T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zehra ÖRS

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr.Yalçın YILMAZ

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zehra ÖRS

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 19 / 06 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Elman ALİYEV	**Y.Doç.Dr.Şevket GÜR**	**Y.Doç.Dr.Yalçın YILMAZ**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zehra ÖRS

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 19 / 06 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Elman ALİYEV	**Y.Doç.Dr.Şevket GÜR**	**Y.Doç.Dr.Yalçın YILMAZ**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın başlangıcından itibaren tecrübesi ile bana yol gösteren, çalışmamın hiçbir aşamasında desteğini ve hoşgörüsünü benden esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Yalçın Yılmaz'a minnettar olduğumu,

Ayrıca yine çalışmamın her aşamasında tez konum ile ilgili değerli fikirlerini benden esirgemeyen, verdiği destekle moralimi sürekli yüksek tutmamı sağlayan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Şevket Gür'e teşekkürü bir borç bildiğimi,

Bu çalışmamın tamamlanmasında benimle birlikte göstermiş oldukları fedakarlık, bana vermiş oldukları destek ve her türlü anlayışları için değerli eşim, onun ailesi ve kendi aileme de teşekkürlerimi bildirir, emeği geçen herkese saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR... ii
İÇİNDEKİLER iii
SİMGELER LİSTESİ... v
ŞEKİLLER LİSTESİ vii
ÖZET... ix
SUMMARY.. x

BÖLÜM 1.
GİRİŞ.. 1

BÖLÜM 2.
DALGA DENKLEMİ.. 4
2.1. Giriş.. 4
2.2. Bir Boyutlu Dalga Denklemi, Başlangıç Değer Problemi………… 6
2.2.1. Düzlemsel harmonik dalgalar.. 8
2.2.2. Başlangıç değer probleminin çözümü……………………… 11
2.2.3. Karakteristik eğrilerin önemi... 19
2.2.4. Uygun şekilde tanımlanmış bir başlangıç değer problemi..... 21
2.3. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi.. 22
2.3.1. Matematiksel model………………………………………… 23
2.3.2. Dış kuvvet olmadığında formal seri çözümü……………….. 25
2.3.3. Dış kuvvet varlığında formal seri çözümü………………….. 30
2.3.4. Formal seri çözümü hakkındaki yorumlar………………….. 36

BÖLÜM 3. 40
BİRİNCİ MERTEBEDEN EŞİTSİZLİKLERE DAYALI KESTİRİMLER….
3.1. Giriş…………………………………………………………………... 40
3.2. Hacim İntegral Metodu……………………………………………….. 40
3.2.1. Metodun tanımı……………………………………………… 41
3.3. Neumann Problemi………………………………………………… 43
3.4. Phragmen-Lindelöf ve Diğer Kestirimler………………………….. 52
3.5. Eğri Sınırlı Bölgeler………………………………………………... 57
3.6. Başlangıç Sınır Değer Problemi…………………………………… 64
3.7. Basit Bir Lemma…………………………………………………… 70

BÖLÜM 4.
LİNEER OLMAYAN SINIR KOŞULLARI ALTINDAKİ DALGA DENKLEMİ İÇİN UZAYSAL DAVRANIŞ KESTİRİMLERİ…………….. 80
4.1. Giriş……………………………………………………………….. 80
4.2. Problemin İfadesi………………………………………………….. 80
4.3. Çözümler İçin Kestirimler………………………………………… 82

BÖLÜM 5.
HİPERBOLİK ISI DENKLEMİ İÇİN UZAYSAL BİR AZALIM KESTİRİMİ…………………………………………………………………... 98
5.1. Giriş……………………………………………………………….. 98
5.2. Ön Hazırlıklar……………………………………………………... 99
5.3. Bir Azalım Teoremi……………………………………………….. 107
5.4. Yarı Lineer Dalga Denklemleri İçin Bir Genişleme………………. 118

BÖLÜM 6.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER……………………………………………….. 124

KAYNAKLAR……………………………………………………………….. 126
ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………………... 127

∇_1	: R^{n-1} de Gradient operatörü

SİMGELER LİSTESİ

A	: Dalganın genliği
A_n	: Fourier sinus katsayısı
B_n	: Fourier sinus katsayısı
c	: Dalga hızı (yayılmnın hızı)
C_n	: Genlik
f	: Dalganın frekansı
F	: Dış kuvvet (alan kaynağı)
$F(\tilde{x},t)$	: Dış kuvvetin ortalama yoğunluğu
k	: Dalga sayısı
t	: Zaman değişkeni
T	: Dalganın periyodu veya baınç
u_n	: Titreşimin normal modları
v_t	: Doğrultu kosinüsü
v_x	: Doğrultu kosinüsü
w	: Açısal frekans
w_n	: Karakteristik frekans
x	: Uzay değişkeni
x_n	: Düğüm noktaları
ε_n	: Faz
ρ	: Telin doğrusal yoğunluğu
Δs	: Telin bir parçası
Δ	: R^n de Laplace operatörü
Δ_1	: R^{n-1} de Laplace operatörü
∇	: R^n de Gradient operatörü

$\nabla.$	: Divergence operatörü
Γ	: Yüzey ailesi
$\partial\Gamma$	: Eğrisel sınır
$\partial^2\overline{u}/\partial t^2$	: Kütle merkezinin hızı
λ	: Dalga boyu veya ayırma sabiti
λ_1	: Özdeğer
$\partial u/\partial v$	: dış normal türev

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Dalga profilinin t zamanı arttıkça x ekseni boyunca yer değiştirmesi…………………………………………………...	7
Şekil 2.2.	Sinüsoidal profilin c hızı ile x ekseni boyunca sağa doğru hareket etmesi…………………………………………………	9
Şekil 2.3.	Dalganın $2A\cos wt$ genliği ve w açısal frekansı ile sinüsoidal olarak değişmesi………………………………………………	10
Şekil 2.4.	x ekseninin $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ aralığında olan ve (x_0, t_0)'dan geçen şekilde verilmiş olan karakteristik eğrilerle sınırlı xt düzlemi üzerinde alınan bir bölge……………………………….	12
Şekil 2.5.	Karakteristik eğrilerin gösterimi……………………………...	20
Şekil 2.6.a.	$[a,b]$ aralığının belirleyici bölgesi………………………………	20
b.	$[a,b]$ aralığının etki bölgesi……………………………………..	20
Şekil 2.7.	T basıncının telin teğeti doğrultusunda olduğu kabul edilmiş düzgün bir salınım yapan tel…………………………………….	23
Şekil 2.8.	Uçlarından bağlanmış ideal durumdaki bir telin orta noktasından tutulup h miktarınca çekilmesi……………………	33
Şekil 3.1.	Sınırı C, yan yüzeyi Γ_0 ve Γ_L ayrık kısımlarından oluşan üç boyutlu bir bölge……………………………………………...	41
Şekil 3.2.	Sabitleri L,h kartezyen koordinatları (x,y) olan ve (3.4)'te belirtilen problemin tüm koşullarını sağlayan sonlu bir dikdörtgen…………………………………………………….	45
Şekil 3.3.	Γ_r, r radyal koordinata sahip bölgenin kesiti, R_r ise bölgenin r'den küçük olmayan radyal koordinatlı kısmı olmak üzere (r,θ) kutupsal koordinatlarıyla belirlenmiş sonlu bir bölge...	58
Şekil 3.4.		

ty düzleminde $t=0$ apsisli Γ_0 doğru parçasıyla ve sırasıyla $y_+(t), y_-(t)$ ile tanımlı C_+, C_- eğrileriyle sınırlı bir bölge 71

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Phragmen-Lindelöf Prensibi, Hacim İntegral Metodu, Lineer Olmayan Sınır Koşulları Altındaki Dalga Denklemi, Hiperbolik Isı Denklemi, Asimptotik Koşul, Asimptotik Davranış, Uzaysal Kestirim

Bu çalışmada bazı koşullar altında çeşitli denklemler ile tanımlanmış problemlerin çözümlerinin ya da çözümlerin türevlerinin negatif olmayan fonksiyonunu içeren bir ölçüm fonksiyonunun davranışlarını incelemek için Phragmen-Lindelöf Prensibi'nden ve Hacim İntegral Metodu'ndan yararlanılmıştır. Bunun sonucunda bazı artım ya da azalım kestirimleri elde edilmiştir.

Birinci bölümde çalışmanın amacı ve kapsamından ayrıntılı bir şekilde söz edilmiştir. İkinci bölümde dalga denklemi ve bu denklemin homojen olma ya da homojen olmama durumlarını içeren başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin elde edilişi üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde hacim integral metodunun düzlemsel koordinatlarla belirlenmiş sonlu bir dikdörtgensel bölgede bir Neumann problemine nasıl uyarlandığı ve bölgenin yarı sonsuz bir dikdörtgensel bölgeye genişletilmesi halinde Phragmen-Lindelöf tipi bir kestirimin nasıl elde edileceği gösterilmiştir. Devamında kutupsal koordinatlarla belirlenmiş sonlu ve yarı sonsuz bölgeler için de benzer analizler ayrıca elde edilmiştir. Daha sonra yarı sonsuz bir silindir üzerinde tanımlanmış bir başlangıç sınır değer problemi incelenmiştir. Son olarak verilen bir büyüklüğün türevinin nasıl alınacağı gösterilmiş ve çeşitli örnekler üzerinde uygulamaları yapılmıştır. Ardından gelen dördüncü bölümde lineer olmayan sınır koşulları altındaki damping terimli lineer dalga denklemini içeren bir başlangıç sınır değer probleminin çözümleri için geliştirilen kestirimlerden elde edilmiş olan ölçüm fonksiyonuna göre belirli koşullar altında artım ve azalım kestirimleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise hiperbolik ısı denklemi için bir azalım kestirimi ortaya konulmuştur. Çalışmanın son bölümünde ise elde edilen genel sonuçlara ve bir takım önerilere yer verilmiştir.

DIFFERENTIAL INEQUALITIES

SUMMARY

Key Words: Phragmen–Lindelöf Principle, Volume Integral Method, Wave Equation Under Nonlinear Boundary Conditions, Hyperbolic Heat Equation, Asymptotic Condition, Asymptotic Behaviour, Spatial Estimate

In this study, Phragmen-Lindelöf Principle and Volume Integral Method has been benefiting from to analyse solutions of problems that described with various equations under some conditions or derivatives of solutions a measure function containing that is not negative. As a result of this, some increase and decrease estimates have obtained.

In the first section the purpose of the work and scope has been mentioned in detail. In second part focused on wave equation and obtaining of initial boundary value problem's solutions that contains the case of equations is homogeneous or not homogeneous. In the third chapter, it has been shown that how volume integral method been adapted to Neumann problem at the finite rectangular region set of planar coordinates and how Phragmen-Lindelöf type estimate obtained in case of region enlarged to semi-finite rectangular region. Continue with similar analysis for finite and semi-finite region defined by polar coordinates were also obtained. Then, an initial boundary value problem that defined on a semi-finite cylinder is investigated. Finally, how to take a derivative of state value has been shown and applications made on various samples. Then in the fourth section, according to measure function developed for solutions of an initial boundary value problems under some conditions, it has been taken increase and decrease estimates that contain damping terms linear wave equation under nonlinear boundary conditions. In the fifth section, decrease estimate has been established for the hyperbolic heat equation. In the last part of study obtained results and some suggestions are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yapısal mekanikte ve katılar mekaniğinde, klasik temel problem, yapı elemanlarının uçlardaki etkileşmelere olan direncinin belirlenmesidir. Binaların, otomobillerin, nükleer reaktörlerin, uçakların yapımında ve dizaynında bağlantı elemanlarının ne kadar gerilime maruz kalacağının mühendisler tarafından bilinmesi gerekmektedir. Kullanılacak malzemenin mukavemetinin ve uygulanan kuvvetler altında ne kadar deformasyona uğrayacağının bilinmesi, kaynağını Saint-Venant elastik prensibi'nden almış olan hacim integral metodu ve Phragmen-Lindelöf prensibi sayesinde mümkün olmaktadır. Bu teoriler yardımıyla var olan bir problem için uygun şekilde tanımlanmış bir ölçüm fonksiyonuna göre artım ya da azalım kestirimleri elde edilmekte, böylece üzerinde çalışılan yapıdaki deformasyonun hangi aşamada ve ne boyutta olacağı tahmin edilebilmektedir.

İlk olarak uçlarından bağlanmış şekilde serbest titreşim yapan bir telin, dışarıdan kuvvet uygulanmadığında ve uygulandıktan sonraki hareketini belirleyebilmek için elektromanyetik teori, hidrodinamik, akustik, elastik ve kuantum teori gibi farklı alanlarda çakışmaların yapılmasına yardımcı olmuş olan dalga denklemi ve onun çözümlerinden yararlanılmaktadır. Tel için incelenen durumlar öncelikle dalga denklemini içeren bir başlangıç sınır değer problemiyle modellenip, bu problemin çözümüyle de serbest titreşim halinde bulunan telin bir dış kuvvet varlığında ya da yokluğunda yapacağı bir sonraki hareketin matematiksel denklemlerle ifade edilmesi sağlanmaktadır. Genel olarak denge durumunda bulunan bir telin, bir ucundan belli bir miktar çekilip serbest bırakıldıktan sonraki hareketi; serbest titreşim hareketi ile dış kuvvet etkisi altında iken meydana gelen hareketin süperpozisyonu şeklindedir. Ayrıca okuyucuyu bilgilendirmek için dalga profilleri, düzlemsel harmonik dalgalar ve karakteristik eğriler hakkında da yorumlar yapılmaktadır.

Devamında, çalışmanın temel amacı olan birinci mertebeden eşitsizliklere dayalı kestirimler elde edebilmek için farklı bölgeler üzerinde çalışılmakta, hacim integral metodu ve Phragmen-Lindelöf prensibi yardımıyla bazı kestirimler elde edilmektedir. Hacim integral metodunda amaç, eğer verilen problemin çözümünün ya da çözümün türevlerinin negatif olmayan bir fonksiyonunu içeren hacim integral ölçümü (ölçüm fonksiyonu) $F(x)$ ise, bu $F(x)$ fonksiyonuna göre yazılmış olan birinci mertebeden bir diferansiyel eşitsizlik ve buradan da *x'* e ve *F(0)* veri terimine bağlı bir üst sınır elde etmektir. Phragmen-Lindelöf prensibi ise kabaca, bir ölçümün verilen bir üstel (ya da polinomik) fonksiyondan daha hızlı ve asimptotik olarak artmadığı biliniyorsa; o çözümün ölçümü sonsuza doğru gidildikçe üstel (ya da polinomik) olarak azalıyor anlamına gelmektedir. Yani Phragmen-Lindelöf prensibi yarı sonsuz bölgeler üzerinde ortaya çıkmaktadır. Sonlu bir dikdörtgensel bölge üzerinde tanımlanmış bir Neumann problemi ele alınıp hacim integral metodu yardımıyla bir azalım kestirimi elde edilmektedir. Sonrasında hacim integral metodu ve Neumann probleminin yarı sonsuz bir dikdörtgensel bölgede nasıl uygulandığı gösterilmekte, Phragmen-Lindelöf tipi bir azalım kestirimi elde edebilmek için bir asimptotik koşula ihtiyaç duyulmaktadır. Aksi takdirde bir artırım kestirimi elde edilecektir. Bu asimptotik koşul yardımıyla sonlu dikdörtgensel bölge ve yarı sonsuz dikdörtgensel bölge üzerinde aynı azalım kestirimi elde edilmektedir. Dikdörtgensel bölge düzlemsel koordinatlarla temsil edileceğinden sonrasında kutupsal koordinatlarla belirlenmiş sonlu ve yarı sonsuz bölgeler üzerinde incelemeler yapılmaktadır. Bu bölgeler üzerinde Neumann probleminden farklı bir problem ele alınmakta fakat önceki kısımda olduğu gibi her iki bölge için de aynı problem göz önünde bulundurulmaktadır. Yine burada da hacim integral metodu ve Phragmen-Lindelöf prensibi yardımıyla iki bölge üzerinde de aynı azalım kestirimi elde edilmektedir. Yarı sonsuz bir silindir üzerinde tanımlanmış bir başlangıç sınır değer problemi için de benzer yöntemler kullanılarak bir azalım kestirimi elde edilmektedir. Ardından verilen bir büyüklüğün türevinin nasıl alınacağı Leibnitz teoremi yardımıyla gösterilmekte ve bunun uygulamaları yapılmaktadır.

İlerleyen kısımlarda önceki problemlerden farklı olarak lineer olmayan sınır koşulları altındaki damping terimli lineer dalga denklemini içeren bir başlangıç sınır değer probleminin çözümleri üzerinden hareketle, daha önceki problemlerde uygun şekilde tanımlanmış ölçüm fonksiyonu yerine verilen tüm koşulları sağlayan bir ölçüm fonksiyonunun elde edilişi gösterildikten sonra bu ölçüm fonksiyonuna göre kestirimler bulunmaktadır. Ayrıca lineer olmayan sınır koşulları altındaki lineer denklemler için önceki sonuçlardan farklı olarak bazı koşullar altında birbirinden farklı davranışlar gösteren artırım kestirimleri elde edilmektedir. Ancak eğer benzer enerji integrali sınırlı ise , o zaman çözümün üstel bir azalım tahminini sağlayacağı gösterilerek buradan Phragmen-Lindelöf tipi bir azalım kestirimine ulaşılmaktadır.

Son kısımlarda hiperbolik ısı denklemini içeren bir başlangıç sınır değer problemi incelenmektedir. Uygun şekilde tanımlanmış olan bir ölçüm fonksiyonuna göre azalım kestirimi elde edebilmek için gerekli hazırlıklar yapıldıktan ve bazı özel koşullar da eklendikten sonra istenilen şekilde bir azalım kestirimi sonucuna varılmaktadır. Devamında birçok diğer özel koşulların da aynı azalım kestiriminin sağlanmasında yeterli olacağından söz edilmektedir. Yarı lineer bir dalga denklemi için de benzer işlemlerin ardından varılan sonuçlar ve önceki metotların bazı olası genişlemeleri incelendikten sonra çalışma sonlandırılmaktadır.

BÖLÜM 2. DALGA DENKLEMİ

2.1. Giriş

Hiperbolik denklemlerin bir türü ve matematiksel fizikte diferansiyel denklemlerin en önemlilerinden biri olan dalga denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Δu sembolü u 'nun Laplace operatörü olduğunu gösterir ve c de pozitif reel bir sabittir. Çoğu kez t değişkeni zamanı ifade eder. Bir, iki ya da üç boyutlu dalga denklemi olarak adlandırılan (2.1) denklemi Laplace operatöründeki gibi bir, iki ya da üç boyutlu kavramıyla bağdaşır. Bu diferansiyel denklem; elektromanyetik teori, hidrodinamik, akustik, elastik ve kuantum teori gibi farklı alanlarda çalışmaların yapılmasına yardımcı olmuştur. Verilen denklemin çözümleri dalgaların matematiksel tanımını ve etkilerin yayılımını ifade ettiğinden dolayı bu denklem bahsedilen konular için önemlidir. Fiziksel olarak çözümler, elektrik ya da manyetik yoğunluk dalgalarını, akustik basınç dalgalarını, katı bir cisim içindeki eksenel yer değişim dalgalarını veya benzer diğer olguları ifade eder. (2.1) denkleminin bir çözümü çoğu kez dalga fonksiyonu olarak adlandırılır.

Homojen olmayan dalga denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = F \tag{2.2}$$

şeklindedir. Fiziksel olarak bakıldığında u durum değişkeninden bağımsız olan F fonksiyonu bir dış kuvveti veya bir alan kaynağını temsil eder. Bununla birlikte F, t'ye bağlı olduğu gibi uzay değişkenlerinin bir fonksiyonu da olabilir. Birçok uygulamalar içerisinde büyük önemi olan benzer bir denklem;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta u = F \tag{2.3}$$

şeklindedir. Burada γ, pozitif reel bir sabittir. (2.3) denklemi damping terimli dalga denklemi olarak adlandırılır. Sonuç olarak birinci mertebeden türevin (u_t) varlığından dolayı genlikleri zamanla üstel olarak azalan dalgaları temsil eden (2.3) denkleminin çözümleri mevcuttur. Bu tür dalgalar, yayılan bir dalgadaki enerji kaybına yol açan azaltıcı kuvvetler sistemi içinde ortaya çıkmaktadır. (2.2) ve (2.3) denklemlerine özel örneklerdeki gibi eklemeler yapıldığında hiperbolik bir denklem olan Telegrapher's denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u - c^2 \Delta u = F \tag{2.4}$$

meydana gelir. Burada β ve γ reel sabitlerdir. Matematiksel fizikte ortaya çıkan birçok problemde verilen diferansiyel denklem ile birlikte belli yardımcı koşulları sağlayan bir fonksiyon aranır. Problemin bir çeşidi $t = 0$ olduğu bir başlangıç anında sistemin u fonksiyonunun bilinmesi durumunda ortaya çıkar. Daha sonra zamanı ve uzayın bir bölgesinde diferansiyel denklemi sağlayan çözüm $t = 0$ anındaki bilinen değeri verecek şekilde bulunmaya çalışılır. Genellikle çözüm $t \geq 0$ durumunda belirlenir. Bu nedenle sonraki tüm zamanlar için sistemin durum fonksiyonu oluşturulur. Böylece bu problem başlangıç değer problemi olarak adlandırılır. $t = 0$ anındaki koşula ek olarak aranan çözüm uzayın bir bölgesinde sınırlı ve sınır üzerinde belli koşulları sağlayabilir. Bu tipteki bir problem başlangıç sınır değer problemi olarak adlandırılır. Bu bölümde bu iki tip problemin dalga denklemi için bir boyutlu durumları incelenecektir.

2.2. Bir Boyutlu Dalga Denklemi, Başlangıç Değer Problemi

Bir boyutlu homojen dalga denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.5}$$

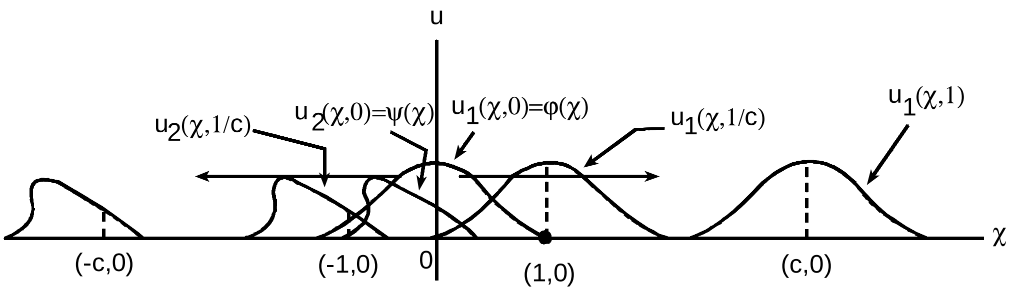
dir. Bu denklemdeki sabit katsayıya dikkat etmek gerekir. (2.5) denkleminin genel çözümü;

$$u = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \tag{2.6}$$

olarak bulunur. Burada φ ve ψ keyfi fonksiyonlardır. Kabul edilsin ki φ fonksiyonu verilmiş olsun. O zaman;

$$u(x,t) = \varphi(x - ct)$$

şeklinde yazılırsa bu ifade c hızı ile sağa doğru hareket ederken şekli değişmeyen bir dalgayı temsil eder. Şimdi t zamanı gösterilsin ve $t = 0$ için oluşacak durumlar incelensin. Fonksiyon $u(x,0) = \varphi(x)$ durumunda dalga profili olarak adlandırılır. $t_1 = 1/c$ olduğunda $u(x,t_1) = \varphi(x-1)$ elde edilir. $x' = x - 1$ iken $\varphi(x-1) = \varphi(x')$ olur. Bundan dolayı $u = u(x,t_1)$'in grafiği aynı zamanda x ekseni boyunca sağa doğru bir birim ötelenmiş dalga profilinin de grafiğidir. $t_2 = 2/c$ anındaki $u = u(x,t_2)$'in grafiği de sağa doğru iki birim ötelenmiş dalga profilinin grafiğidir. Bu nedenle t zamanı arttıkça dalga profili x ekseni boyunca sağa doğru yer değiştirir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Dalga profilinin t zamanı arttıkça x ekseni boyunca yer değiştirmesi (Dennemeyer 1968)

Özel olarak $t=1$ seçilirse bu durumda $u(x,1)=\varphi(x-c)$ şeklinde elde edilir. Bu bir birim zamanda profil sağa doğru c birim yer değiştiriyor demektir. Burada c sabiti, dalga hızı (ya da yayılmanın hızı) olarak adlandırılır.

$$u(x,t)=\varphi(x+ct)$$

için benzer yollar takip edilsin. $t=0$ durumunda dalga profili $u(x,0)=\varphi(x)$ 'dır. Bu durum dalga profilinin c hızı ile x ekseni boyunca sol tarafa olan hareketini temsil eder. Böylece (2.6) genel çözümü aynı hız ile x ekseni boyunca birbirlerine doğru hareket eden iki keyfi dalga profilinin üst üste binmesini ifade eder. Her bir dalga hareket ederken şekli değişmez. k, keyfi reel bir parametreyi göstersin. Kolayca görülür ki herhangi φ,ψ fonksiyon çiftleri için;

$$u=\varphi[k(x-ct)]+\psi[k(x+ct)]$$

dalga denkleminin bir çözümüdür. $w=kc$ olarak ele alınıp çözümde yerine yazıldığında;

$$u=\varphi(kx-wt)+\psi(kx+wt) \tag{2.7}$$

olarak bulunur. Bu şekildeki bir fonksiyon yalnızca $w = kc$ olduğunda (2.5) denkleminin bir çözümüdür. c'den farklı bir hızla yayılan dalgalar (2.5) dalga denkleminin çözümleri şeklinde tanımlanamaz. Şimdi bir ξ fonksiyonu;

$$\xi(x,t) = kx - wt \tag{2.8}$$

olarak tanımlansın. Tanımlanan bu fonksiyon, faz (evre, aşama, safha) olarak adlandırılır. Burada dalga denkleminin karakteristik eğrileri;

$$x \pm ct = sabit$$

olan xt düzlemindeki doğrulardır. Buradaki bir boyutlu sabit faz eğrileri karakteristik eğrilerdir.

