

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMAN GECİKMELİ DOĞRUSAL OLMAYAN
SİSTEMLERİN FREKANS BOYUTUNDA ANALİZİNE
YÖNELİK BİR ARAYÜZ ÇALIŞMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hülya IŞIK

Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE BİLG. EĞT.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İlyas ÇANKAYA

Temmuz 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZAMAN GECİKMELİ DOĞRUSAL OLMAYAN
SİSTEMLERİN FREKANS BOYUTUNDA ANALİZİNE
YÖNELİK BİR ARAYÜZ ÇALIŞMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hülya IŞIK

Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE BİLG. EĞT.

Bu tez 27 / 07 /2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Abdullah YILMAZ
Jüri Başkanı**

**Yrd. Doç. Dr.
İlyas ÇANKAYA
Üye**

**Yrd. Doç. Dr.
Ali Fuat BOZ
Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında, her türlü yardımını, desteğini ve zamanını esirgemedен beni yönlendiren çok değerli danışman hocam Yrd.Doç.Dr. İlyas ÇANKAYA başta olmak üzere, Prof. Dr. Abdullah YILDIZ'a, kuzenim M.Savaş BİLİCAN'a, arkadaşım S.Şeref ÖZTÜRK'e, maddi ve manevi her zaman benim yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ.....	xi
ÖZET	xiii
SUMMARY	xiv
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
SİSTEMLER VE MODELLEME	6
2.1. Sistem Kavramı.....	6
2.2. Otomatik Kontrol Sistemleri.....	7
2.3. Statik ve Dinamik Sistemler	7
2.4. Modelleme ve Simülasyon	8
2.5. Sistem Sınıfları.....	9
2.5.1. Stokastik model.....	11
2.5.2. Deterministik model.....	11
2.5.3. Sürekli (Continuous) model.....	12
2.5.4. Ayrık model	12
2.6. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sistemler.....	13
2.6.1. Doğrusal sistemler.....	13
2.6.2. Doğrusal olmayan sistemler.....	15
2.7. Doğrusal Olmayan Sistem Davranışları	18

2.7.1. Çoklu denge (kararlılık) durumu veya dengeli bölge.....	18
2.7.2. Sınırlı devirler (periyotlar).....	18
2.7.3. Harmonik ya da bir periyodik giriş altında periyodik osilasyonlar.....	19
2.7.4. Atlama olayı (Jump Phenomeno).....	19
2.7.5. Kaos.....	21
2.8. Sistemlerde Zaman Gecikmesi	23

BÖLÜM 3.

GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK DENGE METODU.....	29
3.1. Zaman Alanında Doğrusal Olmayan Sistemler	31
3.2. Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Harmonik Denge Analizi.....	35
3.3. Yöntemin Zaman Gecikmeli Diferansiyel Sistem Üzerinde Uygulanması.....	44
3.4. Temel Harmonik İçin Harmonik Denge Denklemlerinin Çıkarılması.....	45
3.4.1. Doğrusal bileşenler	45
3.4.2. Kübik bileşenler.....	46
3.4.2.1 Saf çıkışlar.....	47
3.4.2.2 Çapraz çarpım çıkışlar.....	48
3.5. Nelder-Mead Metodu.....	53
3.6. Frekans Cevabının Elde Edilmesi.....	54

BÖLÜM 4.

GHDM KULLANICI ARAYÜZÜ.....	63
4.1. Arayüz Tasarımı.....	63
4.2. GUI'nin Çalıştırılması	64
4.2.1. Push Button	67
4.2.2. Edit Text.....	68
4.2.3. Slider.....	68
4.2.4. Axes	68
4.2.5. List Box.....	69

4.2.6. Static Text	69
4.3. GHDM Kullanıcı Arayüzü.....	70
4.3.1. Örnek uygulama 1.....	73
4.3.2. Örnek uygulama 2.....	77
BÖLÜM 5.	
SONUÇLAR.....	83
BÖLÜM 6.	
TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	85
KAYNAKLAR.....	86
EKLER.....	90
ÖZGEÇMİŞ.....	94

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

GHDM	: Genelleştirilmiş harmonik denge metodu
SISO	: Tek giriş tek çıkışlı sistem
MISO	: Çok girişli tek çıkışlı sistem
MIMO	: Çok girişli çok çıkışlı sistem
ZGDE	: Zaman gecikmeli diferansiyel eşitlik
NIDE	: Tek giriş-tek çıkışlı sistemler için diferansiyel denklem modeli
$u(t)$: Sistem girişi
$y(t)$: Sistem çıkışı
e^{-t}	: Zaman gecikmesi
ω_n	: Doğal frekans
l_i	: Türev mertebesi
D	: Diferansiyel operatör
p	: Çıkışa ait üs derecesi
q	: Girişe ait üs derecesi
M	: En yüksek doğrusalsızlık seviyesi
$c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q})$: Denklem terimlerinin katsayıları
k_i	: Sistemdeki zaman gecikmesi
dc	: Sabit bileşen
a_{xdc}	: Sistemdeki dc bileşen genliği
ω_r	: Frekanslar
A_{x_r}	: Kompleks genlikler
n	: Doğrusalsızlık derecesi
$F_{p,q}[\cdot]$: Doğrusal olmayan fonksiyon
$f_{uy}^{sym}(\cdot)$: Simetrik fonksiyon

- $S_{n,r}(r_1, \dots, r_n)$: Frekans dizisinin kombinasyonlarını üreten fonksiyon
- n_r^* : Kombinasyondaki farklı permütasyon sayısı
- R : Çıkış denklemindeki harmonik bileşen sayısı
- A_{y_0} : dc bileşene ait genlik
- A_{y_1} : Birinci harmoniğe ait genlik
- ϕ_{y_1} : Birinci harmoniğe ait faz
- A_{y_2} : İkinci harmoniğe ait genlik
- ϕ_{y_2} : İkinci harmoniğe ait faz
- A_{y_3} : Üçüncü harmoniğe ait genlik
- ϕ_{y_3} : Üçüncü harmoniğe ait faz

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Güneş enerjisi ile ısınan ev.....	6
Şekil 2.2.	SISO sistem yapısı.....	9
Şekil 2.3.	MISO sistem yapısı.....	9
Şekil 2.4.	MIMO sistem yapısı.....	10
Şekil 2.5.	Denklem sistemlerinin major sınıfları.....	11
Şekil 2.6.	Doğrusal sistem bloğu.....	13
Şekil 2.7.	Bir doğrusal sistemin $y(t)$ çıkışının $u(t)$ girişine karşılık değişimi, $y(t) = A \sin(\omega t - \phi)$	14
Şekil 2.8.	Doğrusal olmayan sistem bloğu.....	16
Şekil 2.9.	Bir doğrusal olmayan sistemin $y(t)$ çıkışının $u(t)$ girişine karşılık değişimi.....	17
Şekil 2.10.	Duffing Denklemine ait görülen atlama.....	20
Şekil 2.11.	Lorenz kelebek etkisi modeli.....	22
Şekil 2.12.	RC devresi.....	24
Şekil 2.13.	RC devresi gerilimin zamana göre değişim grafiği.....	25
Şekil 2.14.	RC devresi akımın zamana göre değişim grafiği.....	26
Şekil 2.15.	Cep telefonlarında zaman gecikmesi olayı.....	26
Şekil 2.16.	Trafikte zaman gecikmesi olayı.....	27
Şekil 3.1.	Maksimum çıkış genliğine ait frekans cevabı.....	56
Şekil 3.2.	Dc bileşene ait genlik değişimi.....	57
Şekil 3.3.	Temel harmoniğe ait genlik değişimi.....	58
Şekil 3.4.	Temel harmoniğe ait faz değişimi.....	58
Şekil 3.5.	İkinci harmoniğe ait genlik değişimi.....	59
Şekil 3.6.	İkinci harmoniğe ait faz değişimi.....	59
Şekil 3.7.	Üçüncü harmoniğe ait genlik değişimi.....	60
Şekil 3.8.	Üçüncü harmoniğe ait faz değişimi.....	60

Şekil 3.9.	Harmonik bileşenlerinin genlik değişimlerine ait karşılaştırmalı sonucu.....	61
Şekil 3.10.	Harmonik bileşenlerine ait faz değişimlerinin karşılaştırmalı sonucu.....	61
Şekil 3.11.	Farklı zaman gecikmelerinde maksimum genlikler.....	62
Şekil 4.1.	GHDM uygulaması kullanıcı arayüzüne ait ana pencere.....	65
Şekil 4.2.	Guide başlangıç ekranı.....	65
Şekil 4.3.	Guide tasarım ekranı.....	66
Şekil 4.4.	Arayüzde örnek buton kullanımı.....	67
Şekil 4.5.	Sil butonu callback komutları.....	67
Şekil 4.6.	Arayüzde edit text kullanımı.....	68
Şekil 4.7.	Arayüzde slider kullanımı.....	68
Şekil 4.8.	Arayüzün NIDE model tanımlama kısmında axes kullanımı.....	69
Şekil 4.9.	Arayüzde listbox kullanımı.....	69
Şekil 4.10.	Arayüzde static test kullanımı.....	70
Şekil 4.11.	GHDM uygulaması kullanıcı arayüzüne ait ana pencere.....	71
Şekil 4.12.	GHDM uygulaması kullanıcı arayüzü NIDE model denklem tanımlama bölümü.....	71
Şekil 4.13.	GHDM uygulaması kullanıcı arayüzü giriş ve çıkış sinyalleri tanımlama bölümü.....	72
Şekil 4.14.	GHDM kullanıcı arayüzü frekans aralığı ve başlangıç değerleri tanımlama bölümü.....	72
Şekil 4.15.	GHDM uygulaması kullanıcı arayüzü grafik gösterme bölümü...	73
Şekil 4.16.	Örnek sistem-1 için dc bileşene ait genlik değişimi.....	74
Şekil 4.17.	Örnek sistem-1 için temel harmoniğe ait genlik değişimi.....	74
Şekil 4.18.	Örnek sistem-1 için ikinci harmoniğe ait genlik değişimi.....	75
Şekil 4.19.	Örnek sistem-1 için üçüncü harmoniğe ait genlik değişimi.....	75
Şekil 4.20.	Örnek sistem-1 için maksimum çıkışa ait genlik değişimi.....	76
Şekil 4.21.	Örnek sistem-1 için harmoniklere ait genlik değişimi.....	76
Şekil 4.22.	Örnek sistem-2 için arayüz penceresi.....	77
Şekil 4.23.	Örnek sistem-2 için maksimum çıkış genliği.....	79
Şekil 4.24.	Örnek sistem-2 için temel harmoniğe ait genlik değişimi.....	79
Şekil 4.25.	Örnek sistem-2 için temel harmoniğe ait faz değişimi.....	80

Şekil 4.26. Örnek sistem-2 için üçüncü harmoniğe ait genlik değişimi.....	80
Şekil 4.27. Örnek sistem-2 için üçüncü harmoniğe ait faz değişimi.....	81
Şekil 4.28. Örnek sistem-2 için bütün harmoniklere ait genlik değişimi.....	81

TABLolar LİSTESİ

Tablo 3.1.	Eşitlik (3.3) için doğrusal giriş teriminin katsayıları.....	34
Tablo 3.2.	Eşitlik (3.3) doğrusal çıkış terimlerinin katsayıları.....	35
Tablo 3.3.	Eşitlik (3.3) kübik çıkış çarpımı teriminin katsayıları.....	35
Tablo 3.4.	Eşitlik (3.3) kübik çıkış teriminin katsayıları.....	35
Tablo 3.5.	Doğrusal terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1)$ değerleri ve $\omega_{r_1} = \omega$. için bütün frekansların kombinasyonları.....	46
Tablo 3.6.	Kübik bileşen için hesaplanan kombinasyonlar ve n_r^* değerleri...	47
Tablo 3.7.	$y(t)^3$ saf çıkış bileşeni için her kombinasyonda hesaplanan simetrik fonksiyon değerleri.....	47
Tablo 3.8.	$f_y^{sym}(-3,1,3)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	48
Tablo 3.9.	$f_y^{sym}(-3,2,2)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	49
Tablo 3.10	$f_y^{sym}(-2,0,3)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	49
Tablo 3.11	Kübik terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve $\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = \omega$ için bütün frekansların kombinasyonları.....	50
Tablo A.1.	$f_y^{sym}(-2,1,2)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	90
Tablo A.2.	$f_y^{sym}(-1,-1,3)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	90
Tablo A.3.	$f_y^{sym}(-1,0,2)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	91

Tablo A.4.	$f_y^{sym}(-1,1,1)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	91
Tablo A.5.	$f_y^{sym}(0,0,1)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi.....	91
Tablo B.1.	Dc bileşende doğrusal terimler için hesaplanan $f^{sym}(\cdot)$ değerleri ve $\omega_{r_1} = 0$ için kombinasyonlar.....	92
Tablo B.2.	Dc bileşende kübik terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve $\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = 0$ için bütün frekansların kombinasyonları.....	92
Tablo B.3.	İkinci harmonik bileşende doğrusal terimler için hesaplanan $f^{sym}(r_1)$ değerleri ve $\omega_{r_1} = 2\omega$ için bütün frekansların kombinasyonları.....	92
Tablo B.4.	İkinci harmonik bileşende kübik terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve $\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = 2\omega$ için bütün frekansların kombinasyonları.....	93
Tablo B.5.	Üçüncü harmonik bileşende doğrusal terimler için hesaplanan $f^{sym}(r_1)$ değerleri ve $\omega_{r_1} = 3\omega$ için bütün frekansların kombinasyonları.....	93
Tablo B.6.	Üçüncü harmonik bileşende kübik terimler için hesaplanan $f^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve $\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = 3\omega$ için bütün frekansların kombinasyonları.....	93

ÖZET

Anahtar kelimeler: Doğrusal olmayan sistemler, Harmonik Denge Metodu, Zaman Gecikmesi, Frekans cevabı, Kullanıcı arayüzü

Doğrusal olmayan sistemlerde gözlenen atlama rezonansı, harmoniklerin üretimi, sistem kayması gibi davranışlar frekans boyutunda daha iyi tanımlanabildiğinden frekans boyutunu temel alan yaklaşımları kullanmak daha uygun düşmektedir. Bu yöntemlerden birisi de Peyton Jones tarafından 2005 yılında yayınlanan makalede sunulan ve klasik harmonik denge metodunu temel alan genelleştirilmiş harmonik denge metodudur.

Sunulan tez çalışmasında bu metot tanıtılarak örnek olarak tek girişli-tek çıkışlı integro-diferansiyel denklemler ile tanımlanmış olan doğrusal olmayan zaman gecikmeli bir sistem modeli üzerinde uygulaması gerçekleştirilmiştir. Sunulan metodun avantajı harmonik sayısı ve sistem derecesi arttığında oluşan karmaşıklığı azaltarak, denge denklemlerinin kolayca elde edilebilmesini sağlamasıdır. Elde edilen denklemlerin çözümünde Nelder-Mead minimizasyon algoritması kullanılmıştır. Algoritmanın kullanıcılar tarafından rahatça kullanılabilmesi için MATLAB programında arayüz tasarımı gerçekleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar grafiksel olarak gösterilmiştir.

PRACTICAL FREQUENCY RESPONSE ANALYSIS OF NON-LINEAR TIME-DELAYED SYSTEMS AND A STUDY OF INTERFACE

SUMMARY

Key Words: Nonlinear Systems, Generalized Harmonic Balance Method, Time Delayed, Frequency Response, User Interface

As the actions like jump resonance, the production of the harmonics and the system shifting that are observed on the non-linear systems can be described better in frequency dimension, it is more appropriate to use the approaches that take basic the frequency dimension. One of these methods is the Generalised Harmonic Balance Method which is based on the classical harmonic balance method that was published by Peyton Jones in 2005.

In the present work the method is introduced and as an example it is carried out on a single input-single output differential equation for a time delayed defined non-linear system. The advantage of the presented method is that it decreases the number of harmonics and the complexity which is occurred when the system degree increases and it makes easier to obtain the balance equations. The Nelder-Mead Minimization Algorithm is used in order to solve the equations that are obtained. In order to provide users to use the algorithm easily the interface design is carried out in MATLAB programme and the results are shown in graphics.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Gerek uzayda gerekse dünyada birçok yapı sistem diyebileceğimiz bir düzen içerisinde. Bu sistemlerin hepsi kendine özgü davranışlar sergiler. Çevremizde gördüğümüz fiziksel sistemler doğrusal yapıda görünse de, aslında yapıları doğrusal değildir. Örneğin denizde bir geminin fırtınaya yakalanması, dalgaların yükselmesi, iklim şartları doğrusalsızlık sağlar, sistemin düzenli çalışmasını engeller. Günümüzde uzay çağında bilim adamları sistemlerdeki bu gibi doğrusalsızlıktan kaynaklanan problemleri anlamak, gidermek ve kontrol etmek için çalışmaktadır. Böylece amaç insan yaşamını kolaylaştırmayı sağlayan sistemleri tasarlamak ve yüksek verim almaktır. Sistem davranışlarını incelemek için sistem değişkenleri arasındaki ilişki analiz edilmelidir. Gerçekte hemen hemen bütün fiziksel sistemler dinamik yapıya sahiptirler, örneğin mekaniksel, elektriksel, ısı, akışkan, ekonomik, biyolojik vb. Genelde düşük maliyet ve kısa zamanda sonuç elde edebilmek için sistemler matematiksel olarak modellenirler. Sistemlerin modellenmesi için doğrusal ve doğrusal olmayan modelleme yöntemleri kullanılmaktadır.

Matematiksel modellerde doğrusal yapılar süperpozisyon ve homojenlik gibi kuralları sağladığından doğrusal matematik kuralları kullanılarak modellenebilir. Doğrusal olmayan sistemlerde ise doğrusal olmayan, sertlik ve sönüm katsayısında üstel ve ani değişikliklere sebep olan elemanlar vardır. Örneğin kondansatör, diyet, opamp gibi elemanlar. Ayrıca zaman gecikmesi doğrusal olmayan sistemlerde karşılaşılan bir başka kavramdır, sistemlerde bir girişe karşı beklenen cevabın belirli bir zaman sonra oluşmasıdır. Zaman gecikmesi genel olarak sistemlerde e^{-t} ile gösterilir. Doğrusal olmayan sistemleri modellemede, sistemin giriş-çıkış ilişkisi, diferansiyel denklemler, üstel ve logaritmik fonksiyonlar gibi doğrusal olmayan matematiksel ifadelerle sağlanır. Doğrusal olmayan sistemlerin analizinde, transfer fonksiyonu yaklaşımı, sistemlerin sahip oldukları davranışları basit bir gösterimle ve

anlaşılabilir bir tarzda sağlar. Bu sistemler için birçok modelleme yaklaşımı geliştirilmiştir. Bu konuda Volterra, Bilinear ve PAR modelleri sayılabilir [1].

Matematiksel modeli oluşturulmuş doğrusal olmayan bir sistemin analiz edilmesi yani sistem davranışlarının incelenmesi için birçok yöntem geliştirilmiştir [2,3]. Doğrusal sistemlerin analizi, kararlı olup olmadığı Routh Hurwitz kriteri, Nyquist eğrisi gibi analiz yöntemleriyle belirlenirken, doğrusal olmayan sistemlerde bu yöntemler kullanılmaz. Aynı zamanda doğrusal olmayan sistemlerin analizinde kullanılan yöntemlerin birçoğunda sonuçların analizini kolaylaştırdığından dolayı frekans boyutu tercih edilir. Frekans boyutu kullanılarak giriş-çıkış verileri belirli olan sistemlerin bu veriler yardımı ile analizi genlik/kazanç ve faz grafikleri kullanılarak sağlanır.

Doğrusal olmayan sistemler başlangıç koşulları ve çalışması esnasında oluşabilecek çok küçük olumsuz etkilerden dolayı doğrusal sistemlerde rastlanmayan özel durumlar sergilerler. Bunlar gözlenen harmonikler, atlama rezonansı, doğal frekans kayması gibi davranışlardır. Bu gibi olaylar frekans boyutunda daha iyi tanımlanabildiğinden frekans boyutunu temel alan yaklaşımları tercih etmek ve bu yöntemler üzerinde çalışmak daha doğru tercih olacaktır [4].

Genel olarak doğrusal olmayan frekans boyutundaki sunumlar Volterra serileri modelini temel alır. Bu serilerin kullanımı sonunda elde edilen Volterra transfer fonksiyonları ile gerçekleştirilen analiz yöntemi oldukça geneldir, fakat çok boyutlu formlarda karşılaşılan grafiksel sunumlardaki sınırlamalar ve elde edilen sonuçların yorumunda yaşanan sıkıntılar birer dezavantaj olarak karşımıza çıkar. Volterra transfer fonksiyonları, Tanımlama fonksiyonu metodu temel alan seri tabanlı metot, sarsım metotları ve harmonik denge metotlarıdır. Örneğin, ilk olarak Volterra doğrusal olmayan sistemlerin giriş-çıkış ilişkilerinin sonsuz serilerle sunulabileceğini göstermiştir [4]. Günümüzdeki çalışmalar, bu çalışmanın devamı olarak geliştirilmiştir. Çankaya ve Boz gerçekleştirmiş oldukları çalışmada Volterra serileri metodunu Duffing denkleminde uygulayarak sistemin çıkışındaki çeşitli frekans bileşenlerine ait genliklerin ve fazların doğrudan doğruya tespit edilebileceğini göstermişlerdir [4]. Yine Çankaya ve arkadaşları Volterra serilerini temel alan

Genelleştirilmiş Tanımlama Fonksiyonu Metodunu kullanarak Duffing modeline ait frekans boyutundaki cevabın elde edilmesini simülasyon sonuçları ile birlikte sunmuşlardır [5]. Burada elde edilen frekans boyutundaki cevaplar Volterra serileri ile elde edilen çok boyutlu sunumlardan ziyade iki boyutlu grafiksel sunumlar şeklinde gerçekleştirilmiştir. Bu da aslında iki yöntem arasındaki farkı tam olarak ortaya koymaktadır. Bu türden çalışmalar Jones ve Billings tarafından da gerçekleştirilmiştir [6]. Peng ve arkadaşları tarafından o zamana kadar tek giriş-tek çıkışlı sistemler için gerçekleştirilen çalışmalardan farklı olarak çok girişli sistemler için Volterra serileri kullanılarak doğrusal olmayan sistemlerin frekans boyutundaki analizi gerçekleştirilmiştir [7]. Lang, ve arkadaşları çalışmalarında frekans cevap çıkış fonksiyonu için bir ifade tanımlamışlardır. Bu ifade, diferansiyel denklem modelinden polinomlarla tanımlanan doğrusal olmayan sistemler için, çıkış spektrumu ve sistem parametreleri arasındaki analitik ifadeyi açıkça tanımlanmış ve deneme verilerinden veya sistem simülasyonundan doğrudan çıkış frekans cevabı fonksiyonunu (OFRF) belirleyen etkin bir algoritma geliştirmişlerdir [8].

Önemli analiz yöntemlerinden biri de Genelleştirilmiş Harmonik Denge metodu ile frekans boyutunda analizdir. Bu yöntemde giriş ve çıkış için kabul edilen sinyalin sistemin denkleminde yerine koyularak elde edilen sonuç denkleminde benzer frekansların denklemin diğer tarafına eşitlenerek bulunması mantığına dayanır [9]. Harmonik denge metodunda ya doğrusal olmayan terimler bir Fourier serisi gibi kullanılarak ya da doğrusal olmayan elemanların tanımlama fonksiyonları için cebirsel ifadeler kullanılarak denge denklemlerinin formülasyonu oldukça kolay hale getirilebilmektedir [10]. Ancak bu geleneksel uygulamada, belirlenen noktada kesilmiş Fourier serilerinden oluşan dalga formuna ait harmonik sayısı ve sistemin derecesi yükseldikçe açılımda elde edilen terim sayısındaki artış nedeniyle karmaşıklığa ve yüksek dereceli doğrusalsızlığa sebep olur. Yani harmonik denge analizinin exponansiyel olarak artan terim uzunluğundan kaynaklanan bir sorunu bulunmaktadır. Bu durumda terim uzunluğunun azaltılması durumunda doğruluktan sapma gibi bir durumu ortaya çıkarmaktadır.

Sistemlerde zaman gecikmesi önemli bir kavramdır ve sistem davranışlarına etkileri oldukça yüksektir. Zaman gecikmesi, sistemin çalışma şekline ve birbirini etkileyen

sistem elemanlarına bağlıdır. Bir örnekle açıklamak gerekirse, Driver'ın tuzlu su örneği bu konuda ilk yapılan çalışmalardan bir tanesidir [11]. Driver, içinde tuzlu su karışımı bulunan bir tankı modelleyerek, içine bir yandan saf su eklenirken bir yandan da su boşaltıldığında t anında depoyu terk eden tuz oranının bir önceki orana bağlı olduğunu göstermiştir. Daha basit bir örnek düşünüldüğünde bankamatikte bir insanın bankaya ilk gittiğinde işlem yapabilmesi, önündeki sırada bulunan insanların işlem yapma süresine bağlıdır, yani işlemini belli bir zaman gecikmesiyle yapar. Gerçek hayatta modellenmek istenen sistemlerin de birçoğu zaman gecikmesi içerir. Sistemlerde zaman gecikmesi τ ile gösterilir. Jones, yapmış olduğu çalışmalarda hem doğrusal olmayan sistemler hem de zaman gecikmeli sistemlerin frekans analizi için harmonik denge denklemlerinin elde edilmesini kolaylaştıran bir algoritma tasarlamıştır [12,13]. Swain ve arkadaşları, genelleştirilmiş frekans cevabı fonksiyonlarını kullanarak doğrusal olmayan sistemlerde zaman gecikmesinin etkilerini analiz eden tekrarlı bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma model parametreleri ve genelleştirilmiş frekans cevabı fonksiyonları arasındaki ilişkiyi belirtir. Doğrusal olmayan sistemlerin harmonik üretim, kazanç azaltma/arttırma, duyarsızlık gibi farklı özelliklerinde zaman gecikmesinin önemini örneğin Duffing osilatörü üzerinde göstermişlerdir [14].

Blair ve Farris, duffing denkleminin dinamik analizinde harmonik denge ve devam teknikleri konulu çalışmalarında, bir devam şeması ile eşleştirilmiş harmonik denge tekniği, uygulanan harmonik zorluğun genliğindeki değişime sistemin yanıtını izlemek için kullanılmıştır. Floquet teori ile elde edilen sonuçların kararlılığı tespit edilmiştir [15]. Dooren ise yapılan bu çalışmayı temel alarak bir atış tekniği geliştirerek kolayca elde edilen yüksek periyot içeren çözümleri göstermiştir [16].

Belendez, Mendez ve arkadaşları doğrusal olmayan osilatörde bağlı değişken ile ters orantılı tekrarlı zorlayıcı kuvvet olduğunda harmonik denge yaklaşımları ile klasik doğrusal olmayan tekil osilatör için üçlü yaklaşık frekans-genlik ilişkisini düzenlemek için ikinci derece harmonik denge metodunu kullanmışlardır [17].

Bu tez çalışmasında, zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemlerin harmonik denge denklemleri metodu ile frekans boyutunda analizi ve bu analize yönelik bir ara yüz çalışması amaçlanmıştır.

Bölüm 2’de, sistem ve modelleme kavramı açıklanmış, buna bağlı olarak sistem çeşitleri ve parametreleri ele alınmıştır.

Bölüm 3’de, genel olarak genelleştirilmiş harmonik denge metodu (GHDM) anlatılmış ve örnek uygulaması yapılmıştır. Tek girişli-tek çıkışlı polinom yapıda integro-diferansiyel denklemler ile tanımlanmış doğrusal olmayan zaman gecikmeli sistemlerin analizi için yaygın olarak kullanılan frekans cevabı, yöntemin anlatımını konu alan J.C. Peyton Jones’in 2005 yılında yayınladığı makalesinde kullandığı bir genelleştirilmiş harmonik denge denklemleri metodu ile yapılmış ve buna göre ele alınan örnek modelin dc bileşen ve her harmoniği için belirtilen algoritmaya göre denge denklemleri çıkartılmış ve sonuçlar tablolarda gösterilmiştir [13]. Bu denklemlerin çözümünde Nelder-mead sayısal çözümlene yöntemi kullanılarak harmoniklere ait genlik ve faz değerleri bulunmuştur.

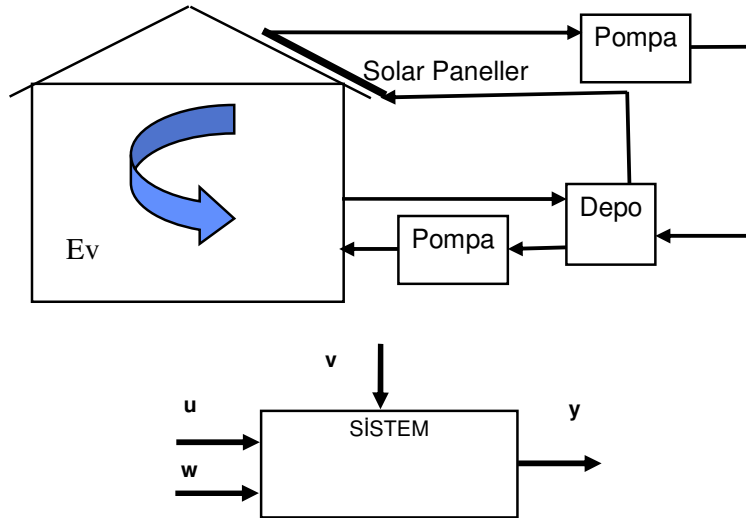
Bölüm 4’de, Bölüm 3’de el ile uygulanan ve denklemleri elde etmemizi sağlayan algoritma, MATLAB programında hazırlanan otomatikleştirilmiş uygulamasına yönelik bir arayüz çalışması ile gerçekleştirilmiştir. Bu ara yüzde kullanıcı tarafından belirtilen belirli bir frekans aralığı için elde edilerek her bir harmoniğin kazanç ve faz eğrilerinin grafiksel sunumu yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar yorumlanarak neden bu yöntemin kullanıldığı açıklanmıştır.

Son bölüm’de, ele alınan yöntemin özellikleri belirtilerek gerçekleştirilen çalışma hakkında bilgi verilmiş ve bundan sonra yapılabilecek çalışmalar hakkında önerilerde bulunulmuştur.

BÖLÜM 2. SİSTEMLER VE MODELLEME

2.1. Sistem Kavramı

Sistem, belirli amaç ya da amaçları gerçekleştirmek için bir araya gelmiş düzenli bir etkileşim içinde olan elemanlara ya da birimlere sahip bir yapı olarak ifade edilebilir. Başka bir ifadeyle, bir sistem, birbirleri ile ilgili fiziksel veya somut nesnelerin düzenlenmiş grubudur. Örneğin, Güneş sistemi, Mekanik sistem, Enerji sistemi, Otomobil fabrikası gibi. Şekil 2.1’de güneş enerjisi ile ısınan ev sistemi örnek olarak gösterilmiştir [18].



Şekil 2. 1. Güneş enerjisi ile ısınan ev

Şekil 2.1’deki bu yapıda, u ; Su pompası akış hızı, giriş (Input), y ; depo sıcaklığı, çıkış (Output), w ; solar radyasyonu (Measured Disturbance), v ; rüzgar, dış sıcaklık değişimini (Unmeasured Disturbance) ifade eder.

2.2. Otomatik Kontrol Sistemleri

Bir kontrol sistemi girdileri olan ve bu girdilere bağılı olarak işlemler gerçekleştirerek, çıktılar üreten bir yapı olarak tanımlanabilir. Bir sistem belirli parametreleri giriş olarak alır, istenilen çıkış değerini giriş parametrelerine göre değerlendirerek yakalamaya çalışır. Kontrolün, hayatımıza girdiği alanlara örnek verirsek, evde kullanılan çamaşır-bulaşık makineleri, tost makinesi, endüstriyel araştırma alanlarında kullanılan robotlar, bilgisayarlar, uzay araçları gibi.

Otomatik kontrol yöntemleri analiz ve tasarım bakımından klasik kontrol ve modern kontrol olmak üzere iki ana başlık altında incelenebilirler. Klasik kontrol teorisi Laplace veya Fourier dönüşümleri ile elde edilen sistem girişi ve çıkışı arasındaki ilişkiyi esas alırken, modern kontrol teorisi adi diferansiyel denklemleri model alır. Klasik kontrol teorisinde sadece doğrusal sistemlerin kontrolü yapılabilir, kontrolde tek giriş ve tek çıkış vardır, sistemin iç dinamiği ihmal edilir ve frekans tanım bölgesinde çalışılır. Modern kontrol teorisinde ise hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü mümkündür, birden fazla giriş ve çıkış söz konusu olabilir, tüm iç dinamikler hesaba katılır ve zaman tanım bölgesinde çalışılır [19].

2.3. Statik ve Dinamik Sistemler

Statik sistem her bir t anındaki çıkışı o andaki girişine bağılı olan sistemdir. Bu çıkış girişin geçmişteki ve gelecekteki değerlerinden tamamen bağımsızdır. Statik sistemlere en güzel örnek bir direnç elemanıdır. Eğer direncin değeri her hangi bir nedenle değişmiyorsa uygulanan bir gerilim sonucu akan akım o andaki gerilim değeri ile belirlenir [20].

