87}, p_0 = 0.01, b-a=1$ olduğundan;

$$q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 \ell_0 p_0 = \frac{35344}{378450} < 1$$

olur. Bu durumda Teorem 2.3.8 dolayısıyla $r_0 = \frac{87}{188\pi}(1-\sqrt{\frac{171553}{189225}})$ olmak üzere (2.38) denkleminin tek bir $x^*(t) \in \overline{S_{r_o}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = -\frac{\pi}{2} t \int_0^1 \sin 2\pi s x_{n-1}^2(s) ds + \cos 2\pi t$$
$$+ \frac{100\pi}{87} t \int_0^1 (0.01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s$$
$$\left[x_{n-1}(s) + \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \sin 2\pi\xi x_{n-1}^2(\xi) d\xi - \cos 2\pi s \right] ds, n = 1, \ldots$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti gibi bulunabilir ve dizisi, $x^*(t) = \cos 2\pi t$ çözümüne

$$\left\| x_n - x^* \right\|_\infty \leq \frac{47}{2175} \sqrt{\frac{189925}{174555}} (1 - \sqrt{\frac{174555}{189225}})^n \, n = 1, \ldots$$

hızla yaklaşılır.

Problem 2.3.13: $x_0(t) = 0$ başlangıç yaklaşım olmak üzere

$$\begin{cases} x''(t) - [x(t)]^2 = f(t), 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

sınır-değer problemini Newton metodu ile çözünüz. Burada $f(t), [0,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

Çözüm: Bilindiği gibi

$$-x''(t) = g(t),\ x(0) = x(1) = 0$$

sınır-değer probleminin $C^2[0,1]$den olan çözümü

$$M(t,s) = \begin{cases} S(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \text{ise}, \\ t(1-S), & 0 \le t \le s \le 1 \text{ise}, \end{cases}$$

olmak üzere

$$z(t) = \int_0^1 M(t,s)\, g(s)\, ds$$

biçiminde olduğundan (2.41) problemi $C[0,1]$uzayında

$$x(t) = -\int_0^1 M(t,s)\left[x(s)\right]^2 ds - \int_0^1 M(t,s)\, f(s) ds \qquad (2.42)$$

lineer olmayan integral denklemine denktir. $f(t,s,x) = -M(t,s)x^2$ fonksiyonu ve onun $f_x(t,s,x) = -2M(t,s)x$ kısmi türevi,

$$G = \left\{(t,s,x) : 0 \le t \le 1, 0 \le s \le 1, -\infty < x < \infty\right\}$$

üzerinde sürekli olduğu ve $\forall (t,s) \in [0,1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty,\infty)$ için

$$\left| f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2) \right| = 2M(t,s)\left|x_1 - x_2\right| \le \left|x_1 - x_2\right|$$

ve $\ell_0 = 1$ olduğu açıktır.

$$F(x)(t) = x(t) + \int_0^1 M(t,s)\left[x(s)\right]^2 ds + \int_0^1 M(t,s)\, f(s) ds$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörünün $x_0(t) = 0$ noktasında $\mathcal{F}-$türevi

$$F\,'(x_0)h(t) = h(t) + 2\int_0^1 M\,(t,s)x_0(s)h(s)ds = h(t)$$

olduğundan $F\,'(x_0) = I$ birim operatördür. Dolayısıyla

$R(t,s) = 0$ ve $m_0 = 0$

olur. Diğer taraftan,

$$g_0(t) = -F(x_o)(t) = -\int_0^1 M\,(t,s)\,f\,(s)ds$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty \leq \|f\|_\infty \max\left\{\int_0^1 M\,(t,s)ds.: 0 \leq t \leq 1\right\}$$

olur.

$$\int_0^1 M\,(t,s)ds = \int_0^1 s(1-t)ds + \int_0^1 t(1-s)ds = \frac{1}{2}(1-t)t$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty$$

ve dolayısıyla $p_0 = \frac{1}{8}\|f\|_\infty$ olur. Böylece,

$$q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 p_0 \ell_o = 2.\frac{1}{8}\|f\|_\infty = \frac{1}{4}\|f\|_\infty$$

olur. Eğer $\frac{1}{4}\| f \|_\infty < 1$ ise Teorem 2.3.8 dolayısıyla $\| f \|_\infty < 4$ ise (2.42)

denkleminin $r_0 = 1-\sqrt{1-\frac{\|f\|_\infty}{4}}$ olmak üzere tek bir $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$x_n(t) = -\int_0^1 M(t,s)\left[x_{n-1}(s)\right]^2 ds - \int_0^1 M(t,s) f(s) ds, n = 1, 2, \ldots$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümüne

$$\left\|x_n - x^*\right\|_\infty \le \frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{\|f\|_\infty}{4}}\right)^n}{\sqrt{1-\frac{\|f\|_\infty}{4}}} \frac{1}{8}\| f \|_\infty , n = 1, 2, \ldots$$

hızla yaklaşır.