2.2.1. Düzlemsel harmonik dalgalar

Basit ama çok faydalı dalga denklemleri, φ ve ψ fonksiyonları sanal değişkenli üstel fonksiyonlar şeklinde seçilse de, (2.7) denkleminden elde edilebilir.

$$u = A\exp(ikx \pm iwt) \qquad ; \; w = kc \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

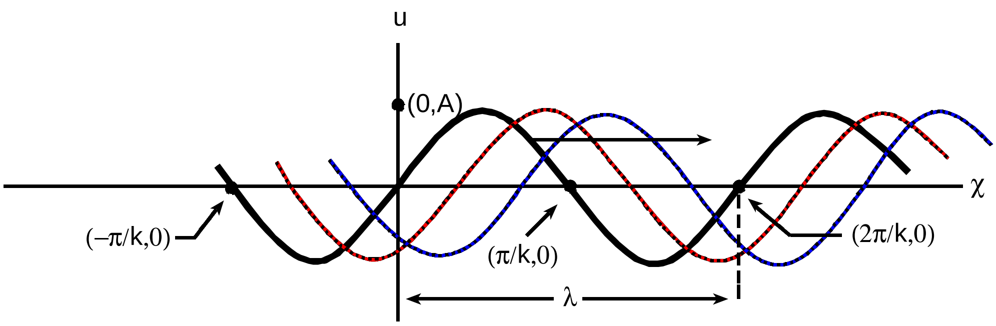
formundaki dalga fonksiyonuna düzlemsel harmonik dalga denir. Burada A sabittir. u'nun reel ve sanal kısımları olan

$$u = A\cos(kx \pm wt)$$
$$u = A\sin(kx \pm wt)$$

fonksiyonları da ayrı ayrı (2.5) denklemini sağlar. Bu u fonksiyonları düzlem dalgalarını temsil ederler. A sabiti dalganın genliği ve w da açısal frekans olarak adlandırılır. Çoğu kez k dalga sayısı adını alır. Yukarıdaki fonksiyonların her birinin değişimi belli bir x noktasında zamana göre ve belli bir t zamanında uzaya göre basit harmonik şekildedir. Yer frekansı $k = w/c$ olarak kabul edilir.

$$u = A\sin(kx - wt) \tag{2.9}$$

fonksiyonu dikkate alınsın. Böylece sinüsoidal profili, c hızı ile x ekseni boyunca sağa doğru hareket eden $u(x,0) = A\sin kx$ denklemi ile temsil edilir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Sinüsoidal profilin c hızı ile x ekseni boyunca sağa doğru hareket etmesi (Dennemeyer 1968)

Ayrıca $\lambda = 2\pi/k$ değeri dalga boyunu, $1/\lambda$ ise x ekseni üzerindeki birim uzunluktaki dalgaların sayısını gösterir. Şimdi sabit bir x_0 noktası için,

$$\begin{aligned}
u\left(x_0, t + \frac{\lambda}{c}\right) &= A\sin\left[kx_0 - w\left(t + \frac{\lambda}{c}\right)\right] \\
&= A\sin\left[kx_0 - w\left(t + \frac{2\pi}{kc}\right)\right] \\
&= A\sin(kx_0 - wt - 2\pi) \\
&= A\sin(kx_0 - wt) \\
&= u(x_0, t)
\end{aligned}$$

olduğundan $T = \lambda/c$ zaman aralığında x_0 noktasından bir dalganın tamamı geçer. Bu zaman aralığına (T) dalganın periyodu, birim zamanda sabit bir noktadan geçen dalga sayısına dalganın frekansı denir. Bir dalganın frekansı $f = 1/T = c/\lambda$ değerine eşittir. Böylece frekans, dalga boyu ve yayılma hızı arasındaki temel bağıntı;

$$c = \lambda f \tag{2.10}$$

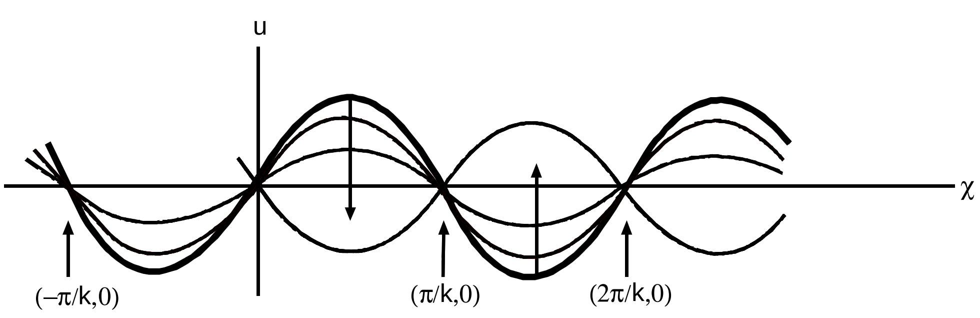
şeklindedir. O halde $w = kc = k\lambda f = 2\pi f$ olarak bulunur.

$$u = A\cos(kx - wt)$$

fonksiyonu fazı, yukarıda açıklanan dalgalardan $\pi/2$ kadar farklı olan dalgaları ifade eder. Dalga denkleminin her çözümü, hareket eden bir dalgayı ifade etmez. Aynı genlik, hız ve frekanslı ancak ters yönlerde hareket eden iki sinüsoidal dalganın üst üste bindirilmesiyle elde edilen;

$$\begin{aligned} u &= A\sin(kx - wt) + A\sin(kx + wt) \\ &= A\sin[k(x - ct)] + A\sin[k(x + ct)] \\ &= A\sin(kx - kct) + A\sin(kx + kct) \\ &= A(\sin kx \cos kct - \sin kct \cos kx) + A(\sin kx \cos kct + \sin kct \cos kx) \\ &= (2A\cos kct)\sin kx \end{aligned}$$

çözümü, duran dalgayı ifade eder. Bu durumda $u(x,0) = 2A\sin kx$ dalga profili yayılmaz. Onun yerine dalga, $2A\cos kct = 2A\cos wt$ genliği ve w açısal frekansı ile sinüsoidal olarak değişir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Dalganın $2A\cos wt$ genliği ve w açısal frekansı ile sinüsoidal olarak değişmesi (Dennemeyer 1968)

Bu durumda $x_n = n\pi/k$; $n = 0,\pm1,\pm2,...$ noktalarına düğüm noktaları adı verilir. Ayrıca her t için $u(x_n, t) = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

2.2.2. Başlangıç değer probleminin çözümü

Başlangıç değer problemi;

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad ; -\infty < x < \infty \quad , \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad ; -\infty < x < \infty \tag{2.11}$$

şeklindeki bir boyutlu dalga denklemi için bir Cauchy problemidir. Burada $u(x,t)$, t anındaki x uzay değişkenine göre dalganın konumunu; $f(x)$, dalganın $t = 0$ anındaki başlangıç durumunu; $g(x)$ ise dalganın başlangıç hızını göstermektedir.

Ayrıca burada $f(x)$'in tanımlı olduğu yerde en az iki defa türetilebilir ve ikinci basamaktan türevinin sürekli; $g(x)$'in de en az birinci basamaktan türeve sahip ve bu türevin de sürekli olduğu kabul edilsin. u çözümünün bir gösterimi verilen F, f ve g fonksiyonlarının yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir. $t_0 > 0$ olmak üzere (x_0, t_0) noktası sabit bir nokta olsun. Aksi takdirde bu nokta keyfi olarak seçilecektir. x ekseninin $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ aralığında olan ve (x_0, t_0)'dan geçen aşağıdaki karakteristik eğrilerle sınırlı xt düzlemi üzerinde bir D bölgesi ele alınsın (Şekil 2.4)

$$x - ct = x_0 - ct_0 \qquad , \qquad x + ct = x_0 + ct_0$$

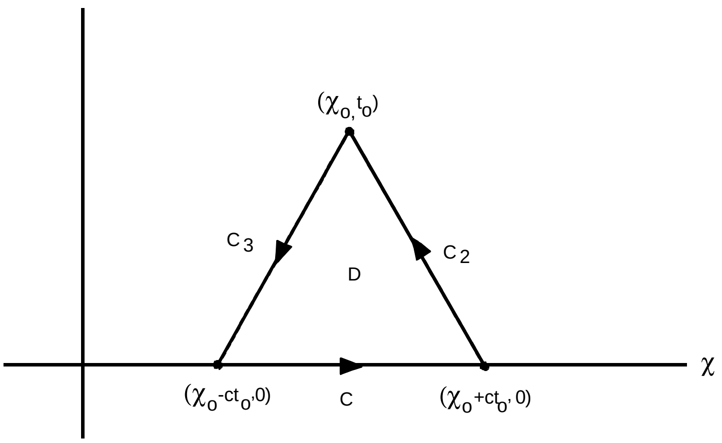
İkinci basamaktan bir,

$$L = -c^2 D_x^2 + D_t^2$$

operatörünün self-adjoint olması için gerek ve yeter koşul;

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = B_i \qquad ; \quad i = 1,2$$

dır.



Şekil 2.4. x ekseninin $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ aralığında olan ve (x_0, t_0)'dan geçen şekilde verilmiş olan karakteristik eğrilerle sınırlı xt düzlemi üzerinde alınan bir bölge (Dennemeyer 1968)

Eğer L self-adjoint ise yukarıdaki denklemde $B_1 = B_2 = 0$ olmalıdır. Diğer taraftan ikinci basamaktan bir L operatörü;

$$L = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + C$$

şeklinde tanımlanır. $x_1 = x$ ve $x_2 = t$ olarak ele alınıp denklemde yerine yazılırsa;

$$L = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(A_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(A_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + C$$

$$= A_{11} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} + A_{21} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + C$$

olur. $L=-c^2D_x^2+D_t^2$ verildiğinden;

$$A_{11}=-c^2 \quad , \quad A_{12}=A_{21}=0 \quad , \quad A_{22}=1 \quad , \quad C=0$$

olarak elde edilir. O halde;

$$B_1=\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial A_{12}}{\partial x_2}=\frac{\partial\left(-c^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial 0}{\partial t}=0$$

$$B_2=\frac{\partial A_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial A_{22}}{\partial x_2}=\frac{\partial 0}{\partial x}+\frac{\partial 1}{\partial t}=0$$

bulunur. Bu durumda L operatörü self-adjointtir. L operatörüne;

$$\int_R (\upsilon Lu-uL\upsilon)d\tau=\int_{b(R)}\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\gamma_i\right)d\sigma \qquad ;\ d\tau=dx_1...dx_n$$

$$P_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_j}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_j}\right) \qquad ;\ i=1,...,n$$

$$\gamma_i=\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad ;\ i=1,...,n$$

şeklinde tanımlanan Green formülü, $n=2$ için $u=\varphi$, $\upsilon=\psi$ ve $\lambda=1$ seçilerek uygulandığında;

$$\int\int_D (\psi L_\varphi-\varphi L_\psi)dxdt=\int_C (P_1v_x+P_2v_t)ds \tag{2.12}$$

ifadesi elde edilir. ψ ve φ fonksiyonları D üzerinde iki kez sürekli diferansiyellenebilirdirler. (2.12) denklemindeki eğrisel integral D'nin sınırını oluşturan C üçgeni etrafında pozitif yönde (saat yönünün tersi yönünde) alınan bir integraldir. Yukarıda tanımladığımız P_i ifadesi gereği P_1 ve P_2 fonksiyonları;

$$P_1 = A_{11}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_1} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right) + A_{12}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_2} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right) = -c^2\left(\psi\varphi_x - \varphi\psi_x\right)$$

$$P_2 = A_{21}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_1} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right) + A_{22}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_2} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right) = \psi\varphi_t - \varphi\psi_t$$

şeklindedir. C boyunca dış normalin doğrultu kosinüsleri v_x ve v_t ile gösterilsin. Burada $\psi = 1$, $\varphi = u$ alınıp, bulunan P_1 ve P_2 ifadeleri ile $Lu = F(x,t)$ tanımı Green formülünde yerine yazıldığında;

$$\iint_D F(x,t)\,dxdt = \int_C \left(-c^2 u_x v_x + u_t v_t\right) ds \tag{2.13}$$

elde edilir. C_1, C_2 ve C_3 boyunca eğrisel integrallerin toplamı C eğrisel integraline eşittir. C_1, üçgenin tabanında, C_2 ve C_3 üçgenin kenar taraflarındadır. C_1 için tabandaki $n_1 = (0,-1)$ normal vektöründen dolayı kosinüs doğrultusu;

$$v_x = 0 \qquad , \qquad v_t = -1$$

olarak bulunur. C_2 'nin kosinüs doğrultusu için;

$$ct + x = ct_0 + x_0$$

karakteristik eğrisi kullanıldığında,

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1, c)$$

$$|\gamma| = \sqrt{1 + c^2}$$

$$n_2 = \frac{\gamma}{|\gamma|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right) = (v_x, v_t)$$

olduğundan,

$$v_x = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \qquad , \qquad v_t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

bulunur. Diğer taraftan C_3 için;

$$ct - x = ct_0 - x_0$$

karakteristik eğrisi kullanılarak, kosinüs doğrultusunun benzer bir yolla;

$$v_x = \frac{-1}{\sqrt{1+c^2}} \qquad , \qquad v_t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

şeklinde olduğu görülür. C_1 üzerinde $s = x$ olduğundan $ds = dx$ olmalıdır. C_2 için $t = t(x)$ olduğu dikkate alınarak;

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dt)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (t'(x)dx)^2}$$

ifadesi bulunduktan sonra, $ct + x = ct_0 + x_0$ karakteristik eğrisinden $t'(x) = -1/c$ değeri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$ds = \frac{1}{c}\sqrt{1+c^2}\,|dx|$$

dir. Buradan;

$$ds = -\left(1+c^2\right)^{1/2} \frac{dx}{c}$$

elde edilir. Diğer yandan $x = x(t)$ olduğu da göz önünde bulundurulduğunda;

$$ds = \left(1+c^2\right)^{1/2} dt$$

eşitliği gerçeklenir. Bunun devamında C_3 için benzer işlemler $ct - x = ct_0 - x_0$ karakteristik eğrisi dikkate alınarak tekrarlandığında;

$$ds = -\left(1+c^2\right)^{1/2}\frac{dx}{c} = -\left(1+c^2\right)^{1/2}dt$$

şeklinde bulunur. O halde, C_1, C_2 ve C_3 yönlendirilmiş hatları üzerinde belirtilen sıraya göre;

$$ds = dx$$
$$ds = -\left(1+c^2\right)^{1/2}\frac{dx}{c} = \left(1+c^2\right)^{1/2}dt$$
$$ds = -\left(1+c^2\right)^{1/2}\frac{dx}{c} = -\left(1+c^2\right)^{1/2}dt$$

dir. Bütün bu verilenler yerine yazılırsa;

$$\int_{C_1}\left(-c^2u_xv_x + u_tv_t\right)ds = -\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_t\,dx = -\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2}\left(-c^2u_xv_x + u_tv_t\right)ds &= \int_{C_2}\left(-c^2u_xv_x ds + u_tv_t ds\right)\\ &= \int_{C_2} cu_x dx + cu_t dt\\ &= c\int_{C_2}\left(u_x dx + u_t dt\right)\\ &= c\int_{C_2} du\\ &= c\left[u\left(x_0,t_0\right) - u\left(x_0+ct_0,0\right)\right]\\ &= c\left[u\left(x_0,t_0\right) - f\left(x_0+ct_0\right)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler devam ettirildiğinde;

$$\int_{C_3} \left(-c^2 u_x v_x + u_t v_t\right) ds = c\left[u(x_0, t_0) - f(x_0 - ct_0)\right]$$

olduğu görülür. O halde;

$$\int_{C} \left(-c^2 u_x v_x + u_t v_t\right) ds = c\left[2u(x_0, t_0) - f(x_0 + ct_0) - f(x_0 - ct_0)\right] - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(x)dx$$

olarak bulunur. Böylece;

$$\iint_{D} F(x,t)dxdt = 2cu(x_0, t_0) - c\left[f(x_0 + ct_0) + f(x_0 - ct_0)\right] - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(x)dx$$

olur. Eşitliğin her iki yanı $1/2c$ ile çarpılıp, $u(x_0, t_0)$ yalnız bırakıldığında;

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2c}\iint_{D} F(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\left[f(x_0 + ct_0) + f(x_0 - ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(x)dx$$

dır. (x_0, t_0), keyfi seçilmiş bir nokta olduğundan çözüm;

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x + ct) + f(x - ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\iint_{D} F(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (2.14)$$

şeklindedir. O halde f, iki kez sürekli diferansiyellenebilir g, sürekli diferansiyellenebilir ve F, x ve t değişkenlerine göre sürekli ikinci kısmi türeve sahip ise; (2.14) denklemi (2.11) problemindeki tüm koşulları sağlayan iki kez sürekli diferansiyellenebilir bir u fonksiyonunu tanımlar. Sonuç olarak (2.14) denklemi bir boyutlu dalga denklemi için başlangıç değer probleminin tek çözümünü ifade eder. Şimdi;

$$v(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi \tag{2.15}$$

$$w(x,t)=\frac{1}{2c}\iint_{D}F(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{2.16}$$

olsun. O zaman (2.11) probleminin çözümü;

$$u=v+w$$

dir. Homojen dalga denklemi için başlangıç değer probleminin çözümü v fonksiyonu olduğunda;

$$\begin{aligned} &v_{tt}-c^2v_{xx}=0 && ; -\infty<x<\infty \quad , \quad t\geq 0 \\ &v(x,0)=f(x) \qquad v_t(x,0)=g(x) && ; -\infty<x<\infty \end{aligned} \tag{2.17}$$

ve homojen olma durumundaki başlangıç koşullarına sahip homojen olmayan dalga denkleminin çözümü w olduğunda;

$$\begin{aligned} &w_{tt}-c^2w_{xx}=F(x,t) && ; -\infty<x<\infty \quad , \quad t\geq 0 \\ &w(x,0)=0 \qquad w_t(x,0)=0 && ; -\infty<x<\infty \end{aligned} \tag{2.18}$$

yazılabilir. (2.15) denklemindeki v fonksiyonu (2.17) başlangıç değer probleminin “D’Alembert Çözümü” diye adlandırılır. Bu çözümün yapısını araştırmak için;

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] \tag{2.19}$$

olarak ele alınsın. Belirlenmiş g fonksiyonu özdeş olarak sıfır fonksiyonu olduğunda u_1 çözümdür. Burada aynı profil ve hıza sahip fakat x ekseni boyunca zıt yönde hareket eden iki dalganın süperpozisyonu söz konusudur. Açıkça söylenebilir ki; $f(x)$ başlangıç değerleri zaman geçtikçe yayılmaya devam eder. Gerçekten de orijin civarındaki sonlu bir aralığın dışında ve yeterince uzak bir x_0 noktasında $f(x)$ fonksiyonu sıfır oluyorsa bu durumda $0 \le t < t_0$ için $u_1(x_0, t) = 0$ olur. Buradaki t_0 varış zamanı , dalganın x_0 noktasına ulaşana kadar geçirdiği zamandır. Ayrıca $t_1 > t_0$ olmak üzere $t > t_1$ için de $u_1(x_0, t) = 0$ dır ve bu yüzden dalga x_0 noktasından geçer (Bkz. Şekil 2.1).

(2.17) problemindeki g fonksiyonunun ilkeli h olsun. Bu durumda D'Alembert çözümündeki ikinci terim;

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2c}\left[h(x+ct) - h(x-ct)\right] \tag{2.20}$$

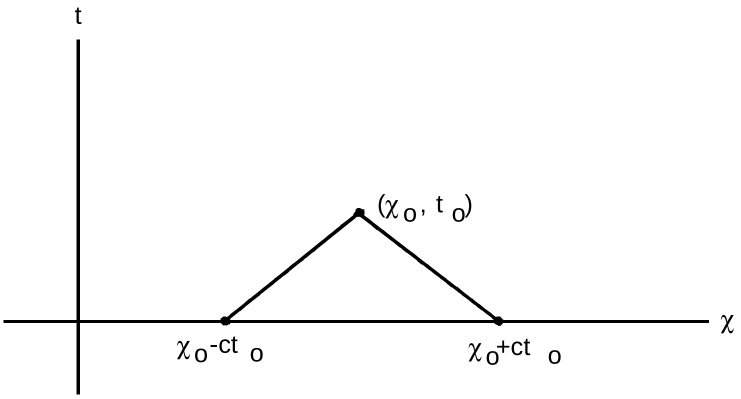
olarak yazılabilir. Verilen f fonksiyonu özdeş olarak sıfır olduğunda u_2'nin problemin tek çözümü olduğu görülür. Bu fonksiyon hareket eden dalgaların $\left(h(x+ct)/2c \, ve - h(x-ct)/2c\right)$ süperpozisyonu olarak düşünülebilir. $-h(x-ct)/2c$ dalgası $h(x-ct)/2c$ dalgasının x ekseninin karşı tarafına yansımasıdır ve profili $-h(x)/2c$ dir. Bu durumda u_2, yayılan $u_t(x,0) = g(x)$ başlangıç değerlerinin integralini ifade eder. Bu da yayılmanın doğasındaki temel farkı verir. Eğer sınırlı bir aralığın dışında g sıfırlansa da h ilkel olmazsa $h(x+ct)/2c$ ve $-h(x-ct)/2c$ dalgaları sonsuza doğru genişleyecektir. u çözümü gelen dalgadan ve sonraki tüm zamanlardan etkilendiği için orijin civarında belli bir aralıkta sınırlanan u_t'nin başlangıç değerlerinin, u çözümü üzerinde etkisi söz konusudur.

2.2.3. Karakteristik eğrilerin önemi

xt düzlemindeki bir (x_0, t_0) noktası yardımıyla dalga denkleminin karakteristik eğrilerinin bir çifti;

$$x - ct = x_0 - ct_0 \quad , \quad x + ct = x_0 + ct_0 \tag{2.21}$$

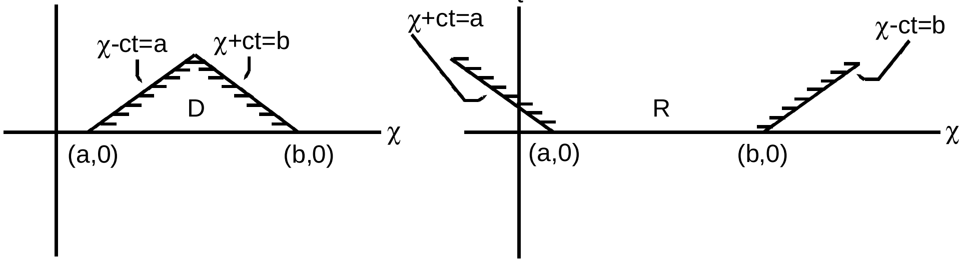
denklemleridir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5. Karakteristik eğrilerin gösterimi (Dennemeyer 1968)

Karakteristikler x ekseninin $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ aralığında kesişirler. D'Alembert çözümünde görülüyor ki dalga denkleminin bir u çözümünün $u(x_0, t_0)$ değeri, $x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0 + ct_0$ aralığı boyunca $u_t(x,0)$ ve $u(x,0)$ başlangıç değerleri yardımıyla tek türlü olarak belirlenir. Bu nedenle $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ aralığı (x_0, t_0) noktasının bağımlılık aralığı olarak adlandırılır. $u(x,0)$ ve $u_t(x,0)$ başlangıç değerleri $u(x_0, t_0)$ değerini değiştirmeksizin bu aralık dışında keyfi olarak değiştirilebilir.