Dinamik sistem ise, herhangi bir andaki çıkışı yalnız o anda uygulanan girişine bağılı olmayıp, aynı zamanda geçmişindeki girişlerinin bazılarına da bağılı olan sistemdir [20]. Bu sistemlerde materyal, enerji veya moment zamanla değişebilir. Hemen hemen bütün fiziksel sistemler, mekaniksel, elektriksel, ısı, akışkan, ekonomik, biyolojik vb. gibi dinamik sistemdir. Dinamik sistemler matematiksel olarak diferansiyel ve ayrık denklem sistemleriyle ifade edilirler. Bir dinamik sistem iki

bileşenden ibarettir: sistemin nasıl geliştiğini belirten “dinamik” ya da bir kural ve bir başlangıç koşulu ya da sistemin başladığı durum. Örneğin, bir uçak, karmaşık bir dinamik sistem gibi görülebilir. Bir uçağın sabit yükseklik ve hızda tutunması en önemli özelliklerindedir. Bundan dolayı bu değişkenler çıkış değişkenleri olarak ele alınabilir. Yükselme pozisyonu ve motor itmesi giriş değişkenleridir. Uçağın davranışı, kendi yükünden ve atmosferik şartlardan etkilenmektedir. Bu tip değişkenler de gürültü olarak değerlendirilebilir. Sabit hızı ve yönü sağlayacak bir oto pilot tasarımı için uçağın davranışının giriş ve gürültüden nasıl etkilendiğinin modellenmesi bilinmesi gerekmektedir. Hız ve yükseklik gibi bir uçağın dinamik özellikleri çok fazla değişmektedir.

2.4. Modelleme ve Simülasyon

Sistemin basitleştirilmiş, genellikle matematiksel veya hesaplanabilir yapıdaki gösterimine model adı verilir. Model, herhangi bir olayı, sistemi zaman ve mekân kısıtlaması olmaksızın incelemek için kurulan bir düzendir. Fiziksel olayların modelini kurmak ise gerçekte, bu olayları, bir takım matematiksel ifadelere dönüştürmek demektir. Tüm sistem dinamiğini tanımlayan, giriş ve çıkış bağıntıları ile durum değişkenlerini içeren ve sistemin değişkenleri arasındaki bağıntıları açıklayan diferansiyel veya integro diferansiyel denklemlerin tümüne matematiksel model denir [21].

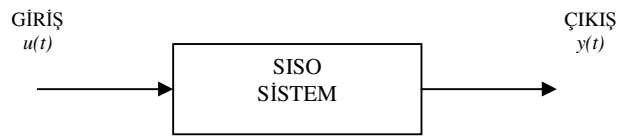
İnsan yaşamını kolaylaştırmayı amaçlayan sistemlerin tasarımında ve performanslarının artırılmasında elbette analiz tekniklerinin yeri büyüktür. En gerçekçi analiz gerçek sistem uygulaması üzerinde yapılan çalışmalardır. Ancak her uygulama sonunda (arabaların kazalardaki dayanıklılığı, uzay aracı, uçak ve helikopterin uçuşu gibi) gözlenen eksikliklerin giderilmesi yeni bir sistem uygulaması gerektirebileceğinden maliyet, iş gücü ve zaman bakımından uygun değildir. Ayrıca sistemin çalışmasına etki edecek faktörlerin normal yaşam süresi içerisinde oluşması beklenemez [22]. Örneğin, pilot eğitimi alan bir öğrencinin savaş sırasında uçak kullanımını ve karşılaşılabilecek problemleri öğrenmesi için savaş olmasını beklemek zor ve anlamsız olur. Bundan dolayı sistem modellemesine gerek

duyulur veya yapay ortamlarda simülasyonu gerçekleştirilir. Simülasyon, gerçek veya teorik fiziksel bir sistemin bilgisayar üzerinde tasarlanma ve analiz işlemidir.

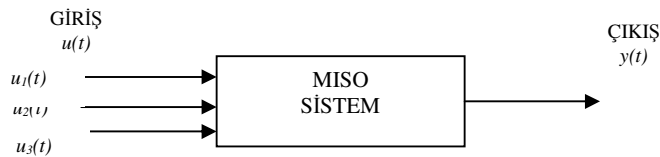
Sistemlerin benzetim programıyla uygulaması ve öğrenmesi hem zaman, hata oranı hem de maliyet kaybını ortadan kaldırır. Bilgisayar ortamında yapılan bu benzetim çalışmalarında matematiksel model haline getirilmiş olan gerçek sistem modellenerek(örneğin MATLAB’da) analiz edilir. Ayrıca matematiksel modelin kullanılması da sistem üzerinde çalışılmasını, değişkenlerin kolayca değiştirilmesini sağlar. Sistemlerin matematiksel modellerinin önemi bugün mühendislikteki tüm analiz, tasarım ve boyutlandırmada hızla artmaktadır. Modelleme işlemi, kâğıt, demir, cam veya kimyasal birleşim üretimi gibi, endüstriyel ve kontrol alanlarında, tahmin, veri haberleşmesi, ses işaretleri işleme, radar, sonar, elektrokardiyogram analizi, kanal denkleştirme, yankı bastırımı ve adaptif gürültü bastırımı gibi, işaret işleme ve haberleşme alanlarında kullanılmakta olup biyoloji, çevrebilim ve ekonomi gibi alanlarda da kullanılmaktadır [23].

2.5. Sistem Sınıfları

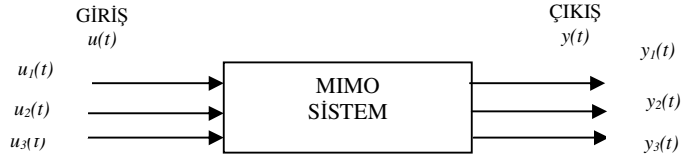
Sistemler sisteme giriş değerleri ve çıkış değerleri sayısına bağlı olarak sınıflandırılırlar. Şekil 2.2’de görüldüğü gibi sistem tek giriş- tek çıkışlı ise SISO (Single Input-Single Output), Şekil 2.3’deki gibi çok girişli- bir çıkışlı ise MISO (Multi Input-Single Output), Şekil 2.4’deki gibi ise çok girişli-çok çıkışlı ise MIMO (Multi Input-Multi Output) sistem olarak adlandırılır.



Şekil 2. 2. SISO sistem yapısı



Şekil 2. 3. MISO sistem yapısı



Şekil 2. 4. MIMO sistem yapısı

Ayrıca sistem değişkenlerinin özelliklerine ve aralarındaki ilişkilerine göre çeşitli sınıflara da ayrılırlar. Örnek bir sınıf tanımlaması aşağıda gösterilmiştir.

Örnek; Sabit Reel katsayılı adi doğrusal diferansiyel eşitlik

$$3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2 \frac{du(t)}{dt} - 3u(t) \quad (2.1)$$

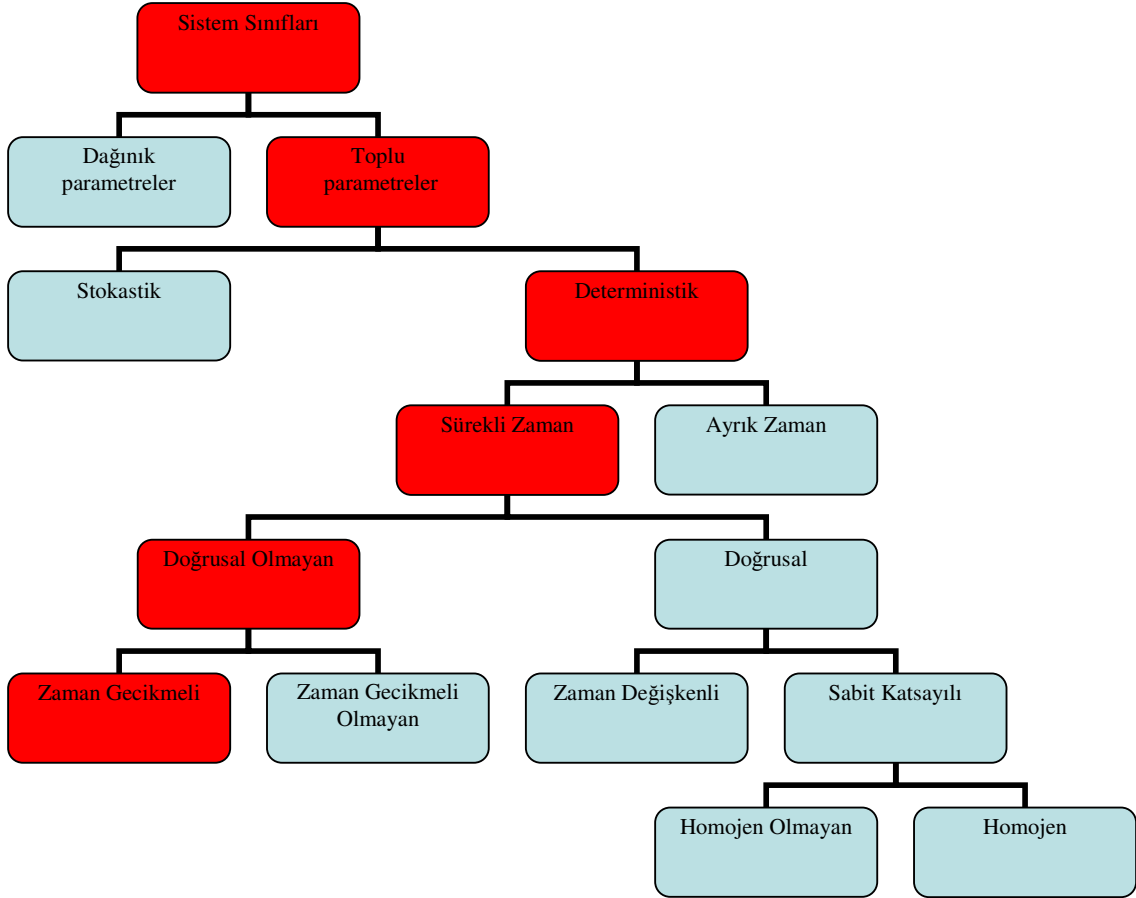
Eşitlik 2.1 aşağıdaki özelliklere sahiptir;

- 1) İki durum değişkenine sahip (ikinci derece) sistem
- 2) Doğrusal bir sistem (toplamsallık ve çarpımsallık özelliklerini sağlıyor)
- 3) Zamanla değişmeyen sistem
- 4) Toplu (lumped) parametrelili bir sistem (sistem sonlu boyutludur - $u(t)$ girişi ile $y(t)$ çıkışı birbirine 2.derece bir diferansiyel eşitlikle bağlıdır.)

Sistemlerin yapılarına göre sınıflandırılmasını şemasını Tablo 2.5’de görülmektedir. Bu tez çalışmasında uygulanan bir gemi yalpa hareketini temsil eden sistem diferansiyel denklemini eşitlik (2.2)’dir.

$$\ddot{y}(t) + 2\mu \dot{y}(t) + d_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t - \tau)^2 + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t) \quad (2.2)$$

Bu diferansiyel sistemi şema 2.5’e göre sınıflaması yapıldığında kırmızı renkli yol oluşur.



Şekil 2. 5. Denklem sistemlerinin major sınıfları [24]

2.5.1. Stokastik model

Stokastik modeller, bir veya daha fazla rast gele değişkene dayanan modellerdir. Bu yüzden gerçek sistem davranışını, yalnızca tahmini olarak ortaya koyabilirler.

2.5.2. Deterministik model

Deterministik model, rast gele olmayan girdi değişkenine sahip olan modellerdir. Deterministik modellerdeki hareketler her zaman aynıdır ve aynı çıktıları üretir.

2.5.3. Sürekli (Continuous) model

Zamana bağlı olarak, kesilmeden devam eden (arası olmayan) olaylardır. Gün içindeki bir gölün suyunun sıcaklığının düşmesi ve yükselmesi, benzinin tankere boşaltılması ve kimyasal dönüşümler örnek olarak verebilir. Matematiksel olarak modellenirken çoğu kez diferansiyel denklemlerden yararlanır. Diferansiyel denklemlerle tanımlanırlar. Sisteme ait diferansiyel denklem örneği eşitlik (2.3) ve zaman gecikmeli olan eşitlik (2.4)'de gösterilmiştir. Eşitlik (2.4)'de $y(t)$ sistemin çıkış, $u(t)$ sistemin giriş sinyalini, τ zaman gecikmesini ifade etmektedir.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \quad (2.3)$$

$$\ddot{y}(t) + 2\mu \dot{y}(t) + d_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t - \tau)^2 + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t) \quad (2.4)$$

2.5.4. Ayrık model

Ayrık bir olay (discrete), zamanın tek bir noktasında oluşan ani bir harektir. Hava alanına inen bir uçak, bankaya giren bir müşteri ya da bir döngüyü bitiren bir hareket ayrık olaylara örneklerdir. Fark denklemleriyle tanımlanırlar. Örnek tanımlama eşitlik (2.5) ve zaman gecikmeli olan (2.6)'de gösterilmiştir.

$$y(k+1) = a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) \quad (2.5)$$

$$+ b_0 u(k+1) + b_1 u(k) + \dots + b_p u(k+1-p) + v(k)$$

$$\dot{v}(t) + [2\mu + d_2 \dot{y}^2(t - \tau)] \dot{v}(t) + 2d_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t - \tau) \dot{v}(t - \tau) \quad (2.6)$$

$$+ [\omega_n^2 + 3\alpha_3 y^2(t)] v(t) = 0$$

2.6. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sistemler

2.6.1. Doğrusal sistemler

Matematiksel model denklemleri doğrusal olan sistemlere doğrusal sistemler denir. Bu sistemlerde giriş ve çıkış birbiriyle doğru orantılıdır. Örneğin giriş $u(t)$ sinyaline bir değer eklediğimizde veya çıkardığımızda aynı değişim orantılı olarak $y(t)$ sinyalinde de gözlenir. Doğrusal diferansiyel denklemler sabit katsayılı veya bağımsız değişkenin fonksiyonları olan denklemlerdir. Doğrusal sistemlerin en önemli özelliği, kendilerine üst üste katlama (süperpozisyon) ilkesinin uygulanabilmesidir. Süperpozisyon ilkesi, iki farklı $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ giriş fonksiyonunun $u_1(t) + u_2(t)$ olarak aynı anda uygulanmasından elde edilen cevap sinyalinin bu iki giriş ayrı ayrı uygulanmasından elde edilen cevap sinyallerinin toplamı eşit olmasını ifade eder. Doğrusal sistemlerin modellenmesinde genel olarak iki önemli yaklaşım, transfer fonksiyonu yaklaşımı ve durum modeli yaklaşımıdır. Transfer Fonksiyonu yaklaşımı sadece doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için geçerlidir [21]. Daha genel bir ifade olan durum modeli yaklaşımı hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemleri tanımlamak için kullanılabilen 1. derece diferansiyel denklemlerin matrisel formundan oluşurlar [21].

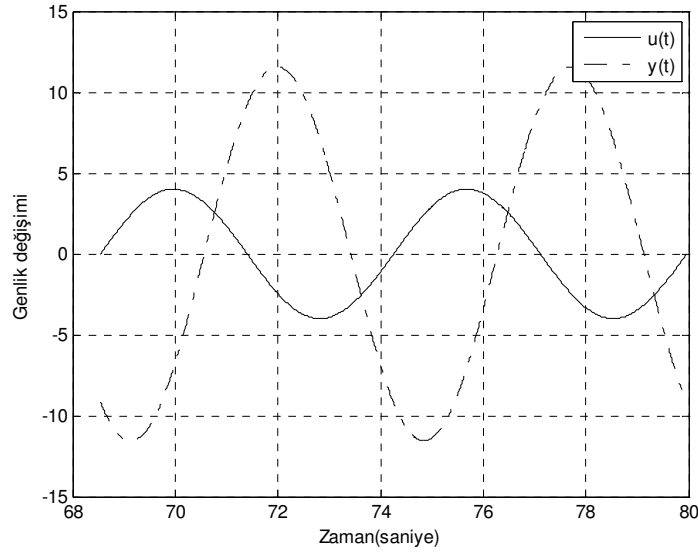
Modellemede, matematiksel modelleme dışında parametrik modelleme olarak da tanımlanabilecek bir yaklaşım daha vardır. Zaman boyutunda ve frekans boyutunda olmak üzere iki durumda gerçekleştirilebilecek olan bu yaklaşımda sistem, parametreleri bilinmeyen bir kara kutu olarak düşünülmekte ve girişine belirli işaretler uygulanarak çıkışına ilişkin bazı büyüklükler belirlenmektedir. Dolayısıyla, sistem giriş ve çıkışı arasındaki ilişki kullanılarak sistemin parametreleri kestirilmektedir. Doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı, uygulanan sinyalin frekans ve genlik bileşenlerinden bağımsızdır.



Şekil 2. 6. Doğrusal sistem bloğu

Doğrusal bir sistem bloğu yapısında olan eşitlik (2.7)'de verilen modele, giriş sinyali $u(t) = A\sin(\omega t)$ uygulanıp elde edilen sistem cevabı $y(t) = B\sin(\omega t - \Phi)$ ile birlikte karşılaştırılarak çizdirildiğinde Şekil 2.7'deki sonuç elde edilir. Görüldüğü gibi sistem girişi ile çıkışı arasında yaklaşık 2 sn lik bir faz farkı vardır.

$$\ddot{y}(t) = -c_1 \dot{y}(t) - k_1 y(t) \quad (2.7)$$



Şekil 2. 7. Bir doğrusal sistemin $y(t)$ çıkışının $u(t)$ girişine karşılık değişimi, $y(t)=A\sin(\omega t-\Phi)$

Linear sistemlerin bir alt sınıfı, linear zamanla değişmeyen sistemlerdir. Böyle sistemler için, giriş ve çıkış arasında bir zaman gecikmesi olmaz; yani; başlangıç şartları bulunmadığında, sisteme $u(t)$ sinyali uygulandığında sistem çıkışında $y(t)$ sinyali elde ediliyor ise, bundan dolayı T 'nin herhangi bir sabit değeri için sisteme $u(t-T)$ uygulandığında sistem çıkışında aynı zaman farkı doğrusallığıyla $y(t-T)$ sinyali elde edilir. Bu özellik sayesinde linear zaman sabitli sistemler trans form metotlar ile analize uygun yapılar olması sağlanır. Ayrıca analizde hem iyi bilinen frekans boyutu teknikleri, hem de zaman boyutu teknikleri ile önemli bir şekilde uygulanabilir.

2.6.2. Doğrusal olmayan sistemler

Sistemin giriş-çıkış arasındaki orantısızlık, doğrusalsızlık olarak adlandırılır. Örneğin sistemin girişindeki bir değişim çıkışında görülmeyebilir veya girişinde bir değişim olmasa bile sistem çıkışında harmonik bileşenlerden dolayı değişimler gözlenebilir. Örneğin bir şelalenin akışı gibi. Gerçekte tüm mühendislik sistemleri doğrusal olmayan bileşenler içerir. Doğrusal olmayan sistemlere ait matematiksel denklemler ve çözümleri elde etmek çok güçtür ve bazen analitik çözümler uygulanamaz. Bundan dolayı bu sistemlerde belli bir çalışma bölgesi için doğrusal kabul edilir yani doğrusallaştırma işlemi yapılır. Ancak çoğu kez bu sistemin anlamsızlaşmasına neden olur. Doğrusal olmayan bir sistem, eğer dinamik değişimi küçükse ancak o zaman doğrusal olarak modellenebilir [1]. Aksi takdirde doğrusal model, sistemin dinamik yapısını tam olarak belirleyememektedir. Genelde sistem değişkenleri çok fazla ise, sistemin doğrusal modellenebilme ihtimali düşüktür. Sistemler, doğrusal tasarlanırsa bile, sistemin içyapısındaki elemanların doğrusal olmayan yapıya sahip olması çok rastlanılan durumlardandır. Bundan dolayı gerçek hayat problemlerini çözmek için doğrusal olmayan modellere ihtiyaç duyulur. Örneğin birçok elektromekaniksel sistemler, hidrolik, pnömatik sistemler, genel çekim kanunu, iklim sistemi, doğrusal olmayan optik, akışkanlar dinamiği doğrusal olmayan değişkenler içerir.

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin davranışları incelenirken genel de zaman boyutunda tanımlanan diferansiyel denklemler kullanılır. Bu denklemler bir veya daha fazla doğrusal olmayan terimlerden oluşur. Bundan dolayı modellemede, sistemin giriş-çıkış ilişkisi diferansiyel denklemler, üstel ve logaritmik fonksiyonlar gibi doğrusal olmayan matematiksel ifadeler kullanılır. Literatürde doğrusal olmayan Volterra, bilinear ve polynomial autoregressive (PAR) modeller geliştirilmiştir.

Doğrusal olmayan sistemlere en güzel örnek model Lotka-Volterra av-avcı modelidir. Ekoloji bilimi genel olarak, türlerin popülasyon dinamiklerini daha iyi anlayabilmek için çalışmalar yapmaktadır. Besin zinciri dinamikleri hakkında, bir av ve bir avcıdan oluşan iki türü kapsayan basit bir modeli inceleyerek fikir sahibi

olabiliriz. Bu model, eşitlik (2.8) ve (2.9) de verildiği gibi, iki diferansiyel denklemden oluşan bir sistemdir.

$$\dot{x} = x = (a - by - \lambda x) \quad (2.8)$$

$$\dot{y} = y = (cx - d - \mu y) \quad (2.9)$$

Bu modelde t anındaki av popülasyonu $x(t)$, avcı popülasyonu ise $y(t)$ ile gösterilmiştir ve a, b, c, d, λ, μ sistemin parametreleridir. a ve c , her iki popülasyonda çok az olduğunda, x ve y türlerinin üreme oranıdır. Pozitif veya negatif olabilir. Negatif olmayan b ve d sabitleri popülasyonların kendileriyle etkileşimlerini ölçer [25].

$b = d = 0$ ise x ve y için Malthusian büyüme oranının sıfır olduğu varsayılır. Pozitif ise büyümenin lojistik denklem ile modellendiği söylenir. λ ve μ sabitleri ise türler arasındaki etkileşimi ölçer. Diferansiyel denklemlerin oldukça karmaşık olan bu sistemi, av ve avcı popülasyonlarının zamanla nasıl değişeceğini ve birbirleriyle etkileşimlerini tanımlar [25].

Doğrusal olmayan sistemlerde giriş ve çıkış orantılı değildir, yani süperpozisyon ilkesi uygulanamaz, birçok ögenin etkileşimi vardır. Bu ögeler birbirlerini ivmelendirici, zayıflatıcı, pekiştirici, geciktirici etkiler yapabilir. Doğrusal olmayan bir sistem girişine $u(t) = A \sin(\omega t)$ giriş sinyaline karşılık elde edilen cevap,

$$y(t) = B_1 \sin(\omega t - \phi_1) + B_2 (\sin 2\omega t - \phi_2) + B_3 (\sin 3\omega t - \phi_3) \quad (2.10)$$

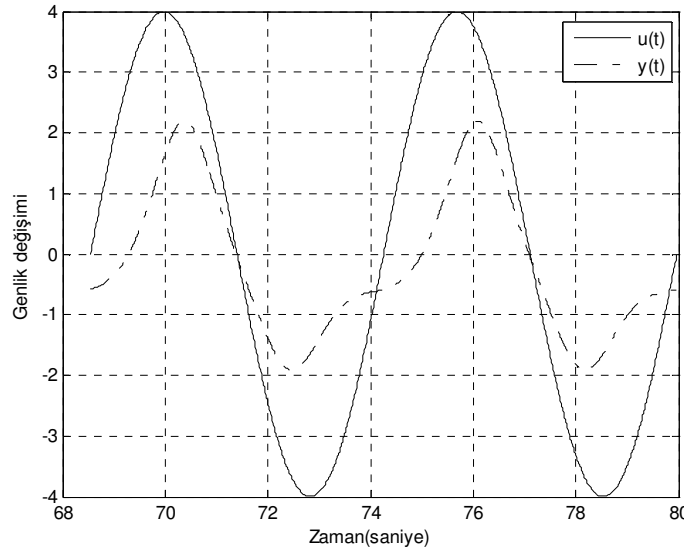
çıkış sinyali eşitlik (2.10) ara modülasyon etkilerinden dolayı poliharmonik yapısındadır.



Şekil 2. 8. Doğrusal olmayan sistem bloğu

Doğrusal olmayan bir sistem bloğu olarak eşitlik (2.11) için giriş sinyali $u(t) = A \sin(\omega t)$ uygulanarak sistem cevabı $y(t)$, $u(t)$ ile karşılaştırılarak çizdirildiğinde Şekil 2.9'daki gibi sonuç elde edilir. Görüldüğü gibi sistem girişi ile çıkışı arasında bir faz farkı vardır ve sisteme doğrusal bir sinyal uygulanmasına rağmen çıkış sinyali formunda bozulmalar olmuştur.

$$\ddot{y}(t) = -c_1 \dot{y}(t) - k_1 y(t) - k_2 y(t)^3 \quad (2.11)$$



Şekil 2. 9. Bir doğrusal olmayan sistemin $y(t)$ çıkışının $u(t)$ girişine karşılık değişimi

Yine doğrusal olmayan sistemlere örnek vermek gerekirse, bir dirençteki voltaj ve güç durumudur. Direncin ışıyan ya da yayılan enerji emilimi onun sıcaklık değerine bağlıdır, ışığın gücü yarısaydam materyalin kalınlığı boyunca iletilir. Sistemlerde sinüzoidal kararlılık yoktur, örneğin elektronik devrelerde en yüksek algılama, sinüs ve kare dalga dönüşümü, frekans çoklama gibi. Ortak elektronik bozulma; mesela gürültü aktarma ve döndürme, kesme gibi. Başka bir örnek, bir başka sinyalin bir sinyali çoklaması, genlik modülasyonu ve otomatik kazanç kontrolü doğrusal olmayan sistemlere en güzel örneklerdir.

2.7. Doğrusal Olmayan Sistem Davranışları

Doğrusal olmayan sistemleri tanımlamak için genel de zaman boyutunda tanımlanan diferansiyel denklemler kullanıldığından dolayı uygulanan giriş sinyalleri veya başlangıç durumları için elde edilen cevaplar yine zaman boyutundadır. Doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı davranışları, hem giriş sinyalinin içerdiği frekans bileşenlerine hem de genliğe bağlı olarak frekans boyutunda farklı davranışlar sergiler. Bu bağımlılık, frekans bileşenleri arasındaki intermodülasyonlar ve harmonikler arasındaki etkileşimlerden kaynaklanır. Yani zaman veya frekans boyutunda elde edilen cevaplar sistemin giriş sinyali, başlangıç koşulları ve sistem özelliklerine bağlıdır. Doğrusal olmayan sistemlerde ilerlemek zor ve yavaştır, bunun yanı sıra kararsızlıktan dolayı sistemin kötüye gidebileceği yollar vardır. Bunları sıralarsak [26] ;

2.7.1. Çoklu denge (kararlılık) durumu veya dengeli bölge

Kararlı doğrusal sistemler için, çıkış sonunda girişin olmadığına sifıra yaklaşır. Bu doğrusal olmayan sistemler için geçerli bir durum değildir. Çıkış, girişin olmadığına değerlerin birine bir noktada yaklaşabilir (bir “flip flop” bu tiptendir), ya da değerlerin sürekli dizisinin herhangi birisine bir noktada yaklaşabilir, sistemde başlangıç şartlara bağlıdır.

2.7.2. Sınırlı devirler (periyotlar)

Bir doğrusal zaman-sabiti diferansiyel sistem osilasyonu için, sanal eksen üzerinde kutupların bir çift olması gerekir. Sonuçtaki osilasyonun genliği, sistemin başlangıç şartlarının genliğiyle doğrudan orantılıdır. Bir doğrusal olmayan sistem için, böyle bir durum gerekli olan bir durum değildir. Yani bir doğrusal olmayan sistem, tam olarak sıkça, ilk koşullara bakmadan, sabit genlik ve periyot ile bir osilasyona gidebilir. Osilasyonun bu tipi limit saykıl olarak adlandırılır. Aslında gerçek hayatta, herhangi bir sabit (kararlı) osilatörün bu tipte olma zorunluluğu vardır. Sistem bir süreklilik, tekrarlı osilasyon gösterir.

2.7.3. Harmonik ya da hemen hemen bir periyodik giriş altında periyodik osilasyonlar

Peryodik bir giriş altında bir kararlı doğrusal sistem aynı periyodun çıkışını üretir. Bir doğrusal olmayan sistem için, bir periyotluk uyarım altındaki sistem davranışları tamamen farklı olabilir. Doğrusal olmayan sistemlerde çıkış sinyali bir doğrusal olmayan elemanın etkisiyle, giriş periyodunun katları veya bazı doğrusal olmayan sistemler için yaklaşık periyodik sinyaller üretebilir.

2.7.4. Atlama olayı (Jump Phenomeno)

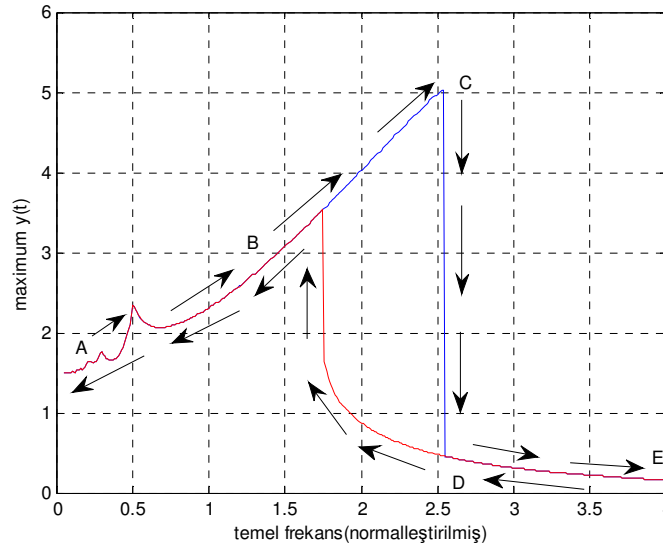
Periyodik uyarım altındaki doğrusal olmayan sistemlerde, uyarımın frekansı veya genliği değiştirildiği zaman, çıkış genliğinde ani bir değişim olur. Bu değişim artan ya da azalan bir yapıda gerçekleşir. Aynı zamanda gerçek çalışan bir sistemde göçüşü ifade eden bu ani değişim literatürde atlama (jump) olayı olarak adlandırılır. Eğer bu değişim örneğin su yüzeyinde hareket halinde bulunan bir gemi modeli için ele alınır ise geminin batış anını, çalışan bir motor için ele alınır ise motorun bozulduğunu, aşırı yüklenme sonucunda ısınarak yanmaya başladığını temsil eder.

Sistemin yapısı hakkında yeterli bilgi bulunmadığı durumlarda, sistem frekans cevabına bakılarak modellenir. Bu cevap bir sistemin belli bir frekanstaki giriş sinyaline tepkisidir. Frekans cevabı analizi sistemin davranışını inceleyerek uygun çalışma koşullarını saptamak açısından önemlidir. Sistemin girişine sinüzoidal bir sinyal uygulanır ve sistemin sinyale gösterdiği çıkışa bakılır. Rezonans Frekansı (Resonant Frequency), ω_r , Rezonans frekansı Transfer Fonksiyonuna ait en büyük genlik değerinin elde edildiği frekanstır.

Doğrusal olmayan sistemler periyodik olarak zorlanmış bir kuvvet tarafından uyarıldıklarında bazen çıkış genliklerinde kritik frekans bölgelerinde çok ani değişiklikler veya atlamalar gözlemlenir. Bu etkiyi gösteren sistemlerde, eğer sinüzoidal bir giriş sinyali gittikçe artan frekansların bir aralığı boyunca yayılırsa, burada bazı frekanslarda sistemin frekans cevabında devamsızlık olacaktır. Giriş frekansı azaldığında, burada şekilde gösterildiği gibi, bazı farklı frekanslarda bir

kesiklik olabilir. Doğrusal olmayan integro diferansiyel denklem modeli olan Duffing denkleminde atlama olayı Şekil 2.10'de gösterilmektedir. İlgili denklem modeli eşitlik (2.12)'de görülmektedir.

$$\ddot{y}(t) + c_1 \dot{y}(t) + k_1 y(t) + k_2 y(t)^3 = u(t) \quad (2.12)$$



Şekil 2. 10. Duffing Denkleminde ait görülen atlama rezonansı

Sistem cevabı elde edilmesinde başlangıç değeri olarak adlandırdığımız yer ve hız değişimi ve giriş sinyalinin değişimindeki değerler, sistem cevabının doğruluğu açısından önemlidir. Eğer bu değerler “0” alınırsa sistem hiçbir zaman doğru sonucu vermez. Bundan dolayı başlangıç değerlerinin seçiminde şöyle bir yöntem uygulanır; simülasyon başlangıcında sistemin başlangıç değerleri bilinmiyor ise sıfır olarak kabul edilirler. Daha sonra ilk frekans değeri için oldukça uzun bir simülasyon zamanı seçilir. Simülasyon sonucunda elde edilen son değerler (yer değişimi ve hız değişimi) ikinci simülasyonun başlangıç değerleri olarak kabul edilir. Bu işlem simülasyon sonuna kadar her simülasyon için aynı şekilde tekrarlanır [22].