Problem 2.3.14:

$$\wp(t) = \int_0^1 e^{st} e^{-[\wp(s)]^2} ds + \sqrt{t} - \frac{1}{t-1}\left[e^{t-1} - 1\right] \tag{2.43}$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

Çözüm: $\wp(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonu(2.43) denkleminin bir çözümü olduğundan $x(t) = 0$ fonksiyonu

$$x(t) - \int_0^1 e^{s(t-1)}\left[e^{-2\sqrt{s}.x(s) - x^2(s)} - 1\right] ds = 0 \tag{2.44}$$

denkleminin bir çözümü olduğu açıktır.

$$H(s, x) = e^{-2\sqrt{s}.x - x^2} - 1,$$

$$Q(t,s,x) = (1 - e^{s(t-1)})(e^{-2\sqrt{s.x} - x^2} - 1)$$

ve

$$F_1(x) = x(t) - \int_0^1 H(s, x(s))ds,$$

$$F_2(x)(t) = x(t) - \int_0^1 Q(t,s,x(s))ds$$

olmak üzere (2.44) denklemini

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \tag{2.45}$$

operatörlü denklem şeklinde yazabiliriz. Teorem 2.3.9 un koşullarının gerçekleştiğini gösterelim. $0 < r < 1$ olmak üzere

$$x_0 \in \overline{S_{\frac{r}{2}}}(\theta) = \left\{ x \in C[0,1] : \|x\|_\infty \le \frac{r}{2} \right\}$$

ve

$$G = \left\{ 8t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le t, s \le 1, x_0(s) - \frac{r}{2} \le x \le x_0(s) + \frac{r}{2} \right\}$$

olsun.

$$H(s,x) = e^{-2\sqrt{s.x} - x^2} - 1,$$
$$H_x(s,x) = -2(\sqrt{s} + x)e^{-2\sqrt{s.x} - x^2}$$

fonksiyonlarının G üzerinde sürekli oldukları açıktır. $g(x) = -2\sqrt{sx} - x^2$ olmak üzere $\forall s \in [0,1]$ ve $\forall x_1, x_2 \in \left[x_0(s) - \frac{r}{2}, x_o(s) + \frac{r}{2} \right]$ için

$$H_x(s, x_2) - H_x(s, x_1) = 2(\sqrt{s} + x_1)(e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)}) + 2(x_1 - x_2)e^{g(x_2)}$$

olur.

$g(x_1)-g(x_2)=-2\sqrt{s}(x_1-x_2)-(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ olduğundan,

her $x_1,x_2\in\left[x_0(s)-\frac{r}{2},x_0(s)+\frac{r}{2}\right](0\le s\le 1)$ için

$$e^{g(x_2)}\le 1,$$
$$|g(x_1)-g(x_2)|\le 2(1+r)|x_1-x_2|,$$
$$\left|e^{g(x_1)}-e^{g(x_2)}\right|\le 2(1+r)|x_1-x_2|$$

bulunur. Bu nedenle $\forall s\in[0,1]$ ve için $\forall x_1,x_2\in\left[x_0(s)-\frac{r}{2},x_0(s)+\frac{r}{2}\right](0\le s\le 1)$ için

$$|H_x(s,x_1)-H_x(s,x_2)|\le 2(1+2(1+r)^2)|x_1-x_2|$$

olur. Böylece $\overline{\ell_0'}=2(1+2(1+2(1+r)^2)$ olur. $x_0\in\overline{S_{\frac{r}{2}}(\theta)}$ bir başlangıç yaklaşım olmak üzere $k(s)=H_x(s,x_0(s))=-2(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}.x_0(s)-x_0{}^2(s)}$ çekirdeğinin $\tilde{R}(s)$ rezolvantasını bulalım. Bu nedenle

$$F_1(x)(t)=x(t)-\int_0^1 H(s,x(s))ds$$

biçiminde tanımlanan $F_1:C[0,1]\to C[0,1]$ operatörünün $x_0(t)$ noktasında $\mathcal{F}-$türevi

$$F_1'(x_0)h(t)=h(t)+2\int_0^1(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}.x_0(s)-x_0^2(s)}h(s)ds$$

olduğundan $q(t)\in C[0,1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$h(t)+2\int_0^1(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}.x_0(s)-x_0^2(s)}h(s)ds=q(t) \qquad (2.46)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (2.46) denkleminin

$$\text{çözümü}\; c = 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}.x_0(s)-x_0^2(s)}h(s)ds \tag{2.47}$$

olmak üzere $h(t) = q(t) - c$ biçimindedir. $h(t)$ 'nin bu ifadesini (2.47) denkleminde yerine koyarsak

$$c\left[1 + 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}ds\right] = 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}q(s)ds$$

denklemi elde edilir. $x_0 \in \overline{S_{\frac{r}{2}}(\theta)}$ başlangıç yaklaşım için

$$T(x_0) = 1 + 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}ds \neq 0 \tag{2.48}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda

$$c = \frac{2}{T(x_0)}\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}q(s)ds$$

olduğu görülür. Böylece(2.46) denkleminin çözümü

$$\tilde{R}(s) = \frac{-2}{T(x_0)}(\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}$$

olmak üzere

$$h(t) = [F_1'(x_0)]^{-1} q(t) = q(t) + \int_0^1 \tilde{R}(s)q(s)ds$$

bulunur.