Başka bir açıdan $[a,b]$, x ekseni üzerinde alınan bir aralık olsun. xt düzlemindeki $(a,0),(b,0)$ noktalarının yardımıyla karakteristiklerin çizimi şekil 2.6'da gösterilmiştir.



Şekil 2.6.a. $[a,b]$ aralığının belirleyici bölgesi (Dennemeyer 1968)

b. $[a,b]$ aralığının etki bölgesi (Dennemeyer 1968)

Şekil 2.6.a'daki D bölgesini sınırlayan bu doğrular $[a,b]$ aralığının belirleyici bölgesi olarak adlandırılır. Bu bölgenin önemi ifade etmek istenilirse; öncelikle (2.5) dalga denkleminin bir çözümünün u olduğu kabul edilir. Eğer (x_0,t_0) D bölgesinde bir nokta ise (x_0,t_0)'ın bağımlılık aralığı $[a,b]$ içindedir. Dolayısıyla $a \le x \le b$ için $u(x,0)$ ve $u_t(x,0)$ başlangıç değerleri yardımıyla D bölgesi içindeki her yerde u'nun değerleri tek türlü olarak belirlenir. Özel olarak $a \le x \le b$ için $u(x,0)=0$ ve $u_t(x,0)=0$ olarak alınırsa o zaman u, D bölgesi içinde özdeş olarak sıfıra eşitlenir. Benzer şekilde $a \le x \le b$ için başlangıç değerleri çakışan iki çözüm D bölgesinin dışında farklı olsalar bile bölge boyunca çakışacaklardır. Aynı zamanda çözümün $u(x,0)$, $u_t(x,0)$ başlangıç değerleri $[a,b]$'nin dışında x eksenine keyfi olarak seçilmiş noktalarda değiştirilebilir ve u'nun değerleri D içinde değişmeden kalabilir. Şekil 2.6.b'deki R bölgesi $[a,b]$ aralığının etki bölgesi olarak adlandırılır. R'nin sınırları yarı karakteristiklerle gösterilmiştir. Eğer dalga denkleminin bir çözümü u ve (x_0,t_0), R'de bir nokta ise $u(x_0,t_0)$ değeri $[a,b]$'de $u(x,0)$, $u_t(x,0)$ başlangıç değerlerinden etkilenir. Bunun devamında (x_0,t_0)'ın bağımlılık aralığının $[a,b]$ aralığı ile çakışacağı açıktır. Diğer taraftan $[a,b]$ üzerindeki u'nun başlangıç değerleri, R bölgesinin dışındaki noktalardaki u'nun değerlerinden etkilenmez. O halde karakteristikler etki bölgesinin ve belirleyici bölgenin sınırlarını oluşturduğundan dolayı önemlidir. Bu sınırları oluşturan karakteristikler uzay zamandaki yollar olarak düşünülebilir. Yani bunlar faz uzayında x ekseni boyunca sağa ve sola doğru c hızı ile hareket eden ve $t=0$ anında a,b uç noktalarından çıkan sinyallerdir. Sonuç olarak başlangıç değerlerinde, mesela; x_0 noktasının $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ aralığında bulunan x'ler için bir değişiklik yapılırsa bu değişiklik daha sonraki bir $t_1>0$ anında üstten $t=t_1$ yatay doğrusu ile sınırlı $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$'nın etki bölgesindeki tüm noktaları etkileyecektir.

2.2.4. Uygun şekilde tanımlanmış bir başlangıç değer problemi

Yukarıda tanımlanmış olan (2.11) başlangıç değer probleminin çözümünün varlık ve tekliği (2.14) ifadesindeki verilerden elde edilebilir. (2.14) gösterimi aynı zamanda belli bir $0 \le t \le T$ zaman aralığında çözümün verilere sürekli olarak bağlı olduğunu gösterir. Varsayılsın ki f_1 ve g_1 fonksiyonlarına karşılık gelen çözüm u_1, f_2 ve g_2 fonksiyonlarına karşılık gelen çözüm u_2 olsun. O zaman;

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon \quad , \quad |g_1(x) - g_2(x)| < \varepsilon \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

ise, $0 \le t \le T$ aralığı ve tüm x'ler için (2.14) ifadesinden,

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| = \left| \frac{1}{2}[f_1(x+ct) + f_1(x-ct) - f_2(x+ct) - f_2(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}[g_1(\xi) - g_2(\xi)]d\xi \right|$$

olduğu görülür. Devamında üçgen eşitsizliği uygulanıp gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\begin{aligned} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| &\le \frac{1}{2}|f_1(x+ct) - f_2(x+ct)| + \frac{1}{2}|f_1(x-ct) - f_2(x-ct)| \\ &+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}|g_1(\xi) - g_2(\xi)|d\xi \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2c}\varepsilon\int_{x-ct}^{x+ct}d\xi \\ &= \varepsilon + t\varepsilon \\ &< (1+T)\varepsilon \end{aligned}$$

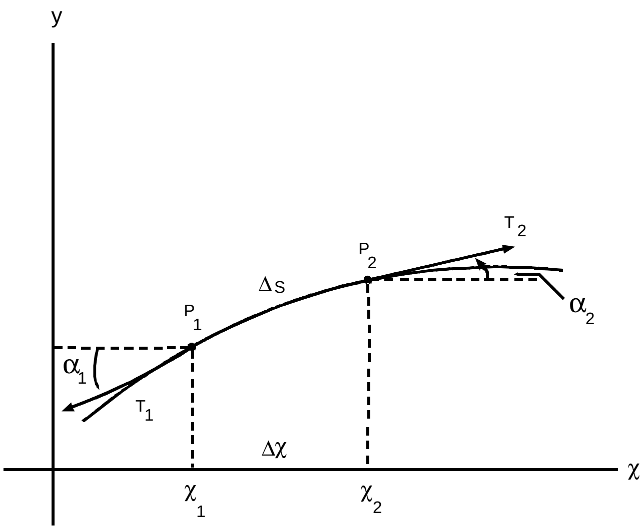
ifadesi elde edilir.

2.3. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

Uçları bağlanmış titreyen bir tel, bir boyutlu dalga denklemini içeren bir başlangıç sınır değer probleminin klasik bir örneğidir. İdeal esneklikte ve düzgün gerilim altında homojen ince bir tel x ekseni boyunca denge durumunda kalabilir. Telin uçları $x = 0, x = b > 0$ noktalarında bağlıdır. Bu kısımda, tel bir ucundan çekilip serbest bırakıldığında (hızın sıfır olması gerekmez) telin bir sonraki hareketi belirlenmeye çalışılacaktır.

2.3.1. Matematiksel model

Telin düzgün bir salınım yaptığı ve T basıncının da telin teğeti doğrultusunda olduğu kabul edilsin. Şekil 2.7'de olduğu gibi eksenler seçilsin ve $u(x,t)$, apsisi x olan tel üzerindeki noktanın t zamanındaki enine yer değiştirmesini göstersin. Ayrıca bu gerilime ek olarak tel üzerinde bir $F(x,t)$ harici kuvveti (mesela yer çekimi) tele etki edebilir. Δs, telin bir parçasını ifade etsin.



Şekil 2.7. T basıncının telin teğeti doğrultusunda olduğu kabul edilmiş düzgün bir salınım yapan tel (Dennemeyer 1968)

Bu durumda gerilimden dolayı Δs üzerindeki net kuvvet yaklaşık olarak;

$$T_0 \left(u_x \big|_{x_1} - u_x \big|_{x_2} \right) \quad , \quad T_0 = T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2$$

gibidir. Burada x_1 ve x_2 tel parçasının uç noktalarının apsisleridir.

Ayrıca yansıma eğrisi boyunca da küçük eğimlerin olduğu kabul edilir. Δs parçasının hareketinin denklemi;

$$T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_2}\right)+\rho\Delta s F(\tilde{x},t)=\rho\Delta s\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}$$

dir. Burada $\partial^2\overline{u}/\partial t^2$ kütle merkezinin hızını, $F(\tilde{x},t)$ etki eden dış kuvvetin ortalama yoğunluğunu ve ρ ise telin doğrusal yoğunluğunu ifade eder. $\Delta x = x_2 - x_1$ olsun. O zaman Δx 'deki birinci mertebeden terimlerden dolayı $\Delta s \approx \Delta x$ olur. Hareketin denkleminde her iki taraf Δx 'e bölünüp, $\Delta x \to 0$ için limiti alındığında;

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T_0}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_2}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\rho\frac{\Delta s}{\Delta x}F(\tilde{x},t)=\lim_{\Delta x\to 0}\rho\frac{\Delta s}{\Delta x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}$$

$$T_0\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u_x(x_1)}{\Delta x}-\frac{u_x(x_2)}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\rho F(\tilde{x},t)=\lim_{\Delta x\to 0}\rho\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}$$

bulunur. Bu ifadede her iki taraf ρ ile bölünüp $F(x,t)$ yalnız bırakıldığında;

$$F(x,t)=u_{tt}-\frac{T_0}{\rho}u_{xx}$$

olur. Yani;

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t) \qquad ;\ 0\le x\le b \quad , \quad t\ge 0 \tag{2.22}$$

elde edilir. Burada $c=\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$ ‘dır. Telin uçları bağlandığından dolayı sınır koşulları;

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(b,t)=0 \qquad ;\ t\ge 0 \tag{2.23}$$

dır. Bu durumda telin uçlarında hareket yoktur. Tel, belli bir noktadan belli bir hız ile serbest bırakılır. Böylece başlangıç koşulları;

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad ; \; 0 \le x \le b \tag{2.24}$$

şeklinde olmakla birlikte f ve g fonksiyonları da belirlenmiş fonksiyonlardır. Buradaki problem, (2.24) başlangıç koşulları ve (2.23) sınır koşullarını sağlayan (2.22) kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümünü belirlemektir. u 'nun x ve t 'ye göre sürekli olmasının fiziksel nedenlerine dikkat etmek gerekir. Böylece (2.23) sınır koşulları ile (2.24)'de verilen ilk başlangıç koşulu birlikte düşünüldüğünde (2.23) sınır koşullarının;

$$u(0,0) = f(0) = 0 \quad , \quad u(b,0) = f(b) = 0$$

olduğu görülür. Aynı zamanda (2.24)'de verilen ikinci başlangıç koşulu ile birlikte telin uçlarının bağlı olması da dikkate alındığında;

$$u_t(0,0) = g(0) = 0 \quad , \quad u_t(b,0) = g(b) = 0$$

bağıntıları elde edilir.

2.3.2. Dış kuvvet olmadığında formal seri çözümü

Tele dışarıdan bir kuvvet uygulanmadığında F fonksiyonu özdeş olarak sıfırlanır. Böylece serbest titreşim hareketinden bahsedilebilir. Bu durumda telin bir sonraki hareketi ise aşağıdaki problemin u çözümü ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 && ; \; 0 \le x \le b \quad , \quad t \ge 0 \\
&u(0,t) = 0 \qquad , \quad u(b,t) = 0 && ; \; t \ge 0 \\
&u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x) && ; \; 0 \le x \le b
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Bu problemin formal bir çözümü değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak elde edilebilir. Homojen dalga denkleminin değişkenlerine ayrılabilir bir çözümünün $X(x) \neq 0$ ve $T(t) \neq 0$ olmak üzere;

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.26}$$

olduğu varsayılsın. (2.26) ifadesinden kısmi türevler hesaplanıp ve (2.25)’deki dalga denkleminde yerine yazıldığında;

$$x\ddot{T} = c^2 X''T$$

eşitliği elde edilir. Burada ifade edilen klasik gösterimler ve noktalar, belirtilen sırada x ve t değişkenlerine göre türevlerinin alınması anlamındadır. Yukarıdaki eşitliğin her iki yanı $c^2 XT$ ile bölündüğünde;

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$$

denklemi bulunur. Bulunan bu denklemin sağ tarafı sadece x’e, sol tarafı ise sadece t’ye bağlıdır. Bu durumda t, $[0,+\infty)$ aralığında değişirken sağ taraf t’ye bağlı olmadığından değişmeyecektir. Benzer durum x, $[0,b]$ aralığında değişirken de geçerli olacaktır. O halde denklemin her iki yanı x ve t’ler değiştiği halde sabit kalmaktadır. Bu durumda λ, bir ayırma sabiti olmak üzere;

$$\frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{\ddot{T}}{c^2 T}$$

bulunur. Burada λ’nın önündeki eksinin bir önemi yoktur. Ancak çözümün yapısını biraz etkiler. Yukarıdaki eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında X ve T çarpanları belirtilen sıraya göre;

$$X'' + \lambda X = 0 \quad , \quad \ddot{T} + c^2 \lambda T = 0$$

olarak tahmin edilebilir. (2.25) probleminin sınır koşullarının (2.26) çözümünü de sağlaması gerektiği düşünülürse X üzerindeki sınır koşulları;

$$X(0)=0 \quad , \quad X(b)=0$$

olmalıdır. Şimdi $\ddot{T}+c^2\lambda T=0$ ve $X''+\lambda X=0$ denklemlerinin genel çözümleri bulunsun. Her iki denklemin de köklerinin kompleks olması gereği genel çözümler belirtilen sıraya göre;

$$T(t)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}ct\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}ct\right)$$
$$X(x)=C\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+D\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

dır. $X(0)=0$ 'dan;

$$X(x)=D\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

olmalıdır. Devamında $D\neq 0$ olmak üzere (aksi halde aşikar çözüm bulunur) $X(b)=0$ 'dan dolayı Sturm-Liouville probleminin öz değeri ;

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad ; \; n=1,2,...$$

ve buna karşılık gelen öz fonksiyon (özel olarak $D=1$ alındığında);

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

şeklinde olup diğer yandan da A_n ve B_n keyfi sabitler olmak üzere T için diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{b}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{b}\right)$$

olduğundan dolayı (2.25) probleminin homojen sınır koşullarını sağlayan homojen dalga denkleminin ayrılabilir çözümleri;

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{b}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{b}\right)\right] \quad ; \; n = 1,2,... \qquad (2.27)$$

formuna sahiptir. u_n fonksiyonları titreşimin normal modları,

$$w_n = \frac{n\pi c}{b} \qquad ; \; n = 1,2,... \qquad (2.28)$$

ifadesi de karakteristik (ya da normal) frekans olarak adlandırılır. (2.25) probleminin başlangıç koşulları ve (2.28) ifadesi dikkate alındığında her pozitif n tamsayısı için u_n, n'yinci normal modun,

$$f(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad , \quad g(x) = w_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

başlangıç koşullarına karşılık gelen (2.25) probleminin çözümüdür. Yani bunlardan ilki sinüsoidal başlangıç konumunu ve diğeri de telin uzunluğu boyunca başlangıç dağılım hızını ifade eder. Şimdi C_n genlik, ε_n faz olmak üzere;

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad , \quad \varepsilon_n = \tan^{-1}\frac{B_n}{A_n}$$

şeklinde seçildiğinde;

$$\cos\varepsilon_n = \frac{A_n}{C_n} \quad , \quad \sin\varepsilon_n = \frac{B_n}{C_n}$$

olur. (2.27) ifadesinde eşitliğin her iki yanı C_n ile çarpılıp bölündükten sonra yukarıdaki eşitlikler yerine yazıldığında;

$$u_n(x,t)=C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\frac{A_n}{C_n}\cos w_n t+\frac{B_n}{C_n}\sin w_n t\right)$$
$$=C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\cos\varepsilon_n\cos w_n t+\sin\varepsilon_n\sin w_n t\right)$$

ifadesi elde edilir. Buradan kolayca görülür ki;

$$u_n(x,t)=C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\left(w_n t-\varepsilon_n\right) \tag{2.29}$$

olmalıdır. Ayrıca düzlemsel harmonik dalgaların son kısmında da belirtildiği gibi elde edilen her bir normal modun bir duran dalga olduğu açıkça görülebilir. (2.25) probleminde sadece homojen sınır koşulları ile belirlenen karakteristik frekansların başlangıç koşullarından bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir. (2.27) ifadesinin seri şeklindeki açılımı;

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\left(A_n\cos w_n t+B_n\sin w_n t\right) \tag{2.30}$$

olup, normal modların bir süperpozisyonu, serinin uygun şartlar altında yakınsaması durumunda dalga denkleminde olduğu gibi sınır koşullarını sağlayacaktır. (2.30) serisi tarafından tanımlanan u fonksiyonu;

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)=f(x) \qquad ;\ 0\le x\le b \tag{2.31}$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)=g(x) \qquad ;\ 0\le x\le b \tag{2.32}$$

koşullarını sağlarsa (2.25) probleminin başlangıç koşullarını da sağlayacaktır. (2.31) ve (2.32) denklemlerinin sol tarafında bulunan seriler, sağ tarafta bulunan fonksiyonların Fourier serilerini ifade eder. Eğer f ve g fonksiyonları $[0,b]$ üzerinde parçalı düzgün sürekli ise (2.31) ve (2.32) ifadelerinin her iki yanı

$\sin(k\pi x/b)$ ile çarpılıp, $[0,b]$ aralığında integre edildiğinde, A_k ve B_k katsayıları bulunmuş olur. Son olarak bulunan ifadelerde $k = n$ yazıldığında;

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx \qquad ;\ n = 1,2,... \tag{2.33}$$

$$B_n = \frac{2}{bw_n}\int_0^b g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx \qquad ;\ n = 1,2,... \tag{2.34}$$

şeklinde Fourier sinüs katsayıları elde edilir. A_n ve B_n katsayıları (2.33) ve (2.34) formunda olduğunda (2.25) probleminin formal çözümü (2.30) serisi olacaktır.

2.3.3. Dış kuvvet varlığında formal seri çözümü

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) && ;\ 0 \le x \le b \quad , \quad t \ge 0 \\ &u(0,t) = 0 \quad , \quad u(b,t) = 0 && ;\ t \ge 0 \\ &u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = 0 && ;\ 0 \le x \le b \end{aligned} \tag{2.35}$$

Bu problem homojen başlangıç ve sınır koşullarına sahiptir. Bu hal fiziksel olarak hareketsiz denge durumundaki telin dışarıdan bir kuvvet uygulanarak serbest bırakılması örneğine benzerdir. Formal bir seri çözümü elde etmek için;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \tag{2.36}$$

olduğu varsayılsın. Buradaki φ_n fonksiyonları daha sonradan belirlenecektir. (2.36) denkleminin sağ yanındaki seri yakınsak seri ise bu şekilde tanımlanmış u fonksiyonu sınır koşullarını sağlar. Eğer;

$$\varphi_n(0) = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}_n(0) = 0 \qquad ;\ n = 1,2,... \tag{2.37}$$

olursa u fonksiyonu başlangıç koşullarını sağlayacaktır. φ_n fonksiyonunu belirlemek için (2.36)'dan u_{tt} ve u_{xx} türevleri hesaplanıp homojen olmayan dalga denkleminde yerine yazılır. Bu durumda noktalar t'ye göre diferansiyeli göstermek üzere;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{\varphi}_n(t)+w_n^2\varphi_n(t)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)=F(x,t)$$

ifadesi elde edilir. Denklemin her iki yanı $\sin(k\pi x/b)$ ile çarpılıp $[0,b]$ aralığında integre edilir. Bulunan ifadede toplam ile integral yer değiştirebilir. Burada k sabittir. Aksi takdirde pozitif tamsayı şeklinde keyfi olarak seçilecektir. $\sin(n\pi x/b)$ fonksiyonlarının ortogonallik özelliğinden dolayı $n=1,2,...$ için;

$$\ddot{\varphi}_k(t)+w_k^2\varphi_k(t)=F_k(t) \tag{2.38}$$

olduğu görülür. Burada;

$$w_k=\frac{k\pi c}{b}$$

ve

$$F_k(t)=\frac{2}{b}\int_0^b F(x,t)\sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)dx \qquad ;\ k=1,2,... \tag{2.39}$$

dır. (2.38) denkleminin genel çözümü;

$$\varphi_k(t)=a\cos w_k t+b\sin w_k t+\frac{1}{w_k}\int_0^t F_k(\xi)\sin\left[w_k(t-\xi)\right]d\xi$$

şeklindedir. (2.37) başlangıç koşullarından dolayı $a=b=0$ olarak bulunur. O halde (2.38) diferansiyel denkleminin genel çözümü;

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{w_k}\int_0^t F_k(\xi)\sin[w_k(t-\xi)]d\xi \tag{2.40}$$

olur. Böylece (2.40) ifadesi (2.36)'da yerine yazıldığında, (2.35) probleminin formal çözümü;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{w_n}\int_0^t F_n(\xi)\sin[w_n(t-\xi)]d\xi\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \tag{2.41}$$

olarak bulunur. F_n fonksiyonları (2.39) denkleminde k yerine n yazılarak elde edilir.

Dalga denkleminde ortaya çıkan diferansiyel operatörün ve başlangıç sınır değer koşullarının lineerliğinden dolayı (2.22), (2.23) ve (2.24) denklemlerinde oluşan problemin çözümü süperpozisyondan elde edilebilir. Eğer (2.25) probleminin bir çözümü olan (2.30) serisi v ve (2.35) probleminin bir çözümü olan (2.41) serisi de w ise;

$$u = v + w$$

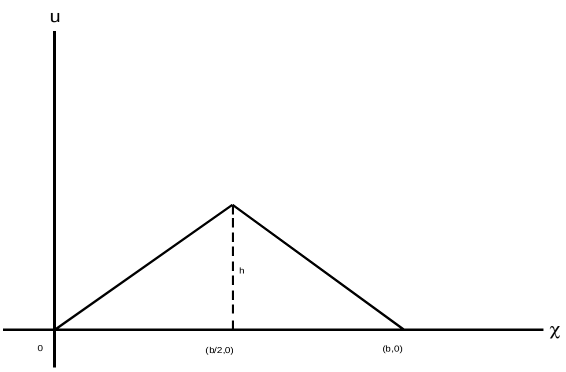
(2.22), (2.23) ve (2.24) denklemlerinin tanımladığı problemin bir çözümüdür. Formal çözüm ise;

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos w_n t + B_n\sin w_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{w_n}\int_0^t F_n(\xi)\sin[w_n(t-\xi)]d\xi\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \end{aligned} \tag{2.42}$$

şeklindedir. Burada A_n ve B_n katsayıları (2.33) ve (2.34) denklemlerinde belirtilmiş olup, $w_n = n\pi c/b$'dir. (2.42) denklemindeki serilerin ilkini temsil eden v fonksiyonu telin serbest titreşimlerini meydana getirir. Yani bu hareket verilen başlangıç koşulları ve teldeki gerilim kuvvetlerinden ortaya çıkar. Diğer yandan

(2.42) denklemindeki serilerin ikincisini temsil eden w fonksiyonu da tele dış kuvvet uygulandıktan sonraki telin hareketini meydana getirir. Bu hareket sırasında telin başlangıç koşulları sıfır olduğundan böyle bir hareket sadece dış kuvvetler etkisinde ortaya çıkmaktadır. Genel durumda telin hareketi; serbest titreşim hareketi ile dış kuvvet etkisi altında iken meydana gelen hareketin süperpozisyonu şeklindedir.