Örnek doğrusal olmayan Duffing sisteminde başlangıç koşulları “0” alınırsa artan ve azalan frekans değerleri için aynı sonuçlar çıkar. Şekil 2.10'da gözükten yapı ortaya çıkmaz. Bundan dolayı başlangıç değerleri seçim yöntemi ile simülasyon

yapılmalıdır. Sisteme $u(t) = 2.5\sin(\omega t)$ sinyaline göre frekans minimum 0.1, maksimum 4, $\omega = [0,1:\pm 0,01:4]$ aralığında azalan ve artan frekans yönlerinde simülasyonu yapılmış ve maksimum genlik cevabı elde edilir. Sistem cevabında azalan frekans yönünde 1.7 rad/s ve artan frekans yönünde 2.6 rad/s atlama noktaları görülür.

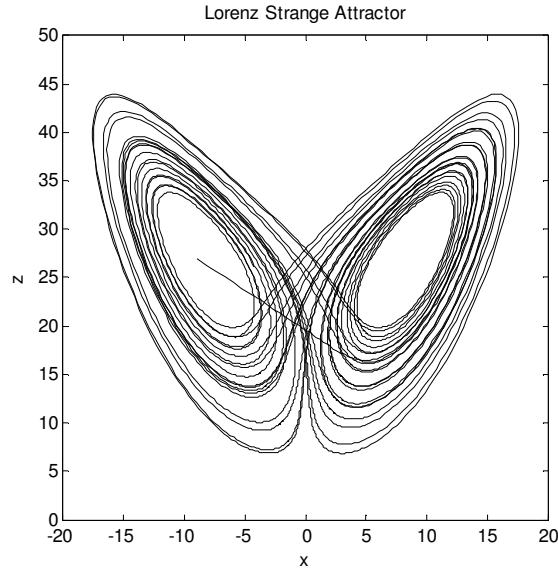
Literatürde atlama olayı ile ilgili yapılan birçok çalışma vardır; Kazumasa ve Nobuyuki doğrusal olmayan kontrol sistemlerinin atlama olayı için genel kriterleri yaptıkları çalışmada incelemişlerdir [27]. Frekans cevabının eğrilerine göre, atlama olayını daha önce bulunmayan çeşitli tiplerde sınıflandırmışlar ve basit grafiklerle göstermişlerdir. Kavanagh ve Giridharagopal ön filtreli bazı doğrusal olmayan sistemlerin atlama olayı özelliklerini belirlemiş ve doğrusal olmayan geri beslemeli sistemler için atlama olayı gösteren çok biçimli bölgeyi, lineer filtre ile temel sistem işlemlerini kullanarak düzenlemişlerdir [28]. Horvat ve arkadaşları Fuzzy kontrolör kullanarak türbün düzenleme konumlandırma sisteminde doğrusal olmayan atlama olayını önlemek için doğrusal olmayan atlama olayıyla ilgili hidroelektrik güç santralinin türbün düzenleme konumlandırma sisteminin analizini yapmışlar ve beklenen atlama olaylarını tanımlamışlardır. Sistem analizinde simülasyon metodu ve analitik metot olmak üzere iki metot kullanmışlardır [29].

2.7.5. Kaos

Kaos kavramı sözcük anlamı itibariyle günlük dilde, “karmaşıklık, düzensizlik, belirsizlik, tahmin edilemez değişim gibi tanımlanmaktadır. Kavram ile ilgili en doğru tanımı veren teorik fizikçi Jensen, kaos’u “karmaşık, doğrusal olmayan dinamik sistemlerin düzensiz ve öngörülemez davranışı” şeklinde ifade eder. Kaos, deterministik (belli sabit kurallara bağlı) bir sistemin düzensiz yani hiç beklenmedik bir şekilde davranabilmesidir. Kaos aslında birbiri ile az çok alakalı gibi gözükür fakat birbirlerinin ayrılmaz birer parçası olan birkaç düşüncenin birleşiminden oluşmaktadır; Matematikteki kaos teoremi, Kelebek etkisi, Fraktal geometri. Kaos olayı günlük hayatımızda bizim fark edemediğimiz kadar içindedir. Örneğin musluktan akan su bazen düzenli damlasa da bazen düzensiz biçimde damlar. Kalbimiz çoğu zaman düzenli atsa da bazen çarpıntı yapar. Sigara dumanı belli bir

yere kadar düzdün yükseliyor gibi gözüke de bir anda kırılmaya ve çalkalanmaya başlar. Borsada, önemli iç ve dış siyasi olaylar olmadığı zamanlar bile düzensiz gibi gözüken sürekli bir dalgalanma vardır.

Teorinin temel önermeleri şöyle sıralanabilir: Düzen düzensizliği yaratır, Düzensizliğin içinde de düzen vardır, Düzen düzensizlikten doğar, Yeni düzende uzlaşma ve bağlılık, değişimin ardından çok kısa süreli olarak kendini gösterir, Ulaşılan yeni düzen, kendiliğinden örgütlenen bir süreç vasıtasıyla kestirilemez bir yöne doğru gelişir.



Şekil 2. 11. Lorenz kelebek etkisi modeli

Kelebek Etkisi'ni 1963 yılında Edward N. Lorenz bilgisayar kullanarak hava durumuyla ilgili hesaplar yaparken 3 tane doğrusal olmayan birinci dereceden adi diferansiyel denklemi buldu. Denklemler oldukça basit olmalarına rağmen elde edilen davranışlar şaşırtacak derecede karmaşıktır. $dx/dt = s(y-x)$, $dy/dt = rx-y-xz$, $dz/dt = xy - bz$. Önerilen çalışma parametreleri de $s=10$, $r=28$ ve $b=8/3$ 'tür. Bu denklemler çizdirilirse ne tahmin edilebilir ne de rasgele olan ve birbiri etrafında dolanan ama kesişmeyen yörünge salınımları (pendulum) elde edilir. Lorenz bu denklemleri bulduğunda hava tahminleri ile ilgilenmektedir ve bu denklemler onun hava davranışlarını modellemesini sağlamıştır.

Lorenz, dıştan düzensiz olarak görünen ama içsel bir düzene sahip olan kaotik sistemlerin iki temel özelliğini öne sürerek “kaos teorisi”ni açıklamaya çalışmıştır: a) Başlangıç Durumuna Hassas Bağımlılık: ile ifade edilmek istenen daha sonraları “kelebek etkisi”-Amazonlarda bir kelebeğin kanat çırpmasıyla havada oluşacak dalgaların dünyanın bir diğer ucunda bir müddet sonra kasırgaya neden olması olarak adlandırılmıştır. b) Rasgele Olmamak: Örneğin, sigara dumanının bir takım düzensiz helezonlar halinde dönerek yükselmesinde, bayrağın rüzgardaki dalgalanışında, otoyolda birbirinin peşi sıra seyreden arabaların davranışında hep kaos ortaya çıkmaktadır.

Duffing osilatörü, kaotik bir osilatördür. Duffing osilatörü bu hali ile doğrusal olmayan dinamiklerin ilk örnek uygulamalarından biridir. Bu sistem yay, doğrusal olmayan elektronik devreler, süper iletken Josephson parametrik kuvvetlendirici, plazmalardaki iyonize dalgalar gibi fiziksel sistemler için model olarak kullanılmaktadır.

Uçar, bir değişken ile otonom sürekli zaman fark-diferansiyel denklemi kullanılarak tanımlanan basit bir model kaos üretici olarak sunmuş ve üzerinde çalışmıştır. Oluşturduğu yeni bir diyagram ile model parametrelerinin bir aralığı için istenen çözüm durumlarını elde edilmesini sağlar. Niteliği korunmuş çözüm modu hatları sunulmuş ve diyagramda gösterilmiştir. Kaos üretici, kapsamlı simülasyonlar yapmaksızın, istenen davranışların seçilmesini sağlar [30]. Yine Uçar, kaos çalışmaları için örnek bir model geliştirmiş, zaman gecikmesi, doğrusal olmayan eleman ve bir durum içeren basit bir model tanımlamıştır [31].

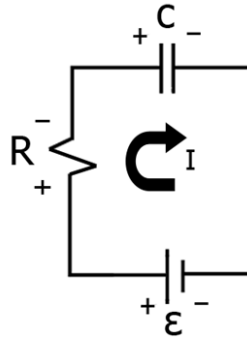
2.8. Sistemlerde Zaman Gecikmesi

Sistemlerde zaman çok önemli bir kavramdır, istenilen işin veya sonucun zamanında gerçekleşmesi sistemlerin güvenli ve düzgün çalışmasını sağlar. Fakat sistemlerde algılanması gereken cevabın doğrudan ölçülememesi bir zaman gecikmesine sebep olur, istem dışı olan birçok durum sonucu bu zamanın geç olması durumuna zaman gecikmesi denir ve bir sistem tasarlanırken dikkat edilmesi gereken en önemli birim zaman gecikmesidir. Zaman gecikmesine dikkat edilmezse can ve mal kaybına

neden olabilir. Örneğin füze, savaş sistemleri, uçak, görüntü işleme gibi uygulamalarda zaman gecikmesi kontrolü önemlidir. Zaman gecikmesi sistemlerde e^{-t} ile gösterilir.

Örnek 1: RC Devresi

Şekil 2.12’de görülen RC devresi seri bağlı direnç ve kapasite elemanından oluşmaktadır. Kondansatörün uçları arasına bir gerilim farkı uygulandığında, devreden akım geçer. Eğer kondansatör uçlarında gerilim değişikliği olmazsa bir süre sonra kondansatör dolar ve akım geçmemeye başlar. Uçlar arasındaki gerilim değiştiğinde ise devreden yeniden akım geçer. Yani kondansatörün akımı, uçları arasındaki gerilimin değişimine bağlıdır. Bundan dolayı belirli bir zaman gecikmesi oluşur. Bu zaman gecikmesi $\tau = RC$ ifade edilir. RC zaman sabiti bir RC devresinde geçici hal tepkisinin ne kadar süreceği hakkında bilgi verir. Dolu bir C kapasitesi bir R direnci üzerinden boşaltılmak istenirse veya boş bir C kapasitesi bir R direnci üzerinden doldurulmak istenirse bu işlemlerin her biri $5*RC$ kadar zaman alacaktır. $5RC$ kadar vakit geçtiğinde $e^{-5RC/RC}$ ifadesinin alacağı değer çok küçük olacağından “0” olduğu ve artık etki etmediği kabul edilir. Kondansatör ilk anda geçirebileceği maksimum akımı geçirir, $5RC$ zaman sonra gerilimi kendisini besleyen kaynakla aynı olacağı ve gerilim farkı olmadığından akım durur, “0” olur.



Şekil 2. 12. RC devresi

I yönünde, $-\varepsilon + I(t)R + V(t) = 0$ olur. Buradaki $I(t)$ t anında devrede dolaşan akım ve $V(t)$ t anındaki kapasite gerilimidir. Kapasitenin tanım denklemi $Q = C.V$ olduğundan dolayı her iki tarafın t ye göre türevini alırsak eşitlik 2.13’ deki gibi olur.

$$\frac{d_q}{d_t} = C \cdot \frac{dV(t)}{dt} \quad (2.13)$$

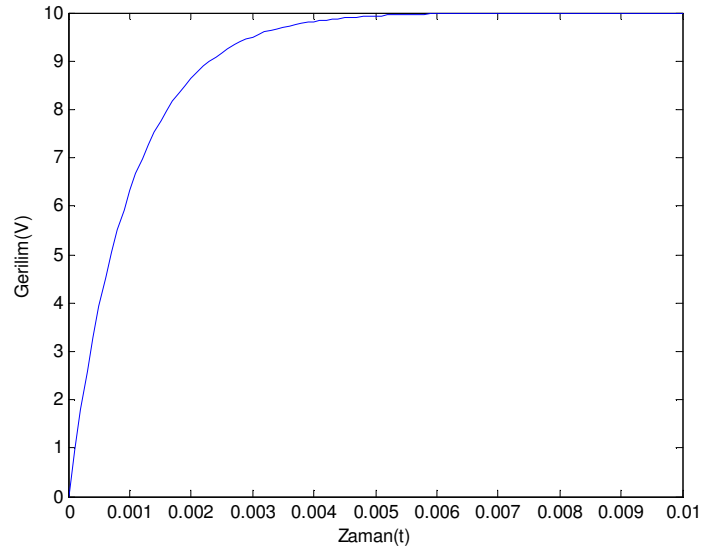
Yani t anındaki kapasite akımının voltajı cinsinden değeri eşitlik 2.14' deki gibi olur.

$$I(t) = C \cdot \frac{dV(t)}{dt} \quad (2.14)$$

Buna göre eşitliğimiz $-\varepsilon + C \cdot \frac{dV(t)}{dt} \cdot R + V(t) = 0$ haline gelir. Diferansiyel

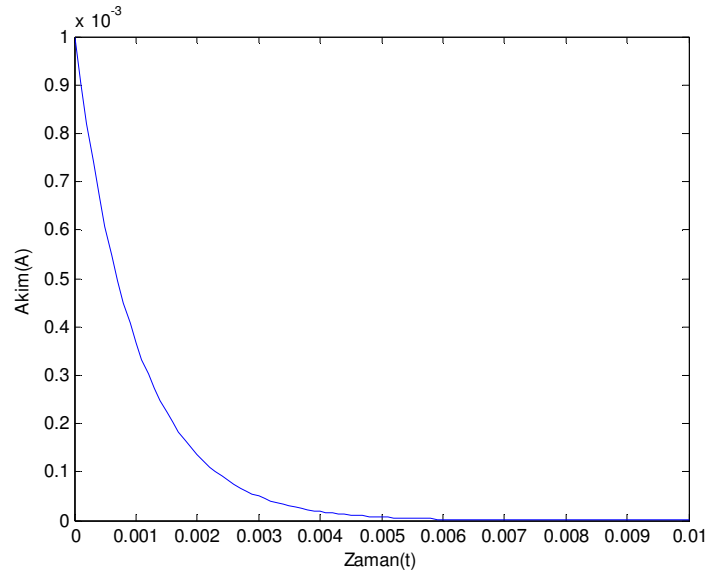
denklemin çözümü yapabilmek için $\frac{dV(t)}{dt}$ ifadesi yerine V' yazarsak eşitlik $C.R.V' +$

$V = \varepsilon$ haline gelir. Diferansiyel çözümü yapıldığında $V(t) = (V_0 - \varepsilon) \cdot e^{-t/RC} + \varepsilon$ eşitliği elde edilir. Denklemi $V_0 = 0$, kaynağımız $\varepsilon = 10V$, $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 0.1 \mu F$ (RC zaman sabitimiz $= 10000\Omega \cdot 0.1 \mu F = 1 \text{ ms}$) değerlerine göre Matlab programında elde edilen grafiksel çizimi Şekil 2.13' de görülmektedir.



Şekil 2. 13. RC devresi gerilimin zamana göre değişim grafiği

Aynı şekilde akım-zaman grafiği de Şekil 2.14'de görülmektedir.



Şekil 2. 14. RC devresi akımın zamana göre değişim grafiği

Örnek 2:

Günlük hayattan bir örnek verilebilir, cep telefonundan herhangi birine mesaj gönderildiğinde mesaj'ın diğer telefona anında değil de belli bir zaman gecikmesiyle gittiği görülür. Mesajın gönderildiği anda saat 14:32 ise karşıdaki kişi mesajı aldığı anda saat 14:35 olabilir.



Saat=14:32



Saat=14:35

Şekil 2. 15. Cep telefonlarında zaman gecikmesi olayı

Örnek 3:

Zaman gecikmesi ile trafikte de karşılaşılabilir. Kırmızı ışıkta durulduğunda geçmek için yeşil ışığın yanması beklenir ve yeşil ışık yandığı zaman o anda ilk geçen en

öndeki arabadır, ikinci araba belli bir zaman gecikmesi mesela 5 sn sonra, 3.araba ise ilk arabaya göre 6 sn, ikinci arabaya göre 3 sn zaman gecikmesiyle geçer.



Şekil 2. 16. Trafikte zaman gecikmesi olayı

Zaman gecikmeli diferansiyel denklemleri fonksiyon uzaylarında ilk gösteren Sovyet matematikçi Krasowsky'dir. İngiliz matematikçi George Boole, sonlu fark hesabı adlı kitabında (1860), karma fark denklemler dediği, türevler ve farklar içeren bazı diferansiyel fark denklemlerine yer vermiştir [32].

$$\Delta y' - a\Delta y - by' + aby = 0 \quad (2.15)$$

Zaman gecikmeli denklemlerin ortaya çıkışı ve analizi ile ilgili daha detaylı bilgi için kaynak [32]'ye bakılabilir.

Zaman gecikmeli diferansiyel denklem kullanılarak bir kontrol sisteminin modellenmesine ilk örneklerden biri, Minorsky'nin II. Dünya Savaşı sırasında gemilerin dalgalardan dolayı sağa sola yalpalanmasını önleyebilmek için yaptığı çalışmadır. Bu modele göre, θ geminin denge durumunda bulunduğu normal pozisyon ile yana yatma durumundaki pozisyonu arasındaki acıyı gösterir. Minorsky'nin yaptığı modellemeye göre; gemi, denge durumunda kalabilmek için ağırlık sağlaması amacıyla içi suyla doldurulup boşaltılabilen tanklar içermektedir. Bununla birlikte geminin yana yatmasını engelleyebilmek için, suyun bir tanktan diğerine pompalanarak boşaltılmasını sağlayan bir mekanizma bulunmaktadır. Böylece dalgaların gemi üzerindeki etkisi ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Doğal olarak, bu mekanizmanın çalışması belli bir t anında aniden gerçekleşen bir olay değildir, yani suyun bir tanktan diğerine boşaltılabilmesi için belli bir süre geçmesi gerekir. Bu süre τ ile gösterilecek olursa, geminin dengede kalabilmesi, geminin $t - \tau$ anındaki durumuna bağlıdır. Minorsky, tüm bunları göz önünde bulundurarak yapmış olduğu modelleme sonucu, aşağıdaki denklemi elde etmiştir [33].

$$y''(t) + by'(t) + ay'(t-r) + ky(t) = 0 \quad (2.16)$$

$$m\theta''(t) + b\theta'(t) + q\theta'(t-\tau) + k\theta(t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.17)$$

$$\theta(t) = \phi(t), \quad t \leq 0$$

Daha öncede bahsedildiği gibi, sistemlerin tasarımında ve incelenmesinde analiz teknikleri önemlidir. Doğrusal olmayan bir sistemin davranışı incelenirken sistem değişkenlerinin doğru tanımlanması önemlidir. Doğrusal olmayan sistemler zaman boyutunda integro-diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Tanımlanan sistemlerin girişine belli bir frekansta uygulanarak elde edilen zaman boyutundaki sinyaller ile sistem davranışlarını incelemek oldukça zordur ve sistemin farklı frekanslardaki sergiledikleri davranışlara ihtiyaç duyulur. Bundan dolayı doğrusal olmayan sistemler frekans boyutunda analiz edilirler. Böylece doğrusal olmayan sistem davranışları olan harmonik üretimi, atlama gibi olaylar daha kolay ifade edilirler. Bölüm 3' de doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevabı davranışlarının analizinde en yaygın olarak kullanılan genelleştirilmiş harmonik denge metodu(GHDM) anlatılmış, denge denklemlerini çıkarılmasını kolaylaştıran özel bir algoritma gösterilmiş ve bir sistem üzerinde uygulaması yapılarak sonuçlar elde edilmiştir.

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HARMONİK DENGE METODU

Dinamik sistemler genellikle bir zaman alanı içerisinde modellenmesine rağmen, sistemin frekans cevap karakteristiklerini belirlemek çoğunlukla daha faydalıdır. Özellikle doğrusal durumunda frekans cevap karakteristikleri, sistem davranışlarının belirli bir frekans aralığı için kazanç ve faz eğrilerinin grafiksel olarak canlandırılmasına ve kontrol veya sinyal işleme tasarımı için temel oluşturulmasına imkân vermektedir. Aynı durum doğrusal olmayan frekans alanı karakteristikleri, daha karmaşık ve hem matematiksel gösterim hem de pratik hesaplanması açısından daha zor olan doğrusal olmama durumu içinde geçerlidir. Son zamanlarda giderek artan ilgi odağı olmuş Volterra transfer fonksiyon yaklaşımının doğrusal olmama durumu içinde daha zor olmasının en büyük nedenlerinden biri bu formun çok boyutlu yapısı değerlendirmeyi daha zorlaştırmakta ve sistem dönüşümü olmayan sonsuz seri olarak gösterilmektedir [34-36]. Bunun sonucunda 2. ve 3. boyutun üzerinde boyutlar ortaya çıkabilmekte ve bu boyutlar grafiksel olarak gösterilememektedir. Ayrıca bazen karmaşıklıktan dolayı elde edilen 3. boyut grafikleride yorumlamayı zorlaştırmaktadır. Bundan dolayı doğrusal olmayan osilasyonlarda ve kontrol sistem uygulamaları için sistem tanımlama fonksiyonu hesaplamasında sıklıkla kullanılan harmonik denge analizine dayanılarak daha az genel ama daha pratik birçok yaklaşım geliştirilmiştir [37-39].

Doğrusal olmayan sisteme uygulanan bir periyodik giriş sinyali için elde edilen çıkış bileşenleri teorik olarak sonsuz sayıda harmonik içerebilir. Bundan dolayı çıkış sinyali etkisinin ihmal edilebilir bir noktada kesilerek belirtilen sayıda harmonik ile çıkış temsil edilebilir. Basitçe Geleneksel harmonik denge metodu giriş ve çıkışa ait sinüzoidaller formundaki sinyallerin doğrusal olmayan diferansiyel denklemde yerine konularak gerçekleştirilen açılımda benzer frekansların denklemin diğer tarafına eşitlenerek bulunması mantığındadır. Metodun uygulamasında elde edilen

açılımdan benzer frekansların seçilmesiyle çıkışta kabul edilen her bir frekans bileşeni için denge denklemleri olarak adlandırılan denklemler elde edilir. Böylece çıkış sinyali formuna ait bilinmeyenlerin tespit edilmesi sağlanabilir. Geleneksel uygulamalarda harmonik denge metodu basit gözükse de, belirlenen bir noktada kesilmiş Fourier serilerinden oluşan genel dalga formuna ait çok fazla harmoniğin giderek artan karmaşıklığından ve yüksek dereceli doğrusalsızlığa gittiği düşünüldüğünde eksik yönleri olan bir yöntemdir [40]. GHDM uygulamalarında kabul edilen sinyal formlarındaki harmonik sayısı veya doğrusal olmayan terimlere ait dereceler arttıkça elde edilen açılımlardaki terim sayısı arttığından işlem karmaşıklaşır. Bu yüzden denge denklemlerini elde etmek zorlaşır. Yani basitçe harmonik denge analizinin en büyük problemi üstsel olarak artan bir karmaşıklık sorunudur. Bu durumda karmaşıklığın azaltılması için harmonik sayısını azaltma işlemi yapıldığı zaman ise doğrusal olmayan etkilerin tanımlanmasında etkisi yüksek olan harmoniklerin ihmal edilmesinden sapma gibi bir durumu ortaya çıkarmaktadır. İşte bu klasik uygulamalarda karşılaşılan probleme çözüm olması ve verilen bir sistem için harmonik denge eşitliği elde etmenin getirdiği hesaplama yükünü azaltmaya yönelik bir algoritma geliştirilmiştir [12]. Tasarlanan algoritmada temel olarak, harmonik genişlemenin tamamında, sadece terimlerin küçük bir parçasının verilen frekansta denge denkleminde katkı sağladığı düşünüldüğünde, geri kalan kısmı değerlendirmeye ihtiyaç olmadığı için, sadece ilgili kısmı seçme işlemi yapılır. Yani denklemler elde edilirken yalnızca ilgili frekanstaki terimler üretilerek açılımın karmaşıklığı azaltılır. Ayrıca algoritma, analizi gerçekleştirilen doğrusal olmayan sistemler genel olarak integro diferansiyel denklem yapısında ve zaman gecikmeli olduğundan genel bir sınıfın terimlerini de kapsar. Her analiz edilecek farklı sistem için açılımların yeniden gerçekleştirilip denklemlerin oluşturulması gerekir. Bundan dolayı başka bir avantaj olarak kolayca otomatikleştirilen bu metod ile denklem katsayıları ve genel harmonik sinyal formunun karmaşık genliklerinde denge denklemlerinin doğrudan yazılabilmesi sağlanır. Daha sonra genliğe bağlı fonksiyonlar hesaplanarak sisteme ait frekans cevabı elde edilir. Kullanılan metoda ait algoritma hem el ile hem de sembolik programlama dillerinden biri ile (Mathematica, Maple, Matlab gibi) matematiksel olarak kodlanabilir. Gerçekleştirilen çalışmada bu işlemler için Matlab yazılım programı tercih edilmiştir.

Bu bölümde, genelleştirilmiş harmonik denge metodu kullanılarak doğrusal olmayan zaman gecikmeli bir diferansiyel denklem modeli için frekans cevabı analizi pratik bir şekilde yapılmıştır. Böylece metod sistemin genel formdaki bir modeli ve yine genel formdaki sinyaller için tanımlanması, farklı sistemler için uygulamada kolaylık sağlar. Harmonik denge denklemlerinin hesaplamasında, giriş ve çıkış için kabul edilen sinyalin, sistemin matematiksel modelinde yerine koyulmasıyla elde edilen açılımda benzer frekansların denklemin diğer tarafına eşitlenmesi işlemi yapılır [13]. Öncelikle GHDM’da temel alınan doğrusal olmayan zaman gecikmeli sistemlere ait zaman boyutunda genel bir formun sunumu yapılacaktır. Seçilen örnek bir sistem üzerinde klasik hesaplama gösterilecektir. Analiz sonucunda elde edilen denge denklemleri doğrusal olmayan forma sahip denklem takımlarını ifade eder. Daha sonra bu denge denklemlerini çözümlene yöntemi olarak bu çalışmada kullanılan Nelder-Mead minimizasyon algoritması hakkında bilgi verilerek örnek çözümler gerçekleştirilecektir. Yöntemin doğruluğu açısından sisteme ait denklemler verilen bir frekans aralığı için frekans cevabı analizi yapılarak her bir bileşen için genlik ve faz grafikleri elde edilecektir.

3.1. Zaman Alanında Doğrusal Olmayan Sistemler

Kendi fiziksel yapılarına bağlı olan dinamik sistemlerin modellenmesi genellikle sürekli zaman alanı içinde kısmi ve adi diferansiyel denklemler ile ifade edilir. Zaman boyutunda sunulan modeller dinamik sistemin gerçekte sergilediği doğrusal olmayan davranışa en yakın tanımlamayı yaparlar, örneğin ters tepki, sönüm gibi fiziksel davranışları çok iyi ifade ederler. Genel olarak tek girişli-tek çıkışlı sistemler NIDE model olarak adlandırılan eşitlik (3.1)’de tanımlanan polinom formdaki diferansiyel denklemler ile ifade edilirler.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u(t) = 0 \quad (3.1)$$

Burada D diferansiyel operatörü, l_i türev mertebesini ve $u(t)$ ile $y(t)$ ise sırasıyla girdi/çıkış sinyallerini, p çıkışa ait üs derecesini, q girişe ait üs derecesini,

$c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q})$ denklem terimlerinin katsayılarını belirtmektedir. Her terim ilgili katsayısı $c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q})$ ile çarpılarak $D^l y(t)$ içindeki p 'inci sıra elemanından ve $D^l u(t)$ içindeki q 'uncu sıra elemanından elde edilir. Çarpım halindeki toplamlar, bütün bu tip terimleri maksimum M 'inci derece doğrusalsızlık seviyesine kadar oluşturur [13].

Her ne kadar (3.1) numaralı denklem doğrusal olmayan diferansiyel sistemlerin geniş bir sınıfını temsil etse de, gecikmeli veya zaman gecikmeli diferansiyel sistemleri kapsamamaktadır. Bu sistemler çeşitli uygulamalar kapsamında ortaya çıkmış olup, biyolojik, denizsel ve işlem kontrol gibi sistemlerin betimlemesinde kullanılmaktadır. Bu bağlamda Zaman Gecikmeli Diferansiyel Eşitlikler (TDDE), (3.1) nolu eşitliğin bir uzantısı olup, eşitlik (3.2) gibi yazılabilirler.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^{L} \sum_{k_1, k_{p+q}=1}^K c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}; k_1, \dots, k_{p+q}) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t - k_i) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u(t - k_i) = 0 \quad (3.2)$$

Eşitlik (3.2)'de k_i sinyal gecikmelerini ifade etmektedir. Bu gecikmeler önemlidir çünkü bunlar diferansiyel işaretler arasındaki faz ilişkisini etkileyerek sistemin tepki ve stabilitesi üzerinde önemli bir etki oluşturabilirler.

ZGDE sistemine özel bir örnek olarak bir geminin yalpa hareketlerini temsil eden doğrusal olmayan diferansiyel eşitlik (3.3) verilebilir.

$$\ddot{y}(t) + 2\mu \dot{y}(t) + d_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t - \tau)^2 + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = u(t) \quad (3.3)$$

Eşitlik (3.3) incelendiğinde doğrusal ve doğrusal olmayan kübik terimlerden oluştuğu görülmektedir. Doğrusal terimler kendi aralarında giriş ve çıkışa ait olan terimler, kübik terimler ise yine kendi arasında çıkışa ait olan terimler olmak üzere alt gruba ayrılabilirler.

Eşitlik (3.3)' de $y(t)$ çıkış yalpa açısı, $u(t)$ ise giriş dalgasını temsil etmektedir. Burada kübik sertlik (stiffness) ifadesi omurga yapısından kaynaklanmaktadır ve kübik sönüm (damping) ifadesi ise geminin omurgası civarında oluşan türbülans nedeniyle doğrusal olmayan sönümü ifade eder. Bir zaman gecikmesi olarak τ (to), geminin omurgası civarında oluşan türbülans içerisindeki boşlukların etkisini (kavitasyon etkisi) belirtmek üzere kübik sönüm terimi içerisinde yer almaktadır. Bu kapsamda eşitlik (3.3), eşitlik (3.2)'deki genel formda yerine koyularak aşağıdaki model katsayıları elde edilir;

$$\left. \begin{aligned} c_{1,0}(2;0) &= 1 & c_{3,0}(1,1,1;0, \tau, \tau) &= d_2 \\ c_{1,0}(1;0) &= 2\mu & c_{3,0}(0,0,0;0,0,0) &= \alpha_3 \\ c_{1,0}(0;0) &= \omega_n^2 & \text{diğer durumlarda } c_{p,q} &= 0 \\ c_{0,1}(0;0) &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

NIDE modelde, ' p ' indisi çıkışa ait doğrusal olmama derecesini, ' q ' indisi ise girişe ait doğrusal olmama derecesini belirttiğine göre yalnızca girişe ait terimler bulunurken çıkışa ait terimleri belirten p indisi sıfıra eşitlenir ve benzer şekilde yalnızca çıkışa ait terimler bulunurken girişe ait terimleri belirten q indisi sıfıra eşitlenir. Doğrusal olmama seviyesi eşitlik (3.3)'de görüldüğü gibi en yüksek üs derecesi $M=3$ değeridir. Böylece $m=p+q$ değişkenleri için en çok M değerini alır.

Örneğin, eşitlik (3.3)'ün $\ddot{y}(t)$ teriminin NIDE model katsayısı belirlenirken, çıkışa ait ifadenin üssü '1' olduğu için doğrusal olmama derecesi $p=1$ alınır, girişe ait bir ifade bulunmadığı için $q=0$ alınır. Çıkış teriminin türev derecesi '2' ve yine giriş terimi olmadığı için giriş'e ait bir türev derecesi belirtilmez. Terimin katsayısı $(l, \dots, l_{p+q=1}) = l_1 = 2$ olarak hesaplanır. Ayrıca terimde zaman gecikmesi olmadığı için $k = 0$ alınır. Eşitlik (3.5) de görüldüğü gibi terimin katsayısı $c_{1,0}(2;0) = 1$ olarak hesaplanır.

$$\ddot{y}(t) = c_{1,0}(2;0) \prod_{i=1}^1 D^i y(t) \prod_{i=p+1}^{1+0} D^i u(t)$$

$$\begin{aligned}
&= c_{1,0}(2;0)D^2 y(t) \\
&= c_{1,0}(2;0)\ddot{y}(t)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$ teriminin NIDE model katsayısı belirlenirken, çıkışa ait ifadenin üssü '3' olduğu için doğrusal olmama derecesi $p=3$ alınır, girişe ait bir ifade bulunmadığı için $q=0$ alınır. Çıkış teriminin türev derecesi '1' ve yine giriş terimi olmadığı için giriş'e ait bir türev derecesi belirtilmez. $(l_1, \dots, l_{p+q}) = (l_1, l_2, l_3) = (1, 1, 1)$ olarak hesaplanır. Zaman gecikmesi $(k_1, \dots, k_{p+q}) = (k_1, k_2, k_3) = (0, \tau, \tau)$ alınır. Dolayısıyla NIDE model katsayısı $c_{3,0}(1,1,1;0, \tau, \tau)$ olarak bulunur. Doğrulamak için ifadeleri genel terimi temsil eden denklemde yerine koyulursa terim ve katsayısını eşitlik (3.6) gibi elde ederiz ve terimin katsayısı $c_{3,0}(1,1,1;0, \tau, \tau) = d_2$ olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2 &= c_{3,0}(1,1,1;0, \tau, \tau) \prod_{i=1}^3 D^{l_i} y(t-k_i) \prod_{i=p+1}^{3+0} D^{l_i} u(t-k_i) \\
&= c_{3,0}(1,1,1;0, \tau, \tau) D^1 y(t-0) D^1 y(t-\tau) D^1 y(t-\tau) \\
&= c_{3,0}(1,1,1;0, \tau, \tau) \dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Denklemin sahip olduğu terimler doğrusal ve kübik terimler olmak üzere iki gruba ayrılabilir. Diğer terimler için işlemler ve NIDE model katsayıları Tablo 3.1, 3.2, 3.3 ve 3.4' de verilmiştir.