$$\int_0^1 \left|\tilde{R}(s)\right| ds \le \frac{2}{|T(x_0)|}\int_0^1 \left|(\sqrt{s} + x_0(s))\right| e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)} ds$$

olduğundan Teorem 2.3.9 daki m_0' sayısı olarak

$$\overline{m_0'} = \frac{2}{|T(x_0)|}\int_0^1 \left|(\sqrt{s} + x_0(s))\right| e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)} ds$$

alabiliriz.

$$\overline{P_0'} = \max\left\{\left|x_0(t) - \int_0^1 (e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)} - 1)ds\right| : t \in [0,1]\right\}$$

$$\overline{\eta_0'} = \max\left\{\left|1 - e^{s(t-1)}\right|\left|e^{-2\sqrt{s}x(s)-x^2(s)} - 1\right| ds : t \in [0,1], |\, x(s) \le r\right\}$$

diyelim

$$\text{Her}\,(t,s) \in [0,1]^2 \ \text{ ve } \ \forall x_1, x_2 \in [-r, r] \ \text{için}$$

$$\begin{aligned}\left|Q(t,s,x_1) - Q(t,s,x_2)\right| &= \left|(1 - e^{s(t-1)})(e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)})\right| \\ &\le 2(e-1)(1+r)\left|x_1 - x_2\right|\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.3.9 daki L_0' sayısı olarak $\overline{L'}_0 = 2(e-1)(r+1)$ alınabilir.

Böylece, Teorem 2.3.9 dolayısıyla $x_0 \in \overline{S_{\frac{r}{2}}(\theta)}$ başlangıç yaklaşımı için (2.48) koşulu

ve

$$\begin{aligned}\overline{q_0'} &= 1 - 2\left[1 + \overline{m_0'})\overline{\ell'_0}\right]^2 (\overline{p_0'} + \overline{\eta_0'}) \\ &> (\overline{m_0'}\overline{\ell'_0})^2, \\ (1 + \overline{m_0'})\overline{\ell'_0}\delta_0 &= \sqrt{1 - \overline{q_0'}} \\ &< r(1 + \overline{m_0'})\frac{\overline{\ell'_0}}{2}\end{aligned}$$

eşitsizlikleri gerçekleniyorsa (2.45) denkleminin tek bir $x^*(t)=0$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$\tilde{R}(s)=\frac{-1}{T(x_0)}(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}$$

olmak üzere terimleri

$$\begin{aligned} x_n(t) = \quad & -\int_0^1 e^{s(t-1)}(1-e^{-2\sqrt{s}x_{n-1}(s)-x_{n-1}{}^2(s)})ds \\ & -\int_0^1 \tilde{R}(s)\left[x_{n-1}(s)+\int_0^1 e^{\tau(s-1)}(1-e^{-\sqrt{\tau}x_{n-1}(r)-x_{n-1}^2(\tau)})d\tau\right]ds,\ n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti gibi bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisinin $x^*(t)=0$ çözümüne $\overline{q_2}=1-\sqrt{1-\overline{q_0'}}+(1+\overline{m_0'})\overline{L_0'}$ olmak üzere

$$\|x_n\|_\infty \le \frac{(\overline{q_2})^n}{1-\overline{q_2}}(1+\overline{m_0'})(\overline{p_0'}+\overline{\eta_0'}),\ n=1,2,\ldots$$

hızla yaklaşır.

Problem 2.3.16:

$$\begin{cases} -x''(t)+f(t,x(t))=0, 0<t<1 \\ x(0)=\alpha_0, x(1)=\alpha_1 \end{cases} \tag{2.49}$$

sınır-değer problemini Newton metodu ile çözünüz. Burada $f(t,x)$ ve $f_x(t,x)$ fonksiyonları

$$G=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 : 0\le t\le 1, -\infty<\alpha<+\infty\right\}$$

üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

Çözüm: $X = \mathbb{C}^{(2)}[0,1]$ ve $Y = \mathbb{C}[0,1] * \mathbb{R}^2$ olsun. $x \in X$ ve $y = (q, d_1, d_2) \in Y$ elemanlarının normları sırasıyla

$$\|x\|_x = \|x\|_\infty + \|x''\|_\infty, \|y\| = \|q\|_\infty + \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

biçiminde verildiğinde $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach uzayları olduğu açıktır.

$$F(x) = \{-x''(t) + f(t, x(t)); x(0) - \alpha_0, x(1) - \alpha_1\} \qquad (2.50)$$

biçiminde tanımlanan $F : X \to Y$ operatörü yardımıyla (2.49) problemi $F(x) = 0$ operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. $F : X \to Y$ operatörünün $\forall x_0 \in X$ noktasında $\mathcal{F}-$ türevlenebilirdir ve

$$F'(x_0)h = \{-h''(t) + f_x(t, x_0(t))h(t); h(0), h(1)\}$$

olur. Her $u, v \in X$ için

$$F'(u)h - F'(v)h = \{[f_x(t, u(t)) - f_x(t, v(t)](t); 0, 0\}$$

Olduğundan

$$\|F'(u)h - F'(v)h\| \leq L \|h\| \qquad (2.51)$$

olur, burada

$$L = \max\{|f_x(t, u(t)) - f_x(t, v(t)| : t \in [0,1]\}$$

X uzayında $r > 0$ yarıçaplı

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_\infty + \|x'' - x_0''\|_\infty < r\}$$