Örnek 2.1. Uçlarından bağlanmış ideal durumdaki tel orta noktasından tutulup tele dik doğrultuda h miktarınca çekilip serbest bırakılsın. Ayrıca gerilim kuvvetine ek olarak tele yerçekimi kuvvetinin de etki ettiği düşünülsün. Böyle bir durumda telin



Şekil 2.8. Uçlarından bağlanmış ideal durumdaki bir telin orta noktasından tutulup h miktarınca çekilmesi (Dennemeyer 1968)

bir sonraki hareketi belirlenmeye çalışılsın. Şekil 2.8'de olduğu gibi eksenler seçilsin. Başlangıç koşulları;

$$u(x,0) = \frac{2hx}{b} \qquad ; \; 0 \le x \le \frac{b}{2}$$

$$u(x,0) = \frac{2h(b-x)}{b} \qquad ; \; \frac{b}{2} \le x \le b$$

$$u_t(x,0) = 0 \qquad ; \; 0 \le x \le b$$

dir. Sınır koşulları ise (2.23) ifadesinde verildiği gibi,

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(b,t)=0 \qquad ;\ t\geq 0$$

şeklinde düşünülecektir. Dış kuvvet veya birim kütle,

$$F(x,t)=-g \qquad\qquad ;\ g=\ \text{yerçekimi}$$

dir. (2.33) denkleminden A_n katsayısı;

$$A_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx \qquad ;\ n=1,2,...$$

$$=\frac{2}{b}\left\{\int_0^{b/2}\frac{2hx}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx+\int_{b/2}^{b}\frac{2h(b-x)}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx\right\} \qquad ;\ n=1,2,...$$

ifadesinde integrallere ayrı ayrı kısmi integrasyon uygulanarak;

$$A_n=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad ;\ n=1,2,...$$

şeklinde, (2.34) denkleminden B_n katsayısı ise;

$$B_n=\frac{2}{bw_n}\int_0^b g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx \qquad ;\ n=1,2,...$$

ifadesinde $u_t(x,0)=g(x)=0$ başlangıç koşulu dikkate alınarak;

$$B_n=0 \qquad ;\ n=1,2,...$$

şeklinde bulunur. (2.39) ifadesinde $F(x,t)=-g$ yazıldığında;

$$F_k(t)=\frac{2}{b}\int_0^b(-g)\sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)dx=\frac{2g}{k\pi}[\cos(k\pi)-1] \qquad ;\ k=1,2,...$$

olur. Bulunan bu ifade (2.40)'da yerine yazılıp integrallendiğinde;

$$\varphi_k(t) = \frac{2g}{k\pi w_k^2}[\cos(k\pi) - 1]\int_0^t \sin[w_k(t-\xi)]d\xi$$

$$= \frac{2g}{k\pi w_k^2}[\cos(k\pi) - 1][1 - \cos(w_k t)]$$

bulunur. Elde edilen A_n ve B_n katsayıları ile $\varphi_n(t)$ fonksiyonu (2.42)'de belirtilen formal çözümde yerine yazıldığında;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(w_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2g}{n\pi w_n^2}[\cos(n\pi) - 1][1 - \cos(w_n t)]\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

olduğu görülür. Bulunan bu ifadede n'nin tek ve çift olma durumları ayrı ayrı incelendiğinde;

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{b}\cos\frac{(2n-1)\pi ct}{b}$$
$$-\frac{4b^2 g}{\pi^3 c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{b}\left[1 - \cos\frac{(2n-1)\pi ct}{b}\right] \qquad (*)$$

çözümü elde edilir. Bu ifadedeki ilk seri, yerçekimi kuvveti ihmal edilmiş ve başlangıç koşullarında belirtilen $t = 0$ anındaki $f(x)$ başlangıç konumuna sahip bir telin hareketsiz durumdan serbest hale geçirildiğindeki hareketini temsil eder. İkinci seri ise, yerçekimi dış kuvvetine sahip ve x ekseni boyunca denge durumunda iken serbest bırakılan bir telin hareketini temsil eder.

Serilerin yakınsaklığı ve bu u fonksiyonunun problemin tüm koşullarını sağlayan bir fonksiyonu ifade ettiği ispatlanmadığı için yukarıda elde edilen (*) çözümüne bir formal çözüm denir. Tüm x ve t'ler için;

$$\left|\frac{\sin[(2n-1)\pi x/b]\cos[(2n-1)\pi ct/b]}{(2n-1)^2}\right| \le \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\left|\frac{\sin[(2n-1)\pi x/b]\{1-\cos[(2n-1)\pi ct/b]\}}{(2n-1)^3}\right| \le \frac{2}{(2n-1)^3}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler $|f_n(x)| \le a_n$ formuna sahip olup her ikisi için de P testinden ötürü $\sum a_n < \infty$ olur. Bundan dolayı Weierstrass M testine göre (*) çözümündeki iki seri de her x ve t için yakınsaktır. Özel olarak, $T > 0$ sabiti ve $0 \le x \le b$, $0 \le t \le T$ üzerindeki tüm x ve t'ler için seriler düzgün yakınsaktır. Bu ise (*) çözümünün $t \ge 0$ için $0 \le x \le b$ üzerinde sürekli bir u fonksiyonu tanımladığını gösterir. (Gerçekten böyle bir u tanımlanabilir ve tüm x,t'ler için süreklidir, her bir t sabiti için x periyodik ve her bir x sabiti için t periyodiktir). Elde edilen u fonksiyonunun $u(0,t)=0$ ve $u(b,t)=0$ sınır koşullarını sağladığı kolayca görülebilir. A_n'ler $\sin(n\pi x/b)$ ortogonal dizisine göre f'nin Fourier katsayıları olmak üzere u fonksiyonunun ilk başlangıç koşulunu sağlaması

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \qquad ;\ 0 \le x \le b$$

ifadesindeki serinin düzgün yakınsaklığından ve f'nin bu Fourier serisinin $f(x)$'e düzgün yakınsamasından ortaya çıkar. (*) ifadesinden t'ye göre türetilerek elde edilen seri yakınsaktır ve $t=0$ anında sıfıra yakınsar. Bundan dolayı $u_t(x,0)=0$, $0 \le x \le b$'dir. Ancak u, problemde verilen başlangıç koşullarını sağlamasına rağmen dalga denklemini sağlamaz ve bu yüzden problemin bir çözümü değildir. Çünkü (*)'da x'e göre iki defa terim terime türetilerek elde edilen seri yakınsak değildir.

2.3.4. Formal seri çözümü hakkındaki yorumlar

Örnek 2.1'de değişkenlerine ayırma metodu yardımıyla elde edilmiş formal çözümün başlangıç sınır değer probleminin bir çözümü olması gerekmediği gösterilmiştir. Bir önceki ifadede anlatılmak istenen kısmi türevli diferansiyel denklem çözümü'nün tanımıdır. Klasik çözüm tanımı kısmi diferansiyel denklemin mertebesi kadar sürekli türevlere sahip bir fonksiyona ihtiyacı doğurur. Dalga denklemi için bunun anlamı çözümün bağımsız değişkenlere göre sürekli ikinci kısmi türeve sahip olması demektir. Örnek 2.1'deki problem dikkate alınıp başlangıç sınır değer problemi üzerinde değişkenlerine ayırma metodu uygulandığında, aşağıdaki önemli soru ortaya çıkar: eğer formal seri klasik bir çözüm vermezse başka bir yöntem yardımıyla klasik bir çözüm elde edilebilir mi? Cevap hayır. Gerçekte bir klasik çözüm yoktur. Bunu görebilmek için u'nun (2.25) probleminin iki kez sürekli diferansiyellenebilir bir çözümü olduğu varsayılsın. Eğer t sabit ise x'in fonksiyonu olarak dikkate alınan u aşağıdaki gibi, $[0,b]$ aralığı üzerinde düzgün ve mutlak yakınsak Fourier sinüs serisine açılabilir.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \qquad ;\ 0\le x\le b$$

Buradaki Fourier katsayısını bulmak için yukarıdaki ifadenin her iki yanı $\sin(k\pi x/b)$ ile çarpılıp, sonra da $[0,b]$ aralığında integrallenir. Bulunan son ifadede $k=n$ yazılarak Fourier katsayısının;

$$C_n(t)=\frac{2}{b}\int_0^b u(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx$$

olduğu görülür. Bu ifadede iki kez kısmi integrasyon alınıp $u(0,t)=u(b,t)=0$ olduğu kullanıldığında;

$$C_n(t)=-\frac{2b}{n^2\pi^2}\int_0^b u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx$$

elde edilir. Dalga denkleminde $u_{xx}=u_{tt}/c^2$ olduğundan dolayı;

$$C_n(t) = -\frac{2b}{n^2\pi^2c^2}\int_0^b u_{tt}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx$$

şeklinde bulunur. Şimdi t, $t \geq 0$ olacak şekilde bir değişken kabul edilsin. u, iki kez sürekli diferansiyellenebilir olduğundan C_n'nin orijinal ifadesi t'ye göre iki kez türetildiğinde;

$$\ddot{C}_n(t) = \frac{2}{b}\int_0^b u_{tt}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx$$

olur. Yukarıda elde edilen son iki ifadeden ve $w_n = n\pi c/b$ olduğundan dolayı $\ddot{C}_n + w_n^2 C_n = 0$'dır. Bulunan bu diferansiyel denklemin kökleri kompleks olduğundan genel çözüm;

$$C_n(t) = a_n\cos(w_n t) + b_n\sin(w_n t)$$

şeklindedir. Tekrar C_n'nin orijinal ifadesine geri dönülüp, $u(x,0) = f(x)$ başlangıç koşulu uygulandığında;

$$\begin{aligned} C_n(0) &= \frac{2}{b}\int_0^b u(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx \\ &= \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx \end{aligned}$$

olur. (2.33) ifadesinden dolayı;

$$C_n(0) = A_n$$

dir. Ayrıca genel çözümde $t = 0$ yazıldığında;

$$C_n(0) = a_n$$

olmalıdır. O halde son iki ifadeden $n = 1,2,...$ için;

$$a_n = A_n$$

olduğu bulunur. Diğer yandan C_n'nin orijinal ifadesi t'ye göre bir kez türetilip, $u_t(x,0) = g(x)$ başlangıç koşulu uygulandığında;

$$\begin{aligned}\dot{C}_n(0) &= \frac{2}{b}\int_0^b u_t(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx \\ &= \frac{2}{b}\int_0^b g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)dx\end{aligned}$$

olur. Ayrıca genel çözüm t'ye göre bir kez türetilip, bulunan ifadede $t = 0$ yazıldığında;

$$\dot{C}_n(0) = b_n w_n$$

olmalıdır. O halde son iki ifade ve (2.34)'den $n = 1,2,...$ için;

$$b_n = B_n$$

olduğu bulunur. Bu nedenle u, (2.30) denklemindeki gibi olmalıdır. O zaman u, değişkenlerine ayırma metodu ile elde edilebilir. Çözümün ikinci mertebeden sürekli türetilebilir olması özellikle fiziksel temele sahip ve süreksizliklerin çözümde ya da onun türevlerinde olduğu problemlerde gereğinden fazla bir koşuldur. Bu bağlamda başlangıç sınır değer problemleri ve kısmi türevli denklemlerin incelenmesine kısmi türevli denklemlerin genelleştirilmiş çözümü kavramı girmiştir. Şu ana kadar anlatılanlarla genelleştirilmiş fonksiyon ve genelleştirilmiş çözümün sistematik bir şekilde geliştirilmesi mümkün değildir. Formal seri çözümlerinin sıklıkla genelleştirilmiş çözümleri tanımladığı söylenebilir.

BÖLÜM 3. BİRİNCİ MERTEBEDEN EŞİTSİZLİKLERE DAYALI KESTİRİMLER

3.1. Giriş

Bu bölüm, verilen kısmi türevli denklem'in bir çözümünün uygun bir ölçüm fonksiyonu yardımıyla birinci mertebeden diferansiyel eşitsizlik elde eden bazı basit kısmi türevli denklem problemleriyle ilgilidir. Bulunan eşitsizlik, problemin başlangıç koşullarına bağlı olup, çözümün bir ölçüm fonksiyonuna göre yazılmaktadır. Burada amaç, yöntem bilimlerini (metodoloji) basit bir şekilde incelemektir. Bunlardan ilki Neumann (ya da diğer) problemi için "Hacim İntegral Metodu" diye adlandırılabilecek bir yöntemdir.

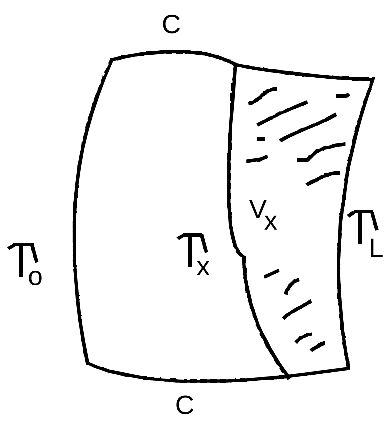
3.2. Hacim İntegral Metodu

Hacim integral metodu diye adlandırılan metot kaynağını Knowles ve Toupin'in çalışmalarından almıştır; halbuki onlar meşhur Saint-Venant elastik prensibini doğrulayarak uzaysal azalım kestirimlerini elde etmişlerdir. Hacim integral metodunun ve elastisiteyle ilgili anlatılanların birçok yeni referanslarıyla birlikte kapsamlı araştırması, Horgan ve Knowles tarafından yazılan makale ve bunun Horgan tarafından güncelleştirilmiş halinde bulunabilir.

Bu bölümde, ilk olarak metodun genel bir tanımı yapılacaktır. Sonra metodun dikdörtgensel bir bölgede Neumann (ya da diğer) problemine nasıl uygulandığı gösterilecektir. Bu problem, Knowles ve Toupin tarafından düşünülmüş olan probleme göre çok daha basittir. Yine de bu, elastik bir bölge için daha genel bir sınır değer probleminin gerekli karakteristiklerinden birkaçına sahip basit bir sınır değer problemi olarak görülebilir. Konunun devamında Phragmen-Lindelöf tipi azalım kestirimlerinin yarı sonsuz dikdörtgensel bir alanda nasıl elde edildiği gösterilecektir. Bu kabaca, bir ölçümün verilen bir üstel fonksiyondan daha hızlı ve asimptotik olarak artmadığı biliniyorsa; o çözümün ölçümü sonsuza doğru gidildikçe üstel olarak azalıyor anlamına gelmektedir. Kutupsal koordinatlar yardımıyla tanımlanan benzer bölgeler için de benzer analizlere ayrıca yer verilmiştir. Bu paragrafta söz edilen genel tip kestirimler Flavin, Knops ve Payne tarafından oluşturulmuş doğrusal elastik kavramından, Horgan ve Payne tarafından oluşturulmuş yarı doğrusal denklemin (elastiğe uygulanan) içeriğinden elde edilmiştir. Son olarak, yarı sonsuz bir silindir için difüzyon problemi olan zamana bağlı bir probleme uyarlanabilecek bir yöntem gösterilecektir.

3.2.1. Metodun tanımı

Burada üç boyutlu bir bölge dikkate alınmaktadır. Sınırı *C*, yan yüzeyi Γ_0 ve Γ_L ayrık kısımlarından oluşan üç boyutlu bir *V* bölgesi ele alınsın (Şekil 3.1). *x* değişkeni ile parametrelenmiş, aşağıdaki özellikleri mevcut olan ve kendi kendini kesmeyen Γ_x yüzey ailesi var olsun.



Şekil 3.1. Sınırı C, yan yüzeyi Γ_0 ve Γ_L ayrık kısımlarından oluşan üç boyutlu bir bölge (Flavin, Rionero 1996)

(a) Γ_0 ve Γ_L; sırasıyla *x = 0* ve *x=L* ye karşı gelen *V*'nin söylendiği gibi sınırının parçalarını oluştursun. (Bununla birlikte dejenere durumda Γ_L, bir noktaya dejenere olabilir.)

(b) Her bir Γ_x yüzeyi yan yüzeyle basit kapalı bir eğri boyunca kesişsin. *u*'nun (skaler veya vektörel) sadece kısmi diferansiyel denklemi veya denklemler sistemini sağlayan bir yer fonksiyonu olduğu varsayılsın.

$$L(u) = 0 \qquad ; \; V \text{ üzerinde}$$

b_0 verilen ve *V*'nin sınırının kalanı (yani *C* ve Γ_L) üzerinde bir anlamda sıfır koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere *u*'nun;

$$B_0(u) = b_0 \qquad ; \; \Gamma_0 \text{ üzerinde}$$

sıfır olmayan sınır koşullarını sağlayan bir fonksiyonu olduğu varsayılsın. V_x ; Γ_x, Γ_L ve *C* arasında bulunan bölgeyi (hacmi) göstersin. *P(u)*, *u*'nun (veya türevlerinin) negatif olmayan bir fonksiyonu olsun ve

$$F(x) = \int_{V_x} P(u)dV$$

ile V_x de çözümün bir hacim integral ölçüsünü tanımlansın. Hacim integral metodunda amaç, birinci mertebeden bir diferansiyel eşitsizlik ve buradan da *x*' e ve *F(0)* veri terimine bağlı bir üst sınır elde etmektir. *F(0)* için verilere göre bir üst sınır elde edilebileceği anlaşılır. *h(x)*, Γ_x kesitlerinin geometrisine bağlı olmak üzere;

$$F'(x) + h(x)F(x) \le 0 \tag{3.1}$$

şeklinde bir diferansiyel eşitsizlik elde edilir. Bu eşitsizlik;

$$F(x) \leq F(0)\exp\left[-\int_0^x h(x)dx\right] \tag{3.2}$$

sonucunu verecek şekilde kolayca integre edilebilir.

Hatırlatma 3.1. Γ_0 sınırının tümleyeni üzerinde sıfır sınır koşulları tanımlanarak bir metot verilmesine karşılık bu durum olmazsa olmaz bir koşul değildir. Yani bölgenin tüm sınırları üzerinde sıfırdan farklı koşullar da konabilir.

Bu genel yaklaşım uzay değişkenine bağlı olduğu gibi *t* zaman değişkenine bağlı parabolik problemlere de uyarlanabilir. Sıfır başlangıç koşulu ve daha önceden bahsedilen sınır koşulları ile birlikte zaman türevi (ya da zaman türevlerini) içeren bir kısmi türevli denklem veya kısmi türevli denklem sisteminin ele alındığı varsayılsın. *P* ve *Q* negatif olmayan fonksiyonlar (*u* ve *u*'nun türevleri) olmak üzere V_x üzerinde çözümün bir ölçümü aşağıdaki gibi tanımlanarak;

$$F(x,t) = \int_0^t \int_{V_x} P(u)dVd\tau + \int_V Q(u)dV \tag{3.3}$$

F(x,t) için uygun bir diferansiyel eşitsizlik elde edilebilir. Daha önceden bahsedildiği gibi amaç, *x* ve *F(0,t)* ye bağlı olarak *F(x,t)* için bir üst sınır elde etmektir.

3.3. Neumann Problemi

Bu kısımda basit bir Neumann probleminin bir dikdörtgene nasıl uygulandığı gösterilecektir. Sabitleri *L, h* ve kartezyen koordinatları *(x,y)* olan dikdörtgen biçiminde bir bölge düşünülmüş olsun.

$$R = 0<x<L \quad ; \quad 0<y<h$$

$$\nabla_1^2 u = 0 \quad ; \quad R \text{ üzerinde} \tag{3.4$_1$}$$

denkleminin çözümü;

$u_y = 0$; $y = 0$ ve $y = h$ kenarları üzerinde (3.4_2)

$u_x = 0$; $x = L$ kenarı üzerinde (3.4_3)

$u_x = f(y)$; $x = 0$ kenarı üzerinde (3.4_4)

sınır koşullarına bağlı olarak *u(x,y)* olsun. Divergence teoremi ve (3.4_1) – (3.4_4) sınır koşullarının bir sonucu olarak f fonksiyonu için koşul;

$$\int_0^h f(y)dy = 0 \qquad (3.4_5)$$

olsun. Burada *u*'nun keyfi bir sabit farkıyla belirlendiği bilinmektedir. Problemin,

(i) Aşağıdaki çekim dağılımı ile indislenmiş *u(x,y)*'nin de *xy* düzleminin yerini aldığı dikdörtgen biçimindeki dik kesite sahip elastik bir cisim için antiplane bir problemin; uygun bir kesme ile diğer üç kenar bağımsız iken sıfır sonucunu sağlayan ve *f(y)* ile orantılı olan $x = 0$ kenarına uygulanması,

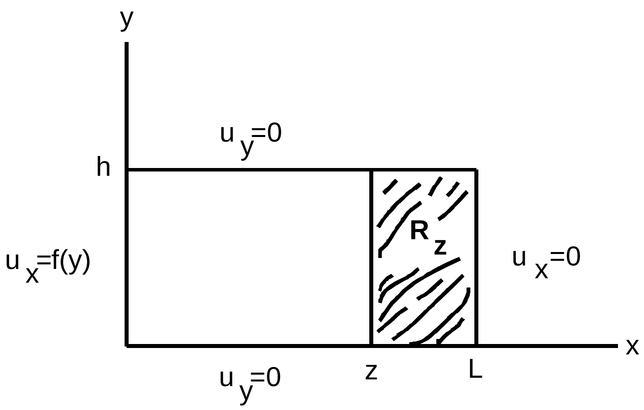
(ii) Isı akışı belli bir kenarda sabitlenip diğer kenarlar izole edilirse homojen izotropik (eş yönlü) bir dikdörtgen içinde *u* sabit sıcaklığının belirlenmesi,
gibi fiziksel yorumları vardır.

Teorem 3.1. $R_Z = R \cap X > Z$ (Şekil 3.2) ve (3.4)'te belirlenen problemin çözümü *u* olmak üzere çözümün hacim ölçümü;

$$F(z) = \int_{R_z} (\nabla_1 u)^2 \, dA \qquad (3.5_1)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman *F(z)* aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$F(z) \le F(0) \exp(-2\pi z / h) \qquad (3.5_2)$$



Şekil 3.2. Sabitleri L, h kartezyen koordinatları (x, y) olan ve (3.4)'te belirtilen problemin tüm koşullarını sağlayan sonlu bir dikdörtgen (Flavin, Rionero 1996)

İspat : Dikdörtgenin $x = z$ noktasındaki dik kesiti Γ_z ile gösterilsin. R_z'de uygulanan divergence teoremi gereğince;

$$\int_{\partial R_z} Fnds = \int_{R_z} \nabla F dA$$

olmalıdır. $F = \nabla_1 u$ ise;

$$\nabla F = \nabla_1 . \nabla_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta_1 u$$

dir. (3.4_1)'den;

$$\Delta_1 u = 0$$

olduğu bilinmektedir. O halde;

$$\int_{R_z} \nabla F dA = \int_{R_z} \Delta_1 u dA = 0$$

olur. Bu durumda;

$$\int_{\partial R_z} F n\, ds = \int_{\partial R_z} \nabla_1 u.n\, ds = 0$$

olarak elde edilir. Yani;

$$\int_{S_1} (0,1)(u_x, u_y)dy + \int_{S_2} (1,0)(u_x, u_y)dy + \int_{S_3} (0,-1)(u_x, u_y)dy + \int_{S_4} (-1,0)(u_x, u_y)dy = 0$$

dır. (3.4_2) ve (3.4_3)'ten $u_y = 0$ ve $u_x = 0$ oldukları kullanıldığında;

$$\int_{S_1} (0,1)(u_x, u_y)dy = \int_{S_1} u_y dy = \int_{S_1} 0 dy = 0$$

$$\int_{S_2} (1,0)(u_x, u_y)dy = \int_{S_2} u_x dy = \int_{S_2} 0 dy = 0$$

$$\int_{S_3} (0,-1)(u_x, u_y)dy = -\int_{S_3} u_y dy = -\int_{S_3} 0 dy = 0$$

bulunur ki bu da;

$$\int_{S_4} (-1,0)(u_x, u_y)dy = -\int_{S_4} u_x dy = 0$$

olmasını gerektirir. O halde;

$$\int_{\Gamma_z} u_x dy = 0 \qquad (3.6)$$

ifadesi gerçeklenir.

$$F(z) = \int_{R_z} \nabla_1 (u \nabla_1 u) dA = \int_z^L \int_{\Gamma_\xi} \nabla_1 (u \nabla_1 u) dy d\xi$$

$$= \int_{\partial\Gamma_\xi} (u \nabla_1 u).n\, ds$$

$$= \int_{S_1} u\left(u_x, u_y\right)(0,1)dy + \int_{S_2} u\left(u_x, u_y\right)(1,0)dy$$

$$+ \int_{S_3} u\left(u_x, u_y\right)(0,-1)dy + \int_{S_4} u\left(u_x, u_y\right)(-1,0)dy$$

$$= -\int_{S_4} u\, u_x\, dy$$

$$= -\int_{\Gamma_z} u u_x\, dy \tag{3.7}$$

şeklindedir. (3.5_1)'den,

$$F(z) \;=\; \int_{R_z} (\nabla_1 u)^2\, dA = \int_z^L \int_{\Gamma_\xi} (u_x^2 + u_y^2)\, dy\, d\xi$$

dir. Bu ifadede her iki yanın türevi alındığında;

$$F'(z) = \int_z^L \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial(u_x^2 + u_y^2)}{\partial z}\, dy\, d\xi + (L)' \int_{\Gamma_L} (u_x^2 + u_y^2)\, dy - (z)' \int_{\Gamma_z} (u_x^2 + u_y^2)\, dy$$

$$= -\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2\, dy \tag{3.8}$$

olduğu açıktır. Herhangi bir k sabiti için;

$$F'(z) + 2kF(z) = -\int_{\Gamma_z} [(\nabla_1 u)^2 + 2kuu_x]\, dy$$

$$= -\int_{\Gamma_z} (u_x^2 + u_y^2 + 2kuu_x)\, dy$$

$$= -\int_{\Gamma_z} [(u_x + ku)^2 + u_y^2 - k^2 u^2]\, dy$$

$$\leq -\int_{\Gamma_z} (u_y^2 - k^2 u^2)\, dy \tag{3.9}$$

eşitsizliği bulunur. Problemin u çözümü bir ilave sabit yardımıyla belirlenmektedir. Sabit;

$$\int_{\Gamma_0} u dy = 0 \tag{3.10}$$

ile çözülebilecek biçimde tanımlansın. (3.6) ve (3.10) durumundan;

$$\int_{\Gamma_z} u dy = 0 \tag{3.11}$$

olur. Poincare eşitsizliği, $\pi^2 h^{-2}$ Poincare sabiti olmak üzere;

$$\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy \geq \pi^2 h^{-2} \int_{\Gamma_z} u^2 dy \tag{3.12}$$

şeklindedir. (3.9)'a Poincare eşitsizliği uygulandığında;

$$\begin{aligned} F'(z) + 2kF(z) &\leq -\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy + k^2 \int_{\Gamma_z} u^2 dy \\ &\leq -\pi^2 h^{-2} \int_{\Gamma_z} u^2 dy + k^2 \int_{\Gamma_z} u^2 dy \\ &= -(\pi^2 h^{-2} - k^2) \int_{\Gamma_z} u^2 dy \end{aligned} \tag{3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. $k = \pi h^{-1}$ seçilerek önce,

$$F'(z) + 2\pi h^{-1} F(z) \leq 0 \tag{3.14}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanı $\exp(2\pi h^{-1} z)$ ile çarpıldığında;

$$F'(z)\exp(2\pi h^{-1} z) + \frac{2\pi}{h}\exp(2\pi h^{-1} z) F(z) \leq 0$$

olduğu görülür. Çarpımın türevi gereği,

$$\left[\exp(2\pi h^{-1} z)F(z)\right]' \leq 0$$

dır. Her iki yan $[0, z]$ aralığında integre edildiğinde;

$$F(z) \leq F(0)\exp(-2\pi h^{-1} z)$$

eşitsizliği istenen sonucu verir. Bu ispatı tamamlar. Yani çözüm üstel hızla sıfıra gitmektedir. Geriye eldeki verilere göre *F(0)* için bir üst sınırın belirlenmesi kalır. Bu işlem, aşağıda verilen teoremde ifade edilen bir standart varyasyonel prensip uygulanarak elde edilebilir.