Tablo 3. 1. Eşitlik (3.3) için doğrusal giriş teriminin katsayıları

DOĞRUSAL TERİMLER			
Giriş ($p=0, q=1$)			
Terim	Türev derecesi $l = (l_1)$	Zaman gecikmesi $k = (k_1)$	Katsayı $c_{p,q}(l; k)$
$u(t)$	0	0	$c_{0,1}(0;0) = -1$

Tablo 3. 2. Eşitlik (3.3) doğrusal çıkış terimlerinin katsayıları

DOĞRUSAL TERİMLER			
Çıkış ($p=1, q=0$)			
Terim	Türev derecesi $l = (l_1)$	Zaman gecikmesi $k = (k_1)$	Katsayı $c_{p,q}(l; k)$
$y(t)$	0	0	$c_{1,0}(0;0) = \omega_n^2$
$\dot{y}(t)$	1	0	$c_{1,0}(1;0) = 2\mu$
$\ddot{y}(t)$	2	0	$c_{1,0}(2;0) = 1$

Tablo 3. 3. Eşitlik (3.3) kübik çıkış çarpımı teriminin katsayıları

KÜBİK TERİMLER			
Çıkış Çarpımı ($p+q=3$)			
Terim	Türev derecesi $l = (l_1, l_2, l_3)$	Zaman gecikmesi $k = (k_1, k_2, k_3)$	Katsayı $c_{p,q}(l; k)$
$d_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t - \tau)^2$	(1,1,1)	(0, τ , τ)	$c_{3,0}(1,1,1; 0, \tau, \tau) = d_2$

Tablo 3. 4. Eşitlik (3.3) kübik çıkış teriminin katsayıları

KÜBİK TERİMLER			
Çıkış ($p=3, q=0$)			
Terim	Türev derecesi $l = (l_1, l_2, l_3)$	Zaman gecikmesi $k = (k_1, k_2, k_3)$	Katsayı $c_{p,q}(l; k)$
$y(t)^3$	(0,0,0)	(0,0,0)	$c_{3,0}(0,0,0; 0,0,0) = \alpha_3$

3.2. Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Harmonik Denge Analizi

Giriş frekanslarının sisteme bağımsız olarak dâhil edildiği doğrusal sistemlerin aksine doğrusal olmayan sistemlerin cevabı adeta parçalar arası bir olaydır. Daha açık ifade edersek herhangi bir frekanstaki çıktı, potansiyel olarak belirli genliğe, frekansa ve uyarı sinyalinde bulunana tüm bileşenlerin fazına bağlıdır. Bu kapsamda klasik harmonik denge analizi giriş merkezli olup, eğer başlangıç varsayımları değişirse sistem üzerinde sonuçların tekrar çalışılması gerekmektedir. Klasik olarak

harmonik denge analizi temsil etmek için; tepesi kesilmiş Frouier serilerinden oluşan $x(t)$ sinyalinin genel bir sınıfı terimleri içerisinde tanımlanmış yeni bir algoritma, eşitlik (3.7)'de ifade edilebilir.

$$x(t) = a_{x_{dc}} + \sum_{r=1}^{R_x} a_{x_r} \cos(\omega_r t + \phi_{x_r}) \quad (3.7)$$

Harmonik denge metodunda giriş ve çıkış sinyalleri sinüsoidal sinyallerin toplamı şeklinde ifade edildiğinden ve $x(t)$ periyodik bir sinyal olduğundan, $a_{x_{dc}}$, a dc karşılığı ile beraber, a_{x_r} genliğe ve ϕ_{x_r} faza sahip olan R_x adet sinüsoidalarının toplamı olarak düzenlenebilir. Bu ifade üssel formda daha basit ifadeyle eşitlik (3.8)'de yazılabilir.

$$x(t) = \sum_{r=-R_x}^{R_x} \frac{A_{x_r}}{2} e^{j\omega_r t} \quad (3.8)$$

Eşitlik (3.8)'deki düzenlenmiş ifadeyi elde etmek için eşitlik (3.7) yi daha açık bir ifadeyle yazarsak;

$$x(t) = a_{x_1} \cos(\omega_1 t + \phi_{x_1}) + a_{x_2} \cos(\omega_2 t + \phi_{x_2}) + \dots + a_{x_{R_x}} \cos(\omega_{R_x} t + \phi_{x_{R_x}}) + a_{x_{dc}} \quad (3.9)$$

Eşitlik (3.9)'daki $\cos(\omega_1 t + \phi_{x_1})$ toplamı ifadesi eşitlik (3.10)'daki matematiksel formülü kullanılarak değiştirilebilir.

$$\cos(\omega_1 t + \phi_{x_1}) = \frac{e^{i\omega_1 t + \phi_{x_1}} + e^{-i\omega_1 t + \phi_{x_1}}}{2} \quad (3.10)$$

(3.10) eşitliği ve $\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ eşitliği kullanılarak (3.9) için ilk elemanı tekrar yazılır.

$$a_{x_1} \cos(\omega_1 t + \phi_{x_1}) = a_{x_1} \cos \phi_{x_1} \frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2} + a_{x_1} \sin \phi_{x_1} \frac{e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{x_1} \cos \phi_{x_1} \frac{e^{-i\omega t}}{2} - a_{x_1} \sin \phi_{x_1} \frac{e^{-i\omega t}}{2i} \\
&= \left(\frac{a_{x_1} \cos \phi_{x_1} + a_{x_1} \sin \phi_{x_1}}{2} \right) \frac{e^{-i\omega t}}{2} + \left(a_{x_1} \cos \phi_{x_1} - \frac{a_{x_1} \sin \phi_{x_1}}{i} \right) \frac{e^{-i\omega t}}{2} \\
&= \frac{A_{x_1}}{2} e^{i\omega t} + \frac{A_{x_{-1}}}{2} e^{-i\omega t} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Bütün bileşenler için bu ifadeleri yazarsak aşağıda gösterilen üstsel forma sahip olan eşitlik (3.12)'yi elde ederiz.

$$x(t) = \sum_{r=-R_x}^{R_x} \frac{A_{x_r}}{2} e^{j\omega_r t} \tag{3.12}$$

Burada kompleks genlikler, A_{x_r} , ve frekanslar, ω_r , eşitlik (3.12)'ye göre tanımlanırsa;

$$\left. \begin{aligned}
A_{x_0} &= 2a_{x_{dc}}; & \omega_0 &= 0; \\
A_{x_{-r}} &= a_{x_r} e^{-j\phi_r}; & \omega_{-r} &= -\omega_r; \\
A_{x_r} &= a_{x_r} e^{j\phi_r}; & \omega_r &= r\omega; \quad (\text{eğer harmoniklikle ilgiliyse})
\end{aligned} \right\} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilirler. Periyodik çözüm işlemi için hem giriş hem de çıkış sinyallerini, $u(t)$ ve $y(t)$, eşitlik (3.12)'deki gibi gösterilebileceği varsayılmıştır ve kullanıcı analizde dâhil edebileceği harmoniklerin sayısını kendisi tespit edebilir. Henüz bilinmeyen çıkış, istenen cevap için tanımlanırken, giriş elemanlarının faz ve genliği ise bilinmektedir. Klasik olarak, denge denklemleri, $u(t)$ ve $y(t)$ için belirlenen genelleştirilmiş sinyallerin, mevcut düzenlenen denklemde yerine konulması ve sonuçtan elde edilen genişlikteki frekans bileşenleri ile denkleştirme işlemi yapılarak elde edilmektedir. Bundan dolayı istenilen çıkış değişkenleri bu denklemlerin sayısal çözümü olarak elde edilebilir.

Fikir olarak basit olmasına rağmen, yaklaşımın temelde dezavantajı, bir dereceye kadar mantıksız etki gösteren daha çok harmonik sayısındaki hızlı artıştır. Bundan

dolayı oluşacak yüksek dereceli doğrusalsızlık dikkate alınmalıdır. Bir sistemin R -harmonik genişlemesi, yalnız n .derecede bir doğrusalsızlık içerir, örneğin, $(2R + 1)^n$ terimler vardır. R ve n ' nin düşük değerleri için, bu değerlerin artışı ile paralel olarak terimlerin numarası da hızla artarak kontrol edilemez olmaktadır. Amaç etkin bir algoritma elde etmek olduğundan algoritma klasik yöntemin, eşitlik (3.2)'de belirtilen ZGDE sistemine uygulanması ile elde edilir. Model yapısının doğrusal olmayan ifadelerin doğrusal toplamı olması dikkate alındığında bu işlem belki daha basit hale gelir. Bundan dolayı tüm sistemin harmonik genişlemesi, ayrı ayrı ifadelerin oluşmasından dolayı kolayca bir kerede elde edilir.

Harmonik denge denklemlerinin oluşabilmesi için giriş ve çıkış için belirlenen sinyallerin denklemden yerine konularak açılımın gerçekleştirilmesi gerekir. Böylece elde edilecek açılımdan denge denklemlerinin oluşturulmasında kullanılacak terimlerin kolayca seçilebilmesi sağlanır. Bundan dolayı sistemin herhangi bir terimini genel olarak tanımlayan yapıda bir doğrusal olmayan fonksiyon tanımlanmıştır. Diferansiyel denklemin girişine ve çıkışına ait terimlerin genel formunu temsil eden doğrusal olmayan fonksiyon, Eşitlik (3.2)'de kullanılan formun basit bir doğrusal olmayan fonksiyonel ifadesi $F_{p,q}[\cdot]$ eşitlik (3.14)'de yazıldığı gibidir [13].

$$F_{p,q}[x(t), y(t)] = \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t - k_i) \prod_{i=p+1}^{p+q} D^{l_i} u(t - k_i) \quad (3.14)$$

Eğer $u(t)$ ve $y(t)$ 'nin her ikisinin de eşitlik (3.12) nolu harmonik forma ait olduğu varsayılırsa ve giriş genliğinin önemli bir etkisi olarak sabit bir ölçekleme faktörü A denkleme dâhil edilip daha sonra eşitlik (3.14)'de yerine koyulursa aşağıdaki eşitlik (3.15) elde edilir;

$$F_{p,q}[Au(t), y(t)] = A^q \prod_{i=1}^p \sum_{r=-R}^R \frac{A_{y_r}}{2} (j\omega_r)^{l_i} e^{j\omega_r(t-k_i)} \\ \times \prod_{i=p+1}^{p+q} \sum_{r=-R}^R \frac{A_{u_r}}{2} (j\omega_r)^{l_i} e^{j\omega_r(t-k_i)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^q}{2^m} \sum_{r_1, r_m = -R}^R \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i} \\
&\quad \times \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i} e^{j(\omega_{r_1} + \dots + \omega_{r_m})t}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Eşitlik (3.15) formunda genişleme, belirlenenin üzerinde $(2R+1)^m$ terimler içerir. Çünkü $\{\omega_{-R}, \dots, \omega_R\}$ uygun frekans setinden bütün tekrar eden permütasyonlar ile çoklu bir toplam üretilir ve her bir permütasyon giriş frekans bileşenlerinin farklı bir ara modülasyonunu belirtir. Bazı sadeleştirmeler yapılabilir yine de her terim giriş/çıkış frekans bileşenlerinin özel bir intermodülasyonunu temsil etmesine rağmen, birçoğu aynı çıkış frekansına katkı sağlarlar. Eşitlik (3.15)'de üssel kısma bakıldığında, çıkış frekansı $\{\omega_{-r_1} + \dots + \omega_{r_m}\}$ setinin birbirini etkileyen frekanslarının toplamını verir ve bu bileşenlerin dereceleri önemli değildir. Bundan dolayı bileşenlerin permütasyonlarından etkilenmez. Bu nedenle eşitlik (3.15)'de bazı matematiksel kısaltmalar yapılırsa, permütasyonlar ve kombinasyonlar için farklı toplam operatörleri kullanılarak yazıldığında elde edilen form eşitlik (3.16)'dır.

$$F_{p,q}[Au(t), y(t)] = \frac{A^q}{2^m} \sum_{\substack{\text{her defasında } m \text{ tane alınan} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1 \dots r_m) e^{j(\omega_{r_1} + \dots + \omega_{r_m})t} \tag{3.16}$$

Eşitlik (3.16)'da çıkış frekansları, birbirleriyle etkileşimli frekans bileşenlerinin kombinasyonları ile daha uyumlu hale gelir. Verilen çıkış frekansında veya her kombinasyonda, $f_{uy}^{sym}(\cdot)$ terimi, birbirini etkileyen giriş frekansı değişkenlerinin bütün (çıkış frekans sabitleri) permütasyonlarının eklenecek birleştirilmiş ortalamayı ifade eden simetrik fonksiyondur. Yani etkileşim içindeki giriş frekansı bileşenlerinin verilen kombinasyon için bütün olası çıkış frekansı aynı permütasyonlarını toplar. Birbirinden farklı değerlerdedir ve her bir elemanın aldığı l_i 'inci türev derecesinden dolayı frekans bileşenlerinin derecesine bağlıdır. Aynı zamanda permütasyonlar toplamı elemanların derecelerinden bağımsız olduğu için fonksiyon simetrik.

n_r^* çarpanı ise simetrik fonksiyonun hesaplandığı kombinasyona ait, $\{r_1, \dots, r_m\}$ setindeki farklı permütasyonların toplam sayısını temsil eder.

$$f_{uy}^{sym}(r_1 \dots r_m) = \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1 \dots r_m\} \\ \text{bütün ayrı} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i} \\ \times \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i} \quad (3.17)$$

$$n_r^* = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_c!} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_c = n. \quad (3.18)$$

Eşitlik (3.18)'deki c , kombinasyonda ki frekans bileşenleri içinde farklı frekans sayısını, n_i de i . farklı frekansların tekrar sayısını ifade etmektedir. n_r^* değişkeni aynı değeri veren permütasyonların gereksiz hesaplanmasını ortadan kaldırır. $f_{uy}^{sym}(\cdot)$ fonksiyonu elde edilen bütün fonksiyonların ortalamasını verir.

$f_{uy}^{sym}(\cdot)$ için ifade, eşitlik (3.14)'de dikkate alınan genel ZGDE teriminin belli alt sınıfları için basitleştirilebilir. Sadece diferansiyel terimler için, örneğin, eşitlik (3.17)'de verilmiş forma dönüştürülür [12]. Sadece zaman-gecikmeli terimlerin durumunda, l_i 'nin tüm değerleri sıfırdır ve bundan dolayı eşitlik (3.17) kısaltılarak eşitlik (3.19)'daki gibi yazılabilir.

$$f_{uy}^{sym}(r_1 \dots r_m) = \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{r_1 \dots r_m\} \\ \text{bütün ayrı} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} e^{-j\omega_{r_i} k_i} \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}} e^{-j\omega_{r_i} k_i} \\ l_1 = l_2 = \dots = 0 \quad (3.19)$$

Özel durumda k_i 'lerin tümü birbirine eşittir, bundan dolayı eşitlik (3.19), bütün üstellerin birleşimi $(\omega_{r_1} + \dots + \omega_{r_m}) = \omega_r$ tanımını kullanarak daha da basitleştirilebilir ve yeniden yazılırsa eşitlik (3.20) elde edilir.

$$f_{uy}^{sym}(r_1 \dots r_m) = \frac{1}{n_r^*} e^{-j\omega_r k} \sum_{\substack{\{r_1 \dots r_m\} \\ \text{bütün ayrık} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} \prod_{i=p+1}^{p+q} A_{u_{r_i}} \quad k_1 = k_2 = \dots = k_m \quad (3.20)$$

Alternatif olarak eğer k_i 'ler aynı değil, fakat değerlendirilen ifadeler yalnız giriş veya çıkış'ın doğrusal olmayan fonksiyonu ise, o halde eşitlik (3.19) içerisindeki permütasyonlar, k_i 'nin sisteme bağlı ve sabit değerleri sırayla değiştirilerek kolayca üretilir ve ω_{r_i} 'nin uyarıma bağlı değerlerinden ziyade daha kolay ifade edilebilirler.

Bu durumda $f_{uy}^{sym}(\cdot)$ ifadesini yeniden yazarsak eşitlik (3.21) elde edilir.

$$f_x^{sym}(r_1 \dots r_n) = \frac{1}{n_r^*} \sum_{\substack{\{k_1 \dots k_n\} \\ \text{bütün ayrık} \\ \text{permütasyonları}}} \prod_{i=1}^n A_{x_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i} \quad (3.21)$$

Eşitlik (3.21)'deki n_r^* , eşitlik (3.18)'de verilen ifadeye benzer bir şekilde tanımlanır. Sonuç olarak eğer hem l türev ifadesi 0 olur hem de k zaman gecikmeleri birbirine eşit olursa doğrusalsızlık fonksiyonu $F_n[.]$ sadece giriş veya çıkışın basit bir etkisinden oluşur. O halde eşitlik (3.19) tekrar düzenlenip kısaltıldığında eşitlik (3.22) elde edilir.

$$f_x^{sym}(r_1 \dots r_n) = \prod_{i=1}^n A_{x_i} e^{-j\omega_{r_i} k} = e^{-j\omega_{r_i} k} \prod_{i=1}^n A_{x_i} \quad (3.22)$$

Pratik olarak hangi form kullanılırsa kullanılsın eşitlik (3.17)'ye göre doğrusal olmayan $F_{p,q}[.]$ fonksiyonunun harmonik genişleme ifadesinin temel avantajı; hem toplam ifade de azalmanın olması hem de (belki de daha önemlisi) verilmiş bir harmonik denge denklemleri ile ilgili terimlerin bu yolla kolayca tanımlanabilir olmasıdır. Bununla birlikte harmonik denge denklemlerinin oluşturulmasında yalnızca ilgilenilen ω_r frekans bileşenine katkıda bulunan terimleri hesaplamak gerekir. Örneğin, r . harmonik denge denklemi, düzenlenen denklemde bütün terimler için, ω_r frekansını veren giriş frekanslarının kombinasyonları seçilerek, sadece çıkış

frekansına etki eden toplam kombinasyonların seçilmesi ile elde edilir. Herhangi bir ω_r çıkış frekansında istenen denge denklemi, eşitlik (3.2) içindeki sistemlerin herhangi bir sınıfı ve eşitlik (3.8) formundaki çoklu-sinüslü giriş/çıkış sinyallerini kabul eden bir yapı için eşitlik (3.23) gibi yazılabilir.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, l_{p+q}=0}^L \sum_{k_1, k_{p+q}=1}^K c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}; k_1, \dots, k_{p+q}) \times \sum_{\substack{\{r_1, \dots, r_m\} \text{ dizisinin} \\ \{-R, \dots, R\} \text{ aralığında} \\ \sum \omega_r = \omega_r \text{ şartıyla} \\ \text{bütün kombinasyonları}}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1 \dots r_m) = 0 \quad (3.23)$$

Buradaki $f_{uy}^{sym}(\cdot)$ eşitlik (3.17) veya uygun basitleştirilmiş formlar olan eşitlik (3.19) ve (3.20)'den biri kullanılarak elde edilebilir.

Giriş ve çıkış sinyalleri $u(t)$ ve $y(t)$ eşitlik (3.23)'de yerine konursa m 'inci dereceden doğrusal olmayan terimler, intermodulasyon içindeki harmoniklerin permütasyonlarından dolayı $\omega = (r_1 + \dots + r_m)\omega$ frekanslarında üsteller içerir. Bu farklı çıkış frekansları üretse de intermodülasyon içindeki harmonikler, kombinasyondaki permütasyonlar hesaba katılmadan aynı frekansa katkıda bulunurlar. Bu yüzden r 'inci harmonik denge denklemi yalnızca toplamları $r\omega$ çıkış frekansı olan kombinasyonlar seçilerek oluşturulur.

(3.23) numaralı eşitlikte herhangi bir ω_r çıkış frekansındaki çıkış harmoniği için denge denklemlerinin oluşturulması işlemi algoritma ile yapılır. Algoritmayı otomatikleştirmek için denklem kombinasyonlarını üreten bir algoritma kullanılır. Analizde kabul edilen bir çıkış ω_r harmoniği için denge denklemi oluşturulurken harmoniği veren kombinasyonlar ve bunlara ait simetrik fonksiyonların oluşturulmasında kullanılan permütasyonların da üretilmesi gerekir. Yani gerekli simetrik fonksiyonların otomatik olarak elde edilebilmesi için uygun frekans bileşenlerinin seçilmesi işlemi gerçekleştirilen bir algoritma gereklidir. Belirtilen frekans kombinasyonlarının elde edilme işlemi gerçekleştirmek için $\{-R, \dots, R\}$ harmonik setinden toplamları istenilen çıkış harmoniğinin r değerini verecek şekilde

seçilerek $\{r_1, \dots, r_m\}$ dizisinin kombinasyonlarını üreten fonksiyon ile sağlanır. Denklemdaki polisinüsoid sinyalin frekans bileşenleri harmonik olarak ilişkili olduğundan bileşenler temel bir ω frekansıyla harmonik olarak, başka bir ifadeyle $\omega_r = r\omega$ şeklinde ifade edilebilir. İstenen kombinasyonlar $S_{n,r}(\cdot)$ tekrar eden ifadelerle göre üretilir [12].

$$S_{n,r}(r_1, \dots, r_n) = \sum_{r_i = \max\{-R, r-(n-1)R\}}^{\text{taban}(r/n)} \{r_i, S_{n-1, r-r_i}(r_2, \dots, r_n)\} \quad (3.24)$$

Eşitlik (3.24)'deki $S_{n,r}(r_1, \dots, r_n)$, her defasında n tane alınan $\{r_1, \dots, r_n\}$ dizisinin, $\{-R, \dots, R\}$ aralığındaki harmonik setinden bütün kombinasyonların üretilmesi işlemini ifade eder. Ayrıca r_i nin toplamları istenilen çıkış harmoniği olan r 'ye eşittir ve fonksiyondaki $\text{taban}(\cdot)$, eksi sonsuza doğru yuvarlamayı göstermek için kullanılır.

Yöntemin uygulanabilmesi için $S_{n,r}(r_1, \dots, r_n)$ işlemini gerçekleştiren, yani analizde kabul edilen bir çıkış harmoniğinin denge denklemini elde etmek için, gerekli simetrik fonksiyonların elde edilebilmesini sağlayan uygun frekans bileşenlerini seçen bir algoritma geliştirilmiştir. Algoritma, (3.17), (3.23) ve (3.24) eşitlikleriyle ifade edilerek oluşturulur. Herhangi bir yazılım programı (Matlab, Mathematica veya Maple gibi) kullanılarak kolayca gerçekleştirilebilir. Bu çalışmada algoritmayı oluşturmak için MATLAB yazılım programı kullanılmıştır. Kullanılan yöntemle ait algoritma basamakları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- (i) Analizde değerlendirilecek harmoniklerin sayısı belirlenir, R (dolayısıyla denge denklemlerinin sayısı belirlenir)
- (ii) Doğrusalsızlığın derecelerine göre model ifadeleri gruplanır, m
- (iii) Her bir ifadenin grubu için, toplamı $r\omega$ olan m frekansların tüm kombinasyonlarını üretmek için eşitlik (3.24) kullanılır. Her bir kombinasyon için n_r^* değeri ve bu aşamada eşitlik (3.18) hesaplanabilir.
- (iv) Her bir grup ifadesi ve frekans kombinasyonu eşitlik (3.17) veya basitleştirilmiş formların birine göre $f_{uy}^{sym}(\cdot)$ hesaplanır. Üzerinde işlem uygulanan terimlerin

formuna bağılı olarak, örneğin, sadece zaman gecikmeli sistemler için eşitlikler (3.19)-(3.22) gibi indirgenmiş ifadelerin kullanılması mümkün olabilir.

- (v) Her bir $f_{uy}^{sym}(\cdot)$ kendine ait n_r^* , kendisinden türetilen model ifade katsayıları ve $A^q / 2^m$ faktörü ile çarpılıp, toplanarak ilk harmonik denge denklemi oluşturulur.
- (vi) Bir sonraki harmonik için r göz önüne alınarak (iii)'den tekrar edilir.

3.3. Yöntemin Zaman Gecikmeli Diferansiyel Sistem Üzerinde Uygulanması

Algoritmayı uygulamak için örnek olarak bias ön ağırlıklı sinüzoidal etki fonksiyonu olan ve bir geminin yalpa hareketlerini temsil eden eşitlik (3.3)'deki zaman gecikmeli diferansiyel sistemi ele alalım. Harmonik denge denklemlerinin oluşturulabilmesi için $u(t)$ ve $y(t)$ 'nin belli bir formda kabul edilmesi gerekir. Giriş sinyalinde tek harmonikler varsa çıkışta tek, çift harmonikler varsa çıkışta çift, ikisi birden varsa çıkışta hem tek hem de çift harmonikler olması gerekir. Giriş sinyalinde 1. harmonik olan bir sistemde, çıkış sinyalinde "1., 3., 5., ..." harmonikler alınabilir. Fakat harmonik sayısı arttıkça etkisi ihmal edilecek derecede azalacağından gereksiz işlem kalabalığından kurtulmak amacıyla genelde 3. harmonikten sonrası ihmal edilir.

$$u(t) = a_{u_{dc}} + a_{u_1} \cos(\omega t) \quad (3.25)$$

Giriş bileşenini tanımlayan bu ifadedeki dc (bias) bileşen önemlidir. Çünkü dc bileşen sadece simetrik durumlarda çoğunlukla gözden kaybolan cevaplarda çift dereceli harmoniklerin birçoğuna neden olur. Bundan dolayı gerçekleştirilecek olan bu uygulamada çıkışın, dc 'den 3. sıra harmoniğe kadar hem çift hem de tek harmonikler içerdiği kabul edilecektir. Eğer dc bileşen içermeyecekse 1. ve 3. harmonikler kabul edilerek çıkış denklemlerinde kullanılır.

$$y(t) = a_{y_{dc}} + a_{y_1} \cos(\omega t + \phi_{y_1}) + a_{y_2} \cos(2\omega t + \phi_{y_2}) + a_{y_3} \cos(3\omega t + \phi_{y_3}) \quad (3.26)$$

Eşitlik (3.26)'da $R=3$ olduğundan çıkış sinyalinde 0., 1., 2. ve 3. harmonik bulunacağı kabul edildiğinden dolayı gerçekleştirilecek işlemlerin sonucunda 4 tane denge denkleminin elde edilmesi gerekir. Çıkış sinyalindeki harmoniklerden dolayı harmonik seti bu harmoniklerin negatifini de barındıracak $\{-3,-2, -1, 0, 1, 2,3\}$ şekilde belirlenir. Denge denklemleri eşitlik (3.23)'e göre sistem katsayıları ile birlikte bütün terimleri birleştirilerek oluşturulur.

3.4. Temel Harmonik İçin Harmonik Denge Denklemlerinin Çıkarılması

Temel harmonik bileşen için harmonik denge denklemleri hesaplanırken frekans çarpanlarının permütasyonları toplamı $r_1 + \dots + r_n = 1$ olarak düşünülür.

3.4.1. Doğrusal bileşenler

Doğrusal bileşenler hesaplanırken dereceleri $n=1$ olduğundan kombinasyonda yalnızca bir eleman $\{r_1\}$ bulunacaktır. Ayrıca denge denklemleri hesaplanırken temel bileşen için frekans '1' alınır. Buna göre $\omega_{r_1} = r_1 \omega = 1\omega = \omega$ olarak alınır ve $n_r^* = \frac{1!}{1!}$ olarak hesaplanır. Eşitlik (3.17)'ye göre her doğrusal bileşen için simetrik fonksiyonlar aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$y(t)$ için $l = (l_1) = (0)$ ve $k = (k_1) = (0)$ olduğundan dolayı simetrik fonksiyon eşitlik (3.27)'de gösterildiği gibi yazılır.

$$f_{uy}^{sym}(r_1) = \frac{1}{1} \prod_{i=1}^p A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i}$$

$$f_y^{sym}(1) = A_{y_{r_1}} (r_1 j\omega)^{l_1} e^{-j r_1 \omega k_1} = A_{y_1} (1j\omega)^0 e^{-j(1\omega)0} = A_{y_1} \quad (3.27)$$

$\dot{y}(t)$ için $l = (l_1) = (1)$ ve $k = (k_1) = (0)$ dolayı simetrik fonksiyon eşitlik (3.28)'de gösterildiği gibi yazılır.

$$f_y^{sym}(1) = \frac{1}{1} \prod_{i=1}^{p-1} A_{y_i} (1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} = A_{y_1} (j\omega) \quad (3.28)$$

$\ddot{y}(t)$ için $l = (l_1) = (2)$ ve $k = (k_1) = (0)$ dolaylı simetrik fonksiyon eşitlik (3.29)'de gösterildiği gibi yazılır.

$$f_y^{sym}(1) = \frac{1}{1} \prod_{i=1}^{p-1} A_{y_i} (1j\omega)^2 e^{-j(1\omega)0} = -A_{y_1} \omega^2 \quad (3.29)$$

$u(t)$ için $l = (l_1) = (0)$ ve $k = (k_1) = (0)$ dolaylı simetrik fonksiyon eşitlik (3.30)'da gösterildiği gibi yazılır.

$$f_u^{sym}(1) = \frac{1}{1} \prod_{i=1}^{p-1} A_{u_i} (1j\omega)^0 e^{-j(1\omega)0} = A_{u_1} \quad (3.30)$$

Bu şekilde elde edilen her doğrusal bileşene ait simetrik fonksiyonlar Tablo 3.5'de toplu olarak görülmektedir.

Tablo 3. 5. Doğrusal terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1)$ değerleri ve $\omega_{r_1} = \omega$ için bütün frekansların kombinasyonları

$\{r_1\}$	n_r^*	$y(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{y}(t)$	$u(t)$
1	1	A_{y_1}	$A_{y_1} (j\omega)$	$-A_{y_1} \omega^2$	A_{u_1}

3.4.2. Kübik bileşenler

Kübik gruptaki terimler için bileşenler hesaplanırken dereceleri $n=3$ olduğu için kombinasyonda $\{r_1, r_2, r_3\}$ 'den oluşan üç eleman bulunacaktır. Hesaplanacak harmonik denge bileşenleri saf çıkışlar ve çapraz çarpım çıkışlar olmak üzere ayrı ayrı incelenir. Temel harmonik için frekans çarpanları toplamı $r_1 + r_2 + r_3 = 1$ olarak hesaplanır. Bu toplamı sağlayan kombinasyonların listesi ve n_r^* değerleri Tablo 3.6'da toplu olarak görülmektedir.

Tablo 3. 6. Kübik bileşen için hesaplanan kombinasyonlar ve n_r^* değerleri

$\{\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3\}$	n_r^*	$\{\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3\}$	n_r^*
$\{-3 \quad 1 \quad 3\}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$\{-1 \quad -1 \quad 3\}$	$\frac{3!}{1!2!} = 3$
$\{-3 \quad 2 \quad 2\}$	$\frac{3!}{1!2!} = 3$	$\{-1 \quad 0 \quad 2\}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$
$\{-2 \quad 0 \quad 3\}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$\{-1 \quad 1 \quad 1\}$	$\frac{3!}{1!2!} = 3$
$\{-2 \quad 1 \quad 2\}$	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$	$\{0 \quad 0 \quad 1\}$	$\frac{3!}{1!2!} = 3$

3.4.2.1. Saf çıkışlar

$y(t)^3$ saf bileşenin türevi, (l), ve zaman gecikmesi, (k), terimleri bulunmadığı için eşitlik (3.17) yeniden düzenlenip eşitlik (3.31)'de gösterildiği gibi kullanılabilir.

$$f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) = \prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i} = \prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} (r_i j\omega)^{l_i} e^{-j(r_i \omega) k_i}$$

$$f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) = \prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} = A_{y_{r_1}} A_{y_{r_2}} A_{y_{r_3}} \quad (3.31)$$

Eşitlik (3.31) kullanılarak her kombinasyon için elde edilen simetrik fonksiyonlar Tablo 3.7'de verilmiştir.