yuvarına bakalım. Eğer herhangi $u, v \in S_r(x_0)$

$$\left| f_x(t,u(t)) - f_x(t,v(t)) \right| \le \ell \left| u(t) - v(t) \right|$$

olacak şekilde $l > 0$ sayısı varsa(2.51) eşitsizliği gereğince $\forall u, v \in S_r(x_0)$ için

$$\left\| F(u) - F(v) \right\|_{X \to Y} \le \ell \left\| u - v \right\|_X$$

bulunur. $\eta \ge 0$ yeteri kadar küçük sayı olmak üzere $\left\| F(x_0) \right\|_Y \le \eta$ olacak şekilde $x_0 \in X$ fonksiyonu mevcut olsun. (2.50) dolayısıyla bu

$$\left\| -x''(.) + f(., x_0(.)) \right\|_\infty + \sqrt{(x_0(0) - \alpha_0)^2 + (x_0(1) - \alpha_1)^2} \le \eta$$

olması demektir. Her $y = (q, \alpha_0, \alpha_1) \in Y$ için

$$\begin{aligned} & -h''(t) + f_x(t, x_0(t))h(t) = q(t) \\ & h(0) = \alpha_0, h(1) = \alpha_1 \end{aligned}$$

lineer sınır-değer probleminin $h(t) \in X$ çözümü için

$$\left\| h \right\|_X \le m(\left\| q \right\|_\infty) + \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} = m \left\| y \right\|$$

olacak şekilde $m > 0$ sayısı Varolsun. Bu $\left\| [F'(x_0)]^{-1} \right\|_{X \to Y} \le m$ olması demektir. Bu durumda

$$\left\| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \right\|_{X \to X} \le m.\eta$$

olur. Eğer $q = 2m^2 \eta \ell < 1$ ise Teorem 2.3.8 dolayısıyla

$$r_0 = (1 - \sqrt{1-q}\,) \,/\, m\ell \le r$$

olmak üzere(2.48) sınır değer probleminin tek $x^* \in \overline{S_{r0}(x_0)}$ çözümü vardır ve

$$-x''_{n+1}(t) + f_x(t, x_0)x_{n+1}(t) = f_x(t, x_0(t))x_n(t) - f(t, x_n(t)),$$
$$x_{n+1}(0) = \alpha_0, x_{n+1}(1) = \alpha_1, n = 0,1,...$$

lineer sınır-değer problemlerinin çözümlerinden oluşan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisi $x^* \in \overline{S_r(x_0)}$ çözümüne

$$\left\| x_n - x^* \right\|_X \le \frac{(1-\sqrt{1-q}\,)^n}{1-q} m^2\eta$$

hızla yaklaşır.

BÖLÜM 3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü Fizik, Mühendislik vb. gibi bir çok alanda temel bir sorundur. Bu denklemlerin cebirsel çözümündeki zorluk yaklaşık çözüm yöntemlerini öne çıkarmıştır. Newton metodu bu denklemlerin yaklaşık çözümlerinde kullanılan başlıca yöntemlerden biridir.

Yaklaşık çözüm yöntemleri günümüzde pratik anlamda da problemlere uygulanmaktadır. Bu sebeple yaklaşık sonucun gerçek sonuca yakınlığı oldukça önem kazanmıştır. Newton metodunun bu anlamda kuvvetli bir yöntem olduğu gözlenebilmektedir.

Bu çalışmada önce Newton metodunun operatörlü denklemlere uygulanabilmesi için gerekli olan operatörlerin türevlenmesi izah edildi. Daha sonra Newton yönteminin lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlere uygulanması teoremler yardımıyla ifade edildi ve birkaç problemle uygulama gösterildi. Ayrıca ekler kısmında birtakım problemlerin çözümü için Mathematica programları da bulunmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] ŞUHUBİ, E.S, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı yayınları, 580, 2005.

[2] MUSAYEV, B., ALP, M. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, 380, 2000

[3] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis With Application, John Wiley and Sons. 540, 1987.

EKLER

Problem 1:

$y''(t)+\sin y(t)=0 \quad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$ diferansiyel denklemini Newton metoduyla çözünüz.