Teorem 3.2. *v*'nin, *R* üzerinde tanımlı,

$$\nabla_1 v = 0 \qquad ; R \text{ üzerinde} \qquad (3.15_1)$$

$$v_1 = f \qquad ; \Gamma_0 \text{ üzerinde}$$

$$v_1 = 0 \qquad ; \Gamma_L \text{ üzerinde}$$

$$v_2 = 0 \qquad ; y=0\ , y=h \qquad (3.15_2)$$

koşullarını sağlayan keyfi, sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu varsayılsın. Bu durumda;

$$\int_R v^2 dA \geq \int_R (\nabla_1 u)^2 dA \equiv F(0) \qquad (3.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada eşitlik durumu $v = \nabla u$ olması ile sağlanır.

İspat : (3.16) eşitsizliğini ispatlayabilmek için;

$$\int_R v.\nabla_1 u\, dA = \int_R (\nabla_1 u)^2 dA \qquad (3.17)$$

olduğunu göstermek gerekir. Bunun için (3.4) ve (3.15)'te divergence teoremi kullanılmalıdır. Buradan;

$$\int_R v.\nabla_1 u\, dA = \int_R \nabla_1 (uv) dA = \int_{\partial R} u\, v\, n ds$$

$$= \int_{S_1} u(v_1, v_2)(0,-1)dy + \int_{S_2} u(v_1, v_2)(1,0)dy + \int_{S_3} u(v_1, v_2)(0,1)dy$$

$$+ \int_{S_4} u(v_1, v_2)(-1,0)dy$$

$$= -\int_{S_1} uv_2 dy + \int_{s_2} uv_1 dy + \int_{S_3} uv_2 dy - \int_{S_4} uv_1 dy = -\int_{S_4} ufdy \qquad (*)$$

bulunur. Diğer yandan;

$$\int_R (\nabla_1 u)^2\, dA = \int_R \nabla_1 (u\nabla_1 u) dA = \int_{\partial R} (u\nabla_1 u).n\, ds$$

$$= -\int_{S_1} uu_y dy + \int_{S_2} uu_x dy + \int_{S_3} uu_y dy - \int_{S_4} uu_x dy$$

$$= -\int_{S_4} ufdy \qquad (**)$$

dır. (*) ve (**)'dan,

$$\int_R v.\nabla_1 u\, dA = \int_R (\nabla_1 u)^2\, dA$$

elde edilir. Burada Schwarz eşitsizliği uygulanıp,

$$\int_R (\nabla_1 u)^2\, dA = \int_R v.\nabla_1 u\, dA \leq \left(\int_R v^2 dA \right)^{1/2} . \left(\int_R (\nabla_1 u)^2\, dA \right)^{1/2}$$

her iki yan $\left(\int_R (\nabla_1 u)^2\, dA \right)^{1/2}$ ye bölündüğünde;

$$\left(\int_R (\nabla_1 u)^2 dA\right)^{1/2} \leq \left(\int_R v^2 dA\right)^{1/2}$$

bulunur. O halde;

$$\int_R (\nabla_1 u)^2 dA \leq \int_R v^2 dA$$

olur. Yani;

$$F(0) \equiv \int_R (\nabla_1 u)^2 dA \leq \int_R v^2 dA$$

dır. ξ için en uygun seçim varyasyonel metotlarla elde edilir. Böylece (3.5_2)'deki kestirimin nasıl kesinleştirildiği görülebilir. ξ,

$$\xi(0) = 1 \quad , \quad \xi(L) = 0 \tag{3.18}$$

koşullarını sağlayan sürekli türetilebilir bir fonksiyon olmak üzere;

$$v_1 = f(y)\xi(x) \ , \ v_2 = -\left\{\int_0^y f(y)dy\right\}\xi'(x) \tag{3.19}$$

v vektörü için iyi bir seçimdir. Böylece (3.5_2)'deki kestirimin nasıl elde edildiği açık olarak gösterilmiş olur.

Hatırlatma 3.2. (3.4_1) ve (3.4_2) koşulları ve özellikle (3.4_4) koşulu, normal türevi sınır üzerinde belirlenmiş bir harmonik fonksiyonu bulma gibi daha genel bir problemde sınır koşullarında yapılan bir değişiklik olarak dikkate alınabilir. Teorem 3.1'de şekillenen kestirim, yapılan değişikliklere göre *F(0)* için bir üst sınır bulma işlemi, sürekli bağımlılık kestirimi olarak dikkate alınabilir. Yani bu; *x=0* noktasındaki küçük değişimlerin her *x* için *F(x)*’de de küçük değişimlere yol açması demektir.

Gerçekten, Saint-Venant’ın matematikle ilgili gelişmelerin yaşandığı 19. yy’da yaşamış olduğu düşünüldüğünde, biri elastik problem olan, bir diğeri de dinamik sistemle ilişkili olan iki olgu arasındaki benzerlikten çıkan sonucu tahmin etmekte dikkate değer bir varsayım geliştirdiği görülür.

3.4. Phragmen-Lindelöf ve Diğer Kestirimler

Phragmen-Lindelöf tip kestirimleri incelerken bir ön hazırlık olarak (3.14)’e denk fakat onun çıkarılışına alternatif bir yöntem dikkate alınsın. Aşağıda (3.12) ifadesinde gereken düzenlemeler yapılıp,

$$\pi^2 h^{-2} \int_{\Gamma_z} u^2 dy \le \int_{\Gamma_z} u_y^2 dy$$

$$\int_{\Gamma_z} u^2 dy \le h^2 \pi^{-2} \int_{\Gamma_z} u_y^2 dy$$

$$\left(\int_{\Gamma z} u^2 dy \right)^{1/2} \le h\pi^{-1} \left(\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy \right)^{1/2}$$

ve bulunan bu eşitsizlik (3.7) ifadesine Schwarz eşitsizliği uygulandıktan sonra yerine yazıldığında;

$$F(z) = -\int_{\Gamma_z} u u_x dy \le \left(\int_{\Gamma_z} u^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy \right)^{1/2}$$

olduğundan,

$$F(z) \le h\pi^{-1} \left(\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy \right)^{1/2} \tag{3.20}$$

bulunur. (3.20)’de Cauchy eşitsizliği ve (3.8) kullanılarak (3.14) alternatif bir yöntemle bir kez daha elde edilmiş olur.

Burada hacim integral metodunun yarı sonsuz (sadece $x \to \infty$ için bir ön koşul konmaması dışında tüm ön koşullara sahip) $0 < x < \infty$, $0 < y < h$ dikdörtgeni için nasıl uygulandığı gösterilecektir. Eğer çözümün sonsuzlukta üstel olarak daha hızlı artmadığı biliniyorsa, bu durumda çözüm *x*’e göre üstel hızla sıfıra gider. Bu çeşit bir sonuç Phragmen-Lindelöf sonucu diye adlandırılır. Buna göre çözümün ölçümü;

$$E(z) = -\int_{\Gamma_z} u u_x \, dy \tag{3.21_1}$$

şeklinde tanımlansın. Fakat genel olarak,

$$E(z) = \int_{R_z} (\nabla_1 u)^2 \, dA \tag{3.21_2}$$

olduğu iddia edilemez. Çünkü; *u*’nun sonsuzdaki davranışı bir ön kestirim olarak bilinmemektedir. Gerçekten, *u*’nun negatif olmadığı bile iddia edilemez. Ama yine de koşulları daha önceki gibi olsa ($u \to 0$ için $z \to \infty$) $F(z)$ ile $E(z)$ birbirinden ayrılamazdı. $\delta > 0$ için;

$$\begin{aligned}
E(z+\delta) - E(z) &= -\int_{\Gamma_{z+\delta}} u u_x \, dy + \int_{\Gamma_z} u u_x \, dy \\
&= -\left[\int_{\Gamma_{z+\delta}} u u_x \, dy - \int_{\Gamma_z} u u_x \, dy + \int_C u u_y \, dy \right] \\
&= -\int_{\partial R(z, z+\delta)} (u \nabla_1 u).n \, ds \\
&= -\int_z^{z+\delta} \int_{\Gamma\xi} \nabla_1 (u \nabla_1 u) \, dy d\xi \\
&= -\int_z^{z+\delta} \int_{\Gamma_\xi} (\nabla_1 u)^2 \, dy d\xi
\end{aligned} \tag{3.22}$$

olduğu görülür. Elde edilen bu eşitlikte her iki yan $(1/\delta)$ ile çarpılıp $\delta \to 0$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{E(z+\delta)-E(z)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(-\int_{z}^{z+\delta}\int_{\Gamma_\xi}(\nabla_1 u)^2\,dy d\xi\right)$$

olduğundan,

$$E'(z)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[-\int_{z}^{z+\delta}\left(\int_{\Gamma_\xi}(\nabla_1 u)^2\,dy\right)d\xi\right]$$

bulunur. Ancak bu durumda $0/0$ belirsizliği ortaya çıkacağından bir kez L’Hospital uygulanarak,

$$E'(z)=\lim_{\delta\to 0}-(z+\delta)'_\delta\int_{\Gamma_{z+\delta}}(\nabla_1 u)^2\,dy+\lim_{\delta\to 0}(z)'_\delta\int_{\Gamma_z}(\nabla_1 u)^2\,dy$$

$$E'(z)=-\int_{\Gamma_z}(\nabla_1 u)^2\,dy \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.20)’deki argümanın tekrarı,

$$\left|E(z)\right|\le \pi^{-1}h\left(\int_{\Gamma_z}u_y^2\,dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma_z}u_x^2\,dy\right)^{1/2} \tag{3.24}$$

eşitsizliğini verir. (3.24) ifadesinde, Cauchy eşitsizliği ile birlikte (3.23)’ün kullanılmasıyla (3.14)’e benzer,

$$-E'(z)\ge 2\pi h^{-1}\left|E(z)\right| \tag{3.25}$$

ifadesi bulunur. Daha sonra *E(z)’*in pozitif ya da negatif olması durumu dikkate alındığında;

$$E'(z) \le -2\pi h^{-1} E(z) \qquad (3.26_1)$$

veya

$$-E'(z) \ge 2\pi h^{-1}\left(-E(z)\right) \qquad (3.26_2)$$

olduğu görülür. Kabul edilsin ki $0 \le z_1 < \infty$ aralığında $-E(z_1) > 0$ olacak şekilde bir z_1 noktası var olsun. Bu durumda her $z > z_1$ için (3.26_2) ifadesinden $-E'(z_1) > 0$ olur. O halde $-E(z_1)$ artan olmalıdır. $-E(z_1)$ artan ve $-E(z_1) > 0$ ise $z > z_1$ için $-E(z) > 0$ 'dır. Bu durumda (3.26_2)'deki eşitsizlik geçerli olacaktır. Yani;

$$-E'(z) + 2\pi h^{-1} E(z) \ge 0$$

dır. Eşitsizliğin her iki yanı $\exp\left(-2\pi h^{-1} z\right)$ ile çarpıldığında;

$$-E'(z)\exp\left(-2\pi h^{-1} z\right) + 2\pi h^{-1} E(z)\exp\left(-2\pi h^{-1} z\right) \ge 0$$

olur. Bu da;

$$\left(-E(z)\exp\left(-2\pi h^{-1} z\right)\right)' \ge 0$$

demektir. Her iki yanın $[z_1, z]$ aralığında integrali alındığında;

$$-E(z)\exp\left[-2\pi h^{-1}\left(z - z_1\right)\right] \ge -E(z_1) \qquad (3.27)$$

elde edilir. $-E(z_1) > 0$ olduğundan (3.27) ifadesi gereği $-E(z)$ fonksiyonu en az üstel hızla sonsuza gitmektedir. Varsayılsın ki,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{-E(z)}{\exp\left(2\pi h^{-1} z\right)} = 0 \qquad (3.28)$$

olsun. Bu da $-E(z)$ en fazla üstel hızla sıfıra gidiyor demektir. Bu durumda elde edilen çelişkiden dolayı $-E(z) > 0$ olamaz. Bu çelişkiye (3.26_2) eşitsizliği kabul edilerek düşüldü. O halde $E(z) \geq 0$ olmalıdır ve böylece (3.26_1) eşitsizliği geçerlidir. (3.27) ifadesinin elde edilişine benzer şekilde (3.26_1)'den,

$$E(z) \leq E(0)\exp\left(-2\pi h^{-1} z\right) \tag{3.29}$$

olduğu bulunur. Fakat burada da $z \to \infty$ için $E(z)$'nin en fazla üstel hızla sıfıra gittiği görülür. Yani;

$$\int_{\Gamma_z} u u_x \, dy \to 0$$

dır. Teorem 3.1'deki (3.5_1) ile (3.7) ifadeleri birbirine eşit iken $F(z)$ için elde edilen z ve $F(0)$'a bağlı üst sınır (3.29) ifadesi ile aynıdır. Bu nedenle bu kısımda bahsedilen (3.21_1) ile (3.21_2) de birbirine eşittir. (3.28)'deki asimptotik koşul farklı bir şekilde de ifade edilebilir. L'Hospital kuralı (3.28) ifadesine uygulandığında,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{-E'(z)}{2\pi h^{-1} \exp\left(2\pi h^{-1} z\right)} = 0$$

ise

$$\lim_{z \to \infty} -E'(z)\exp\left(-2\pi h^{-1} z\right) = 0 \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30)'da (3.23) yerine yazıldığında;

$$\lim_{z \to \infty} \int_{\Gamma_z} \exp\left(-2\pi h^{-1} z\right)(\nabla_1 u)^2 \, dy = 0 \tag{3.31}$$

bulunur. Eğer bu asimptotik koşul geçerli ise (3.29) eşitsizliği de geçerlidir. Bu sonuç aşağıda özetlenmektedir.

Teorem 3.3. (Phragmen Lindelöf Tipi) $0 < x < \infty$, $0 < y < h$ olacak şekilde yarı sonsuz bir dikdörtgende (3.4_1)-(3.4_5) koşulları (3.10)'daki normalleşme koşulu ve (3.32_1) asimptotik koşulunu sağlayan klasik bir çözüm u olsun.

$$\lim_{z\to\infty} \int_{\Gamma_z} \exp\left(-2\pi h^{-1} z\right)(\nabla_1 u)^2\, dy = 0 \qquad (3.32_1)$$

Bu durumda (3.21_1) veya (3.21_2)'de tanımlanmış $E(z)$ büyüklüğü,

$$E(z) \le E(0)\exp\left(-2\pi h^{-1} z\right) \qquad (3.32_2)$$

şeklindeki azalım kestirimini sağlar.

3.5. Eğri Sınırlı Bölgeler

Sonlu veya yarı sonsuz dikdörtgensel bölgeler için elde edilen genel yaklaşım, diğer geometrik bölgelere de uygulanabilir. (r,θ) düzlem kutupsal koordinatları , r_0, r_1 ve α pozitif sabitler olmak üzere;

$$r_0 \le r \le r_1 \quad , \quad 0 \le \theta \le \alpha$$

şeklinde tanımlanan bölge ele alınsın. Γ_r, r radyal koordinata sahip bölgenin kesitini , R_r ise bölgenin r'den küçük olmayan radyal koordinatlı kısmını göstersin (Şekil 3.3).

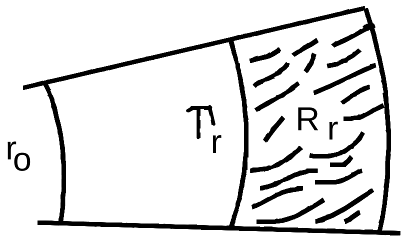
$$\nabla f = \left((\nabla f)_r, (\nabla f)_\theta\right)$$

olduğundan $(\nabla f)_r$ ve $(\nabla f)_\theta$ hesaplanmalıdır.

$$df(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta$$

$$df(r,\theta)=\nabla f\,ds \qquad \text{(a)}$$

dır.



Şekil 3.3. Γ_r, r radyal koordinata sahip bölgenin kesiti, R_r ise bölgenin r ’den küçük olmayan radyal koordinatlı kısmı olmak üzere (r,θ) kutupsal koordinatlarıyla belirlenmiş sonlu bir bölge (Flavin, Rionero1996)

r yönünde bir değişim dikkate alınsın. Bu durumda $ds = dr\,n_r$ olur.

$$df(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta=\frac{\partial f}{\partial r}dr=\left(\frac{\partial f}{\partial r}n_r\right)(dr\,n_r)$$

$$df(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial r}n_r\,ds \qquad \text{(b)}$$

bulunur. (a) ve (b)’den;

$$(\nabla f)_r=\frac{\partial f}{\partial r}$$

elde edilir. Şimdi de θ yönünde bir değişim dikkate alınsın. Bu durumda da $ds = r\,d\theta n_\theta$ olur.

$$df(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta=\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta=\left(\frac{\partial f}{r\partial \theta}n_\theta\right)(rd\theta n_\theta)$$

$$df(r,\theta)=\frac{\partial f}{r\partial\theta}n_\theta ds \tag{c}$$

bulunur. (a) ve (c)’den;

$$(\nabla f)_\theta=\frac{\partial f}{r\partial\theta}$$

elde edilir. O halde;

$$\nabla f=\left((\nabla f)_r,(\nabla f)_\theta\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{r\partial\theta}\right)$$

şeklindedir. $u\ (r,\theta)$;

$$\begin{aligned}
&u_{rr}+r^{-1}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\Delta u=0 \\
&u=0 \qquad ;\ r=r_1 \quad , \quad \theta=0 \quad , \quad \theta=\alpha \\
&u\neq 0 \qquad ;\ r=r_0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

probleminin klasik bir çözümü olsun. Ölçüm fonksiyonu,

$$F(r)=-\int_{\Gamma_r}uu_r r\,d\theta \tag{3.34}$$

ile tanımlansın. (3.34)’e divergence teoremi uygulandığında;

$$\begin{aligned}
F(r)&=-\int_{\Gamma_r}uu_r r\,d\theta=\int_{\partial R_r}uu_r r\,dS=\int_{\partial R_r}u\frac{\partial u}{\partial n}r\,dS=\int_{\partial R_r}(u\nabla u).n\,r\,dS \\
&=\int\int_{R_r}\nabla(u\nabla u)rdrd\theta=\int\int_{R_r}\left(\nabla u\nabla u+u.\Delta u\right)rdrd\theta \\
&=\int\int_{R_r}(\nabla u)^2\,rdrd\theta
\end{aligned}$$

$$= \int\int_{R_r} \left(u_r^2 + \frac{u_\theta^2}{r^2} \right) r dr d\theta \tag{3.35}$$

ifadesi bulunur. Bulunan bu ifadede her iki yanın türevi alındığında;

$$F'(r) = \left(\int_r^{r_1} \int_{\Gamma_\xi} \left(u_r^2 + \frac{u_\theta^2}{r^2} \right) r d\theta d\sigma \right)'$$

$$= (r_1)' \int_{\Gamma_{r_1}} \left(u_r^2 + \frac{u_\theta^2}{r^2} \right) r d\theta - (r)' \int_{\Gamma_r} \left(u_r^2 + \frac{u_\theta^2}{r^2} \right) r d\theta$$

olacağından,

$$F'(r) = -\int_{\Gamma_r} \left(u_r^2 + r^{-2} u_\theta^2 \right) r d\theta \tag{3.36}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.34)'e önce Schwarz eşitsizliği daha sonra,

$$\int_{\Gamma_r} u^2 d\theta \le \alpha^2 \pi^{-2} \int_{\Gamma_r} u_\theta^2 d\theta \tag{3.37}$$

Poincare eşitsizliğinin,

$$\left(\int_{\Gamma_r} u^2 r d\theta \right)^{1/2} \le \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) r \left(\int_{\Gamma_r} r^{-2} u_\theta^2 r d\theta \right)^{1/2}$$

şeklinde düzenlenmiş hali (burada $\alpha^2 \pi^{-2}$ Poincare sabitidir) ve son olarak da Cauchy eşitsizliği uygulanıp elde edilenler ile birlikte (3.36)'da dikkate alındığında;

$$|F(r)| \le -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) r F'(r)$$

veya

$$\left|F(r)\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) r\, F'(r) \le 0$$

bulunur. Bulunan bu eşitsizlikte her iki yan önce $(1/2)(\alpha/\pi)r$ ile bölünüp,

$$F'(r) + 2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) r^{-1} \left|F(r)\right| \le 0 \tag{3.38}$$

sonra $r^{2\pi/\alpha}$ ile çarpılıp, $[r_0, r]$ aralığında integre edildiğinde;

$$F(r) r^{2\pi/\alpha} \le F(r_0) r_0^{2\pi/\alpha}$$

olduğu görülür. Eşitsizlik daha sade halde her iki yan $r^{2\pi/\alpha}$ ile bölünerek,

$$F(r) \le F(r_0)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\pi/\alpha} \tag{3.39}$$

şeklinde de yazılabilir.