Tablo 3. 7. $y(t)^3$ saf çıkış bileşeni için her kombinasyonda hesaplanan simetrik fonksiyon değerleri

$\{\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3\}$	$f_y^{sym}(\cdot)$	$\{\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3\}$	$f_y^{sym}(\cdot)$
$\{-3 \quad 1 \quad 3\}$	$A_{y_{-3}} A_{y_1} A_{y_3}$	$\{-1 \quad -1 \quad 3\}$	$A_{y_{-1}}^2 A_{y_3}$
$\{-3 \quad 2 \quad 2\}$	$A_{y_{-3}} A_{y_2}^2$	$\{-1 \quad 0 \quad 2\}$	$A_{y_{-1}} A_{y_0} A_{y_2}$
$\{-2 \quad 0 \quad 3\}$	$A_{y_{-2}} A_{y_0} A_{y_3}$	$\{-1 \quad 1 \quad 1\}$	$A_{y_{-1}} A_{y_1}^2$
$\{-2 \quad 1 \quad 2\}$	$A_{y_{-2}} A_{y_1} A_{y_2}$	$\{0 \quad 0 \quad 1\}$	$A_{y_0}^2 A_{y_1}$

3.4.2.2. Çarpım çıkışlar

$\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$ çarpım bileşeni için $l = (l_1, l_2, l_3) = (1,1,1)$ ve $k = (k_1, k_2, k_3) = (0, \tau, \tau)$ olduğundan dolayı eşitlik (3.17) yeniden düzenlenip eşitlik (3.32)'de gösterildiği gibi kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
 f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) &= \frac{1}{n_r^*} \sum_{r_1, r_2, r_3} \prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} e^{-j\omega_{r_i} k_i} = \frac{1}{n_r^*} \sum_{r_1, r_2, r_3} \prod_{i=1}^3 A_{y_{r_i}} (r_i j\omega)^{l_i} e^{-j(r_i \omega) k_i} \\
 &= \frac{1}{n_r^*} \sum_{r_1, r_2, r_3} A_{y_{r_1}} (r_1 j\omega)^{l_1} e^{-j(r_1 \omega) k_1} A_{y_{r_2}} (r_2 j\omega)^{l_2} e^{-j(r_2 \omega) k_2} \\
 &\quad \times A_{y_{r_3}} (r_3 j\omega)^{l_3} e^{-j(r_3 \omega) k_3} \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

Eşitlik (3.32) kullanılarak her kombinasyondaki permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonlar yazılırsa $f_y^{sym}(-3,1,3)$ için aşağıda verilen Tablo 3.8'deki sonuçlar elde edilir.

Tablo 3. 8. $f_y^{sym}(-3,1,3)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{-3,1,3\}$	$A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)0} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau} A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau}$
$\{-3,3,1\}$	$A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)0} A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau}$
$\{1,3,-3\}$	$A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau} A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)\tau}$
$\{1,-3,3\}$	$A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)\tau} A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau}$
$\{3,1,-3\}$	$A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)0} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau} A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)\tau}$
$\{3,-3,1\}$	$A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)0} A_{y_{-3}}(-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)\tau} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau}$

Her permütasyon çarpanı ayrı ayrı hesaplandıktan sonra toplam terim, Tablo 3.6'dan alınan n_r^* değerlerine göre $\frac{1}{n_r^*}$ ile çarpılarak yazıldığında kombinasyona ait simetrik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(-3,1,3) = \frac{1}{6} (A_{y_{-3}} A_{y_1} A_{y_3} (9j\omega^3) 2(1 + e^{2j\omega\tau} + e^{-4j\omega\tau})) \quad (3.33)$$

Eşitlik (3.32) kullanılarak her kombinasyondaki permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonlar yazılırsa $f_y^{sym}(-3,2,2)$ için aşağıda verilen Tablo 3.9'deki sonuçlar elde edilir.

Tablo 3. 9. $f_y^{sym}(-3,2,2)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{-3,2,2\}$	$A_{y_{-3}} (-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)0} A_{y_2} (2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau} A_{y_2} (2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau}$
$\{2,2,-3\}$	$A_{y_2} (2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)0} A_{y_2} (2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau} A_{y_{-3}} (-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)\tau}$
$\{2,-3,2\}$	$A_{y_2} (2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)0} A_{y_{-3}} (-3j\omega)^1 e^{-j(-3\omega)\tau} A_{y_2} (2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau}$

Her permütasyon çarpanı ayrı ayrı hesaplandıktan sonra toplam terim, Tablo 3.6'dan alınan n_r^* değerlerine göre $\frac{1}{n_r^*}$ ile çarpılarak yazıldığında kombinasyona ait simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(-3,2,2) = \frac{1}{3} (A_{y_{-3}} A_{y_2}^2 (12j\omega^3) (2e^{j\omega\tau} + e^{-4j\omega\tau})) \quad (3.34)$$

Tablo 3. 10. $f_y^{sym}(-2,0,3)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{-2,0,3\}$	$A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)0} A_{y_0} (0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau} A_{y_3} (3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau}$
$\{-2,3,0\}$	$A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)0} A_{y_3} (3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau} A_{y_0} (0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau}$
$\{0,3,-2\}$	$A_{y_0} (0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)0} A_{y_3} (3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau} A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau}$
$\{0,-2,3\}$	$A_{y_0} (0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)0} A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau} A_{y_3} (3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau}$
$\{3,0,-2\}$	$A_{y_3} (3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)0} A_{y_0} (0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau} A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau}$
$\{3,-2,0\}$	$A_{y_3} (3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)0} A_{y_{-2}} (-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau} A_{y_0} (0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau}$

Eşitlik (3.32) kullanılarak $f_y^{sym}(-2,0,3)$ için her kombinasyondaki permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonlar yazılırsa aşağıda verilen Tablo 3.10'daki sonuçlar elde edilir.

Her permütasyon çarpanı ayrı ayrı hesaplandıktan sonra toplam terim, Tablo 3.6'dan alınan n_r^* değerlerine göre $\frac{1}{n_r^*}$ ile çarpılarak yazıldığında kombinasyona ait simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(-2,0,3) = 0 \quad (3.35)$$

Çapraz çarpım çıkış teriminin diğer kombinasyon elemanlarına göre permütasyon çarpanlarının hesaplanan simetrik fonksiyonlarına ait sonuçları tablolar halinde Ek-A' da verilmiştir.

Eşitlik (3.32) kullanılarak elde edilen her kombinasyondaki permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonların sonuçları aşağıda verilen Tablo 3.11'da görülmektedir.

Tablo 3. 11. Kübik terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve $\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = \omega$ için bütün frekansların kombinasyonları

$\{r_1, r_2, r_3\}$	n_r^*	$\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$	$y(t)^3$
$\{-3,1,3\}$	6	$A_{y_{-3}}A_{y_1}A_{y_3}(3j\omega^3)(1+e^{2j\omega\tau}+e^{-4j\omega\tau})$	$A_{y_{-3}}A_{y_1}A_{y_3}$
$\{-3,2,2\}$	3	$A_{y_{-3}}A_{y_2}^2(4j\omega^3)(2e^{j\omega\tau}+e^{-4j\omega\tau})$	$A_{y_{-3}}A_{y_2}^2$
$\{-2,0,3\}$	6	0	$A_{y_{-2}}A_{y_0}A_{y_3}$
$\{-2,1,2\}$	6	$A_{y_{-2}}A_{y_1}A_{y_2}(4j\omega^3)(1+e^{j\omega\tau}+e^{-3j\omega\tau})/3$	$A_{y_{-2}}A_{y_1}A_{y_2}$
$\{-1,-1,3\}$	3	$A_{y_{-1}}^2A_{y_3}(-j\omega^3)(e^{2j\omega\tau}+2e^{-2j\omega\tau})$	$A_{y_{-1}}^2A_{y_3}$
$\{-1,0,2\}$	6	0	$A_{y_{-1}}A_{y_0}A_{y_2}$
$\{-1,1,1\}$	3	$A_{y_{-1}}A_{y_1}^2(j\omega^3)(2+e^{-2j\omega\tau})/3$	$A_{y_{-1}}A_{y_1}^2$
$\{0,0,1\}$	3	0	$A_{y_0}^2A_{y_1}$

Sonuçta bütün bileşenler için simetrik fonksiyonlar hesaplandıktan sonra, eşitlik (3.23) kullanılarak temel harmonik için denge denklemi yazılırsa eşitlik (3.36) elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^m \frac{A^q}{2^m} \sum_{l_1, \dots, l_{p+q}=0}^L \sum_{k_1, \dots, k_{p+q}=1}^K c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p+q}; k_1, \dots, k_{p+q}) \sum_{\substack{\text{bütün komb.} \\ \{r_1, \dots, r_m\} \\ \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ \sum \omega_i = r\omega}} n_r^* f_{uy}^{sym}(r_1 \dots r_m) \\
&= \frac{1}{2} c_{0,1}(0;0) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{1\}}} n_r^* f_u^{sym}(r_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}(0;0) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{1\}}} n_r^* f_y^{sym}(r_1) + \frac{1}{2} c_{1,0}(1;0) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{1\}}} n_r^* f_y^{sym}(r_1) \\
&+ \frac{1}{2} c_{0,1}(2;0) \sum_{\substack{\{r_1\} \\ \{1\}}} n_r^* f_y^{sym}(r_1) + \frac{1}{8} c_{3,0}(0,0,0;0,0,0) \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \\ \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ \sum \omega_i = 1}} n_r^* f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) \\
&+ \frac{1}{8} c_{3,0}(1,1,1;0, \tau, \tau) \sum_{\substack{\{r_1, r_2, r_3\} \\ \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ \sum \omega_i = 1}} n_r^* f_y^{sym}(r_1, r_2, r_3) = 0 \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Elde edilen katsayı ve simetrik fonksiyon değerleri eşitlik (3.36)'da yerine yazılırsa eşitlik (3.37)'daki denge denklemine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} A_{u_1} + \frac{1}{2} \omega_n^2 A_{y_1} + \frac{1}{2} \times 2\mu A_{y_1}(j\omega) + \frac{1}{2} \times 1A_{y_1}(-\omega^2) \\
& + \frac{1}{8} \alpha_3 \left[\begin{array}{l} 6A_{y_{-3}} A_{y_1} A_{y_3} + 3A_{y_{-3}} A_{y_2}^2 \\ + 6A_{y_{-2}} A_{y_0} A_{y_3} + 6A_{y_{-2}} A_{y_1} A_{y_2} \\ + 3A_{y_{-1}}^2 A_{y_3} + 6A_{y_{-1}} A_{y_0} A_{y_2} + 3A_{y_{-1}} A_{y_1}^2 + 3A_{y_0}^2 A_{y_1} \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{8} d_2 \left[\begin{array}{l} 6A_{y_{-3}} A_{y_1} A_{y_3} (3j\omega^3)(1 + e^{2j\omega\tau} + e^{-4j\omega\tau}) \\ + 3A_{y_{-3}} A_{y_2}^2 (4j\omega^3)(2e^{j\omega\tau} + e^{-4j\omega\tau}) \\ + 2A_{y_{-2}} A_{y_1} A_{y_2} (4j\omega^3)(1 + e^{j\omega\tau} + e^{-3j\omega\tau}) \\ + 3A_{y_{-1}}^2 A_{y_3} (-j\omega^3)(e^{2j\omega\tau} + 2e^{-2j\omega\tau}) \\ + A_{y_{-1}} A_{y_1}^2 (j\omega^3)(2 + e^{-2j\omega\tau}) \end{array} \right] = 0 \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Aynı işlemler dc bileşen, ikinci harmonik ve üçüncü harmonik bileşen için yapıldığında elde edilen harmonik denge denklemleri sırasıyla eşitlik (3.38), (3.39)

ve (3.40)'de gösterilmiştir. Ayrıca elde edilen dc bileşen, ikinci harmonik ve üçüncü harmonik için doğrusal ve kübik bileşenlerin simetrik fonksiyonları Ek-B'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}A_{u_0} + \frac{1}{2}\omega_n^2 A_{y_0} + \frac{1}{2} \times 2\mu \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 \times 0 \\
& + \frac{1}{8}\alpha_3 \left[\begin{array}{l} 6A_{y_{-3}}A_{y_0}A_{y_3} + 6A_{y_{-3}}A_{y_1}A_{y_2} \\ + 6A_{y_{-2}}A_{y_{-1}}A_{y_3} + 6A_{y_{-2}}A_{y_0}A_{y_2} \\ 3A_{y_{-2}}A_{y_1}^2 + 3A_{y_{-1}}^2A_{y_2} + 6A_{y_{-1}}A_{y_0}A_{y_1} + A_{y_0}^3 \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{8}d_2 \left[\begin{array}{l} 6A_{y_{-3}}A_{y_1}A_{y_2}(2j\omega^3)(e^{j\omega\tau} + e^{2j\omega\tau} + e^{-3j\omega\tau}) \\ + 6A_{y_{-2}}A_{y_{-1}}A_{y_3}(-2j\omega^3)(e^{-j\omega\tau} + e^{-2j\omega\tau} + e^{3j\omega\tau}) \\ + A_{y_{-2}}A_{y_1}^2(2j\omega^3)(e^{-2j\omega\tau} + 2e^{j\omega\tau}) \\ + A_{y_{-1}}^2A_{y_2}(-2j\omega^3)(e^{2j\omega\tau} + 2e^{-j\omega\tau}) \end{array} \right] = 0 \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}A_{u_2} + \frac{1}{2}\omega_n^2 A_{y_2} + \frac{1}{2}2\mu A_{y_2}(2j\omega) + \frac{1}{2} \times 1 \times A_{y_2}(-4\omega^2) \\
& + \frac{1}{8}\alpha_3 \left[\begin{array}{l} 6A_{y_{-3}}A_{y_2}A_{y_3} + 6A_{y_{-2}}A_{y_1}A_{y_3} \\ + 3A_{y_{-2}}A_{y_2}^2 + 6A_{y_{-1}}A_{y_0}A_{y_3} \\ 6A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_2} + 3A_{y_0}^2A_{y_2} + 3A_{y_0}A_{y_1}^2 \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{8}d_2 \left[\begin{array}{l} 6A_{y_{-3}}A_{y_2}A_{y_3}(6j\omega^3)(1 + e^{j\omega\tau} + e^{-5j\omega\tau}) \\ + 6A_{y_{-2}}A_{y_1}A_{y_3}(2j\omega^3)(e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau} + e^{-4j\omega\tau}) \\ + A_{y_{-2}}A_{y_2}^2(8j\omega^3)(2 + e^{-4j\omega\tau}) \\ + 2A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_2}(2j\omega^3)(1 + e^{-j\omega\tau} + e^{-3j\omega\tau}) \end{array} \right] = 0 \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}A_{u_3} + \frac{1}{2}\omega_n^2 A_{y_3} + \frac{1}{2}2\mu A_{y_3}(3j\omega) + \frac{1}{2} \times 1 \times A_{y_3}(-9\omega^2) \\
& + \frac{1}{8}\alpha_3 \left[\begin{array}{l} 3A_{y_{-3}}A_{y_3}^2 + 6A_{y_{-2}}A_{y_2}A_{y_3} \\ + 6A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_3} + 3A_{y_{-1}}A_{y_2}^2 \\ + 3A_{y_0}^2A_{y_3} + 6A_{y_0}A_{y_1}A_{y_2} + A_{y_1}^3 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{8}d_2 \left[\begin{array}{l} 3A_{y_{-3}}A_{y_3}^2(9j\omega^3)(2+e^{-6j\omega\tau}) \\ +6A_{y_{-2}}A_{y_2}A_{y_3}(4j\omega^3)(1+e^{-j\omega\tau}+e^{-5j\omega\tau}) \\ +6A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_3}(j\omega^3)(1+e^{-2j\omega\tau}+e^{-4j\omega\tau}) \\ +A_{y_{-1}}A_{y_2}^2(4j\omega^3)(2e^{-j\omega\tau}+e^{-4j\omega\tau}) \\ +A_{y_1}^3(j\omega^3)(e^{-2j\omega\tau}) \end{array} \right] = 0 \quad (3.40)$$

Aslında harmonik denge denklemleri, daha çok kompleks değişkenlerin fazla olmasına rağmen, her terimin kompleks karşılıklarının toplamını gösterdiğinden dolayı aslında gerçek bir denklemdir. Harmonik denge denklemleri elde edildikten sonra, katsayıların yerlerine sayısal değerleri yazılır. Harmoniklere ait genlik ve faz değerlerini bulabilmek için bu denklemlerin çözümlenmesi gerekmektedir. Newton yöntemi, Nelder-Mead minimizasyon yöntemi gibi çeşitli sayısal yöntemler mevcuttur. Bu çalışmada Nelder-Mead sayısal çözümlene yöntemi kullanılmıştır.

3.5. Nelder-Mead Metodu

Bu metot, Nelder ve Mead tarafından oluşturulan birkaç değişken fonksiyonun yerel minimum noktasını bulmak için kullanılan bir simpleks metodudur. Simpleks n boyutlu bir geometrik şekildir. N boyutta $(N+1)$ nokta içerir. İki boyuttaki simpleks bir üçgenden oluşur. Üç boyutta bir üçgenler prizması halini alır (4 yüzeyli). Üçgenin üç köşe noktalarındaki fonksiyon değerlerini karşılaştıran örnek araştırma metodudur [41].

N boyutta en iyi yapabileceğimiz arama işlemine başlamak için $N+1$ nokta verilir. Bundan sonra program yüzey topolojisini inceleyerek minimuma doğru hareket etmeye başlar. Bu hareketlerin esası şu şekilde oluşur: program verilen tüm noktalarda fonksiyonu analiz ederek en yüksek ve en düşük değerleri bulur, diğer noktaları aynı bırakarak en yüksek değeri en yüksek ve en düşük elemanların üzerinde olduğu yüzeye göre yansıma noktasına taşır. Minimizasyon doğrultusunda yeterli değişim yok ise yansıtma 1 faktöründen daha büyük ya da daha küçük bir faktör kullanılarak ta gerçekleştirilebilir. Minimum değere yaklaştığımızda simpleks daralma ile küçülür, bu daralma işlemi bir seferde birden fazla nokta için uygulanabilir [41].

$F(x,y)$ fonksiyon değerinin en büyük olduğu yer olan tepe değeri reddedilir ve yeni bir tepe değer tayin edilir. Böylece yeni bir üçgen oluşturulur ve araştırmaya devam edilir. Köşe noktalardeki fonksiyon değerinin küçülmesini sağlayan değerleri bulabilmek için, süreç farklı Şekiller alabilecek olan bir üçgenler dizisi meydana getirir. Üçgenin boyutları ktlr ve minimum noktaların koordinatları bulunur. Algoritma, simpleks terimini kullanarak oluşturulmuştur ve bu algoritma N değişkenleri fonksiyonun minimum noktasını buldurur (N boyutta genelleştirilmiş bir gen). Bu, hesaplamayla oluşturulmuştur ve etkili bir czmdr.

3.6. Frekans Cevabının Elde Edilmesi

Doğrusal olmayan bir sistemin simülasyonu ile frekans cevabı davranışı, verilen frekans aralığındaki her bir frekans için zaman boyutu özellikleri incelenerek çıkarılır. Sistemin girişine uygulanan periyodik sinyal ile çıkışta elde edilen periyodik sinyal arasındaki genliklere ait oran ve faz farkı hesaplanarak uygulanan frekans aralığı için analiz gerçekleştirilir.

Ancak doğrusal olmayan sistemlerde analitik yolla cevabın doğrusal sistemlerdeki gibi doğrudan elde edilmesi imknsızdır. Doğrusal olmayan bir sistemi tanımlayan diferansiyel denklemde iki veya daha fazla s derecesine sahip terimler olduğundan dolayı uygulanan frekans bileşenlerinin ara modülasyonları oluşur. Çıkışta giriş bileşenlerine ek olarak farklı bileşenler elde edilir. Bu tür sistemlerde atlama olayı görülür. Atlama olayının sergilenmediği doğrusal yapıya sahip sistemlerde ve küçük giriş genliklerine sahip doğrusal olarak davranış gösteren doğrusal olmayan sistemlerde frekans cevabının elde edilmesi kolaydır. Ancak giriş genliğinin arttığı doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevaplarının elde edilmesi büyük bir problem olarak ortaya çıkar. Özellikle doğrusal olmayan bileşenlerin baskın olduğu yapılarde cevap içerisinde süper harmoniklerin gözükmeye başlaması bu bölgelerde atlama olaylarının oluşmasına neden olur. Başlangıç değerleri doğru tanımlanmış bir sistem için analitik metot kullanılarak frekans cevabı elde edilirken başlangıç frekans değerinden başlayarak seçilen artış miktarlarının her biri için kararlılık durumundaki maksimum genlik değerleri bulunur. Cevaba bakıldığında bu değerlerin bulunuşunda kullanılan giriş frekansının bir değerinde, bu değerden sonra elde edilen çıkış

genliğinin normal değişim yapısında ani olarak bir sapma gözlenir. Böylece izlenen grafik yapısından sisteme ait frekans cevabında kayma olduğu anlaşılır. Ani değişim olduğu bu noktadan sonra uygulanan giriş frekansındaki değişim yönü değiştirilir. Eğer frekans değişimi küçük değerden büyük değere doğru artış yönünde kullanılıyorsa bu değerden sonra giriş frekansının değeri azaltılarak tekrar çizdirilir. Elde edilen grafikte atlamanın olduğu sanal bölge görülür. Bu noktadan sonra frekans değişim yönü tekrar artan frekans yönünde değiştirilerek tekrar çizdirilir. Bu uygulama frekans cevabının içerisindeki sistemde bulunan süper harmoniklerin sayısına bağlı olarak tekrarlanır.

Nelder-Mead minimizasyon algoritması, denklem setinin sol tarafının küçültülmüş karesel genliği olan yedi bilinmeyenini değerini tanımlamak için kullanılır. Bu yedi bilinmeyen çıkış frekans bileşenleri olan dc bileşen için genlik ve her bir harmonik için olan genlik ve faz $(A_{u_0}, A_{u_1}, \phi_{u_1}, A_{u_2}, \phi_{u_2}, A_{u_3}, \phi_{u_3})$ katsayılarıdır. Basit bir çözüm izleyen algoritma, önceki frekans çözümlerinin doğrusal izdüşümü ile elde edilen bir noktadan aramaya başlayarak hesaplama süresini azaltmak için kullanılır. Bu işlem, gerçekleştirilen bir program ile otomatik bir şekilde yapılabilir. Geçerli çözümleri gerçekleştirmek için elde edilen COST fonksiyon değerleri gözlenir. Bu COST değerlerindeki ani artış ve azalışlar sistemde o COST değerine karşılık gelen frekansta bir atlama olayı meydana geldiğini gösterir. Bu durumda o frekans değerinde frekans yönü geriye doğru tekrar frekans cevabı analizi yapılarak devam edilir.

Analiz için verilen modele ait her bir bileşenin katsayıları, zaman gecikmesi ve giriş sinyali katsayıları aşağıdaki parametre değerleri alınarak hesaplanmıştır.

$$\left. \begin{array}{llll} \omega_n = 5.2779; & d_2 = 0.0960; & \mu = 0.0900; & A = 1; \\ \alpha_3 = -0.71455\omega_n^2; & a_{u_1} = 0.168\omega^2; & a_{u,dc} = 2.8943; & \tau = 0.25; \end{array} \right\} (3.41)$$

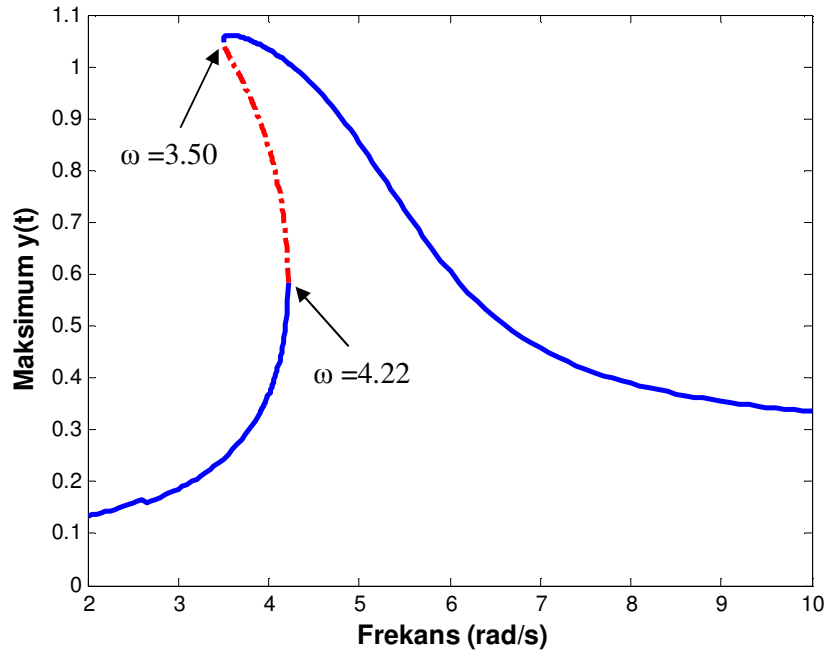
Tanımlanan örnek sistemin analizinde atlama olayını gösteren frekans cevabı için kullanılan frekans aralığına ait vektör yapısı aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\omega = [2 : 0.05 : 3.9391 : 0.01 : 4.22421 : -0.01 : 3.50351 : 0.01 : 4.24$$

$$4.25:0.05:6.6.1:0.1:10]$$

$$(3.42)$$

Yöntemi doğrulamak amacıyla, belirlenen frekans aralığında sayısal çözümlene gerçekleştirilir ve frekans cevabında elde edilen maksimum çıkış, *dc* bileşene ait genlik ve her bir harmoniğe ait faz ve genlik değişimleri ile bunların karşılaştırılmalı grafikleri Şekil 3.1-3.11’de görülmektedir.

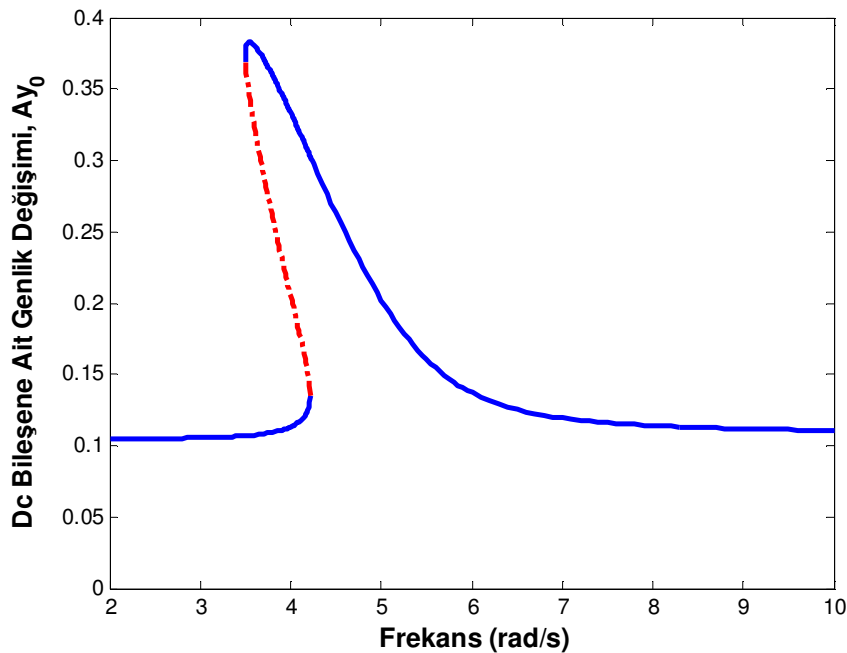


Şekil 3. 1. Maksimum çıkış genliğine ait frekans cevabı

Şekil 3.1’de elde edilen maksimum genlik görülmektedir. Frekans cevabı elde edilirken frekansın değişim yönü önem taşır. Eşitlik 3.35’den de anlaşıldığı gibi çözümlene işlemi $\omega = 2$ rad/s frekansından başlanılarak 0,05 artırımlarla ileri yönde devam edilmiştir. $\omega = 4,22$ rad/s frekansında atlama noktası tespit edildikten sonra frekans değişimi -0,01 azalış miktarı ile geri yöne doğru devam edilmiş, bu yönde de $\omega = 3,50$ rad/s değerine gelindiğinde yeni bir atlama noktası tespit edildikten sonra frekans değişimi tekrar artan yönde ilerletilmiştir. Yeni bir atlama noktası bulunmadığından çözümlene işlemi $\omega = 10$ rad/s frekansında sona erdirilmiştir. Şekil 3.1’de kırmızı renkte gösterilen kısmın uç noktaları sistemde atlama olayının gerçekleştiği frekanslardır. Frekans değişiminin artan yönündeki 3.50 rad/s ile

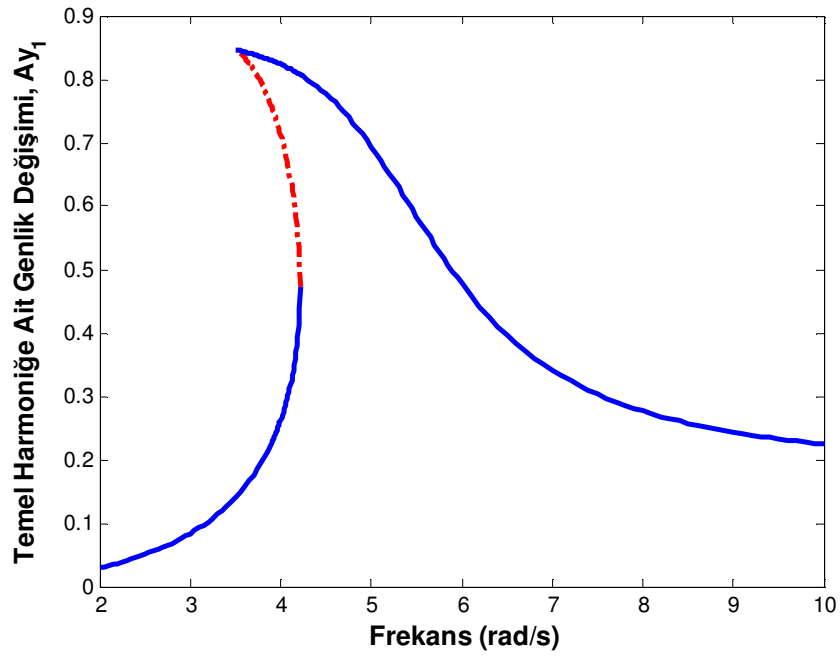
frekans değişiminin azalan yönündeki 4.22 rad/s'de atlama olayının oluştuğu anlaşılmaktadır. Sistem rezonans frekansında 3,51 genlik değeri ile en yüksek cevabı vermiştir. Bunun yanında atlama olayındaki rezonans değerinin sola doğru kayan kolaylaştırılmış (softening) yapıda olduğu görölmektedir. Bunun nedeni sistemin içerdiği üçüncü dereceden doğrusal olmayan terimin katsayısının negatif değer taşımasıdır.

Dc bileşene ait genlik değişimi şekil 3.2'de gösterilmektedir. *Dc* bileşenin tepe değerinin oluştuğu frekans değeri 3.50'de gerçekleşmiştir.

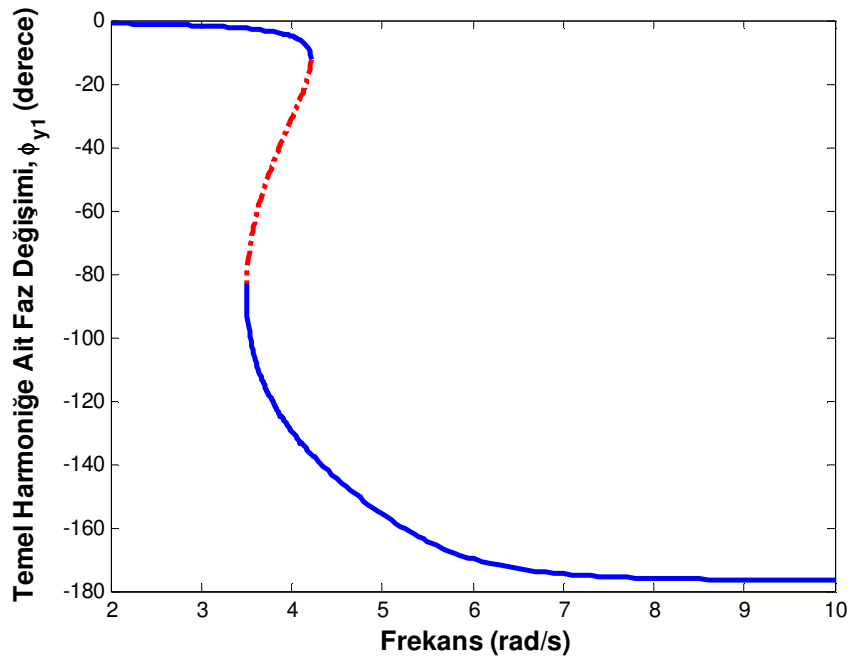


şekil 3. 2. *Dc* bileşene ait genlik değişimi

Temel harmoniğe ait genlik ve faz grafikleri şekil 3.3 ve şekil 3.4'de gösterilmektedir. Temel harmoniğe ait genlik değişiminde oluşan maksimum tepe değerinin yaklaşık olarak 0.85'de oluştuğu görölmektedir. Bu değer şekil 3.1'deki maksimum cevaba ait değişime bakıldığında büyük bir kısmın temel harmonik tarafından oluşturulduğunu, bu nedenle de şekil itibariyle benzerlik taşıdığını göstermektedir. şekil 3.4 incelendiğinde de atlama olayının (azalan yöndeki frekans değişimi) -90 derece civarında gerçekleştiği anlaşılmaktadır.