Problem 1 için Mathematica programı:

```
result=NDSolve[{y"[t]+ Sin[y[t]]==0,y[0]==1,y'[0]==0},y,{t,0,10}]
Print["Mathematica Çözümü"];Pgercek=Plot[y[t]/.result,{t,0,10}]

(************************1.yaklaşım***************************)
r1=NDSolve[{h"[t]+Cos[Cos[t]]*h[t]==Cos[t]-Sin[Cos[t]],h[0]==0,h'[0]□0},h,{t,0,10}];
g1[t_]=h[t]/.r1;y1[t_]=g1[t]+Cos[t];
Plot[y1[t],{t,0,10}]
(********************2.yaklaşım******************************)
r2=NDSolve[{f"[t]+Cos[y1[t]]*f[t]==-y1"[t]-Sin[y1[t]],f[0]==0,f'[0]==0},f,{t,0,10}];
g2[t_]=f[t]/.r2;y2[t_]=g2[t]+y1[t];
Plot[y2[t],{t,0,10}]
(***********************3.yaklaşım*******************************)
r3=NDSolve[{h3"[t]+Cos[y2[t]]*h3[t]==-y2"[t]-
Sin[y2[t]],h3[0]==0,h3'[0]==0},h3,{t,0,10}];
g3[t_]=h3[t]/.r3;y3[t_]=g3[t]+y2[t];
Plot[y3[t],{t,0,10}]
(********************4.yaklaşım****************************)

r4=NDSolve[{h4"[t]+Cos[y3[t]]*h4[t]==-y3"[t]-
Sin[y3[t]],h4[0]==0,h4'[0]==0},h4,{t,0,10}];
g4[t_]=h4[t]/.r4;y4[t_]=g4[t]+y3[t];
Plot[y4[t],{t,0,10}]
```

(****************************FARK GRAFİKLERİ************************)

Print["Mathematica çözümü ile 1. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y1[t]],{t,0,10}]

Print["Mathematica çözümü ile 2. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y2[t]],{t,0,10}]

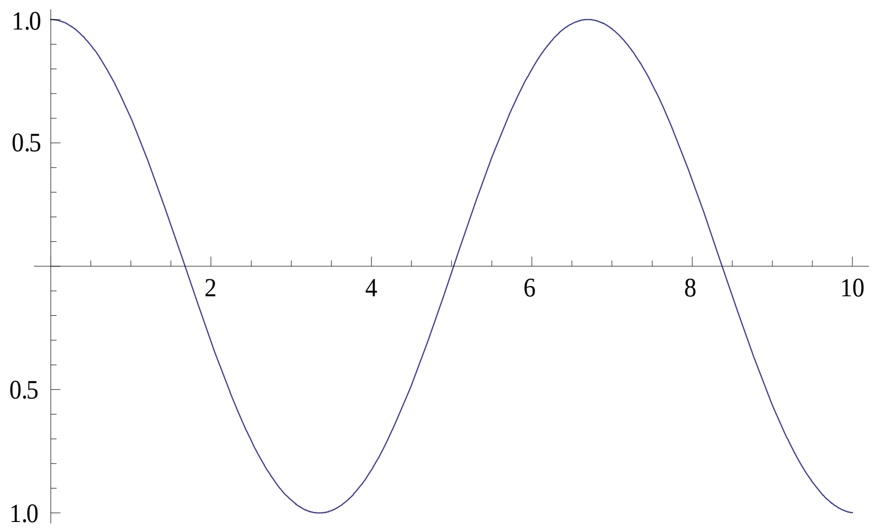
Print["Mathematica çözümü ile 3. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y3[t]],{t,0,10}]

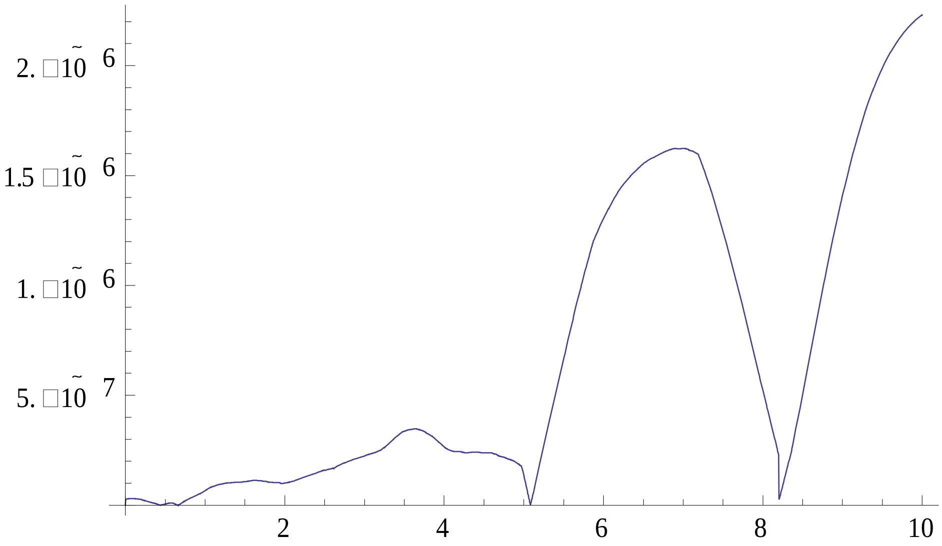
Print["Mathematica çözümü ile 4. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y4[t]],{t,0,10}]

4. Yaklaşım Newton çözümü:



Mathematica çözümü ile 4. yaklaşımın mutlak farkı



Problem 2:

$$\left.\begin{aligned} -y''(t) + t.y^2(t) &= t^3 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 0 < t < 1$$

diferansiyel denklemini Newton metoduyla çözünüz.