Şimdi $r_1 \to \infty$ iken bölgenin sonsuza genişlediği fakat sonsuzda bir ön koşul olmadığı bununla birlikte de diğer tüm koşulların sağlandığı varsayılsın. Buradan yola çıkılarak Phragmen-Lindelöf tipi bir sonuç kanıtlanabilir. $F(r)$ büyüklüğü yeniden (3.34) ile tanımlanabilir. Fakat genel olarak mevcut koşullar altında (3.35) ifadesi çıkarılamaz. Bununla birlikte daha önce olduğu gibi (3.36) ve (3.38) geçerli olmayı sürdürür. (3.38) eşitsizliğinde $F(r)$ 'nin pozitif veya negatif olacağı dikkate alındığında;

$$F'(r) + 2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) r^{-1} F(r) \le 0 \tag{d}$$

$$F'(r) + 2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) r^{-1} (-F(r)) \le 0 \tag{e}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Şimdi $F(r_2) < 0$ olacak şekilde $0 \le r_2 < \infty$ olduğu kabul edilsin. Sonrasında ise (e)'deki,

$$F'(r_2) \le 2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) r_2^{-1} F(r_2)$$

eşitsizliğinden $F'(r_2) < 0$ olarak bulunur. O halde $F(r_2)$ azalan olmalıdır. $F(r_2)$ azalan ve $F(r_2) < 0$ ise $r_2 > r$ için $F(r) < 0$'dır. Bu durumda (e)'deki eşitsizlik geçerli olacaktır. Yani;

$$F'(r) \le 2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) r^{-1} F(r)$$

veya

$$\{-F(r)\}' \ge 2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) r^{-1} \{-F(r)\} \tag{3.40}$$

dır. Eşitsizliğin her iki yanı $r^{-2\pi/\alpha}$ ile çarpılıp, $[r_2, r]$ aralığında integre edildiğinde;

$$-F(r) r^{-2\pi/\alpha} \ge -F(r_2) r_2^{-2\pi/\alpha}$$

ifadesi bulunur. Eşitsizliğin daha sade hali her iki yan $r_2^{-2\pi/\alpha}$ ile bölünerek,

$$\frac{-F(r)}{\left(\dfrac{r}{r_2}\right)^{2\pi/\alpha}} \ge -F(r_2) \tag{3.41}$$

şeklinde elde edilir. $-F(r) > 0$ ve $-F(r_2) > 0$ olduğundan,

$$-F(r) \ge -F(r_2)\left(\frac{r}{r_2}\right)^{2\pi/\alpha}$$

yazılabilir. Bu da $-F(r)$ en az $(r/r_2)^{2\pi/\alpha}$ polinomik hızla sonsuza gider demektir. Kabul edilsin ki;

$$\lim_{r\to\infty}\frac{-F(r)}{r^{2\pi/\alpha}}=0 \tag{3.42}$$

olsun. Bu durumda da $-F(r)$ en fazla $r^{2\pi/\alpha}$ polinomik hızla sıfıra gitmektedir. O halde $-F(r)>0$ olamaz. Bu çelişkiye $-F(r_2)>0$ olduğu kabul edilerek varıldığından dolayı bu şartlar altında (d) eşitsizliği geçerli olmalıdır. Sonuç olarak $F(r)\geq 0$ 'dır. (3.42) ifadesine L'Hospital kuralı uygulandığında;

$$\lim_{r\to\infty}-\frac{F'(r)}{\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)r^{(2\pi/\alpha)-1}}=0$$

olacağından,

$$\lim_{r\to\infty}-\frac{F'(r)}{r^{(2\pi/\alpha)-1}}=0 \tag{3.43}$$

eşitliği bulunur. (3.43)'de (3.36) yerine yazıldığında,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\Gamma_r}\left(u_r^2+r^{-2}u_\theta^2\right)rd\theta}{r^{(2\pi/\alpha)-1}}=0$$

elde edilir. Bu ifade biraz düzenlendiğinde,

$$\lim_{r\to\infty}r^{-(2\pi/\alpha)+2}\int_{\Gamma_r}\left(u_r^2+r^{-2}u_\theta^2\right)d\theta=0 \tag{3.44}$$

şeklinde olur. Böylece son asimptotik koşul sağlanırsa, $F(r)\geq 0$ 'dır ve (3.41) ifadesinin elde edilişine benzer şekilde (d)'den (3.39) azalım kuralı yeniden elde edilir. Ayrıca, bu koşullar altında (3.35) ifadesi geçerli olacaktır. Sonlu ve sonsuz bölgeler için elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Teorem 3.4. r_1 sonlu olmak üzere çözümünün pozitif bir ölçümü (3.35) ile verilen (3.33) problemi,

$$F(r) \le F(r_0)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\pi/\alpha} \qquad (3.45_1)$$

şeklindeki azalım kuralını sağlar. Aynı azalım kuralı $r_1 \to \infty$ iken ($r \to \infty$ iken $u \to 0$ olması yerine)

$$\lim_{r\to\infty} r^{-(2\pi/\alpha)+2} \int_{\Gamma_r} \left(u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2\right) d\theta = 0 \qquad (3.45_2)$$

asimptotik koşulunun sağlanması halinde de geçerlidir.

3.6. Başlangıç Sınır Değer Problemi

Bu kısımda uzay değişkenlerine ilaveten zamana da bağlı olan bir problem ele alınacaktır. Özel olarak, bir silindir içinde tanımlanan u denklemi için başlangıç değer problemi incelensin. R; kesitleri parçalı sürekli kapalı bir eğriyle sınırlı bir silindirin içi olsun. x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinatları , silindirin bir ucu orijinde diğer ucu $x_3 = L$ noktasında ve x_3 eksenine paralel olacak şekilde seçilsin. Γ_z ile $x_3 = z$ noktasındaki R'nin açık kesiti, $\partial\Gamma_z$ ile de buna karşı gelen eğrisel sınır gösterilsin. Ayrıca R'de sabit termal geçişkenliği olan homojen izotropik ısı iletici bulunsun ve R'nin I sınırı $0^\circ C$ de sabit tutulsun. Buna göre varsayılsın ki $u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$,

$$\nabla^2 u - u_t = 0 \qquad ; \quad R\times(0,\infty) \qquad (3.46_1)$$

ısı denklemini sağlayan klasik bir çözüm olsun. Buradaki sınır koşulları,

$$u = f \qquad ; \quad \Gamma_0 \text{ üzerinde}$$
$$u = 0 \qquad ; \quad \Gamma_L \text{ üzerinde} \qquad (3.46_2)$$

olup silindirin yan yüzeylerinde,

$$u = 0 \qquad ; \quad I \text{ üzerinde} \qquad (3.46_3)$$

dır ve başlangıç koşulu ise,

$$u(x,0) = 0 \qquad ; \quad x \in R \qquad (3.46_4)$$

şeklindedir.

Teorem 3.5. R_z**,** R sağ silindirinin $x_3 > z$ olan kısmını göstermek üzere; (3.46)'daki başlangıç sınır değer probleminin R_z deki çözümünün hacim integral ölçümü olan,

$$E(z,t) = \int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 \, dA d\tau + \frac{1}{2} \int_{R_z} u^2 dA \qquad ; \quad z \geq 0 \quad , \quad t \geq 0 \qquad (3.47)$$

fonksiyonu,

$$E(z,t) \leq E(0,t) \exp\left(-2\sqrt{\lambda_1}\, z\right) \qquad (3.48)$$

uzaysal azalım kestirimini sağlar. Burada λ_1 sayısı,

$$\nabla_1^2 \phi + \lambda \phi = 0 \qquad ; \quad \Gamma_z \text{ üzerinde}$$
$$\phi = 0 \qquad ; \quad \partial\Gamma_z \text{ üzerinde} \qquad (3.49)$$

şeklindeki öz değer probleminin en küçük öz değeridir.

İspat : İlk olarak (3.47) ifadesinden $(\nabla u)^2 = \nabla u.\nabla u = \nabla(u\nabla u) - u.\Delta u$, (3.46_1)'den dolayı $\Delta u = u_t$ ve $uu_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2$ oldukları dikkate alındığında;

$$E(z,t) = \int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 \, dA d\tau + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA$$

$$= \int_0^t \int_{R_z} [\nabla(u\nabla u) - u.\Delta u] dA d\tau + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA$$

$$= \int_0^t \int_{R_z} \nabla(u\nabla u) dA d\tau - \int_0^t \int_{R_z} uu_t dA d\tau + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA$$

$$= \underbrace{\int_0^t \int_{R_z} \nabla(u\nabla u) dA d\tau}_{(1)} \underbrace{- \int_0^t \int_{R_z} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u^2 dA d\tau + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA}_{(2)}$$

eşitliği elde edilir.(1) ifadesine divergence teoremi uygulandığında;

$$\int_0^t \int_{R_z} \nabla(u\nabla u) dA d\tau = \int_0^t \int_{\partial R_z} (u\nabla u).n \, ds d\tau$$

$$= \int_0^t \int_{S_1} (u\nabla u).n \, dy d\tau + \int_0^t \int_{S_2} (u\nabla u).n \, dy d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_{S_3} (u\nabla u).n \, dy d\tau + \int_0^t \int_{S_4} (u\nabla u).n \, dy d\tau$$

olarak bulunur. Burada (3.46_2) ve (3.46_3) koşulları dikkate alındığında;

$$\int_0^t \int_{R_z} \nabla(u\nabla u) dA d\tau = \int_0^t \int_{S_1} u(u_1, u_2, u_3)(0,0,-1) dy d\tau = -\int_0^t \int_{\Gamma_z} uu_3 dy d\tau$$

olur. Diğer yandan (2) ifadesi için;

$$-\int_0^t \int_{R_z} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u^2 dA d\tau + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA = -\frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0) dA + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA$$

$$= \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0) dA$$

bulunur. O halde bulunan bu eşitlikler yerlerine yazıldığında;

$$E(z,t) = -\int_0^t \int_{\Gamma_z} u u_3 dy d\tau + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0) dA \tag{3.50}$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.47) ifadesi,

$$E(z,t) = \int_0^t \int_z^L \int_{\Gamma_\xi} (\nabla u)^2 dy d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int_z^L \int_{\Gamma_\xi} u^2 dy d\xi$$

şeklinde yazılıp her iki yanın z 'ye göre türevi alındığında;

$$E_z(z,t) = -\int_0^t \int_{\Gamma_z} (\nabla u)^2 dy d\tau - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_z} u^2 dy \tag{3.51}$$

elde edilir. Herhangi bir k sabiti için (3.50) ve (3.51)'den,

$$E_z + 2kE = -\int_0^t \int_{\Gamma_z} \left[(\nabla u)^2 + 2k u u_3 \right] dy d\tau - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_z} u^2 dy + k\int_{R_z} u^2(x,0) dA \tag{3.52}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadenin sağ yanındaki ilk terim $(\nabla_1 u)^2 = u_1^2 + u_2^2$ olduğu dikkate alınarak,

$$\int_{\Gamma_z} \left[(\nabla u)^2 + 2k u u_3 \right] dy = \int_{\Gamma_z} (u_3 + ku)^2 dy + \int_{\Gamma_z} \left[(\nabla_1 u)^2 - k^2 u^2 \right] dy \tag{3.53}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\int_{\Gamma_z} (u_3 + ku)^2 \, dy \geq 0$ olduğu açıktır. Eşitliğin sağındaki diğer terim için,

$$\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 \, dy \geq \lambda_1 \int_{\Gamma_z} u^2 dy \tag{3.54}$$

şeklindeki Poincare eşitsizliğinden faydalanılarak;

$$\int_{\Gamma_z} \left[(\nabla_1 u)^2 - k^2 u^2 \right] dy \geq \left(\lambda_1 - k^2 \right) \int_{\Gamma_z} u^2 dy$$

olduğu bulunur. $k \leq \sqrt{\lambda_1}$ için,

$$\int_{\Gamma_z} \left[(\nabla_1 u)^2 - k^2 u^2 \right] dy \geq 0$$

dır. Bu durumda

$$\int_{\Gamma_z} \left[(\nabla u)^2 + 2kuu_3 \right] dy \geq 0$$

yani,

$$-\int_0^t \int_{\Gamma_z} \left[(\nabla u)^2 + 2kuu_3 \right] dy d\tau \leq 0$$

dır. Elde edilen bu sonuç ve $-(1/2) \int_{\Gamma_z} u^2 dy \leq 0$ olduğu (3.52)'de dikkate alındığında;

$$E_z + 2kE \leq k \int_{R_z} u^2 (x,0) dA \tag{3.55}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin her iki yanı $\exp(2kz)$ ile çarpılıp $[0, z]$ aralığında integre edildiğinde;

$$E(z,t)\exp(2kz) \leq E(0,t) + k\int_0^z \int_{R_\xi} \exp(2k\xi)u^2(x,0)\,dA\,d\xi$$

olur. Eşitsizliği biraz daha düzenlemek için her iki taraf $\exp(2kz)$ ile bölündüğünde,

$$E(z,t) \leq E(0,t)\exp(-2kz) + k\int_0^z \int_{R_\xi} \exp[2k(\xi - z)]u^2(x,0)\,dA\,d\xi \qquad (3.56)$$

ifadesi bulunur. Eşitsizlikte bulunan integralde $\int_{R_\xi} u^2(x,0)\,dA = \int_\xi^L \int_{\Gamma_\eta} u^2(x,0)\,dyda = u$ ve $\exp[2k(\xi - z)]d\xi = dv$ seçilip kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\begin{aligned} k\int_0^z \int_{R_\xi} \exp[2k(\xi - z)]u^2(x,0)\,dA\,d\xi = {} & \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0)\,dA \\ & - \frac{1}{2}\int_R \exp(-2kz)u^2(x,0)\,dA \\ & + \frac{1}{2}\int_0^z \int_{\Gamma_\xi} \exp[2k(\xi - z)]u^2(x,0)\,dyd\xi \qquad (***) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi sağ yandaki son iki terim için gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\exp(-2kz)\left[\int_0^z \int_{\Gamma_\xi} \exp(2k\xi)u^2(x,0)\,dyd\xi - \int_R u^2(x,0)\,dA\right] \\ & \leq \frac{1}{2}\exp(-2kz)\int_0^z \int_{\Gamma_\xi} \exp(2k\xi)u^2(x,0)\,dyd\xi \\ & = \frac{1}{2}\int_0^z \int_{\Gamma_\xi} \exp[2k(\xi - z)]u^2(x,0)\,dyd\xi \end{aligned}$$

olduğu görülür. $\xi \in [0,z]$ olduğundan $\exp[2k(\xi - z)] \leq 1$ dir ve böylece,

$$\frac{1}{2}\exp(-2kz)\left[\int_0^z\int_{\Gamma_\xi}\exp(2k\xi)u^2(x,0)dyd\xi-\int_R u^2(x,0)dA\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^z\int_{\Gamma_\xi}u^2(x,0)dyd\xi$$

eşitsizliği sağlanır. O halde elde edilen bu eşitsizlik (***)’da kullanıldığında,

$$k\int_0^z\int_{R_\xi}\exp[2k(\xi-z)]u^2(x,0)dAd\xi\leq\frac{1}{2}\int_{R_z}u^2(x,0)dA+\frac{1}{2}\int_0^z\int_{\Gamma_\xi}u^2(x,0)dyd\xi$$

$$=\frac{1}{2}\int_R u^2(x,0)dA \qquad (3.57)$$

sonucuna varılır. (3.57), (3.56)’da uygulandığında,

$$E(z,t)\leq E(0,t)\exp(-2kz)+\frac{1}{2}\int_R u^2(x,0)dA$$

olur. $k=\sqrt{\lambda_1}$ yazılıp (3.46_4) başlangıç koşulu kullanıldığında,

$$E(z,t)\leq E(0,t)\exp\left(-2\sqrt{\lambda_1}z\right)$$

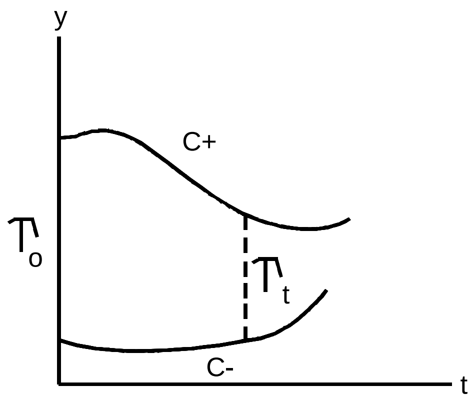
şeklindeki (3.48) eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Böylece (3.46_4) başlangıç koşulu dikkate alınarak (3.48) azalım kestirimi elde edilmiş olur.

3.7. Basit Bir Lemma

ty düzleminde, $t=0$ apsisli Γ_0 doğru parçasıyla ve sırasıyla,

$$y=y_+(t),\ y=y_-(t)$$

ile tanımlı C_+, C_- eğrileriyle sınırlı bir R bölgesi dikkate alınsın (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. ty düzleminde $t = 0$ apsisli Γ_0 doğru parçasıyla ve sırasıyla $y_+(t)$, $y_-(t)$ ile tanımlı C_+, C_- eğrileriyle sınırlı bir bölge (Flavin, Rionero 1996)

Burada $y_+(t)$ ve $y_-(t)$, tek değerli sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $y_+(t) > y_-(t)$ dir. Γ_t, t eksenine dik olacak şekilde eğrilerin arasında kalan bölgedeki doğru parçasını göstersin. $\psi(t, y)$, C_+ ve C_- üzerinde sırasıyla $E_+(t)$, $E_-(t)$ değerlerini alan ve bölge üzerinde ikinci mertebeden sürekli türevleri olan bir fonksiyon olsun. $\phi(u)$, u argümanı ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Konunun ilerleyen kısımlarında, ϕ'nin üstünde gösterilen nokta ya da noktalar u argümanına göre türevleri gösterirken normal türev gösterimi t'ye göre türev anlamına gelecektir.

Lemma 3.1. Son iki paragrafta verilen tanımlamalar dikkate alındığında,

$$F(t) = \int_{\Gamma_t} \phi(\psi_y)\,dy \tag{3.58_1}$$

ile verilen büyüklük (fonksiyon),

$$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\phi}\psi_t \psi_{yy}\,dy + \left\{\dot{\phi}E' - \left(\dot{\phi}\psi_y - \phi\right)y'\right\}\Big] \tag{3.58_2}$$

eşitliğini sağlar. Buradaki] notasyonu, C_+ ve C_- eğrilerinin sınırları üzerindeki uç noktalardaki integrallerinin farkının sembolik olarak gösterilmesi anlamındadır.

İspat : Leibnitz teoremi, sürekli diferansiyellenebilir $f(t, y)$ fonksiyonu için,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_t} f(t, y)dy = \int_{\Gamma_t} f_t dy + fy'\Big]$$

olduğunu ifade eder. Bundan faydalanarak (3.58_1) ‘in türevi alındığında,

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_t} \phi(\psi_y)dy = \int_{\Gamma_t} \dot{\phi}\psi_{yt}\, dy + \phi(\psi_y)y'\Big] \tag{3.59}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan ifadedeki integralde $\dot{\phi} = u$ ve $\psi_{yt}\, dy = dv$ olarak seçilip kısmi integrasyon uygulandığında,

$$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\phi}\psi_t\psi_{yy}dy + \left(\phi y' + \dot{\phi}\psi_t\right)\Big] \tag{3.60}$$

bulunur. Buradaki sınır koşulu,

$$\psi(t, y(t)) = E(t)$$

şeklindedir. Her iki yanın türevi alındığında,

$$\psi_t + \psi_y y' = E' \tag{3.61}$$

olduğu görülür. $\psi_t = E' - \psi_y y'$ eşitliği (3.60)’da yerine yazıldığında;

$$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\phi}\psi_t\psi_{yy}dy + \left\{\dot{\phi}E' - \left(\dot{\phi}\psi_y - \phi\right)y'\right\}\Big]$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Problem 3.1. Lemma 3.1'i dikkate alarak aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız. C_+ ve C_- üzerinde ψ sabit olmak üzere,

(a) $$F(x) = \int_{\Gamma_x} \psi_y^2 dy$$

ise,

$$F'(x) = \int_{\Gamma_x} (\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy}) dy$$

dir.

(b) q herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$F_q(x) = \int_{\Gamma_x} \psi_y^{2q} dy$$

ise,

$$F_q'(x) = (2q-1) \int_{\Gamma_x} \psi_y^{2q-2} (\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy}) dy$$

dir.

(c) $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$, ve $\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = a_x$ olmak üzere,

$$F_q(x) = \int_{\Gamma_x} u^{2q} dy$$

ise,

$$F_q'(x) = (2q-1) \int_{\Gamma_x} u^{2q-2} a_x dy$$

dır. Buradan Hölder eşitsizliği uygulanarak,

$$F_q'(x) \le (2q-1) F_q^{1-\left(\frac{1}{q}\right)} \left\{ \int_{\Gamma_x} |a_x|^q dy \right\}^{\left(\frac{1}{q}\right)}$$

bulunur. Ayrıca eşitsizlik integre edildiğinde,

$$\{F_q(x)\}^{\left(1/q\right)} \leq \{F_q(0)\}^{\left(1/q\right)} + \left(2 - \frac{1}{q}\right)\int_0^x \left\{ \int_{\Gamma_x} |a_x|^q \, dy \right\}^{\left(1/q\right)} dx$$

olduğu görülür.

Çözüm :

(a) $F(x) = \int_{\Gamma_x} \psi_y^2 dy$

ifadesinde $\phi = \psi_y^2$ olup $\psi_y = m$ seçilirse $\phi = m^2$ dir. Böylece (3.58_2)'den,

$$F'(x) = -\int_{\Gamma_x} \ddot{\phi}\psi_x\psi_{yy} dy + \left[\{\phi y' + \dot{\phi}(E' - \psi_y y')\}\right]$$

olmalıdır. Ancak C_+ ve C_- üzerinde ψ sabit olduğundan $\{\phi y' + \dot{\phi}(E' - \psi_y y')\}\Big] = 0$ 'dır. Bu durumda,

$$F'(x) = -\int_{\Gamma_x} 2\psi_x\psi_{yy} dy = -\int_{\Gamma_x} \psi_x\psi_{yy} dy - \int_{\Gamma_x} \psi_x\psi_{yy} dy \qquad (\alpha)$$

dir. Diğer yandan $\int_{\Gamma_x} \psi_y\psi_{xy} dy$ integralinde $\psi_y = u$ ve $\psi_{xy} dy = dv$ seçilerek kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\int_{\Gamma_x} \psi_y\psi_{xy} dy = \psi_y\psi_x\Big] - \int_{\Gamma_x} \psi_x\psi_{yy} dy$$

bulunur. Yine C_+ ve C_- üzerinde ψ sabit olduğundan $\psi_y\psi_x\Big] = 0$ 'dır. O halde,

$$\int_{\Gamma_x} \psi_y \psi_{xy} dy = -\int_{\Gamma_x} \psi_x \psi_{yy} dy$$

olur. Elde edilen bu ifade (α)'da kullanıldığında,

$$F'(x) = \int_{\Gamma_x} (\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy}) dy$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

(b) $\quad F_q(x) = \int_{\Gamma_x} \psi_y^{2q} dy$

ifadesinde $\phi = (\psi_y)^{2q}$ olup $\psi_y = m$ seçilirse $\phi = m^{2q}$ dır. Böylece (3.58_2)'den,

$$F_q'(x) = -\int_{\Gamma_x} \ddot{\phi} \psi_x \psi_{yy} dy + \{\phi y' + \dot{\phi}(E' - \psi_y y')\}]$$

olmalıdır. Ancak C_+ ve C_- üzerinde ψ sabit olduğundan $\{\phi y' + \dot{\phi}(E' - \psi_y y')\}] = 0$'dır. Bu durumda,

$$F_q'(x) = (2q-1)\int_{\Gamma_x} -2q \psi_y^{2q-2} \psi_x \psi_{yy} dy$$

$$= (2q-1)\left[\int_{\Gamma_x} (-2q+1) \psi_y^{2q-2} \psi_x \psi_{yy} dy - \int_{\Gamma_x} \psi_y^{2q-2} \psi_x \psi_{yy} dy\right] \qquad (\beta)$$

dir. Diğer yandan $\int_{\Gamma_x} (-2q+1) \psi_y^{2q-2} \psi_x \psi_{yy} dy = -\int_{\Gamma_x} \psi_x \left(d\psi_y^{2q-1}\right)$ integralinde $\psi_x = u$ ve $d\psi_y^{2q-1} = dv$ seçilerek kısmi integrasyon uygulandığında,

$$-\int_{\Gamma_x} \psi_x \left(d\psi_y^{2q-1}\right) = -\psi_x \psi_y^{2q-1}\Big] + \int_{\Gamma_x} \psi_y^{2q-1} \psi_{xy} dy$$

bulunur. Yine C_+ ve C_- üzerinde ψ sabit olduğundan $-\psi_x\psi_y^{2q-1}\Big] = 0$ 'dır. O halde,

$$\int_{\Gamma_x}(-2q+1)\psi_y^{2q-2}\psi_x\psi_{yy}dy = -\int_{\Gamma_x}\psi_x\left(d\psi_y^{2q-1}\right) = \int_{\Gamma_x}\psi_y^{2q-2}\psi_y\psi_{xy}dy$$

olur. Elde edilen bu ifade (β)'da kullanılırsa,

$$F_q'(x) = (2q-1)\int_{\Gamma_x}\psi_y^{2q-2}\left(\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy}\right)dy$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

(c) $\quad F_q(x) = \int_{\Gamma_x} u^{2q}dy$

ise $\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = a_x$ olarak seçilmesinden dolayı (b) şıkkından,

$$F_q'(x) = (2q-1)\int_{\Gamma_x} u^{2q-2}a_x dy$$

bulunur. Bu son ifadeye Hölder eşitsizliği uygulandığında $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$F_q'(x) \le (2q-1)\left\{\int_{\Gamma_x}\left|u^{2q-2}\right|^p dy\right\}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\left\{\int_{\Gamma_x}\left|a_x\right|^q dy\right\}^{\left(\frac{1}{q}\right)}$$

$$= (2q-1)F_q^{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\left\{\int_{\Gamma_x}\left|a_x\right|^q dy\right\}^{\left(\frac{1}{q}\right)}$$

ifadesi elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanı $F_q^{1-\left(\frac{1}{q}\right)}$ ile bölünüp, $(1/q)$ ile çarpıldığında,

$$\left(F_q^{\left(\frac{1}{q}\right)}\right)' \le \left(2 - \frac{1}{q}\right)\left\{\int_{\Gamma_x}\left|a_x\right|^q dy\right\}^{\left(\frac{1}{q}\right)}$$

olduğu görülür. Son olarak ifadenin her iki yanı $[0,x]$ aralığında integre edildiğinde,

$$\{F_q(x)\}^{\left(1/q\right)} \le \{F_q(0)\}^{\left(1/q\right)} + \left(2-\frac{1}{q}\right)\int_0^x \left\{\int_{\Gamma_x} |a_x|^q\, dy\right\}^{\left(1/q\right)} dx$$

sonucuna varılır. Bu da ispatı tamamlar.