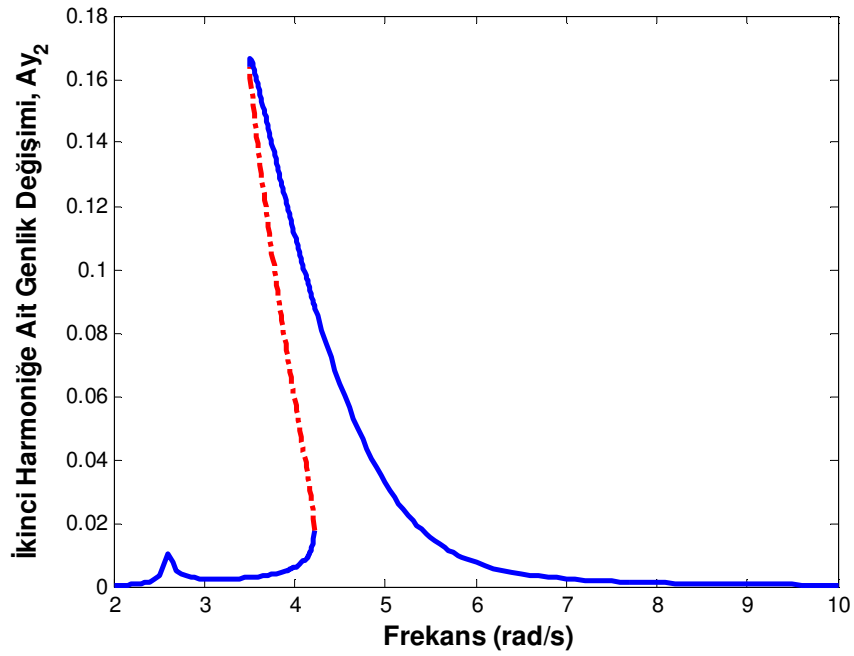


Şekil 3. 3. Temel harmoniğe ait genlik değişimi

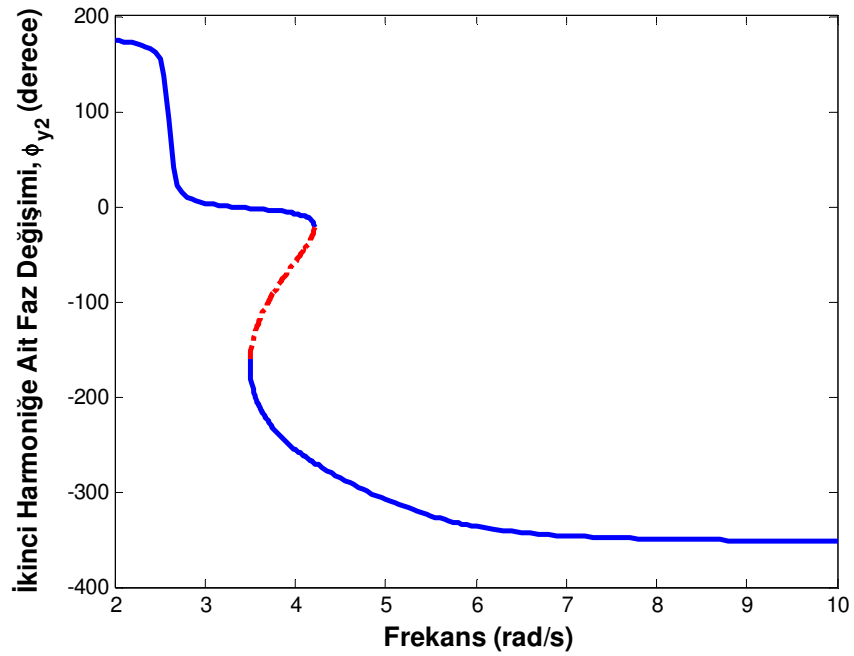


Şekil 3. 4. Temel harmoniğe ait faz değişimi

İkinci harmoniğe ait genlik ve faz değişimlerini gösteren grafiksel sonuçlar Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da gösterilmektedir.



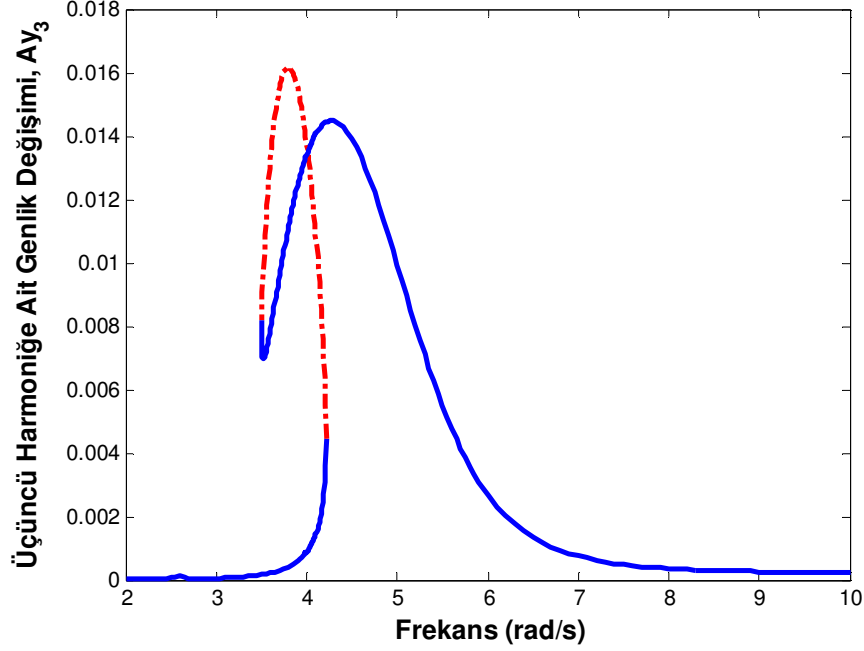
Şekil 3. 5. İkinci harmoniğe ait genlik değişimi



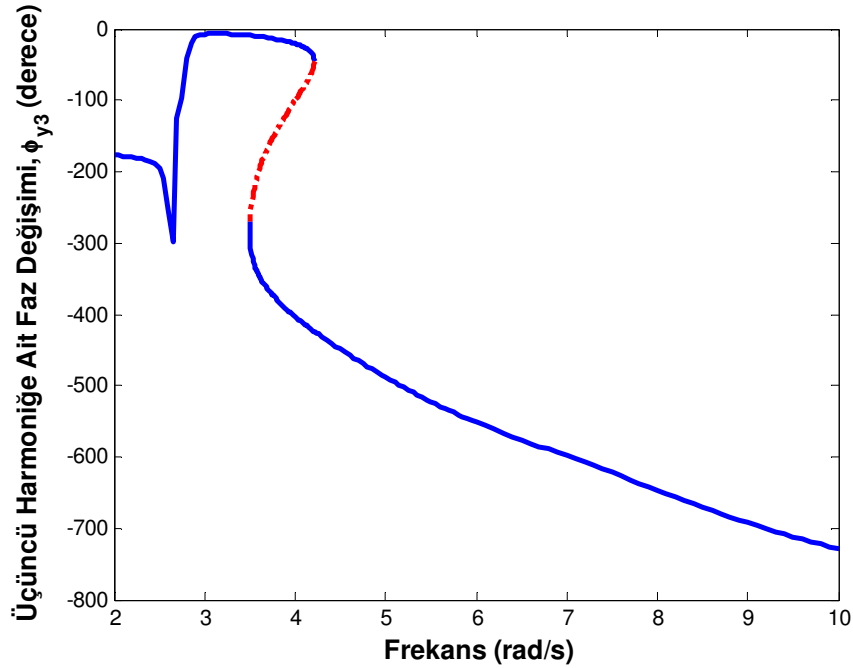
Şekil 3. 6. İkinci harmoniğe ait faz değişimi

Elde edilen genlik değerleri temel harmoniğe ait genlik değerleri ile karşılaştırıldığında daha küçük değerler taşımaktadır. Ancak sergilediği grafiksel yapıya bakıldığında temel harmonikten farklı olarak iki adet tepe değeri

sergilemektedir. Ortaya çıkan büyük genlikli bölgenin Şekil 3.1'deki maksimum genlik cevabına ait rezonans bölgesinde daha fazla katkıda bulunduğu diğerinin ise pek varlık gösteremediği anlaşılmıştır.

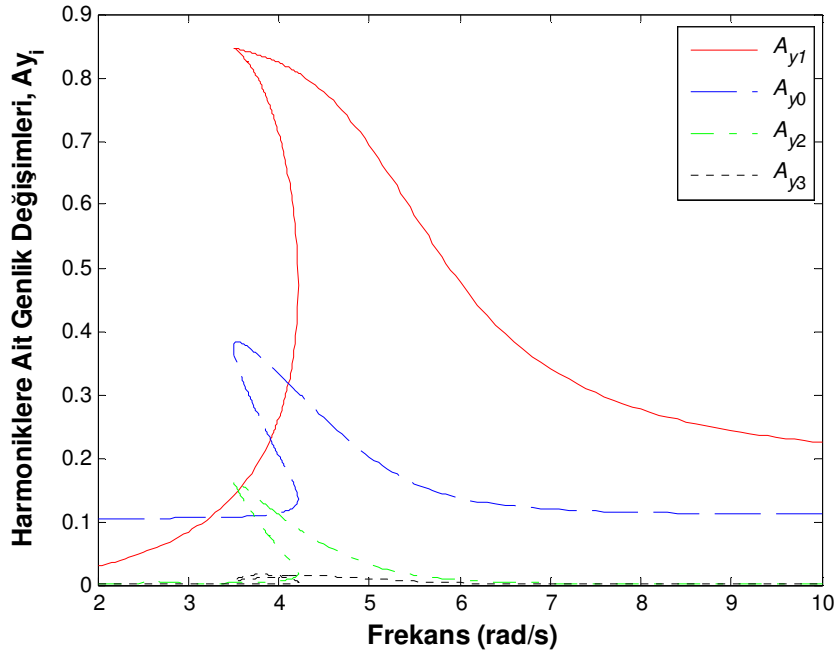


Şekil 3. 7. Üçüncü harmoniğe ait genlik değişimi

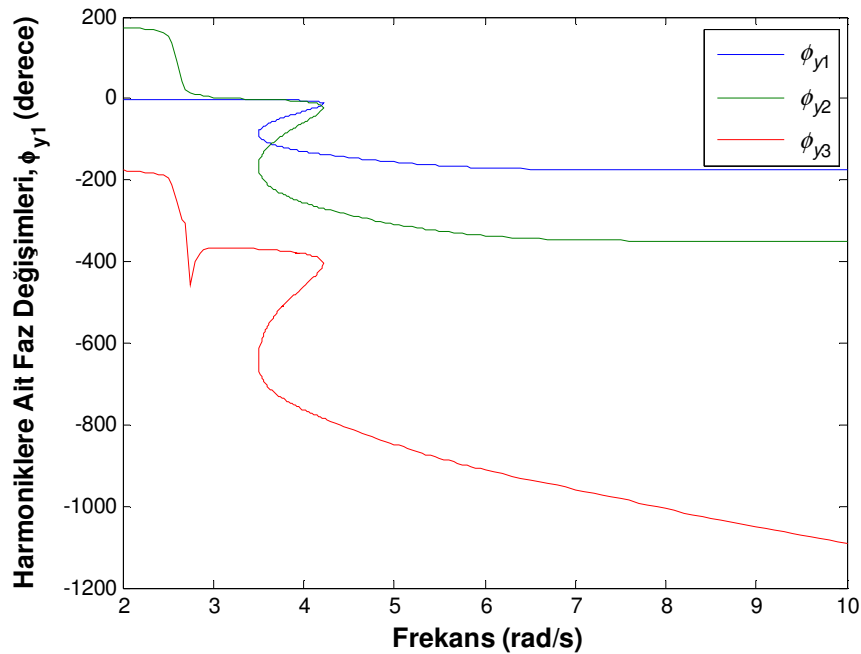


Şekil 3. 8. Üçüncü harmoniğe ait faz değişimi

Üçüncü harmoniğe ait genlik ve faz grafikleri Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de gösterilmektedir. Üçüncü harmoniğin etkisi diğerlerine göre oldukça zayıftır ve analizin doğruluğunda kayda değer bir kayba neden olmayacağı için ihmal edilebilir bir yapıdadır.

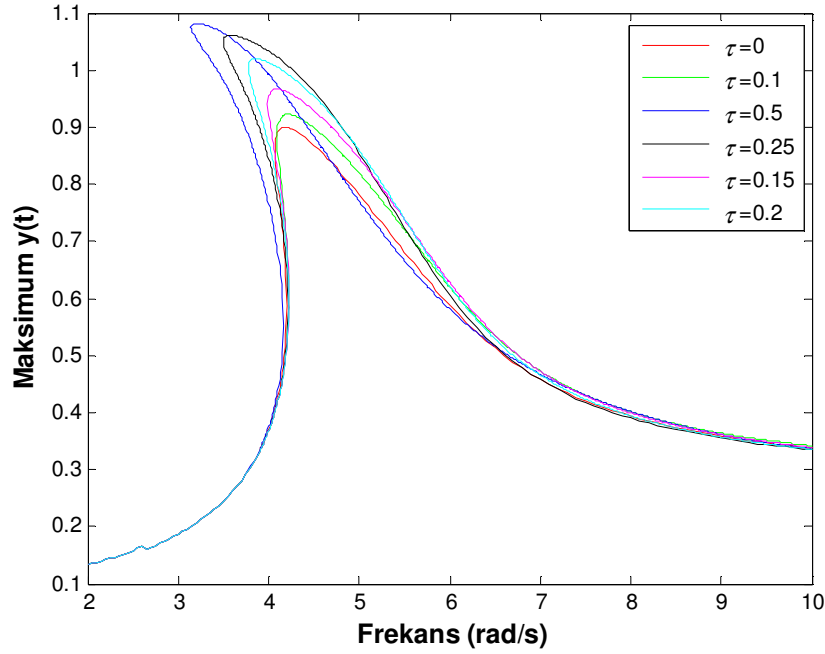


Şekil 3. 9. Harmonik bileşenlerinin genlik değişimlerine ait karşılaştırmalı sonucu



Şekil 3. 10. Harmonik bileşenlerine ait faz değişimlerinin karşılaştırmalı sonucu

Her bir çıkış bileşeninin genliklerine ait frekans cevabı sonuçları Şekil 3.9'daki gibi karşılaştırılabilir. Görüldüğü gibi sistemi en çok etkileyen genlik değeri en yüksek olan temel harmonik bileşenidir. Şekil 3.10'da harmoniklere ait faz değişimlerinin karşılaştırıldığı sonuçlar da gösterilmiştir.



Şekil 3. 11. Farklı zaman gecikmelerinde maksimum genlikler

Önceki grafikler zaman gecikmesi 0.25 için çizdirilmişti. Zaman gecikmesinin sistem cevabı üzerindeki etkisini görmek açısından farklı τ değerleri için de bir çalışma yapmak faydalı olacaktır. Bu amaca yönelik olarak örneğin; $\tau = [0 \ 0.1 \ 0.15 \ 0.2 \ 0.25 \ 0.5]$ değerleri için maksimum genlik değişimleri elde edilerek karşılaştırmalı olarak çizildiğinde Şekil 3.11'deki grafiksel sonuca ulaşılır. Görüldüğü gibi zaman gecikmesi arttıkça oluşan tepe değerine ait genlik değeri sola doğru kaymaktadır. Dolayısıyla bu bölgedeki atlama noktasına ait frekans değeri küçülmektedir.

BÖLÜM 4. GHDM KULLANICI ARAYÜZÜ

Bu bölümde, Bölüm 3’de anlatımı yapılan GHDM analiz yöntemini otomatikleştiren bir arayüz uygulaması gerçekleştirilmiştir. Tasarlanan kullanıcı arayüzü ile yöntemde kullanılan algoritma aracılığıyla el ile yapılan işlemler sonucu elde edilen harmonik denge denklemlerinin, işlemler otomatikleştirilerek kolayca oluşturulması sağlanmıştır. Böylece tasarımı yapılan arayüz ile tanımlanan doğrusal olmayan zaman gecikmeli sistemin istenilen herhangi bir harmonik için üretilecek olan denge denklemleri elde edilebilmekte ve her bir harmonik için genlik ve faz grafikleri çizdirilebilmektedir. Bu işlemler kullanıcı tarafından belirtilen belirli bir frekans aralığı ve başlangıç değeri aralığı girilerek elde edilmektedir. GHDM kullanıcı arayüzü Matlab GUI’de (Graphical User Interface - Grafiksel Kullanıcı Arayüzü) oluşturulmuştur [43]. Bu bölümde öncelikle Matlab GUI tanıtılarak arayüzün oluşturulması hakkında bilgi verilmiş daha sonra arayüzün kullanımı anlatılarak örnek çözümler sonuçları grafikleri ile birlikte gösterilmiştir.

4.1. Arayüz Tasarımı

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin oldukça gelişmesi, özellikle hem daha hızlı hem de daha ucuz olması nedeniyle, fiziksel model analizi çalışmaları yerine, bilgisayar ortamında yapılan sayısal benzetim (simülasyon) çalışmaları almıştır. Simülasyon ile arayüz tasarımı kullanıcıya kolaylık sağlayarak programdan bağımsız olmasını sağlamıştır. Sık kullanılan simülasyon programlarından biride MATLAB’dır. MATLAB’ın tercih edilmesinin sebebi, sayısal hesaplamalar, grafiksel programlamalar ve simülasyon uygulamaları için geliştirilmiş türdeşlerine göre özel ve üstün bir dil olmasıdır. Ayrıca, grafiksel arabirime sahip oluşu, kolay alışılabılır ve kullanışlı bir ortam etkileşimi sunması, çok çeşitli alanlara (örneğin Kontrol Bilimi, İnşaat Mühendisliği...gibi) hizmet eden farklı ve zengin kütüphanesinin olması yatmaktadır [42].

MATLAB adı, MATrix LABoratory (Matriks Laboratuarı) kelimelerinden gelir. MATLAB, temel olarak sayısal hesaplama, grafiksel veri gösterimi ve programlamayı içeren teknik ve bilimsel hesaplamalar için yazılmış yüksek performansa sahip bir yazılımdır [42]. Matlab programının tipik kullanım alanları:

1. Matematik ve hesaplama işlemleri
2. Algoritma geliştirme
3. Modelleme, simülasyon (benzetim) ve öntipleme (prototip)
4. Veri analizi ve görsel efektlerle destekli gösterim
5. Bilimsel ve mühendislik grafikleri
6. Uygulama Geliştirme
7. Arayüz geliştirme

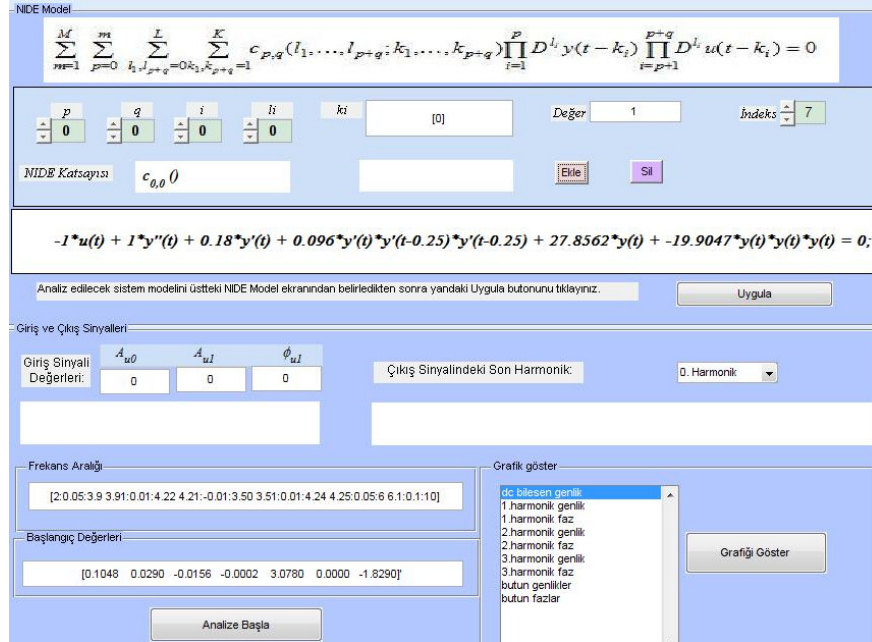
şeklinde özetlenebilir.

Arayüz (interface) basit bir tanımla, konu veya program hakkında bilgisi olmayan kullanıcıların istedikleri işlemleri gerçekleştirebilmelerini sağlayan görsel bir araçtır. Kullanıcı arayüzü, programın kullanıcısı tarafından daha etkili ve daha kolay kullanılmasını sağlar. MATLAB'da yazılan fonksiyonların kolay kullanımı için arayüz tasarımı imkanı veren yapı GUI'dir. GUI grafiksel kullanıcı arayüzü, interaktif olarak figure dosyaları ile fonksiyon dosyalarının oluşturulmasını sağlar. İçeriğinde yer alan nesnelerin kullanılması ile kullanıcıya etkileşim sağlayan ve bir işin veya bir programın çalıştırılmasını sağlayan grafiksel bir program arayüzüdür [42].

4.2. GUI'nin Çalıştırılması

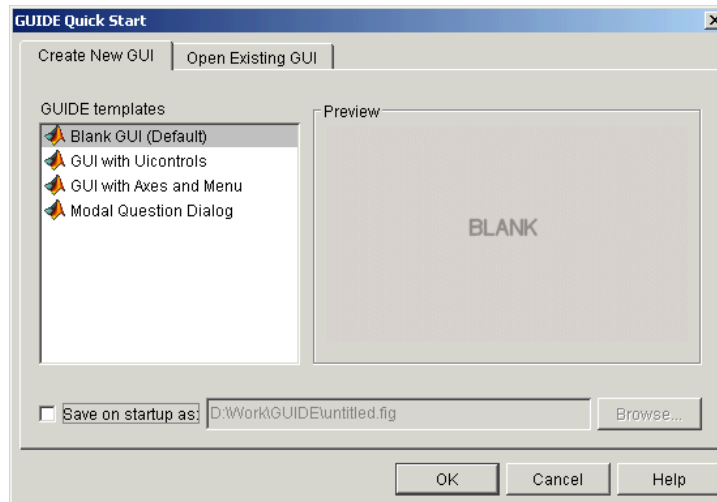
Özellikle GUI tasarımında hızlı arayüzler tasarlamak ve bu işe ilk başlayan programcılar için MATLAB GUIDE aracının kullanılması büyük bir kolaylık sağlar. GUIDE matlab'ın GUI tasarımcılarına sunduğu içerisinde çeşitli araçlar içeren ve kolaylık sağlayan bir grafiksel GUI geliştirme ortamıdır. GUIDE kullanılarak tıklama ve sürük-bırak tekniği ile GUI arayüzüne nesneler (örneğin butonlar, text kutuları, liste kutuları, menü, grafikler, kaydırıcılar v.s.) kolaylıkla eklenebilir. Örneğin bir pushbutton'a basıldığında daha önceden yazılmış bir fonksiyonun çalışması sağlanabilir, ya da veri tabanında saklanan verilerin arayüz açıldığında listbox'ta

görüntülenmesi sağlanabilir. Bu çalışmada gerçekleştirilen GUI arayüz çalışması Şekil 4.1’ de görülmektedir.



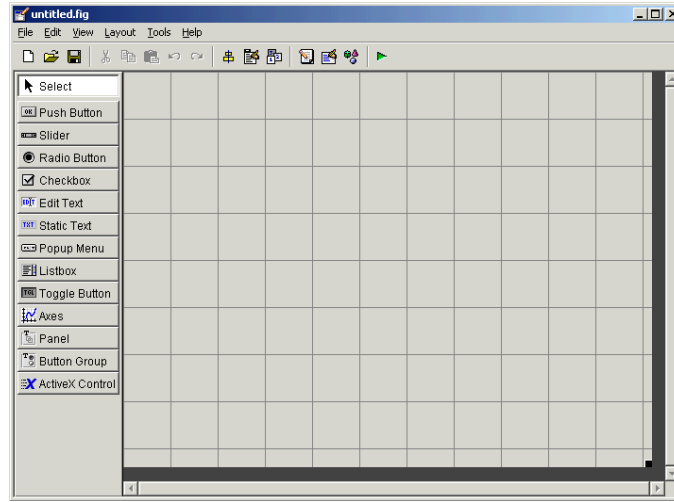
Şekil 4. 1. GHDM uygulaması kullanıcı arayüzüne ait ana pencere

Matlabı çalıştırmak için komut satırına >> guide komutu yazılır. Ayrıca File/new/gui yoluda kullanılabilir. GUI'yi ilk açtığımızda Şekil 4.2'de görülen grafik arayüz penceresi açılır.



Şekil 4. 2. Guide başlangıç ekranı

Bu pencereden eğer yeni bir GUI tasarımı yapılacaksa Blank GUI seçeneği seçilir. Şayet önceden yapılmış bir tasarım açılmak isteniyor ise Open Existing GUI sekmesinden sonra istenilen dosya seçilir. Burada yeni bir tasarım oluşturulacağı kabul edilirse, bundan sonra OK düğmesi tıklanılarak Şekil 4.3'deki GUIDE tasarım ekranına ulaşılır.



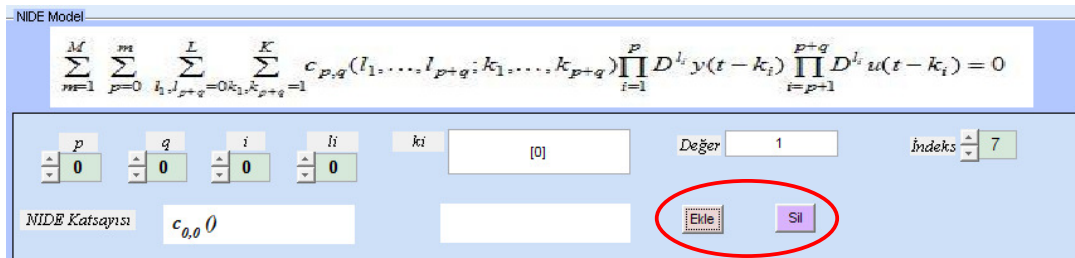
Şekil 4. 3. Guide tasarım ekranı

Açılan bu pencere figure olarak adlandırılır ve uzantısı .fig'dir. Bunun için sol tarafta bulunan nesne butonlarından istenilen nesneye ait buton tıklanır ve daha sonra çalışma alanında uygun görülen bir noktaya tıklandığında o noktaya ilgili nesne eklenmiş olacaktır. İstenirse çalışma alanındaki bir nesne farenin sol tuşu ile tıklanıp bırakılmadan çalışma alanının herhangi bir yerine sürüklenebilir. Oluşturulan arayüz ana penceresinin kodları ve bu pencerede kullanılan nesnelerin ilgili kodları arayüz kaydedildiğinde otomatik olarak arka planda bir *m* file dosyasına kaydedilir. Figure üzerindeki hangi nesneye ait kod görülmek isteniyorsa o nesne üzerinde sağ tıklanıp "view callback" olayına bakılmalıdır.

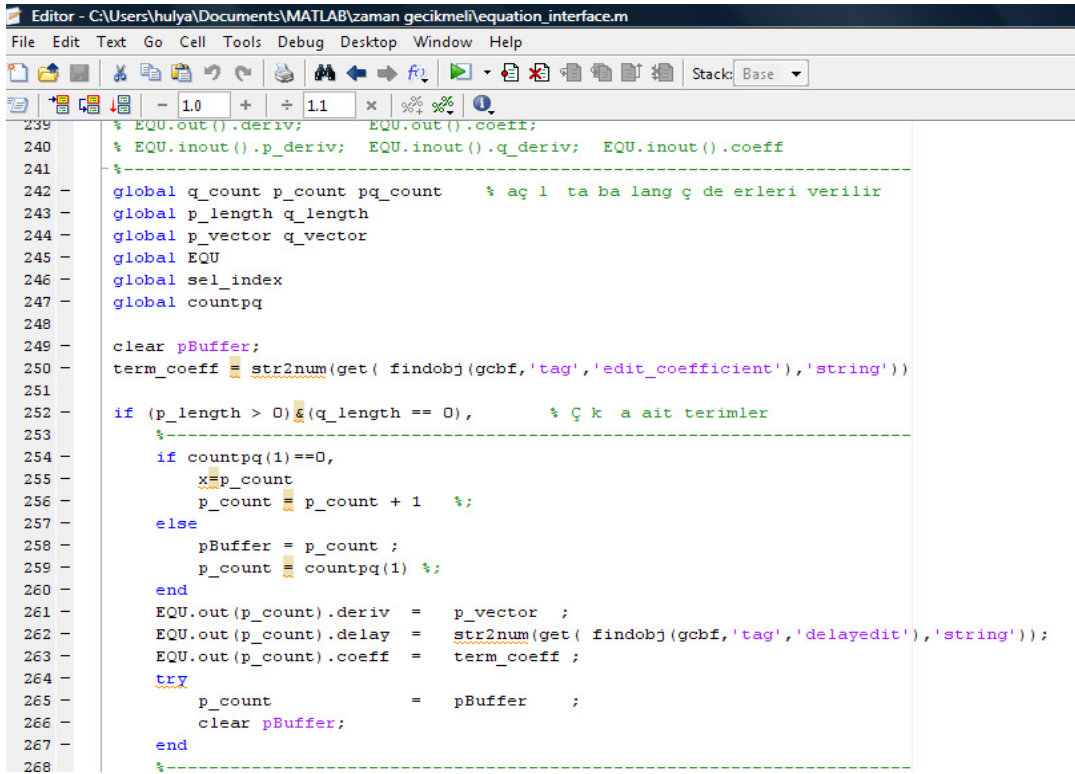
Arayüz tasarımı yapılırken önce hangi işlemlerin yapılacağı ve hangi nesnelerin kullanılacağı belirlenmelidir. Nesneler ekranda oluşturulurken görsel olarak da ekran dizaynına dikkat edilmelidir. Bu çalışmada kullanılan nesneler Push Button, ListBox, Slider, Edit Text, Axes, Static Text, Panel araçlarıdır.

4.2.1 Push Button

Normal bir buton özelliği taşımaktadır. Bir buton üzerine tıklanması ile yapılacak komutlar bu buton ile ilgili callback'lerin altına yazılır. Örneğin bu çalışmada tasarlanan arayüzde Şekil 4.4'den de görüldüğü gibi NIDE model oluşturma bölümündeki ekle ve sil butonları bu nesne ile oluşturulmuştur. Ekle butonuna tıkladığında tanımladığımız denklem bileşeni diferansiyel denkleme eklenir. Sil butonu ise oluşturulmuş olan denklem teriminin silme işlemini yapar. Ekle butonu tıkladığında çalışan komutlar Şekil 4.5' de görülmektedir.



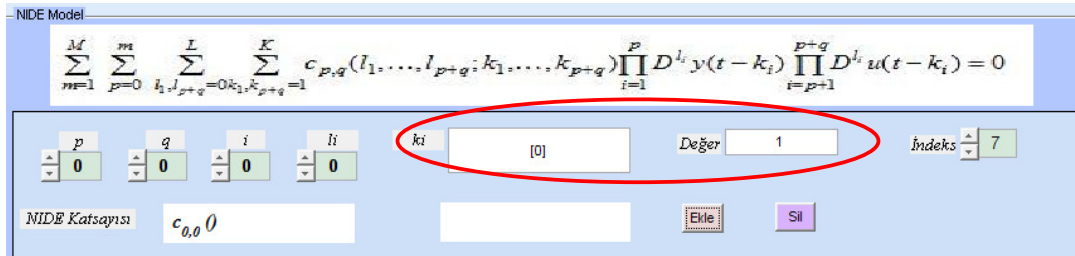
Şekil 4. 4. Arayüzde örnek buton kullanımı



Şekil 4. 5. Sil butonu callback komutları

4.2.2 Edit Text

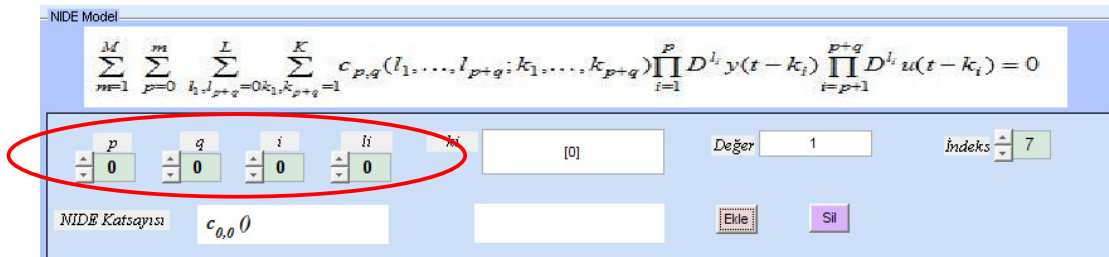
Bir kullanıcıdan bilgi girişi ya da bir değerin alınması söz konusu olduğunda giriş elemanı olarak kullanılan bir nesnedir. Örneğin Şekil 4.6'da görüldüğü gibi diferansiyel denklem bileşeninin k_i zaman gecikmesi ve katsayı değeri edit text kutusundan kullanıcı tarafından girilir.