Problemin Mathematica Çözümü:

```
result=NDSolve[{-y"[t]+ t*y[t]^2==t^3,y[0]==0,y[1]==0},y,{t,0,1}];
Print["Mathematica Çözümü"];Pgercek=Plot[y[t]/.result,{t,0,1}]
(************************1.yaklaşım***************************)
r1=NDSolve[{-h"[t]□t^3,h[0]==0,h[1]==0},h,{t,0,1}];
g1[t_]=h[t]/.r1;y1[t_]=g1[t];
Plot[y1[t],{t,0,1}]
(*******************2.yaklaşım*****************************)
r2=NDSolve[{-h2"[t]+2*t*y1[t]*h2[t]==y1"[t]-
t*y1[t]^2+t^3,h2[0]==0,h2[1]==0},h2,{t,0,1}];g2[t_]=h2[t]/.r2;y2[t_]=g2[t]+y1[t];
Plot[y2[t],{t,0,1}]
(*******************3.yaklaşım*****************************)
r3=NDSolve[{-h3"[t]+2*t*y2[t]*h3[t]==y2"[t]-
t*y2[t]^2+t^3,h3[0]==0,h3[1]==0},h3,{t,0,1}];g3[t_]=h3[t]/.r3;y3[t_]=g3[t]+y2[t];
Plot[y3[t],{t,0,1}]
(*******************4.yaklaşım*****************************)

r4=NDSolve[{-h4"[t]+2*t*y3[t]*h4[t]==y3"[t]-
t*y3[t]^2+t^3,h4[0]==0,h4[1]==0},h4,{t,0,1}];g4[t_]=h4[t]/.r4;y4[t_]=g4[t]+y3[t];
```

Plot[y4[t],{t,0,1}]

(****************************FARK GRAFİKLERİ*************************)

Print["Mathematica çözümü ile 1. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y1[t]],{t,0,1}]

Print["Mathematica çözümü ile 2. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y2[t]],{t,0,1}]

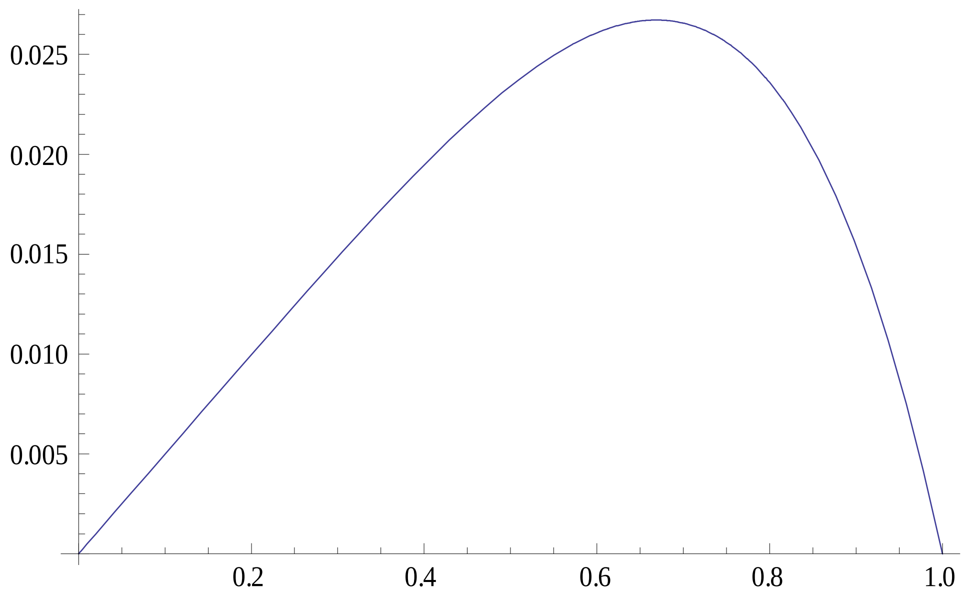
Print["Mathematica çözümü ile 3. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y3[t]],{t,0,1}]

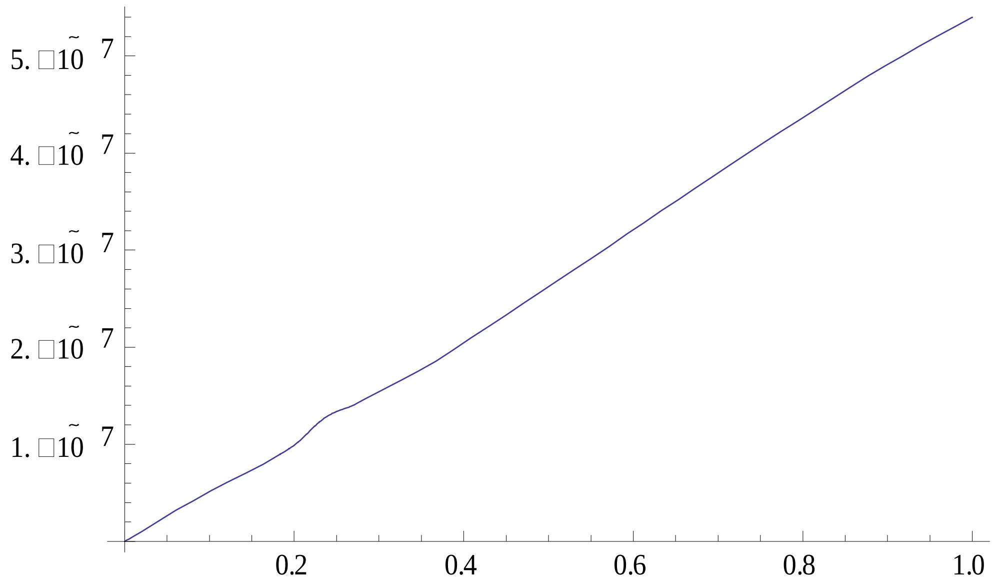
Print["Mathematica çözümü ile 4. yaklaşımın mutlak farkı"];