Problem 3.2. Lemma 3.1'de $\phi(u) = u^2$, $y_+' > 0$ ve $y_-' < 0$ olsun. Bu durumda,

$$F'(t) \le -2\int_{\Gamma_t} \psi_t \psi_{yy}\, dy + \left.\frac{E'^2}{y'}\right]$$

olduğunu ispatlayınız. Ayrıca $l = y_+ - y_-$ olmak üzere herhangi bir düzgün $\phi(y,t)$ fonksiyonu için,

$$\int_{y_-}^{y_+} \phi_{yy}^2\, dy \ge \pi^2 l^{-2}\left\{\int_{y_-}^{y_+} \phi_y^2\, dy - l^{-1}([E])^2\right\}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

İpucu: $\int_{y_-}^{y_+} \phi_{yy}^2\, dy \ge \pi^2 l^{-2} \int_{y_-}^{y_+} \phi_y^2\, dy$

Çözüm : $\phi(u) = u^2$ ise, $\dot{\phi} = 2u$ ve $\ddot{\phi} = 2$ olup (3.58_2)'den,

$$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\phi}\psi_t \psi_{yy}\, dy + \left.\left\{\dot{\phi}E' - \left(\dot{\phi}\psi_y - \phi\right)y'\right\}\right]$$

$$= -2\int_{\Gamma_t} \psi_t \psi_{yy}\, dy + \left.\left\{2uE' - \left(2u\psi_y - u^2\right)y'\right\}\right]$$

dır. İstenileni ispatlayabilmek için $\left\{2uE' - \left(2u\psi_y - u^2\right)y'\right\}\Big] \le \dfrac{E'^2}{y'}\Big]$ eşitsizliğinin bulunması gerekir. (3.58_1)'den $\phi(u) = u^2$ ise $u = \psi_y$ dir. O halde,

$$\left\{2uE' - \left(2u\psi_y - u^2\right)y'\right\}\Big] = \left\{2\psi_y E' - \left(2\psi_y\psi_y - \psi_y^2\right)y'\right\}\Big] = \psi_y\left(2E' - \psi_y y'\right)\Big]$$

bulunur. (3.61)'den dolayı $\psi_y = \dfrac{E' - \psi_t}{y'}$ olduğundan yukarıdaki ifade,

$$\left\{2uE' - \left(2u\psi_y - u^2\right)y'\right\}\Big] = \psi_y\left(2E' - \psi_y y'\right)\Big] = \left(\frac{E' - \psi_t}{y'}\right)\left(2E' - \psi_y y'\right)\Big]$$

şeklinde yazılabilir. Yine (3.61)'den $\psi_y y' = E' - \psi_t$ ise,

$$\begin{aligned}\left\{2uE' - \left(2u\psi_y - u^2\right)y'\right\}\Big] &= \left(\frac{E' - \psi_t}{y'}\right)\left(2E' - \psi_y y'\right)\Big] \\ &= \left(\frac{E' - \psi_t}{y'}\right)\left(2E' - E' + \psi_t\right)\Big] \\ &= \frac{(E')^2 - (\psi_t)^2}{y'}\Big] \le \frac{E'^2}{y'}\Big]\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda,

$$\begin{aligned}F'(t) &= -2\int_{\Gamma_t} \psi_t \psi_{yy}\, dy + \left\{2uE' - \left(2u\psi_y - u^2\right)y'\right\}\Big] \\ &\le -2\int_{\Gamma_t} \psi_t \psi_{yy}\, dy + \frac{E'^2}{y'}\Big]\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da istenilendir.

Diğer yandan $l = y_+ - y_-$ olmak üzere düzgün bir $\phi(y,t)$ fonksiyonu için ipucu dikkate alınıp, eşitsizliğin sağ yanından pozitif olan $\pi^2 l^{-3}(E])^2$ ifadesi çıkarıldığında,

$$\int_{y_-}^{y_+} \phi_{yy}^2 dy \geq \pi^2 l^{-2} \int_{y_-}^{y_+} \phi_y^2 dy - \pi^2 l^{-3}(E])^2$$

olur. O halde,

$$\int_{y_-}^{y_+} \phi_{yy}^2 dy \geq \pi^2 l^{-2} \left\{ \int_{y_-}^{y_+} \phi_y^2 dy - l^{-1}(E])^2 \right\}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

BÖLÜM 4. LİNEER OLMAYAN SINIR KOŞULLARI ALTINDAKİ DALGA DENKLEMİ İÇİN UZAYSAL DAVRANIŞ KESTİRİMLERİ

4.1. Giriş

Bu kısımda lineer olmayan sınır koşulu altındaki damping terimli dalga denklemini içeren başlangıç sınır değer probleminin bir çözümünün uzaysal bir davranışı incelenecektir.

Lineer sınır koşulları altında, lineer dalga denklemi için Phragmen-Lindelöf tipi teoremlerde gerekli olan dağılıcı terimlerden birçok yazarın çalışmalarında söz edilmiştir. Quintanilla, silindirik bölgeler için de bunu ispat etmiştir. Parabolik ve aykırı (pseudo) parabolik denklemlerin çalışmalarında elde edilen benzer sonuçlar damping terimli dinamik problemlerinde tanımlanan hiperbolik denklemler için de geçerlidir. Böylece eğer benzer enerji integrali sınırlı ise, o zaman çözüm üstel bir azalım kestirimini sağlar. Fakat lineer olmayan sınır koşulları altındaki lineer denklemler için çözümlerin davranışı birbirinden farklıdır. Bildiğimiz kadarıyla bu ifade yalnızca makalelerin birkaçında lineer olmayan sınır koşulları altındaki eliptik ya da parabolik tipteki lineer diferansiyel denklemler için ortaya çıkmaktadır.

4.2. Problemin İfadesi

Buradaki amaç, lineer olmayan sınır koşulu altında damping terimli lineer bir dalga denklemi için Phragmen-Lindelöf tipi bir teoremi ispatlayabilmektir.

Yeterince düzgün sınırlı $\Omega \in R^n$ bölgesinin aşağıdaki formda olduğu kabul edilsin.

$$\Omega = \left\{ x \in R^n : x_n \in R^+, x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in D_{x_n} \subset R^{n-1} \right\}$$

Her bir $z > 0$ için $D_z \subset R^{n-1}$, ∂D_z yeterince düzgün sınırlı bir bölge ve

$$0 < m_0 \leq \inf_z |D_z| \leq \sup_z |D_z| \leq m_1 < \infty \qquad ; \qquad \forall z \in R^+$$

dır. Başlangıç sınır değer probleminin;

$$u_{tt} - \Delta u + a u_t = 0 \qquad ; \; x \in \Omega \quad , \quad t \in (0,T) \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \qquad ; \; x \in \Omega \tag{4.2}$$

$$u(x',0,t) = g(x',t) \qquad ; \; x' \in D_0 \; , \quad t \in (0,T) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} + f(u) = 0 \qquad ; \; x \in S_0 \quad , \quad t \in (0,T) \tag{4.4}$$

şeklinde olduğu varsayılsın. Burada a; pozitif bir sabit, $\frac{\partial u}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n} v_i . \frac{\partial u}{\partial x_i}$; dış normal türev, Δ; R^nde Laplace operatörü ve $S_z = \left\{ x \in R^n : x' \in \partial D_{x_n}, z \leq x_n < \infty \right\}$ dir. Ω_z hacminin bir parçası dx, D_z deki yüzey alanının bir parçası dA, S_z üzerindeki yüzey alanının bir parçası $d\mu$ ve ∂D_z üzerindeki yüzey alanının bir parçası ds 'dir. Devamında aşağıdaki şu notasyonlar kullanılacaktır.

$$\Omega_z = \Omega \cap \left\{ x \in R^n : 0 < x_n < z \right\}$$

$$R_z = \Omega \cap \left\{ x \in R^n : z < x_n < \infty \right\}$$

$$(u,v)_{\Omega_x} = \int_{\Omega_x} uv dx$$

$$\|u\|^2_{\Omega_x} = (u,u)_{\Omega_x}$$

$$(u,v)_{D_z} = \int_{D_z} uv dA$$

$$\|u\|^2_{D_x} = (u,u)_{D_x}$$

Diğer yandan f ’nin de aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin.

$$F(u)=\int_0^u f(\xi)d\xi \geq c_0 u f(u) \qquad ; \ c_0>0 \ , \ \forall u\in R \qquad (F_1)$$

$$u f(u)\geq \gamma |u|^{2p} \qquad ; \ 2p>1 \ , \ \gamma>0 \ , \ \forall u\in R \qquad (F_2)$$

4.3. Çözümler İçin Kestirimler

(4.1)-(4.4) probleminin aşikar olmayan bir çözümü u ve $g'(x,t)=0$ olsun. (4.1)’in her iki yanı $L_2(\Omega_z)$’deki $u_t+\varepsilon u$ ile çarpılıp integre edildiğinde;

$$\int_{\Omega_z}(u_{tt}-\Delta u+au_t)(u_t+\varepsilon u)dx=0$$

$$\int_{\Omega_z}\left(u_t u_{tt}-u_t.\Delta u+a u_t^2+\varepsilon u u_{tt}-\varepsilon u.\Delta u+\varepsilon a u u_t\right).dx=0 \qquad (*)$$

elde edilir. Bulunan bu ifadedeki terimler ayrı ayrı integre edildiğinde;

$$\int_{\Omega_z}u_t u_{tt}dx=\int_{\Omega_z}\frac{1}{2}\frac{du_t^2}{dt}dx=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(u_t,u_t)_{\Omega_z}=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u_t\|_{\Omega_z}^2 \qquad (a)$$

olduğu görülür. Diğer yandan,

$$-\int_{\Omega_z}u_t.\Delta u dx=-\left(\int_{\partial\Omega_z}u_t.\nabla u ds-\int_{\Omega_z}\nabla u.\nabla u_t dx\right)=\underbrace{-\int_{\partial\Omega_z}\frac{\partial u}{\partial v}u_t ds}_{(1)}+\underbrace{\int_{\Omega_z}\frac{1}{2}\frac{d(\nabla u)^2}{dt}dx}_{(2)}$$

olur. (1) için;

$$-\int_{\partial\Omega_z}\frac{\partial u}{\partial v}u_t ds=-\int_{D_0}\frac{\partial u}{\partial v}u_t ds-\int_{D_z}\frac{\partial u}{\partial v}u_t dA+\int_0^z\int_{\partial D\eta}u_t f(u)dsd\eta$$

dır. Burada son terime (4.4)'de verilen $-\frac{\partial u}{\partial v}=f(u)$ koşulu uygulanmıştır. (4.3) koşulu ve $g'(x,t)=0$ kabulünden dolayı D_0'da $u_t=0$' dır. Ayrıca (F_1) kabulünde integral işareti altında türev alındığında, $\frac{d}{dt}F(u)=u_t f(u)$ ifadesi elde edilir. Bulunan bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında;

$$-\int_{\partial\Omega_z}\frac{\partial u}{\partial v}u_t ds=0-\int_{D_z}u_{x_n}u_t dA+\frac{d}{dt}\int_0^z\int_{\partial D_\eta}F(u)dsd\eta$$

bulunur. (2) için;

$$\int_{\Omega_z}\frac{1}{2}\frac{d(\nabla u)^2}{dt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla u,\nabla u)_{\Omega_z}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{\Omega_z}^2$$

dır. O halde (1) ve (2) için bulunan sonuçlar yerlerine yazıldığında;

$$-\int_{\Omega_z}u_t.\Delta u dx=-(u_t,u_{x_n})_{D_z}+\frac{d}{dt}\int_0^z\int_{\partial D\eta}F(u)dsd\eta+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 \qquad \text{(b)}$$

eşitliği sağlanır. Kolayca görülür ki,

$$\int_{\Omega_z}au_t^2dx=a(u_t,u_t)_{\Omega_z}=a\|u_t\|_{\Omega_z}^2 \qquad \text{(c)}$$

dir. Ayrıca,

$$\int_{\Omega_z}\varepsilon uu_{tt}dx=\int_{\Omega_z}\varepsilon\left[\frac{d}{dt}(uu_t)-u_t^2\right]dx=\frac{d}{dt}\varepsilon(u,u_t)_{\Omega_z}-\varepsilon\|u_t\|_{\Omega_z}^2 \qquad \text{(d)}$$

olmalıdır. $-\int\limits_{\Omega_z} \varepsilon u \Delta u dx$ integralinin sonucu için, (b) ifadesini elde etmekte kullanılan işlemler benzer şekilde tekrar edildiğinde;

$$-\int\limits_{\Omega_z} \varepsilon u.\Delta u dx = -\varepsilon\left(u, u_{x_n}\right)_{D_z} + \varepsilon\int\limits_0^z \int\limits_{\partial D_\eta} uf(u) ds d\eta + \varepsilon\|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 \quad \text{(e)}$$

ifadesi bulunur. Yine kolaylıkla,

$$\int\limits_{\Omega_z} \varepsilon a u u_t dx = \int\limits_{\Omega_z} \varepsilon a \frac{1}{2}\frac{du^2}{dt} dx = \frac{d}{dt}\frac{\varepsilon a}{2}(u,u)_{\Omega_z} = \frac{d}{dt}\frac{\varepsilon a}{2}\|u\|_{\Omega_z}^2 \quad \text{(f)}$$

olduğu görülür. Elde edilen (a)-(f) eşitlikleri (*)’da yerlerine yazıldığında;

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|_{\Omega_z}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 + \int\limits_0^z \int\limits_{\partial D\eta} F(u) ds d\eta + \varepsilon(u, u_t)_{\Omega_z} + \frac{\varepsilon a}{2}\|u\|_{\Omega_z}^2\right]$$

$$+(a-\varepsilon)\|u_t\|_{\Omega_z}^2 + \varepsilon\|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 + \varepsilon\int\limits_0^z \int\limits_{\partial D_\eta} u f(u) ds d\eta - \left(u_t, u_{x_n}\right)_{D_z} - \varepsilon\left(u, u_{x_n}\right)_{D_z} = 0 \quad \text{(G)}$$

olur. (G) ifadesinin, $(0,T)$ aralığı üzerinde t’ye göre integrali alındıktan sonra (F_1) kabulü gereği $c_0\int\limits_0^z \int\limits_{\partial D\eta} u f(u) ds d\eta \le \int\limits_0^z \int\limits_{\partial D_\eta} F(u) ds d\eta$ eşitsizliği uygulandığında;

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{\Omega_z}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 + c_0\int\limits_0^z \int\limits_{\partial D_\eta} u f(u) ds d\eta + \varepsilon\int\limits_{\Omega_z} u u_t dx + \frac{\varepsilon a}{2}\|u\|_{\Omega_z}^2$$

$$+(a-\varepsilon)\int\limits_0^T \|u_t\|_{\Omega_z}^2 dt + \varepsilon\int\limits_0^T \|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 dt + \varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_0^z \int\limits_{\partial D\eta} u f(u) ds d\eta dt$$

$$\le \int\limits_0^T \int\limits_{D_z} u_t u_{x_n} dA dt + \varepsilon\int\limits_0^T \int\limits_{D_z} u u_{x_n} dA dt \quad \text{(H)}$$

elde edilir. ε 'lu Cauchy eşitsizliği $(u,u_t)_{\Omega_z} \leq \varepsilon(u,u)_{\Omega_z} + (1/4\varepsilon)(u_t,u_t)_{\Omega_z}$ şeklindedir. Burada eşitsizliğin her iki yanı bir $\varepsilon > 0$ sayısı ile çarpıldığında, $\varepsilon(u,u_t)_{\Omega_z} \geq -\varepsilon^2 \|u\|^2_{\Omega_z} - (1/4)\|u_t\|^2_{\Omega_z}$ olur. Bu eşitsizlik kullanılarak (H) eşitsizliğinin sol yanı daha da küçültülüp, $\varepsilon = a/2$ seçildiğinde;

$$\frac{1}{4}\|u_t\|^2_{\Omega_z} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z} + c_0\int_0^z \int_{\partial D\eta} u\, f(u)\,ds\,d\eta$$

$$\frac{a}{2}\int_0^T \left[\|u_t\|^2_{\Omega_z} + \|\nabla u\|^2_{\Omega_z} + \int_0^z \int_{\partial D\eta} u\, f(u)\,ds\,d\eta\right]dt \leq \int_0^T (u_t, u_{x_n})_{D_z}\,dt + \frac{a}{2}\int_0^T (u, u_{x_n})_{D_z}\,dt$$

bulunur. Ayrıca (F_2) kabulü gereğince $c_0 > 0$ için, $c_0\int_0^z \int_{\partial D\eta} u\, f(u)\,ds\,d\eta > 0$ dır. Bu durumda yukarıdaki eşitsizliğin sol yanındaki ilk üç terim pozitif olacaktır. O halde $\varepsilon = (a/2) > 0$ için;

$$\int_0^T \left[\|u_t\|^2_{\Omega_z} + \|\nabla u\|^2_{\Omega_z} + \int_0^z \int_{\partial D_\eta} u\, f(u)\,ds\,d\eta\right]dt \leq \frac{2}{a}\int_0^T (u_t, u_{x_n})_{D_z}\,dt + \int_0^T (u, u_{x_n})_{D_z}\,dt$$

$$\leq \frac{2}{a}\int_0^T \left|(u_t, u_{x_n})_{D_z}\right|dt + \int_0^T \left|(u, u_{x_n})_{D_z}\right|dt \quad (4.5)$$

dir. Artık (4.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki iki terim için üst sınırlar elde edilmelidir. Sağ taraftaki ilk terim için önce Schwarz ve $(u_{x_n}, u_{x_n})_{D_z} \leq \|\nabla u\|^2_{D_z}$ eşitsizlikleri daha sonra da Cauchy eşitsizliği uygulandığında;

$$\int_0^T \left|\left(u_t, u_{x_n}\right)_{D_z}\right| dt \le \left(\int_0^T \left(u_t, u_t\right)_{D_z} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \left(u_{x_n}, u_{x_n}\right)_{D_z} dt\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\int_0^T \left(u_t, u_t\right)_{D_z} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^T \|u_t\|_{D_z}^{2.} dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 dt \qquad (4.6)$$

olduğu görülür. Diğer yandan (4.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için de Schwarz eşitsizliği kullanıldığında;

$$\int_0^T \left|\left(u, u_{x_n}\right)_{D_z}\right| dt = \int_0^T \left|\int_{D_z} u u_{x_n} dA\right| dt \le \int_0^T \int_{D_z} \left|u u_{x_n}\right| dA dt$$

$$\le \int_0^T \|u\|_{D_z} \left\|u_{x_n}\right\|_{D_z} dt \qquad (4.7)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca Poincare eşitsizliği;

$$\|u\|_{D_z}^2 \le \frac{1}{\lambda_z} \int_{D_z} |\nabla_1 u|^2 dA + \frac{1}{|D_z|} \left[\int_{D_z} u\, dA\right]^2$$

şeklindedir. Burada ∇_1; R^{n-1} de Gradient operatörü, $|D_z|$; D_z in alanı ve λ_z ise Poincare sabitidir. Yukarıdaki eşitsizlikte $\left(a^2 + b^2\right)^{1/2} \le a + b$ olduğu dikkate alındığında;

$$\|u\|_{D_z} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_z}} \|\nabla_1 u\|_{D_z} + \frac{1}{\sqrt{m_0}} \left|\int_{D_z} u\, dA\right|$$

bulunur. Son ifade (4.7) eşitsizliğine uygulandığında;

$$\int_0^T \left(u,u_{x_n}\right)_{D_z} dt \le \int_0^T \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_z}} \left\|\nabla_1 u\right\|_{D_z} + \frac{1}{\sqrt{m_0}} \left| \int_{D_z} u\,dA \right| \right\} \left\|u_{x_n}\right\|_{D_z} dt \tag{4.8}$$

şeklinde (4.7)’nin sağ tarafı büyütülebilir. Horgan ve Payne [5] yardımıyla;

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_z} u\,dA \right| &= \left| \frac{1}{2} \left(\int_{\partial D_z} x'n'u\,ds - \int_{D_z} x'.\nabla_1 u\,dA \right) \right| \\ &\le \frac{1}{2} \int_{\partial D_z} \left|x'n'u\right| ds + \frac{1}{2} \int_{D_z} \left|x'.\nabla_1 u\right| dA \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu ifadede sağ taraftaki ilk terim için bir üst sınır bulunup ikinci terime de Schwarz eşitsizliği uygulandığında;

$$\left| \int_{D_z} u\,dA \right| \le \frac{1}{2} \sqrt{\max_{\overline{D}_Z} \left|x'\right|^2} \int_{\partial D_z} |u|\,ds + \frac{1}{2} \left(\int_{D_z} \left|x'\right|^2 dA \right)^{1/2} \left(\int_{D_z} \left|\nabla_1 u\right|^2 dA \right)^{1/2}$$

olduğu görülür. Burada;

$$r_m^2(z) = \max_{\overline{D}_z} \left|x'\right|^2 \qquad , \qquad I_z = \int_{D_z} \left|x'\right|^2 dA$$

olarak alındığında;

$$\left| \int_{D_z} u\,dA \right| \le \frac{r_m(z)}{2} \int_{\partial D_z} |u|\,ds + \frac{\sqrt{I_z}}{2} \left(\int_{D_z} \left|\nabla_1 u\right|^2 dA \right)^{1/2} \tag{4.9}$$

bulunur. $p,q > 0$ için $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ve ∂D_z nin yüzey alanı L_z olmak üzere Hölder eşitsizliğinden;

$$\int_{\partial D_z} |u| ds \le \left[\int_{\partial D_z} |u|^{2p} ds \right]^{1/2p} \left[\int_{\partial D_z} |1|^{2p/(2p-1)} ds \right]^{(2p-1)/2p} = \left[\int_{\partial D_z} |u|^{2p} ds \right]^{1/2p} L_z^{(2p-1)/2p} \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.8) ifadesine önce (4.9) sonra (4.10) eşitsizlikleri uygulandığında;

$$\int_0^T \int_{D_z} u u_{x_n} dA dt \le \int_0^T \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_z}} + \frac{1}{\sqrt{m_0}} \frac{\sqrt{I_z}}{2} \right) \|\nabla_1 u\|_{D_z} + \gamma^{-2p} \frac{1}{\sqrt{m_0}} \frac{r_m(z)}{2} L_z^{(2p-1)/2p} \gamma^{2p} \left(\int_{\partial D_z} |u|^{2p} ds \right)^{1/2p} \right\} \|u_{x_n}\|_{D_z} dt$$

olur. Burada $r_m = \max_z r_m(z)$, $\lambda_0 = \min_z \lambda_z$, $I = \max_z I_z$ ve $L = \max_z L_z$ olmak üzere;

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} + \frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{m_0}} \quad , \quad M_2 = \frac{r_m}{2\sqrt{m_0}} L^{(2p-1)/2p} \gamma^{2p}$$

seçildiğinde;

$$\int_0^T \int_{D_z} u u_{x_n} dA dt \le \int_0^T \left\{ M_1 \|\nabla_1 u\|_{D_z} + \gamma^{-2p} M_2 \left[\int_{\partial D_z} |u|^{2p} ds \right]^{1/2p} \right\} \|u_{x_n}\|_{D_z} dt \quad (4.11)$$

dır. Ayrıca (F_2) kabulü gereği $2p > 1, \gamma > 0$ ve $\forall u \in R$ için $\gamma \int_{\partial D_z} |u|^{2p} ds \le \int_{\partial D_z} u f(u) ds$ dir. Bu eşitsizlik (4.11) ifadesinde kullanıldığında;

$$\int_0^T \int_{D_z} u u_{x_n} dA dt \le M_1 \int_0^T \|\nabla_1 u\|_{D_z} \|u_{x_n}\|_{D_z} dt + M_2 \int_0^T \left(\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right)^{1/2p} \|u_{x_n}\|_{D_z} dt$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terime önce Schwarz sonra da Cauchy eşitsizlikleri uygulanıp, $\|\nabla_1 u\|_{D_z}^2 \le \|\nabla u\|_{D_z}^2$ ve $\|u_{x_n}\|_{D_z}^2 \le \|\nabla u\|_{D_z}^2$ ifadeleri de dikkate alındığında son eşitsizlik;

$$\int_0^T \int_{D_z} u u_{x_n}\, dA dt \le \frac{M_1}{2}\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2\, dt + M_2 \int_0^T \left(\int_{\partial D_z} u\, f(u) ds \right)^{1/2p} \|u_{x_n}\|_{D_z}\, dt \tag{4.12}$$