Şekil 4. 6. Arayüzde edit text kullanımı

4.2.3. Slider

Kullanıcıdan bir giriş değerini kaydırılmak suretiyle kolaylıkla alınmasına imkân veren bir nesnedir. Örneğin arayüzde Şekil 4.7'de görüldüğü gibi denklem tanımlama kısmında p , q , l ve i değerlerinin tanımlanması bu araç ile kolayca yapılmaktadır.

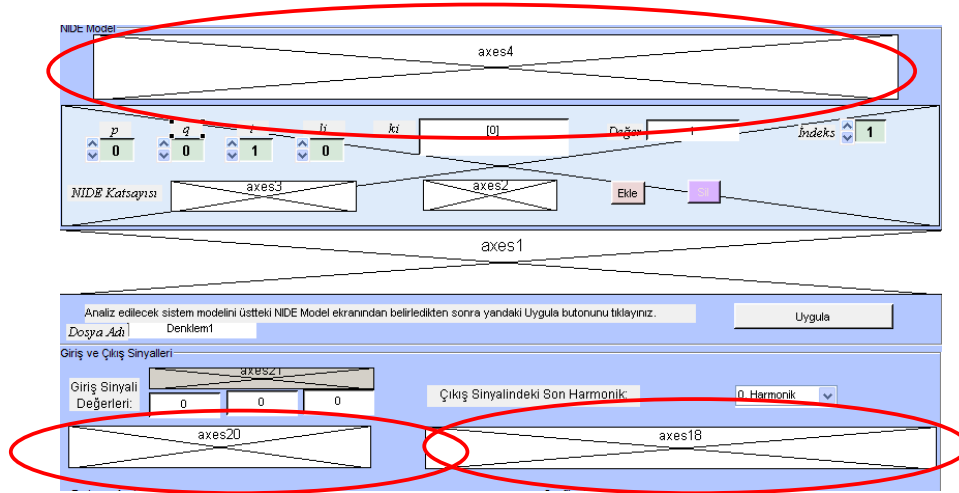


Şekil 4. 7. Arayüzde slider kullanımı

4.2.4. Axes

Ekranı istenilen grafik çizimlerinin veya resimlerin kullanıcıya gösterilmesini sağlayan bir nesnedir. Şekil 4.8'de görüldüğü gibi tasarlanan arayüz ekranında

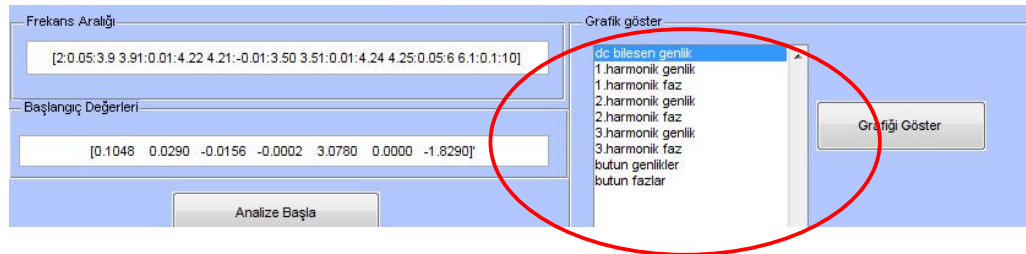
oluşturulan denklem gösterme işlemi, girilen sistem değişkeni ve katsayısı, giriş-çıkış sinyali denklemlerinin ekranda gösterimi bu nesne ile yapılmıştır.



Şekil 4. 8. Arayüzün NIDE model tanımlama kısmında axes kullanımı

4.2.5. List Box

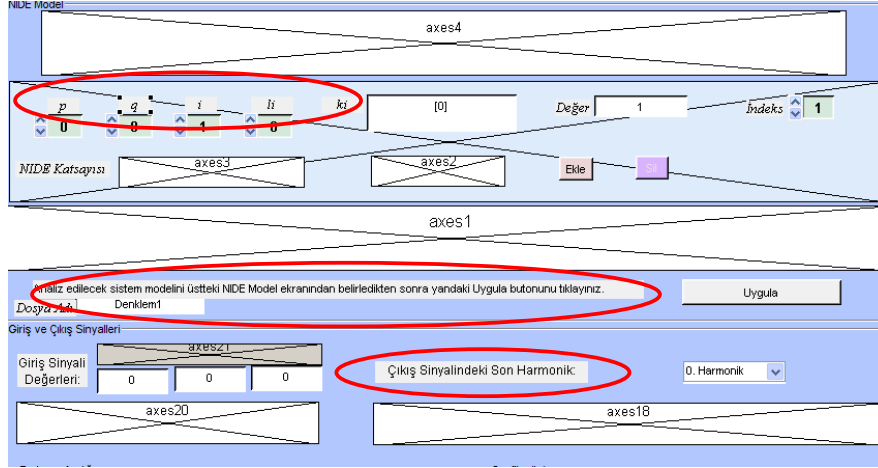
Kullanıcıya bilgi verme amacıyla kullanılabilceği gibi bir değeri listeden seçmek amacıyla da kullanılan sabit bir liste kutusu niteliğinde olan bir nesnedir. Şekil 4.9’da tasarım ekranında oluşturulmuş grafik göster bölümündeki harmonik seçimi listbox ile yapılmıştır.



Şekil 4. 9. Arayüzde listbox kullanımı

4.2.6. Static Test

Sadece bilgi göstermek amacıyla kullanılır. Kodlama mantığı edit text nesnesi ile aynıdır. Şekil 4.10’da görüldüğü gibi tasarım ekranında kullanıcıya yönelik açıklama yapmak amacıyla birçok static test kullanılmıştır.



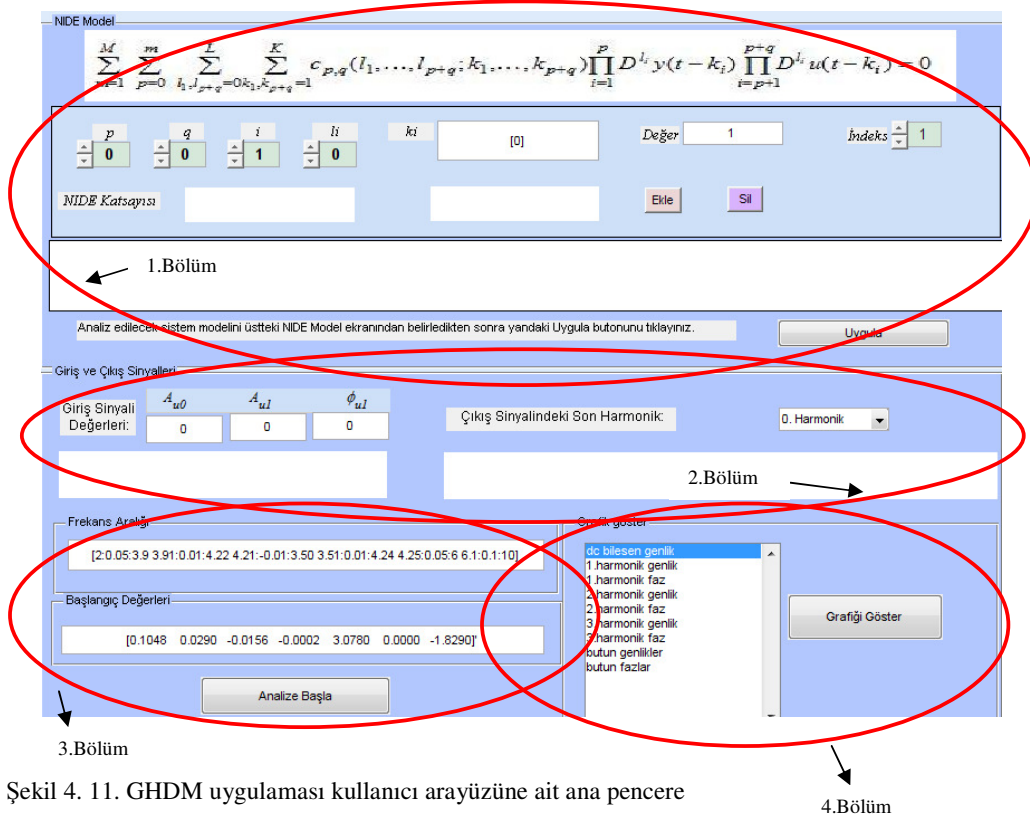
Şekil 4. 10. Arayüzde static test kullanımı

4.3. GHDM Kullanıcı Arayüzü

Genelleştirilmiş harmonik denge analizi için oluşturulmuş arayüz penceresi Şekil 4.11'deki gibi temel olarak dört bölümden oluşmaktadır. Bunlardan ilki, kullanıcı tarafından NIDE model kısmındaki analizi gerçekleştirilecek olan doğrusal olmayan sisteme ait diferansiyel denklemin tanımlanması, yani sisteme ait model katsayılarının girildiği bölümdür. İkinci bölüm $u(t)$ ve $y(t)$ 'nin oluşturulduğu yani giriş sinyaline ait genlik ve faz değerlerinin tanımlandığı, çıkış sinyalinin harmonik sayısının Pop-up menüden belirlenerek program tarafından oluşturulduğu bölümdür. Üçüncü bölümde sistemin analiz edileceği frekans değişim aralığının, başlangıç değerlerinin girildiği ve analiz işleminin yapıldığı bölümdür. Son bölüm olan 4. Bölüm ise istenilen harmoniğe göre sistemin frekans cevabına ait faz ve genlik grafiklerinin çizdirildiği bölümdür.

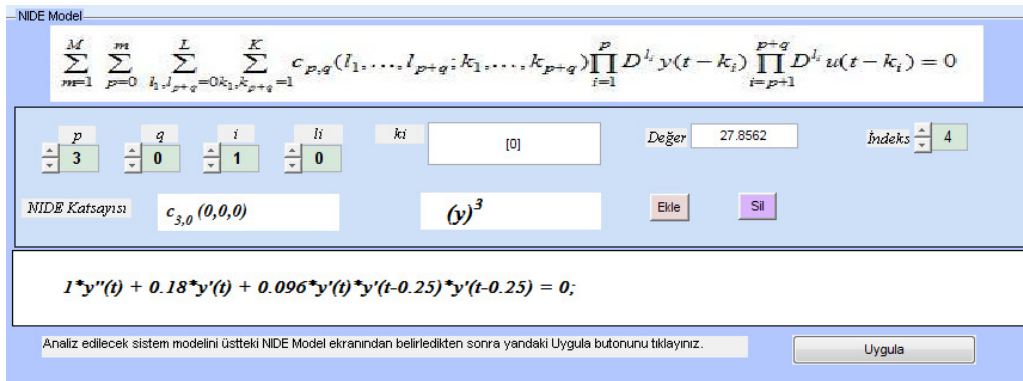
Birinci bölümde, kullanıcı tarafından öncelikle sistemin her bir bileşeni için p , q , l , k ve katsayı değerleri girilerek 'ekle' butonundan eklenir ve denklemin ilk elemanı oluşturularak ekranda gösterilir. Daha sonra kullanıcı her bileşeni tanımlayıp girdikçe bu bileşenler ekle butonu ile sırasıyla denkleme eklenerek ekranda gözükür. Burada p ve q indisleri NIDE model yapısında çıkışa ve girişe ait terimlerin üssünü veya kaç tane eleman çarpımından oluştuğunu gösterir. Eğer girilmek istenen terimde türev derecesi var ise i indisi seçilir ve l_i indisi ile istenen türev değeri ayarlanır. Her

bir değişkene ait zaman gecikmesi değeri de k_i kutusuna yazılır, eğer zaman gecikmesi yok ise “0” değeri girilmelidir. Sistemin bütün değişkenlerinin tanımlaması yapıldıktan sonra ‘uygula’ butonu ile analiz yönteminin uygulanacağı modele ait tanımlama işlemi bitirilmiş olur.



Şekil 4. 11. GHDM uygulaması kullanıcı arayüzüne ait ana pencere

Şekil 4.12’de örnek bir model tanımlaması görülmektedir, oluşturulan terim, model katsayısı ve oluşturulan denklem görsel olarak ekranda çıkar.



Şekil 4. 12. GHDM uygulaması kullanıcı arayüzü NIDE model denklem tanımlama bölümü

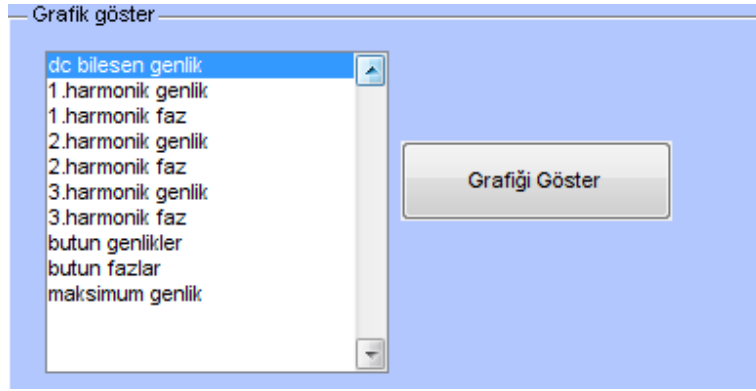
İkinci bölüm, sistem tanımlaması gerçekleştirildikten sonra sistem için giriş ve çıkış sinyallerinin tanımlandığı bölümdür. Örnek uygulaması yapılan sistem için giriş sinyali değerleri A_{udc} bileşen ve A_{u1} değerleri girildikten sonra, çıkış sinyalinde istenilen harmonik sayısı seçilir. Oluşturulan giriş ve çıkış sinyalleri arayüzde görülebilir. Örnek uygulamada girilen değerler Şekil 4.13’ de görülmektedir.

Şekil 4. 13. GHDM uygulaması kullanıcı arayüzü giriş ve çıkış sinyalleri tanımlama bölümü

Bir sonraki adımda sistemin analiz edilmek istenen frekans aralığı ve başlangıç değerleri kullanıcı tarafından girilir. Analizin doğru sonuçlanması için başlangıç değerleri önemlidir. Başlangıç değerlerinin sayısı bilinmeyen sayısı kadar olmalıdır. Örneğin çıkış sinyalindeki son harmonik 3 olarak belirlendiğinde bilinmeyenler A_{y0} , A_{y1} , ϕ_{y1} , A_{y2} , ϕ_{y2} , A_{y3} ve ϕ_{y3} olmak üzere 7 tane olmalıdır. Şekil 4.14’de örnek uygulama modeli için girilmiş değerler görülmektedir. Değerler girildikten sonra ‘Analize Başla’ butonuna tıklanır. Butona tıklandığında harmonik denge denklemleri çözümlenir ve belirtilen frekans aralığında, her bir frekans noktası için bilinmeyen genlik ve faz katsayıları belirlenerek frekans cevabı elde edilir. Harmonik denge denklemlerinin bilinmeyen genlik ve faz değerlerini buldurmak için Nelder-Mead simpleks çözümleme metodu kullanılmıştır.

Şekil 4. 14. GHDM kullanıcı arayüzü frekans aralığı ve başlangıç değerleri tanımlama bölümü

Son bölüm istenen herhangi bir harmonik için, elde edilen frekans cevabı değerlerine göre genlik ve faz grafiklerinin çizdirilmesidir. Kullanıcı “grafik göster” kısmından istediği harmoniği seçerek grafiği göster butonuna tıkladığında o harmoniğe ait genlik veya faz grafiğini elde eder. Ayrıca bütün harmoniklere ait faz ve genlik sonuçlarını aynı grafikte karşılaştırılarak da görebilir. Arayüze ait bu bölüm Şekil 4.15’de görülmektedir.

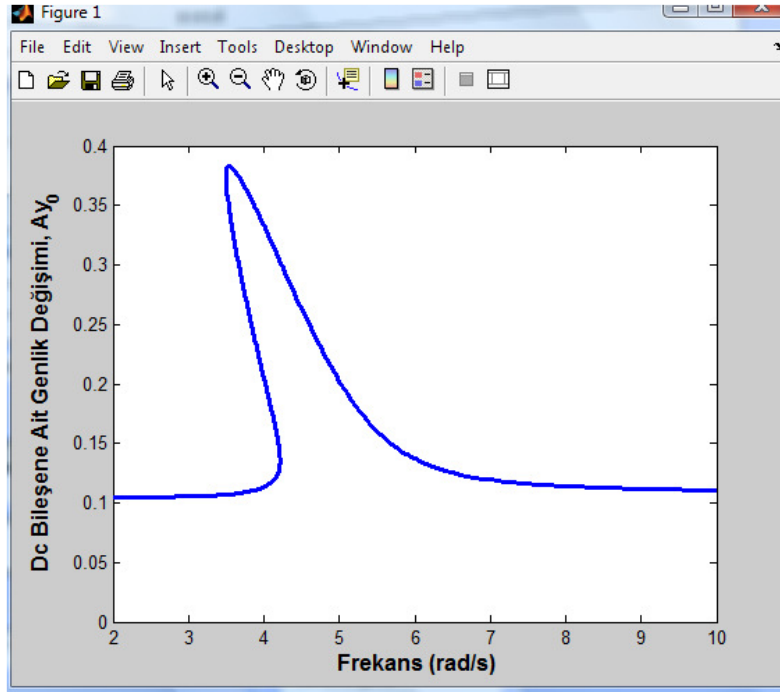


Şekil 4. 15. GHDM uygulaması kullanıcı arayüzü grafik gösterme bölümü

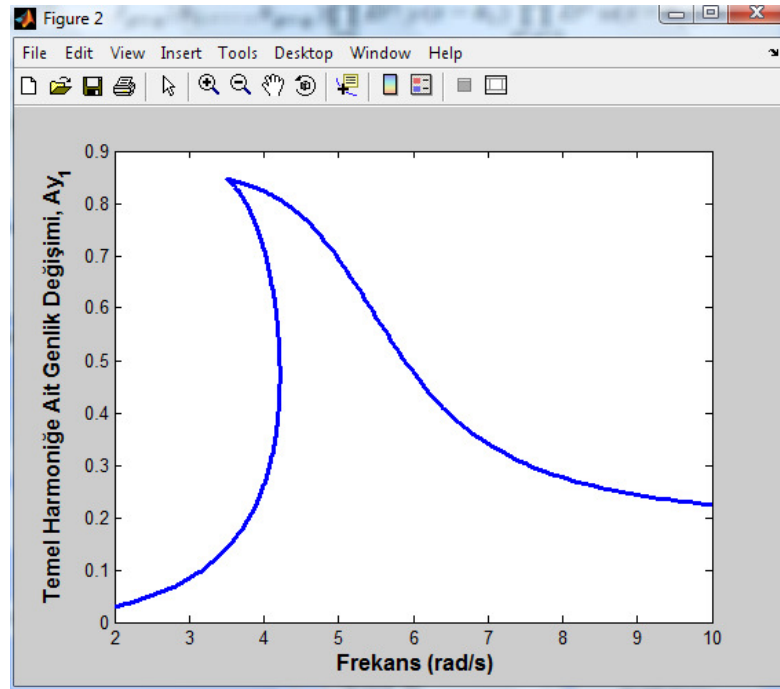
Doğrusal olmayan sistemlerde, frekans cevabı içerisinde süper harmoniklerin gözüktüğü yerlerde atlama olayı gerçekleşir. Bundan dolayı en doğru sonucu elde edene kadar, ani değişimin olduğu frekans noktasından sonra frekansın yönü değiştirilerek, yani frekans değişimi ileri yönde ise geri, geri yönde ise ileri olacak şekilde tekrar çizim işlemi yapılmalıdır. Doğru frekans cevap grafiği elde edilene kadar aynı işlem tekrarlanmalıdır.

4.3.1. Örnek uygulama 1

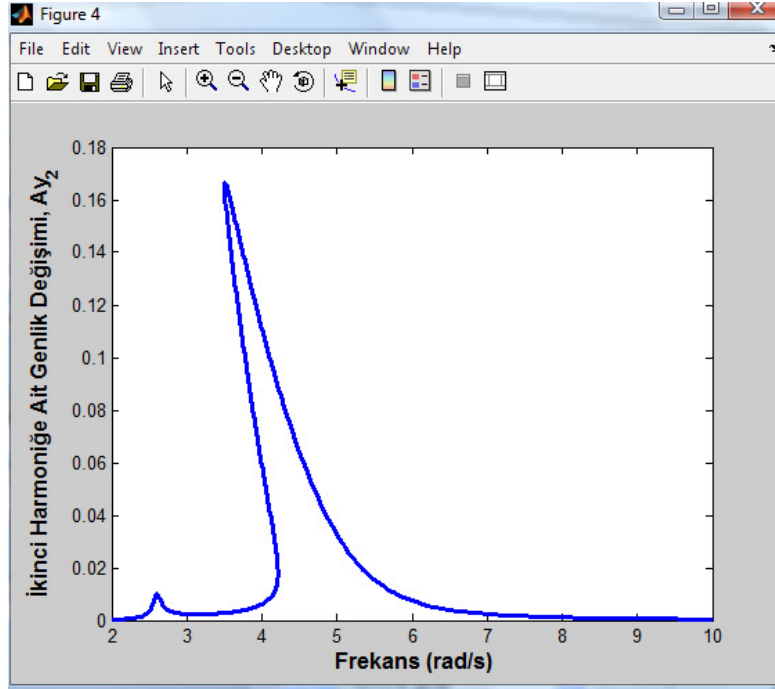
Arayüz uygulama örneği-1 için elde edilecek sonuçların doğruluğunu gösterme açısından bölüm 3’de anlatımı ve uygulaması yapılan doğrusal olmayan zaman gecikmeli örnek sistem modeli kullanılmıştır. Analiz sonucunda elde edilen maksimum genlik cevabı, harmoniklere ait genlik ve faz değişimleri ile harmoniklere ait genlik değişimlerinin karşılaştırmalı sonuçları Şekil 4.16-21’de görülmektedir.



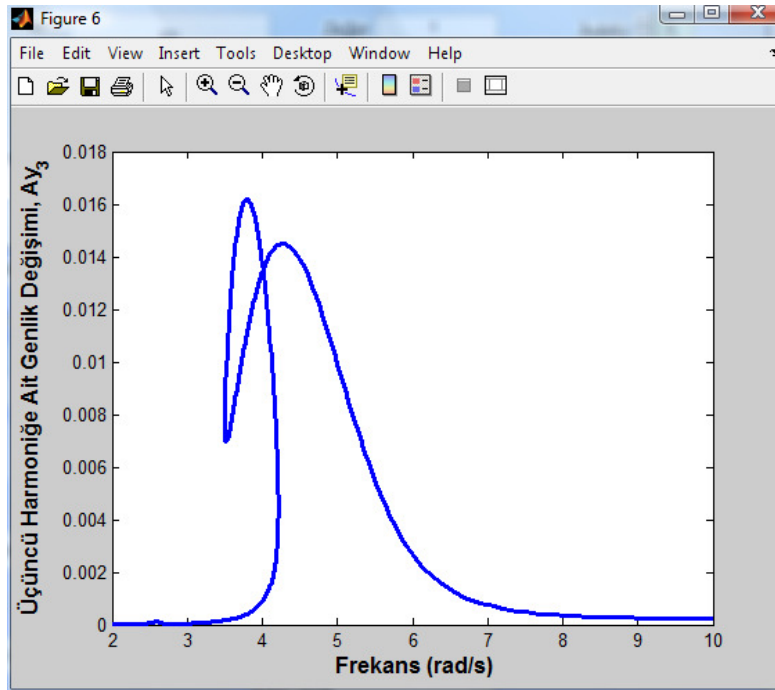
Şekil 4. 16. Örnek sistem-1 için *dc* bileşene ait genlik değişimi



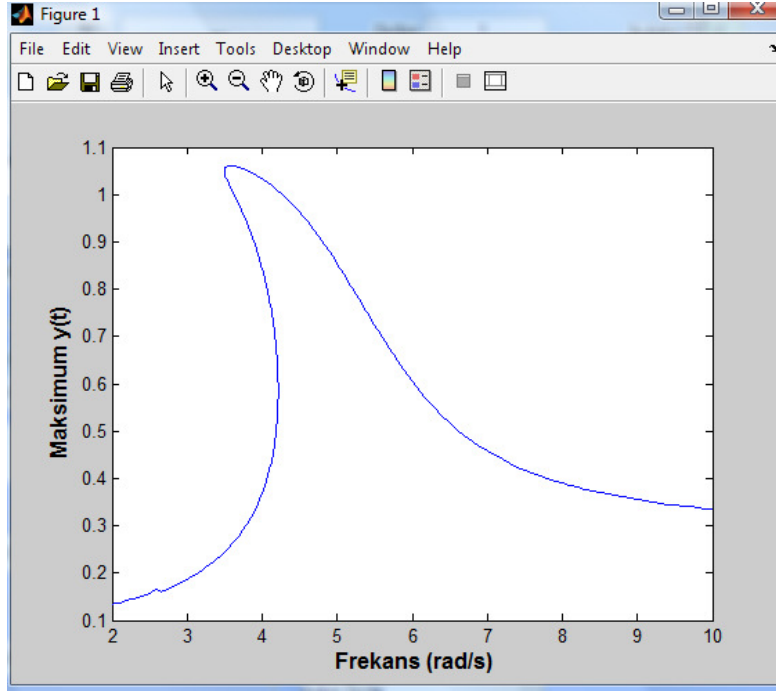
Şekil 4. 17. Örnek sistem-1 için temel harmoniğe ait genlik değişimi



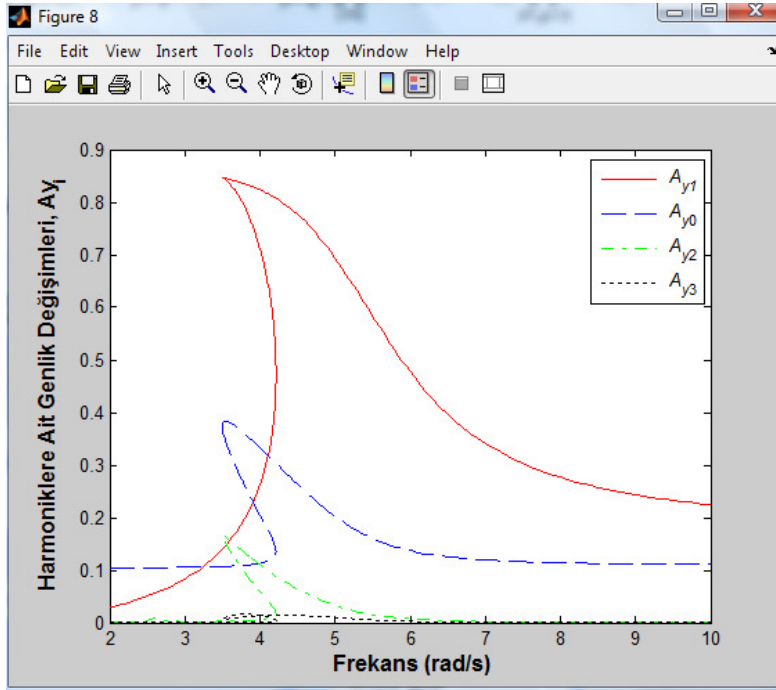
Şekil 4. 18. Örnek sistem-1 için ikinci harmoniğe ait genlik değişimi



Şekil 4. 19. Örnek sistem-1 için üçüncü harmoniğe ait genlik değişimi



Şekil 4. 20. Örnek sistem-1 için maksimum çıkışa ait genlik değişimi



Şekil 4. 21. Örnek sistem-1 için harmoniklere ait genlik değişimi

Elde edilen grafiksel sonuçlar incelendiğinde frekans değişiminin artan yönündeki 3.50 rad/s ile frekans değişiminin azalan yönündeki 4.22 rad/s'de atlama olayının

oluşturduğu anlaşılmaktadır. Bunun yanında atlama olayındaki rezonans değerinin sola doğru kayan kolaylaştırılmış (softening) yapıda olduğu görülmektedir. Grafiklerden de görüldüğü gibi bölüm 3’de elde edilen sonuçlar ile arayüzün kullanımı sonucunda elde edilen sonuçları aynı çıkmaktadır. Sonuçların örtüşüyor olması tasarlanan arayüzün doğru bir şekilde çalıştığını göstermektedir.

Şekil 4. 22. Örnek sistem-2 için arayüz penceresi

4.3.2. Örnek uygulama 2

GHDM arayüzünde başka bir örnek uygulama (örnek-2) için, doğrusal olmayan zaman gecikmeli diferansiyel denklem modeli kullanılmıştır. Modele ait zaman gecikmesi üçüncü dereceden kuvvet değerine sahip doğrusal olmayan terimin birinci dereceden türev bileşenine ait bulunmaktadır. Sistemi tanımlayan eşitlik (4.1)’de görülmektedir.

$$\ddot{y}(t) + 2\mu \dot{y}(t) + d_1 y(t)^2 \dot{y}(t - \tau) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = \omega_n^2 u(t) \quad (4.1)$$

Örnek sistem modeline ait her bir bileşenin katsayıları, zaman gecikmesi ve giriş sinyali katsayıları aşağıdaki parametre değerleri alınarak arayüz üzerindeki tanımlar gerçekleştirilmiştir.

$$\left. \begin{array}{llll} \omega_n = 1; & d_1 = 0.1 & \mu = 0.005 & \tau = 0.1 \\ \alpha_3 = 4; & a_{u_1} = 0.2 & a_{u,dc} = 0 & \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

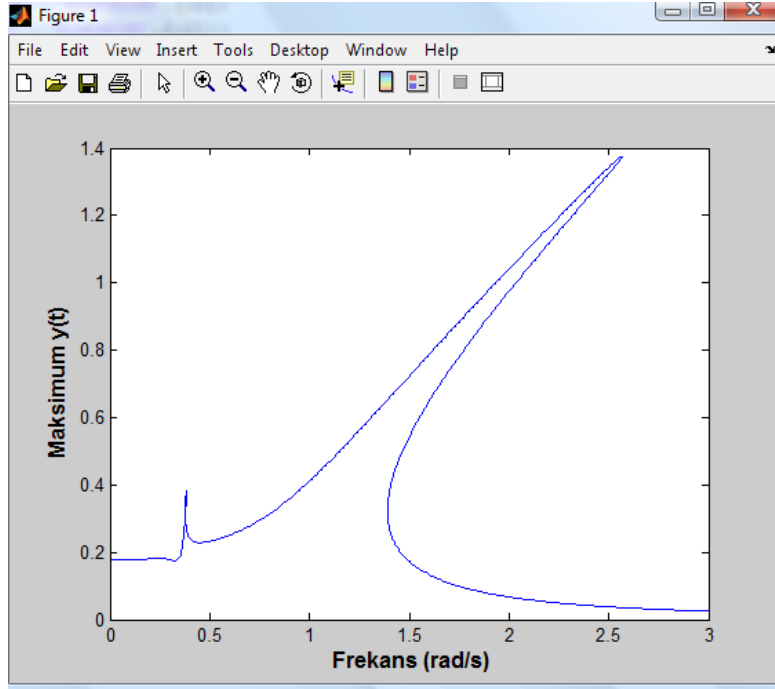
Örnek sistemin tanımlandığı arayüze ait pencere Şekil 4.22’de görülmektedir.

Tanımlanan örnek sistemin analizinde atlama olayını gösteren frekans cevabında kullanılan frekans aralığına ait vektör yapısı aşağıdaki gibi alınmıştır.