Plot[Abs[(y[t]/.result)-y4[t]],{t,0,1}]

4. Yaklaşım Newton çözümü:



Mathematica çözümü ile 4. yaklaşımın mutlak farkı:



Problem 3:

$$x_0(t) = \frac{-\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s x^2(s)ds + \cos 2\pi t$$

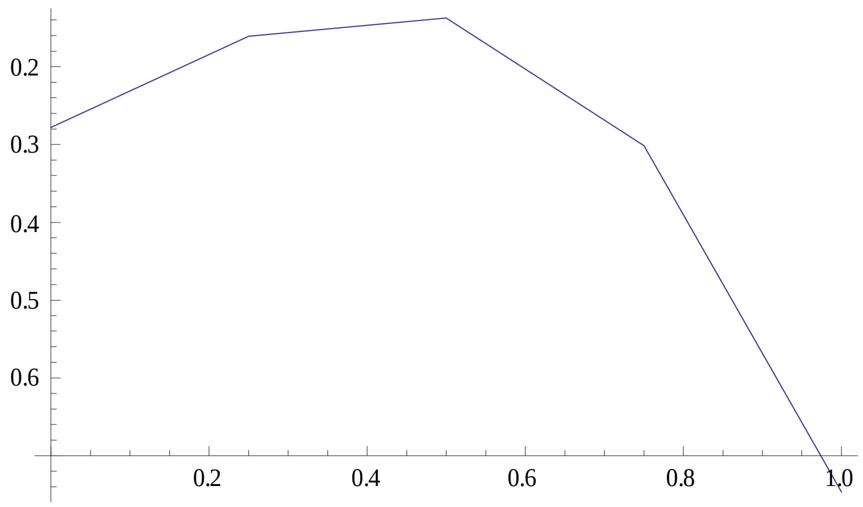
integral denklemini $x_0(t) = 0.01 + \cos 2\pi t$ başlangıç yaklaşımı ile Newton metodu ile çözünüz.

Problemin Mathematica çözümü:

```
a=0;b=1;NN=5;λ=1;h=(b-a)/(NN-1);d=h/2;k[x_,y_]:=1-3*x*y;f[x_]:=x^3;
KK=Table[0,{NN},{NN}];Do[KK[[i,1]]=d*k[a+(i-1)*h,a],{i,1,NN}];
Do[KK[[i,NN]]=d*k[a+(i-1)*h,b],{i,1,NN}];
Do[
 Do[
  KK[[i,j]]=2*d*k[a+(i-1)*h,a+(j-1)*h]
  ,{j,2,NN-1}]
 ,{i,1,NN}];
ff=Table[0,{NN},{1}];Do[ff[[i,1]]=f[a+(i-1)*h],{i,1,NN}];
A=KK- λ *IdentityMatrix[NN];
sol=N[Inverse[A].ff]; z=Table[0,{NN},{2}];Do[z[[i,1]]=a+(i-
1)*h;z[[i,2]]=sol[[i,1]],{i,1,NN}];
Print["Çözüm=",z//MatrixForm];
Print["Katsayılar Matrisi=" MatrixForm[A]];Print["Sağ Taraf" MatrixForm[ff]];
```

Print["Katsayılar matrisinin inversi=" MatrixForm[Inverse[A]]]

ListPlot[z,PlotJoined->True] Plot[z,{x,1,5}]



Problem 4:

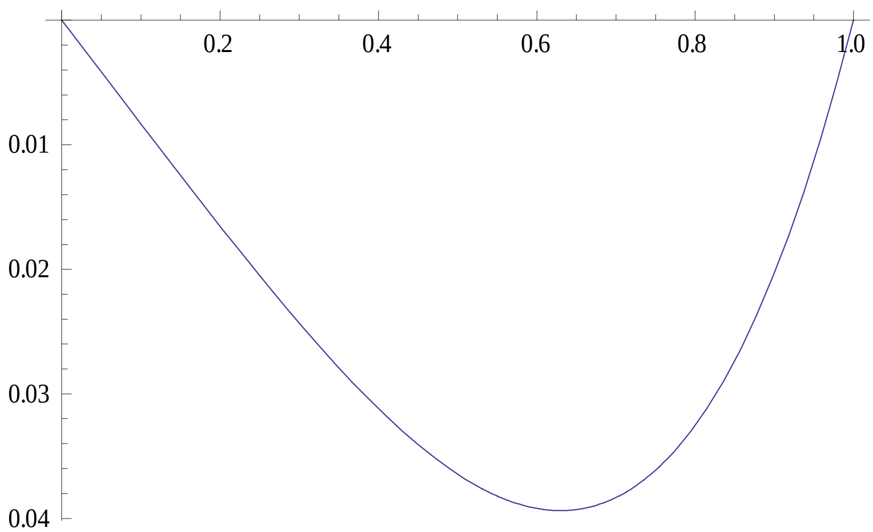
$$\left.\begin{array}{l} y''(t) - y^3(t) = t^2 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array}\right\} \qquad 0 < t < 1$$

Diferansiyel denklemini Newton yöntemiyle çözünüz.