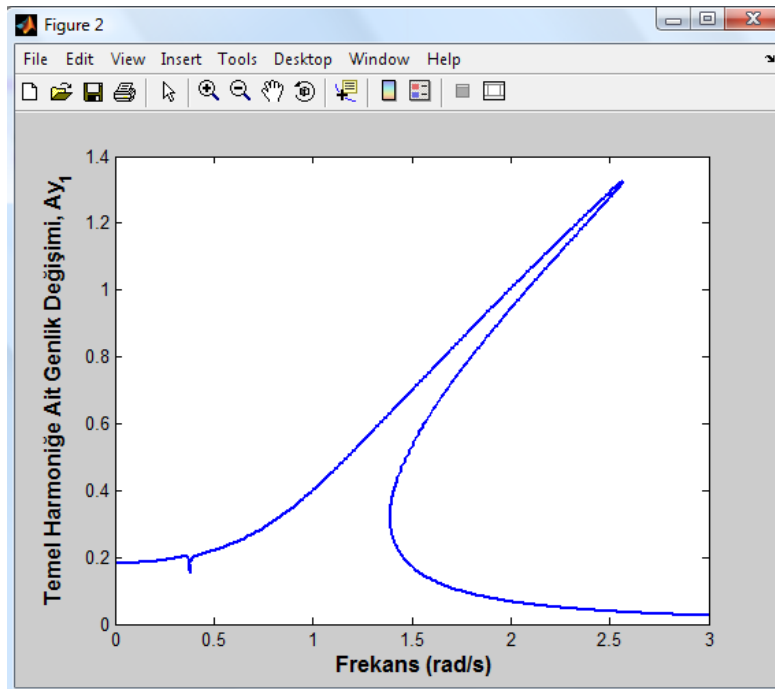
$$\omega = \left[\begin{array}{l} 0.01:0.01:0.30 \ 0.301:0.001:0.385 \ 0.384:-0.001:0.377 \ 0.378:0.001:0.4 \\ 0.41:0.01:2.5 \ 2.501:0.001:2.565 \ 2.564:-0.001:2.5 \ 2.51:-0.01:1.42 \\ 1.41:-0.001:1.391 \ 1.392:0.001:1.499 \ 1.50:0.01:3 \end{array} \right] \quad (4.3)$$

Uygulama sonucunda elde edilen maksimum genlik cevabı, harmoniklere ait genlik ve faz değişimlerine ait cevaplar ve harmoniklere ait genlik değişimlerinin karşılaştırmalı sonuçları Şekil 4.23-28’de görülmektedir. Grafikselleştirilmiş sonuçlar ve yukarıda verilen eşitlik (4.3) incelendiğinde 0.385 rad/s ile 2.564 rad/s frekans değerlerinde atlama olayının olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca elde edilen frekans cevabının yapısı sistemin içerdiği üçüncü dereceden doğrusal olmayan terimin katsayısının pozitif değer taşımasından dolayı zorlaştırıcı (hardening) yapıda oluşmuştur. Bu yönüyle ikinci örnek uygulama birinci örnek uygulamadan farklılık göstermektedir.

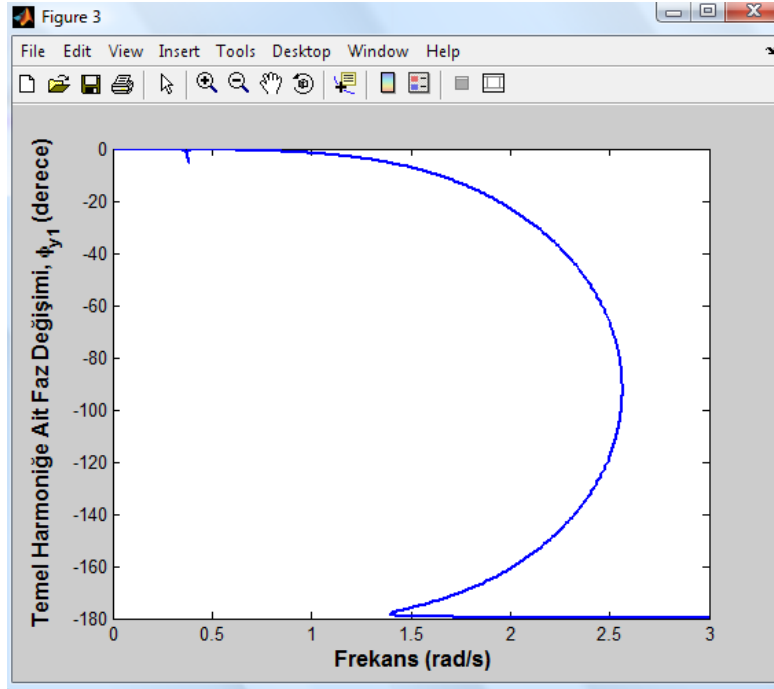
Şekil 4.28’de bütün harmoniklere ait genlik değişimi sonuçları karşılaştırmalı olarak görülmektedir. Sistemi en çok etkileyen genlik değeri temel harmoniğe aittir. Sistemin giriş sinyalinde dc bileşen bulunmadığından dolayı Şekil 4.28’den de görüldüğü gibi dc bileşene ve ikinci harmoniğe ait analiz sonuçları sıfır olduğu için grafikte yer almamaktadır. Üçüncü harmoniğe ait genliğin sisteme etkisi ise temel harmoniğe göre daha az gerçekleşmiştir.



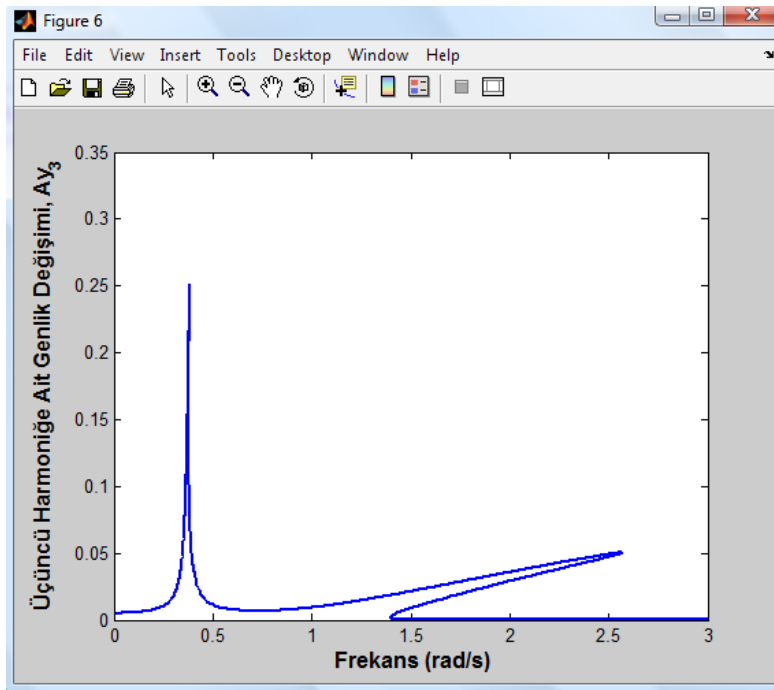
Şekil 4. 23. Örnek sistem-2 için maksimum çıkış genliği



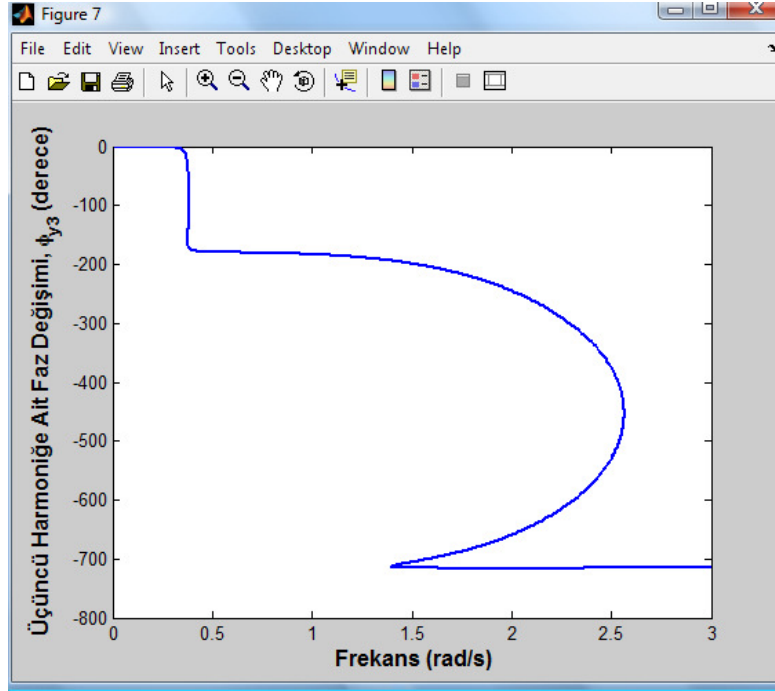
Şekil 4. 24. Örnek sistem-2 için temel harmoniğe ait genlik değişimi



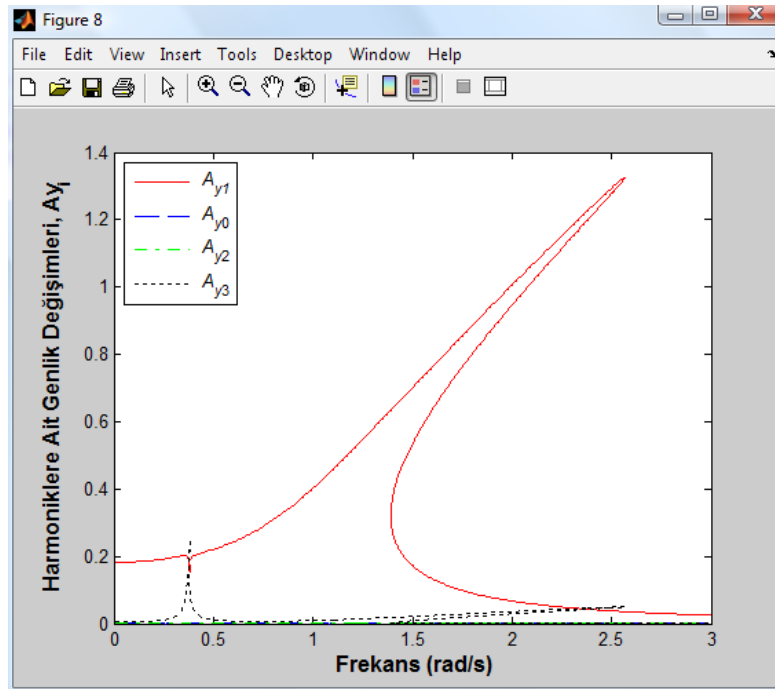
Şekil 4. 25. Örnek sistem-2 için temel harmoniğe ait faz değişimi



Şekil 4. 26. Örnek sistem-2 için üçüncü harmoniğe ait genlik değişimi



Şekil 4. 27. Örnek sistem-2 için üçüncü harmoniğe ait faz değişimi



Şekil 4. 28. Örnek sistem-2 için bütün harmoniklere ait genlik değişimi

Ancak maksimum genlik grafiğinin 0.4 rad/sn civarındaki değişimin üçüncü harmonikten kaynaklandığı gerek Şekil 4.28'deki bütün harmoniklere ait genlik

karşılaştırmalarından gerekse Şekil 4.26'daki üçüncü harmoniğe ait genlik değişiminin maksimum tepe değerinin oluştuğu bölgeden anlaşılmaktadır.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR

Dünyada birçok sistem doğrusal yapıda görünmesine rağmen aslında doğrusal olmayan bir yapıdadır. Günümüzde insan yaşamını kolaylaştırmak amacıyla oluşturulmak istenen teknolojik sistemlerin tasarımı, analizi ve boyutlandırılmasının yapılabilmesi için kullanılan teknik modelleme kavramı olarak karşımıza çıkar. Bir sistemi modellemeden önce onu matematiksel eşitliklerle tanımlamak gerekir.

Bu çalışmada tek girişli-tek çıkışlı doğrusal olmayan zaman gecikmeli sistemlerin genel olarak tanımlanmasında kullanılan NIDE model yapısı tercih edilmiştir. Analiz metodu olarak da bu modellerin frekans cevabı analizinde kullanılan Genelleştirilmiş harmonik denge metodu kullanılmıştır. Bu metodun klasik uygulamasında sistem derecesinin yüksek olduğu ve harmonik sayısının artmasından kaynaklanan karmaşıklıklar bulunmaktadır. 2005 yılında Peyton tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada sunulan algoritma ile bu problemler azaltılmaya çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında da genelleştirilmiş harmonik denge metodu olarak adlandırılan bu algoritma yapısı kullanılmıştır. Örnek olarak algoritma doğrusal olmayan zaman gecikmeli bir sistem olan geminin düzenli denizlerdeki yalpalanma hareketlerini temsil eden matematiksel modeli üzerinde uygulanarak denge denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen denge denklemlerini çözmek için Nelder-Mead minimizasyon algoritması kullanılarak belirlenen frekans aralığında her bir frekans noktası için dc ve harmonik bileşenlerin genlik ve faz değerleri belirlenerek grafiklerle sunulmuştur. Frekans belirleme işlemi çözümleninin gerçekleştiği frekans noktalarına göre bazen ileriye bazen geriye doğru değiştirilip çizdirilerek atlama olayının gerçekleştiği frekans değerleri tespit edilmiş ve grafiklerde renklendirilerek gösterilmiştir.

Ayrıca otomatikleştirilmiş algoritmanın uygulamasına yönelik bir kullanıcı arayüzü çalışması gerçekleştirilmiştir. Böylece kullanıcının sunulan çalışmada anlatılan yöntemden bağımsız olarak istediği sonuçları elde etmesine imkan sağlanmıştır. Kullanıcı, analizi gerçekleştirilecek zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistem tanımlamasını, harmonik sayısını, zaman gecikmesini ve sisteme ait giriş-çıkış sinyallerini belirterek istediği frekans aralığı için denge denklemlerini kolayca oluşturabilmektedir. İstenildiğinde herhangi bir harmonik bileşen için, her bir frekans noktasında genlik ve faz değerleri belirlenerek grafik göster kısmı ile istenilen frekans cevabını kolayca çizdirilebilmektedir.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Geleneksel harmonik denge metodunun en büyük dezavantajlarından biri çözümlemede harmonik sayısının artması ve sistem derecesinin yükselmesinden dolayı oluşan karmaşıklığıdır. Sunulan algoritma ile bu dezavantajların ortadan kalkması sağlanmış ve işlem basitleştirilmiştir. Algoritma bu çalışmada zaman gecikmeli sistemler için uygulansa da, herhangi bir sistem için örneğin ayrık denklemleri ile tanımlanan sistemler için de uygulanabilir. Otomatikleştirilmiş algoritma hem manuel hem de herhangi bir bilgisayar programında uygulamaya imkan vererek doğrusal olmayan zaman gecikmeli bir sisteme ait harmonik denge denklemlerinin elde edilmesini sağlar. İstenilen R derecesinde R-harmonik için algoritma uygulanabilir. Elde edilen denge eşitliklerinin yapısı aynı zamanda belli terim ve harmonik bileşenlerin çözüm üzerindeki etkisini görme imkânı tanımaktadır. Örneğin bu çalışmada uygulanan zaman gecikmeli diferansiyel denklem modelindeki dc (bias) terimin veya kübik sönüm (damping) ifadesindeki zaman gecikmesinin çıkış cevabı üzerindeki etkilerini de görmek mümkündür. Her bir bileşen için elde edilen frekans cevabı genlik ve faz grafiklerinden açıkça yorumlanabilir. Sunulan algoritmanın bir dezavantajı tek giriş-tek çıkışlı NIDE modelleri ile sınırlandırılmış olmasıdır. Bundan dolayı gerçekleştirilen çalışmada kullanılan yöntemin çok giriş- çok çıkışlı sistemlerde de uygulanabilirliği analiz edilerek, frekans boyutundaki sonuçları incelenebilir. Gerçekleştirilen GHDM kullanıcı arayüz programının daha çok kişi tarafından ve eğitim amacıyla kullanılabilmesi web ortamına adapte edilerek sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] ZORLU, H., Doğrusal Olmayan Sistemlerin Yapay Sinir Ağları Kullanılarak Kimliklendirilmesi, Yüksek Lisans Tezi, EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 3-5, 2004.
- [2] KHALIL, H.K., Nonlinear Systems, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [3] ZEIDLER, E., Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Springer-Verlag, 1999.
- [4] ÇANKAYA, İ., BOZ, A.F., Volterra Serileri Metodu ile Doğrusal Olmayan Sistemlerin Frekans Boyutunda Analizi, S. Demirel Üniv., Fen Bilimleri Enstitüsü, Cilt. 9, Sayı 2, sf. 147-151, 2005.
- [5] ÇANKAYA, İ., JONES, J.C.P., VATANSEVER, Genelleştirilmiş Tanımlama Fonksiyonu Serileri Metodu ile Doğrusal Olmayan Sistemlerin Frekans Boyutunda Analizi, Yıldız Teknik Üniversitesi Dergisi-Sigma, Sayı 4, sf. 22-30, 2003.
- [6] LI, L.M., BILLINGS, S. A., Continuous Time Non-Linear System Identification in The Frequency Domain, International Journal of Control, Vol. 74, No. 11, pp. 1052–1061, 2001.
- [7] TAYLOR, J. A., PENG, Z. K., LANG, Z. Q., BILLINGS, S. A., Non-Linear Output Frequency Response Functions For Multi-Input Nonlinear Volterra Systems, International Journal of Control, Vol. 80, No. 6, pp. 843-855, 2007.
- [8] LANG, Z.Q., BILLINGS S.A. , YUE, R., LI, J., Output Frequency Response Function of Nonlinear Volterra Systems, Science Direct, Automatica, Vol 43, pp. 805-816, 2007.
- [9] AKGÜN, D., ÇANKAYA, İ., VATANSEVER, F., Harmonik Denge Metodu Analizi İçin Bir Arayüz Tasarımı, UMES'07-Ulusal Teknik Eğitim, Mühendislik ve Eğitim Bilimleri Genç Araştırmacılar Sempozyumu, Kocaeli, Cilt 1, sf. 305-308, 2007.
- [10] ÇANKAYA, İ., Doğrusal Olmayan Geminin Sallanma Hareketi İçin Maksimum Genliklerin Hesaplanması, Journal of Polytechnic, Cilt 6, Sayı 4, sf. 619-625, 2003.

- [11] GÜNEL, K., Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, AMÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 4-5, 2006.
- [12] JONES, J. C. P, Automatic Computation of Polyharmonic Balance Equations For Nonlinear Differential Equations, International Journal of Control, Vol. 76, pp. 355-365, 2003.
- [13] JONES, J.C.P, Practical Frequency Response Analysis of Non-linear Time-Delayed Differential or Difference Equation Models, International Journal of Control, Vol. 78, pp. 65-79, 2005.
- [14] SWAİN, A.K., MENDES, E.M.A.M., NGUANG S.K, Analysis of The Effects of Time Delay in Nonlinear Systems Using Generalised Frequency Response Functions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 294 , pp. 341-354, 2006.
- [15] BLAIR, K.B., KROUSGRILL, C.M., FARRİS, T.N., Harmonic Balance and Continuation Techniques in The Dynamic Analysis of Duffing's Equation, Journal of Sound and Vibration , Vol. 202, No. 5, pp. 717-731, 1997.
- [16] DOOREN, R. V., Comments on Harmonic Balance and Continuation Techniques in The Dynamic Analysis of Duffing's Equation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, No.3, pp. 525-529, 1999.
- [17] BELENDEZ, A., MENDEZ, D.I., BELENDEZ T., HERNANDEZ, A., ALVAREZ, M.L., Harmonic Balance Approaches to The Nonlinear Oscillators in Which the Restoring Force is Inversely Proportional to The Dependent Variable, Journal of Sound and Vibration, Vol. 314, pp. 775-782, 2008.
- [18] HACIOĞLU, R., Sistem Tanımlamaya Giriş Ders Notları, Zonguldak Karaelmes Üniversitesi, Elektrik Elektronik Müh. Fak, 2009.
- [19] GÖKBİLEN, B., Doğrusal Olmayan Sistemlerin Zamanla Değişen Doğrusal Yüzey Kullanılarak Kayan Kipli Kontrolü ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 1-2, 2006.
- [20] BİR, A., Otomatik Kontrol Sistemleri, İTÜ Elektrik Elektronik Fakültesi, Literatür Yayınları., İstanbul, sf. 27-29, 1999.
- [21] GÜZ, Ü., Lineer Sabit Parametrelili Sistemlerin Frekans Domeni Verileri Yardımıyla Modellenmesi , Yüksek Lisans Tezi, , İÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 1-2, 1997.
- [22] ÇANKAYA, İ., Doğru Simülasyon İçin Başlangıç Değerlerinin Seçimi, SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Cilt 7, Sayı 3, sf. 87-91, 2003.

- [23] ZORLU, H. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Yapay Sinir Ağları Kullanılarak Kimliklendirilmesi, Yüksek Lisans Tezi, EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 1, 2004.
- [24] BROGAN, W. L., Modern Control Theory, 3 rd ed.
- [25] KARA, R., Nonlinear Dinamik Sistemlerde Kaos, Dallanma ve Fraktaller, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 14-16, 2006.
- [26] HSU, J. C., MEYER, A. U., Modern Control Principles and Applications, McGraw-Hill, sf. 6-9, 1968.
- [27] KAZUMASA, H., NOBUYUKI, S., A General Criterion for Jump Resonance of Nonlinear Control Systems, IEEE, Vol-23, 1978.
- [28] KAVANAGH, R. J., GIRIDHARAGOPAL, K., Jump Resonance Properties of Certain Nonlinear Systems with Prefilters, IEEE, 1974.
- [29] HORVAT, K., MISKOVIC M., KULJACA, O., Avoidance of Nonlinear Resonance Jump in Turbine Governor Positioning System Using Fuzzy Controller, IEEE, 0-7803-7852-0, 2003.
- [30] UÇAR, A., On The Chaotic Behaviour of a Prototype Delayed Dynamical System, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 16, pp. 187-194, 2003.
- [31] UÇAR, A., A Prototype Model for Chaos Studies, International Journal of Engineering Science, Vol. 40, pp. 251-258, 2002.
- [32] GÜNEY, Z. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler Üzerine, Doktora Tezi, DEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 1-5, 1989.
- [33] GÜNEL, K., Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, AMÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, SF. 12-14, 2006.
- [34] VOLTERRA, V., Theory of Functionals and of Integral and Integrodifferential Equations, New York: Dover, 1959.
- [35] WORDEN, K., MANSON, G., Random Vibrations of a Duffing Oscillator Using The Volterra Series, Journal of Sound and Vibration, Vol. 217, pp. 781-789, 1998.
- [36] JONES, J. C. P., The Interpretation of Non-linear Frequency Response Functions, International Journal of Control, Vol. 52, pp. 319-346, 1990.
- [37] LOZOWICKI, A., On Application of The Describing Function Method For Optimization of Feedback Control Systems, International Journal of Robust Nonlinear Control, Vol. 7, pp. 911-933, 1997.

- [38] TAYLOR, J. A., Robust Nonlinear Control Based on Describing Functions Methods, Proceedings of the ASME Dynamics Systems Measurement and Control Division, Fairfield, NJ, USA, Vol. 64, pp. 539–546, 1998.
- [39] KAHLİL, H. K., Non-linear Systems, 3rd edn., New York: Prentice Hall International, 2001.
- [40] COOK, P. A., In Non-linear Dynamical Systems, M.J. Grimble, Editor, Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, 1994.
- [41] NELDER, J. A., MEAD, R. A, Simplex Method for Function Minimization, Comput. J., Vol. 7, pp. 308-313, 1965.
- [42] SAVAŞ, K., Kontrol Sistemleri İçin Matlab’da GUI Uygulamaları Tasarımı, Lisans Tezi, MÜ Teknik Eğitim Fakültesi, 2007.
- [43] http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/index.html?/access/helpdesk/help/techdoc/creating_guis/brwfuik.html&http://www.mathworks.com/cgi-bin/texis/webinator/search/?db=MSS&prox=page&rorder=750&rprox=750&rdfreq=500&rwfreq=500&rlead=250&sufs=0&order=r&is_summary_on=1&ResultCount=10&query=gui&submitButtonName=Search, 24.07.2009.
- [44] MARCHAND, P., HOLLAND, O. T., Graphics and GUIs with MATLAB, Third Edition, ACRC Pres Company, New York, pp. 396-502, 2003.

EKLER

EK A Temel Harmoniğe Ait $\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$ Terimi İçin Simetrik Fonksiyonların Elde Edilişi

$\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$ çarpım çıkış teriminin diğer kombinasyon elemanlarına göre permütasyon çarpanlarının hesaplanan simetrik fonksiyonlarına ait sonuçları tabloları

Tablo A.1. $f_y^{sym}(-2,1,2)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{-2,1,2\}$	$A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)0} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau}$
$\{-2,2,1\}$	$A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)0} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau}$
$\{1,2,-2\}$	$A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau} A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau}$
$\{1,-2,2\}$	$A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau}$
$\{2,1,-2\}$	$A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)0} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau} A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau}$
$\{2,-2,1\}$	$A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)0} A_{y_{-2}}(-2j\omega)^1 e^{-j(-2\omega)\tau} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau}$

Hesaplanan simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(-2,1,2) = \frac{1}{6} (A_{y_{-2}} A_{y_1} A_{y_2} (4j\omega^3) 2(1 + e^{-3j\omega\tau} + e^{j\omega\tau})) \quad (A.1)$$

Tablo A.2. $f_y^{sym}(-1,-1,3)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{-1,-1,3\}$	$A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)0} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau} A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau}$
$\{-1,3,-1\}$	$A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)0} A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)\tau} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau}$
$\{3,-1,-1\}$	$A_{y_3}(3j\omega)^1 e^{-j(3\omega)0} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau}$

Hesaplanan simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(-1,-1,3) = \frac{1}{3} (A_{y_{-1}}^2 A_{y_3} (-3j\omega^3) (2e^{-2j\omega\tau} + e^{2j\omega\tau})) \quad (A.2)$$

Tablo A.3. $f_y^{sym}(-1,0,2)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{-1,0,2\}$	$A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)0} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau}$
$\{-1,2,0\}$	$A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)0} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau}$
$\{0,2,-1\}$	$A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)0} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau}$
$\{0,-1,2\}$	$A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)0} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau} A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)\tau}$
$\{2,0,-1\}$	$A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)0} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau}$
$\{2,-1,0\}$	$A_{y_2}(2j\omega)^1 e^{-j(2\omega)0} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau}$

Hesaplanan simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(-1,0,2) = 0 \quad (A.3)$$

Tablo A.4. $f_y^{sym}(-1,1,1)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{-1,1,1\}$	$A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)0} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau}$
$\{1,1,-1\}$	$A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau}$
$\{1,-1,1\}$	$A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} A_{y_{-1}}(-1j\omega)^1 e^{-j(-1\omega)\tau} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau}$

Hesaplanan simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(-1,1,1) = \frac{1}{3} (A_{y_{-1}} A_{y_1}^2 (j\omega^3) (e^{-2j\omega\tau} + 2)) \quad (A.4)$$

Tablo A.5. $f_y^{sym}(0,0,1)$ için permütasyon çarpanlarına göre simetrik fonksiyonun toplam terimi

$\{r_1, r_2, r_3\}$	Toplam Terim
$\{0,0,1\}$	$A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)0} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau}$
$\{0,1,0\}$	$A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)0} A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)\tau} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau}$
$\{1,0,0\}$	$A_{y_1}(1j\omega)^1 e^{-j(1\omega)0} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau} A_{y_0}(0j\omega)^1 e^{-j(0\omega)\tau}$

Hesaplanan simetrik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_y^{sym}(0,0,1) = 0 \quad (A.5)$$

EK B Dc, İkinci ve Üçüncü Harmoniğe Ait Tablolar

Tablo B.1. Dc bileşende doğrusal terimler için hesaplanan $f^{sym}(\cdot)$ değerleri ve $\omega_{r_1} = 0$ için kombinasyonlar

$\{r_1\}$	n_r^*	$y(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{y}(t)$	$u(t)$
0	1	A_{y_0}	0	0	A_{u_0}

Tablo B.2. Dc bileşende kübik terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve $\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = 0$ için bütün frekansların kombinasyonları

$\{r_1, r_2, r_3\}$	n_r^*	$\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$	$y(t)^3$
$\{-3,0,3\}$	6	0	$A_{y_{-3}}A_{y_0}A_{y_3}$
$\{-3,1,2\}$	6	$A_{y_{-3}}A_{y_1}A_{y_2}(2j\omega^3)(e^{j\omega\tau} + e^{2j\omega\tau} + e^{-3j\omega\tau})$	$A_{y_{-3}}A_{y_1}A_{y_2}$
$\{-2,-1,3\}$	6	$A_{y_{-2}}A_{y_{-1}}A_{y_3}(-2j\omega^3)(e^{-j\omega\tau} + e^{-2j\omega\tau} + e^{3j\omega\tau})$	$A_{y_{-2}}A_{y_{-1}}A_{y_3}$
$\{-2,0,2\}$	6	0	$A_{y_{-2}}A_{y_0}A_{y_2}$
$\{-2,1,1\}$	3	$A_{y_{-2}}A_{y_1}^2(2j\omega^3)(e^{-2j\omega\tau} + 2e^{j\omega\tau})/3$	$A_{y_{-2}}A_{y_1}^2$
$\{-1,-1,2\}$	3	$A_{y_{-1}}^2A_{y_2}(-2j\omega^3)(e^{2j\omega\tau} + 2e^{-j\omega\tau})/3$	$A_{y_{-1}}^2A_{y_2}$
$\{-1,0,1\}$	6	0	$A_{y_{-1}}A_{y_0}A_{y_1}$
$\{0,0,0\}$	3	0	$A_{y_0}^3$

Tablo B.3. İkinci harmonik bileşende doğrusal terimler için hesaplanan $f^{sym}(r_1)$ değerleri ve $\omega_{r_1} = 2\omega$ için bütün frekansların kombinasyonları

$\{r_1\}$	n_r^*	$y(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{y}(t)$	$u(t)$
2	1	A_{y_2}	$A_{y_2}(2j\omega)$	$A_{y_2}(-4\omega^2)$	$A_{u_2} = 0$

Tablo B.4. İkinci harmonik bileşende kübik terimler için hesaplanan $f_{uy}^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve

$$\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = 2\omega \text{ için bütün frekansların kombinasyonları}$$

$\{r_1, r_2, r_3\}$	n_r^*	$\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$	$y(t)^3$
$\{-3,2,3\}$	6	$A_{y_{-3}}A_{y_2}A_{y_3}(6j\omega^3)(1+e^{j\omega\tau}+e^{-5j\omega\tau})$	$A_{y_{-3}}A_{y_2}A_{y_3}$
$\{-2,1,3\}$	6	$A_{y_{-2}}A_{y_1}A_{y_3}(2j\omega^3)(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau}+e^{-4j\omega\tau})$	$A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_3}$
$\{-2,2,2\}$	3	$A_{y_{-2}}A_{y_2}^2(8j\omega^3)(2+e^{-4j\omega\tau})/3$	$A_{y_{-2}}A_{y_2}^2$
$\{-1,0,3\}$	6	0	$A_{y_{-1}}A_{y_0}A_{y_3}$
$\{-1,1,2\}$	6	$A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_2}(2j\omega^3)(1+e^{-j\omega\tau}+e^{-3j\omega\tau})/3$	$A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_2}$
$\{0,0,2\}$	3	0	$A_{y_0}^2A_{y_2}$
$\{0,1,1\}$	3	0	$A_{y_0}A_{y_1}^2$

Tablo B.5. Üçüncü harmonik bileşende doğrusal terimler için hesaplanan $f^{sym}(r_1)$ değerleri ve

$$\omega_{r_1} = 3\omega \text{ için bütün frekansların kombinasyonları}$$

$\{r_1\}$	n_r^*	$y(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{y}(t)$	$u(t)$
3	1	A_{y_3}	$A_{y_3}(3j\omega)$	$A_{y_3}(-9\omega^2)$	$A_{u_3} = 0$

Tablo B.6. Üçüncü harmonik bileşende kübik terimler için hesaplanan $f^{sym}(r_1, r_2, r_3)$ değerleri ve

$$\sum_{i=1}^3 \omega_{r_i} = 3\omega \text{ için bütün frekansların kombinasyonları}$$

$\{r_1, r_2, r_3\}$	n_r^*	$\dot{y}(t)\dot{y}(t-\tau)^2$	$y(t)^3$
$\{-3,3,3\}$	3	$A_{y_{-3}}A_{y_3}^2(9j\omega^3)(2+e^{-6j\omega\tau})$	$A_{y_{-3}}A_{y_3}^2$
$\{-2,2,3\}$	6	$A_{y_{-2}}A_{y_2}A_{y_3}(4j\omega^3)(1+e^{-j\omega\tau}+e^{-5j\omega\tau})$	$A_{y_{-2}}A_{y_2}A_{y_3}$
$\{-1,1,3\}$	6	$A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_3}(j\omega^3)(1+e^{-2j\omega\tau}+e^{-4j\omega\tau})$	$A_{y_{-1}}A_{y_1}A_{y_3}$
$\{-1,2,2\}$	3	$A_{y_{-1}}A_{y_2}^2(4j\omega^3)(2e^{-j\omega\tau}+e^{-4j\omega\tau})/3$	$A_{y_{-1}}A_{y_2}^2$
$\{0,0,3\}$	3	0	$A_{y_0}^2A_{y_3}$
$\{0,1,2\}$	6	0	$A_{y_0}A_{y_1}A_{y_2}$
$\{1,1,1\}$	1	$A_{y_1}^3(j\omega^3)(e^{-2j\omega\tau})$	$A_{y_1}^3$

ÖZGEÇMİŞ

Hülya IŞIK, 04.06.1984 de Ardahan' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Kırşehir'de tamamladı. 2001 yılında Prof. Dr. İlhan Kılıçözlü Fen Lisesinden mezun oldu. 2001 yılında başladığı SDÜ Bilgisayar Sistemleri Öğretmenliği bölümünü 2005 yılında bitirdi. 2005 yılında Sakarya Sapanca ilçesinde bulunan Sapanca ATL, TL ve METEM Lisesinde Bilişim Teknolojileri öğretmeni olarak göreve başladı. 2009-2010 yılından itibaren Kırşehir Kaman ilçesinde bulunan Kaman Anadolu Ticaret Meslek Lisesinde öğretmenlik görevine devam etmektedir. 2006 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans eğitimine devam etmektedir.