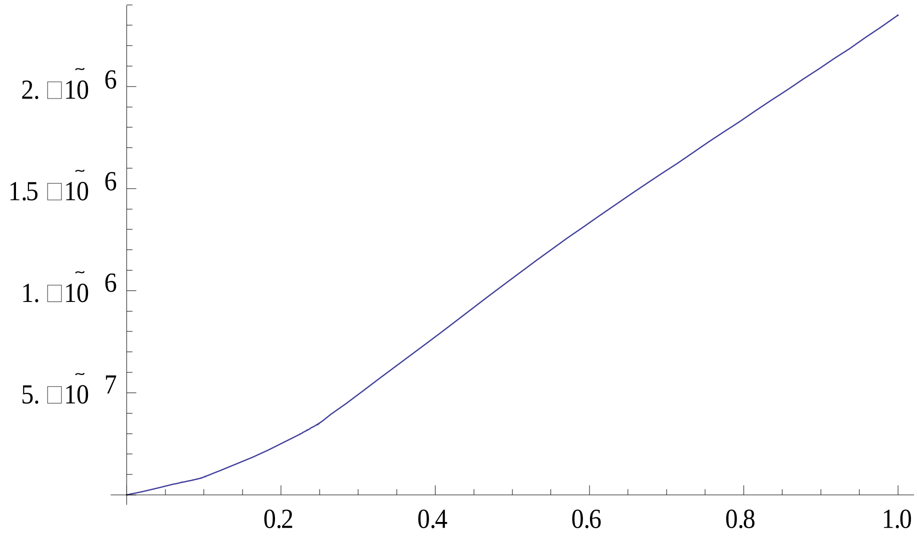
```
(* Başlangıç yaklaşımı y0[t]=t *)
result=NDSolve[{y"[t]-y[t]^3==t^2,y[0]==0, y[1]==0},y,{t,0,1}]
Print["Mathematica Çözümü"];Pgercek=Plot[y[t]/.result,{t,0,1}]

(************************1.yaklaşım**************************)
r1=NDSolve[{h"[t]-3*t^2*h[t]==t^3,h[0]==0,h[1]==0},h,{t,0,1}];
g1[t_]=h[t]/.r1;y1[t_]=g1[t];
Plot[y1[t],{t,0,1}]

(*******************2.yaklaşım****************************)
r2=NDSolve[{h2"[t]-3*y1[t]^2*h2[t]==-
y1"[t]+y1[t]^3+t^2,h2[0]==0,h2[1]==0},h2,{t,0,1}];
g2[t_]=h2[t]/.r2;y2[t_]=g2[t]+y1[t];
Plot[y2[t],{t,0,1}]

(*********************3.yaklaşım******************************)
```

```
r3=NDSolve[{h3"[t]-3*y2[t]^2*h3[t]==-
y2"[t]+y2[t]^3+t^2,h3[0]==0,h3[1]==0},h3,{t,0,1}];
g3[t_]=h3[t]/.r3;y3[t_]=g3[t]+y2[t];
Plot[y3[t],{t,0,1}]
(*******************4.yaklaşım***************************)
r4=NDSolve[{h4"[t]-3*y3[t]^2*h4[t]==-
y3"[t]+y3[t]^3+t^2,h4[0]==0,h4[1]==0},h4,{t,0,1}];
g4[t_]=h4[t]/.r4;y4[t_]=g4[t]+y3[t];
Plot[y4[t],{t,0,1}]


(***************************FARK GRAFİKLERİ*************************)
Print["Mathematica çözümü ile 1. yaklaşımın mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t]/.result)-y1[t]],{t,0,1}]
Print["Mathematica çözümü ile 2. yaklaşımın mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t]/.result)-y2[t]],{t,0,1}]
Print["Mathematica çözümü ile 3. yaklaşımın mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t]/.result)-y3[t]],{t,0,1}]
Print["Mathematica çözümü ile 4. yaklaşımın mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t]/.result)-y4[t]],{t,0,1}]
```

4. yaklaşım Newton çözümü:



Mathematica çözümü ile 4. yaklaşımın mutlak farkı



ÖZGEÇMİŞ

Alper EKİNCİ, 05.08.1980 de Erzurum’da doğdu. İlkokul Eğitimini Erzurum’da Ortaokul ve Lise eğitimini Sakarya’da tamamladı. 1997 yılında Sakarya Mithatpaşa Lisesinden mezun oldu. 1999 yılında girdiği Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik bölümünden 2004 yılında mezun oldu. 5 yıldır Özel bir dershanede Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.