şeklinde olmalıdır. Şimdi (4.12) ifadesinin sağ yanındaki ikinci terim için bir üst sınır elde edilsin. Kolayca görülür ki;

$$\left[\int_{\partial D_z} u\, f(u) ds \right]^{1/2p} \left[\int_{D_z} u_{x_n}^2\, dA \right]^{1/2} = \left\{ \left[\int_{\partial D_z} u\, f(u) ds \right]^{1/(p+1)} \left[\int_{D_z} u_{x_n}^2\, dA \right]^{p/(p+1)} \right\}^{(p+1)/2p}$$

dir. μ, pozitif keyfi bir sabit olmak üzere $0 < r < 1$ için Young eşitsizliği $[5]$,

$$c^r d^{1-r} \le r c \mu + (1-r) d\, \mu^{-r/(1-r)} \tag{4.13}$$

şeklindedir. $r = 1/(p+1)$, $\mu = p^{p/(p+1)}$ seçildiğinde Young eşitsizliğinden;

$$\left[\int_{\partial D_z} u\, f(u) ds \right]^{1/(p+1)} \left[\int_{D_z} u_{x_n}^2\, dA \right]^{p/(p+1)} \le N(p) \int_{\partial D_z} u\, f(u) ds + N(p) \int_{D_z} u_{x_n}^2\, dA$$

elde edilir. Burada $N(p) = [1/(p+1)]p^{p/(p+1)}$ dir. Bulunan bu eşitsizliğin her iki yanının $(p+1)/2p$ yinci kuvveti alındığında;

$$\left[\int_{\partial D_z} u\, f(u) ds \right]^{1/2p} \left[\int_{D_z} u_{x_n}^2\, dA \right]^{1/2} \le \left\{ N(p) \left[\int_{\partial D_z} u\, f(u) ds + \int_{D_z} u_{x_n}^2\, dA \right] \right\}^{(p+1)/2p} \tag{4.14}$$

bulunur. (4.12) ifadesinin içine (4.14) ifadesi yazıldığında;

$$\int_0^T \left(u,u_{x_n}\right)_{D_z} dt \le \frac{M_1}{2}\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 dt + M_2 N_1(p)\int_0^T \left[\int_{\partial D_z} u\, f(u)ds + \int_{D_z} u_{x_n}^2 dA\right]^{(p+1)/2p} dt$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $N_1(p) = [N(p)]^{(p+1)/2p}$ dir. C pozitif bir sabit olmak üzere, yukarıdaki eşitsizlikte sağ tarafta bulunan ikinci terimdeki integrale Hölder eşitsizliği uygulandığında;

$$\int_0^T \left(u,u_{x_n}\right)_{D_z} dt \le \frac{M_1}{2}\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 dt$$

$$+ M_2 C N_1(p)\left\{\int_0^T \int_{\partial D_z} u\, f(u)dsdt + \int_0^T \|u_{x_n}\|_{D_z}^2 dt\right\}^{(p+1)/2p} \tag{4.15}$$

yazılabilir. (H) eşitsizliğinin sağ yanına elde edilen (4.6) ve (4.15) ifadeleri uygulandığında;

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_{\Omega_z}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 + c_0\int_0^z \int_{\partial D_\eta} u\, f(u)dsd\eta + \varepsilon\int_{\Omega_z} uu_t dx + \frac{\varepsilon a}{2}\|u\|_{\Omega_z}^2$$

$$+(a-\varepsilon)\int_0^T \|u_t\|_{\Omega_z}^2 dt + \varepsilon\int_0^T \|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 dt + \varepsilon\int_0^T\int_0^z \int_{\partial D_\eta} u\, f(u)dsd\eta dt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^T \|u_t\|_{D_z}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 dt + \frac{M_1\varepsilon}{2}\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 dt$$

$$+ M_2 C\varepsilon N_1(p)\left\{\int_0^T \int_{\partial D_z} u\, f(u)dsdt + \int_0^T \int_{D_z} u_{x_n}^2 dAdt\right\}^{(p+1)/2p} \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır. δ bir pozitif parametre olmak üzere $|uu_t| \ge -(1/2\delta)u^2 - (\delta/2)u_t^2$ şeklindeki δ'lı Cauchy eşitsiliği (4.16)'da kullanılıp ve $u_{x_n}^2 \le |\nabla u|^2$ olduğu da dikkate alındığında;

$$\left(\frac{1-\varepsilon\delta}{2}\right)\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+c_0\int_0^z\int_{\partial D_\eta}u\,f(u)dsd\eta+\left(\frac{a\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2\delta}\right)\|u\|^2_{\Omega_z}$$

$$+(a-\varepsilon)\int_0^T\|u_t\|^2_{\Omega_z}dt+\varepsilon\int_0^T\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}dt+\varepsilon\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\eta}u\,f(u)dsd\eta dt$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^T\|u_t\|^2_{D_z}dt+\frac{1}{2}\int_0^T\|\nabla u\|^2_{D_z}dt+\frac{M_1\varepsilon}{2}\int_0^T\|\nabla u\|^2_{D_z}dt$$

$$+M_2C\varepsilon N_1(p)\left\{\int_0^T\int_{\partial D_z}u\,f(u)dsdt+\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^2dAdt\right\}^{(p+1)/2p}$$

eşitsizliği bulunur. $(1/a)<\delta<(1/\varepsilon)$ olmak üzere, son eşitsizlikte terimlerin bir kısmı ihmal edildiğinde;

$$(a-\varepsilon)\int_0^T\|u_t\|^2_{\Omega_z}dt+\varepsilon\int_0^T\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}dt+\varepsilon\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\eta}u\,f(u)dsd\eta dt$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^T\|u_t\|^2_{D_z}dt+\frac{1}{2}\int_0^T\|\nabla u\|^2_{D_z}dt+\frac{M_1\varepsilon}{2}\int_0^T\|\nabla u\|^2_{D_z}dt$$

$$+M_2C\varepsilon N_1(p)\left\{\int_0^T\int_{\partial D_z}u\,f(u)dsdt+\int_0^T\|\nabla u\|^2_{D_z}dt\right\}^{(p+1)/2p}$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\varepsilon=a/2$ seçilip, eşitsizliğin sağ yanına gereken eklemeler yapıldığında;

$$\int_0^T\|u_t\|^2_{\Omega_z}dt+\int_0^T\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}dt+\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\eta}u\,f(u)dsd\eta dt$$

$$\leq\frac{1}{a}\left\{\int_0^T\|u_t\|^2_{D_z}dt+\left(M_1\frac{a}{2}+1\right)\int_0^T\|\nabla u\|^2_{D_z}dt+\int_0^T\int_{\partial D_z}u\,f(u)dsdt\right\}$$

$$+M_2CaN_1(p)\left\{\int_0^T\int_{\partial D_z}u\,f(u)dsdt+\int_0^T\|\nabla u\|^2_{D_z}dt+\int_0^T\|u_t\|^2_{D_z}dt\right\}^{(p+1)/2p}\qquad(4.17)$$

olur. Eğer;

$$E(z)=\int_0^T \|u_t\|_{\Omega_z}^2\,dt+\int_0^T \|\nabla u\|_{\Omega_z}^2\,dt+\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\eta} u\,f(u)\,ds\,d\eta\,dt \tag{**}$$

olarak tanımlanırsa;

$$E'(z)=\int_0^T \|u_t\|_{D_z}^2\,dt+\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2\,dt+\int_0^T\int_{\partial D_z} u\,f(u)\,ds\,dt \tag{***}$$

olmalıdır. O halde M_1 ve a pozitif sayıları dikkate alındığında (4.17) eşitsizliği için bir üst sınır;

$$E(z)\le\left(\frac{M_1}{2}+\frac{1}{a}\right)E'(z)+M_2CaN_1(p)\left[E'(z)\right]^{(p+1)/2p} \tag{4.18}$$

şeklindedir.

Lemma 4.1. ψ fonksiyonu $\psi(0)=0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(\tau)=+\infty$ olacak şekilde monoton artan bir fonksiyon olsun. O zaman $z(\tau)>0$ için $z(\tau)\le\psi(z'(\tau))$ eşitsizliği sağlanıyorsa $\tau>0$ için $\tau\to\infty$ iken $z(\tau)\to\infty$ dır.

(a) Eğer $\tau\ge\tau_1$, $m>1$ ve bazı c'ler için $\psi(\tau)\le c\tau^m$ ise $\liminf\limits_{\tau\to\infty}\tau^{-(m/m-1)}z(\tau)>0$ dır.

(b) Eğer $\tau\ge\tau_1$ ve bazı c'ler için $\psi(\tau)\le c\tau$ ise $\liminf\limits_{\tau\to\infty} z(\tau)\exp(-\tau/c)>0$ dır.

Şimdi (4.18) ifadesinin sağ tarafı $\psi(\tau)$ fonksiyonu olarak tanımlansın. Bu durumda $\psi(\tau)=c_1\tau+c_2\tau^{(p+1)/2p}$ formunda olacaktır. $\tau=E'(z)$ için $\psi(\tau)=\psi(E'(z))$ dir. O zaman $\psi(\tau)$ fonksiyonu (4.18)’den $\psi(0)=0$ ve $\lim\limits_{\tau\to\infty}\psi(\tau)=+\infty$ koşullarını sağlar. Ayrıca $z(\tau)=E(z)$ ise $\psi(z'(\tau))=\psi(E'(z))$ olmalıdır. (**)’dan $z(\tau)>0$ için (4.18)’den $z(\tau)\le\psi(z'(\tau))$ bulunur. (***)’dan $\tau>0$ için $\tau\to\infty$ iken $z(\tau)\to\infty$ dır. O halde $\psi(\tau)$ fonksiyonu Lemma 4.1’de tanımlanan fonksiyonun tüm koşullarını sağlamaktadır. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 4.1. (4.1)-(4.4) probleminin aşikar olmayan bir çözümü u olsun. $g'(x,t)=0$, $t\in[0,T]$ dir. $f(u)$, (F_1) ve (F_2) şartlarını sağlamaktadır. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler elde edilebilir.

(a) $\liminf\limits_{z\to\infty} z^{-(p+1)/(1-p)}E(z)>0 \qquad ; \frac{1}{2}<p<1$

(b) $\liminf\limits_{z\to\infty} E(z)\exp\left(-\frac{z}{c}\right)>0 \qquad ; 1\le p$

olur. Burada;

$$c=\frac{2+M_1a}{2a}+M_2CaN_1(p)$$

dir.

İspat :

(a) $m=(p+1)/2p$ seçilirse $(1/2)<p<1$ için $1<m<(3/2)$ olacağından $m>1$ dir. O halde $\tau\ge\tau_1$, $m>1$ ve bazı c’ler için;

$$\psi(\tau)=c_1\tau+c_2\tau^{(p+1)/2p}\le c_1\tau^{(p+1)/2p}+c_2\tau^{(p+1)/2p}=(c_1+c_2)\tau^{(p+1)/2p}$$

olduğundan $c_1+c_2=c$ ise;

$$\psi(\tau)\le c\tau^m$$

dir. Yani $\tau = E'(z)$ seçildiğinde;

$$\psi(E'(z)) \leq c[E'(z)]^m$$

olur. Lemma 4.1 gereğince $z(\tau) > 0$ için $z(\tau) \leq \psi(z'(\tau))$ sağlandığından $z(\tau) = E(z)$ ise $E(z) \leq \psi(E'(z))$ yazılabilir. O halde;

$$E(z) \leq \psi(E'(z)) \leq c[E'(z)]^m$$

bulunur. Bu durumda $m > 1$ ise;

$$E(z) \leq c[E'(z)]^m$$

$$E^{1/m}(z) \leq c^{1/m} E'(z)$$

$$c^{-1/m} \leq E'(z) E^{-1/m}(z) = \left[E^{(-1/m)+1}(z) \right]' \frac{m}{(m-1)}$$

$$\frac{(m-1)}{m} c^{-1/m} \leq \left[E^{(m-1)/m}(z) \right]'$$

elde edilir. $d = [(m-1)/m]c^{-1/m}$ seçildiğinde,

$$d \leq \left[E^{(m-1)/m}(z) \right]'$$

dir. Eşitsizliğin her iki yanı $[0, z]$ aralığında integrallenip gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\left(d\,z + E^{(m-1)/m}(0) \right)^{m/(m-1)} \leq E(z)$$

olduğu görülür. Her iki yanın $z \to \infty$ için limiti alındığında;

$$\liminf_{z\to\infty} z^{-m/(m-1)} E(z) > 0$$

dır. $m = (p+1)/2p$ ise $-m/(m-1) = -(p+1)/(1-p)$ olur. O zaman;

$$\liminf_{z\to\infty} z^{-(p+1)/(1-p)} E(z) > 0 \qquad ; \ \frac{1}{2} < p < 1$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

(b) $m = (p+1)/2p$ seçilirse $1 \le p$ için $0 < m \le 1$ olur. O halde $\tau \ge \tau_1$ ve bazı c'ler için;

$$\psi(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^{(p+1)/2p} \le c_1\tau + c_2\tau = (c_1 + c_2)\tau$$

olduğundan $c_1 + c_2 = c$ ise;

$$\psi(\tau) \le c\tau$$

dir. Yani $\tau = E'(z)$ seçildiğinde;

$$\psi(E'(z)) \le cE'(z)$$

olur. Lemma 4.1 gereğince $z(\tau) > 0$ için $z(\tau) \le \psi(z'(\tau))$ sağlandığından $z(\tau) = E(z)$ ise $E(z) \le \psi(E'(z))$ yazılabilir. O halde;

$$E(z) \le \psi(E'(z)) \le cE'(z)$$

bulunur. Bu durumda;

$$E(z) \le cE'(z)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanı $\exp(-z/c)$ ile çarpıldığında;

$$\exp(-z/c)E(z) \le c\exp(-z/c)E'(z)$$
$$0 \le c\exp(-z/c)E'(z) - \exp(-z/c)E(z)$$
$$0 \le \exp(-z/c)E'(z) - c^{-1}\exp(-z/c)E(z)$$
$$0 \le [E(z)\exp(-z/c)]'$$

dır. Devamında eşitsizliğin her iki yanı $[0, z]$ aralığında integrallenip gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$E(z)\exp(-z/c) - E(0) \ge 0$$

eşitsizliği yazılabilir. Her iki yanın $z \to \infty$ için limiti alındığında;

$$\liminf_{z\to\infty} E(z)\exp\left(-\frac{z}{c}\right) > 0 \qquad ; 1 \le p$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar. (4.18)’in sağ yanından;

$$c_1 = \frac{M_1}{2} + \frac{1}{a}$$
$$c_2 = M_2 CaN_1(p)$$

olduğu görülür. Bu durumda $c_1 + c_2 = c$ ise;

$$c = \frac{2 + M_1 a}{2a} + M_2 CaN_1(p)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.2. $t \in (0,T)$, $x \in \partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial v} + f(u) = 0$ ve $x_n = 0$ için $u(x,t) = g_1(x,t)$ veya $\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = g_2(x,t)$ koşullarının her ikisine de bağlı olan (4.1) denklemi dikkate alınsın. Eğer, $E(+\infty)$ enerji integrali sınırlı ise aşağıdaki tahmin geçerli olacaktır.

$$\lim_{z\to\infty} \exp(az)\left(\int_0^T \|u_t\|_{R_z}^2\, dt + \int_0^T \|\nabla u\|_{R_z}^2\, dt\right) = 0 \tag{4.19}$$

İspat : Teorem 4.1'in ispatında olduğu gibi,

$$(a-\varepsilon)\int_0^T \|u_t\|_{R_z}^2\, dt + \varepsilon\int_0^T \|\nabla u\|_{R_z}^2\, dt \le \left(\frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\lambda_0}{2}\right)\int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|u_t\|_{D_z}^2\, dt$$

eşitsizliği bulanabilir. Böylece fonksiyon;

$$\tilde{E}(z) = (a-\varepsilon)\int_0^T \|u_t\|_{R_z}^2\, dt + \varepsilon\int_0^T \|\nabla u\|_{R_z}^2\, dt$$

olmalıdır ve

$$\tilde{E}(z) \le -\alpha \tilde{E}'(z) \tag{4.20}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada;

$$\alpha = \max\left\{\frac{1}{2(a-\varepsilon)}, \frac{1+\varepsilon(1+\lambda_0)}{2\varepsilon}\right\} \text{ ve } \varepsilon < \min\left\{\alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\lambda_0}\right\}$$

dır. Bu nedenle (4.20)'den dolayı (4.19) ifadesi gerçeklenir.

BÖLÜM 5. HİPERBOLİK ISI DENKLEMİ İÇİN UZAYSAL BİR AZALIM KESTİRİMİ

5.1. Giriş

Geçen otuz yıl içinde birçok makalede kısmi diferansiyel denklemlerin birkaç tipi için uzaysal azalım kestirimleri üzerine çalışmalar yapılmış fakat bunların çok azında problemler üzerine olan çalışmalara yer verilmiştir. Burada denklemin bu türü için Flavin, Knops ve Payne tarafından hazırlanmış olan makale ve Flavin ve Knops'un çalışmaları hakkında yorumlar yapılacaktır. Hem de diğer yandan elastik üzerine yakın zamanda yapılmış olan bir çalışma da dikkate alınmaktadır. Birçok yazar eliptik ve parabolik problemler için elde edilen benzer uzaysal azalım kestirimlerini kabul etmezler, elastik dalga yayılması tanımını hiperbolik problemler için kabul ederler. Bu çalışmada damping terimli dinamik problemlerin hiperbolik denklemler için tanımlanması ispat edilmeye çalışılacaktır. Elde edilen sonuçlar parabolik ve aykırı (pseudo) parabolik denklemlerin çalışmalarında elde edilen sonuçlara benzerdir. Gerçekten;

$$\rho \ddot{u} + \eta \dot{u} = \Delta u, \tag{5.1}$$

denklemi ile bir başlangıç sınır değer probleminin çözümleri üzerinde tanımlanan bir fonksiyonelin uzaysal bir azalım kestiriminden türediği akla gelir. Burada ρ ve η iki pozitif sayıdır. (5.1) denklemi, Green ve Laws tarafından hazırlanan makale veya Muller'in izotropik ve homojen bir katı üzerinde ısı yayılımının nasıl olabileceğini incelediği çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Böylece (5.1) denkleminin, lineer olmayan ısı iletim denklemi ve parabolik lineer ısı iletim denklemi için uzaysal azalım kestirimlerinin incelenmesi adına yapılan bazı çalışmalardan ayrıldığı görülmüştür. (5.1) denkleminin çözümleri için uzaysal azalım kestirimleri Flavin ve Knops'un çalışmalarında elde edilmiştir. Ayrıca Rauch, Cox ve Zuazua'nın makalelerinde, sınırlı bölgeler için (5.1) denkleminin çözümlerinin üstel olarak sıfıra yaklaştığının ispatı gösterilmektedir. Lindsay ve Straughan lineer olmayan hiperbolik ısı iletim denklemi için dalga yayılımlarına çalışmışlardır. Bir başka açıdan elde edilen sonuçlar (5.1) denklemi için Phragmen-Lindelöf tipi teoremlere benzetilebilir.

Burada vurgulanmak istenen, kesit alan küçültüldüğü zaman elde edilen hiperbolik denklemlerden daha hızlı olduğu bilinen Laplace denklemi için enerji azalması kestiriminde bulunulacağıdır. Böylece, parabolik ısı denklemi için yapılan kestirim hiperbolik ısı denklemi için yapılan kestirimden daha hızlı olacaktır.

Bazı makaleler düşük frekanslı olan sonuçları çalışmayı amaçlıyorken, bu çalışmada denkleme rağmen ortaya çıkan fikirler için sonuçlarda geçici fonksiyon kullanılarak bu tür makalelerden faydalanılmaktadır.

Metot, homojen olmayan birinci mertebeden bir diferansiyel eşitsizliğin çalışılması üzerine kurulmuştur.

Aşağıda bahsedilen ikinci kısımda temel tanım ve notasyonlardan söz edilmekte ve ayrıca iki lemma ispatlanmaktadır. Bu lemmalar çalışmanın temel sonucunun ifade ve ispatının yapıldığı yerde yani üçüncü kısımda kullanılmakta, bunun sonucunda ise uzaysal bir azalım kestirimi elde edilmektedir. Son olarak çalışmadaki dördüncü kısımda ise yarı lineer dalga denklemlerinin bir sınıfı için metot ve sonuçların bazı olası tanımlamaları yapılmaktadır.

5.2. Ön Hazırlıklar

Bu çalışmada bilinen toplama ve türev alma uygulamalarından faydalanılmaktadır. Yunan alt indisleri (2,3) değerlerini alıyorken, Latin alt indisleri (1,2,3) değerlerini alır. Ayrıca tekrarlı alt indisler üzerinde toplam söz konusudur ve virgülden sonra gelen terimler buna karşı gelen kartezyen koordinatına göre kısmi diferansiyelini ifade eder. Zamana göre kısmi diferansiyeli göstermek için üst nokta kullanılmaktadır. ∇, alışıldığı gibi uzaysal gradient operatörünü ve $\nabla.$ ifadesi ise uzaysal divergence operatörünü temsil eder.

B, yarı sonsuz bir silindirin iç bölgesi ve silindirin sonlu ucu da orijin üstünde olsun. Tüm $x_1 \geq 0$ için $D(x_1)$, iki boyutlu dik kesit içindeki bir bölgeyi ve buna benzer olarak $D(0)$, $x_2 x_3$ düzlemi içinde kalan bölgeyi temsil etsin. Varsayılsın ki, $\partial D(x_1)$'in dik kesitinin bir sınırı divergence teoremini kullanmaya müsait olacak şekilde seçilmiş olsun. $B(z, z')$ ifadesi $z \leq x_1 \leq z'$ için $x = (x_1, x_2, x_3) \in B$ noktalarının alt kümesini ifade eder.

Problemle ilgili olarak (5.1) denklemi tarafından sınır koşulları;

$$
\begin{aligned}
&u = 0 && ;\ \partial D(x_1)\times[0,T) \quad , \quad x_1 \geq 0 \quad , \quad T > 0 \\
&u = f(x_2, x_3, t) && ;\ D(0)\times[0,T)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(x_2, x_3, t)$, belirlenmiş bir fonksiyondur ve başlangıç koşulları;

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = u^0(x) && ;\ x \in B \\
&\dot{u}(x,0) = v^0(x) && ;\ x \in B
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

dır. Ayrıca başlangıç koşullarının,

$$
\int_B R^0(x)dv < \infty \tag{5.4}
$$

ifadesini sağlayacak şekilde seçilmiş olduğu varsayılsın. Burada;

$$
R^0(x) = \frac{\eta}{(1+\rho)}\left(\rho u^0 v^0 + \frac{\eta}{2} u^0 u^0\right) + \frac{1}{2}\left(u,_i^0\, u,_i^0 + \rho v^0 v^0\right) \tag{5.5}
$$

dir. Ayrıca (5.1), (5.2), (5.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümleri üzerinde bir fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyon çözümler üzerinde bir ölçümdür. Çözümlerin asimptotik davranışı hakkında ayrıntılı bilgiye üçüncü kısımda yer verilmiştir.

İlk olarak aşağıdaki eşitlikler ifade edilsin. u, (5.1) denkleminin bir çözümü olmak üzere, $\nabla u = u,_i$ olarak düşünüldüğünde;

$$\nabla.(u\nabla u) = \nabla u.\nabla u + u.\nabla(\nabla u) = u,_i\, u,_i + u.\Delta u$$

bulunur. (5.1) denklemi dikkate alınıp yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında;

$$\nabla.(u\nabla u) = u,_i\, u,_i + \rho u\ddot{u} + \eta u\dot{u}$$

şeklinde olur. $u\ddot{u} = \dfrac{d}{dt}(u\dot{u}) - \dot{u}^2$ ve $u\dot{u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}u^2$ olduklarından son ifadede yerlerine yazılıp, eşitliğin her iki yanı $[\,0\,, t_0\,]$ aralığında integre edildiğinde;

$$\int_0^{t_0} \nabla.(u\nabla u)dt = \int_0^{t_0} \left(u,_i\, u,_i - \rho\dot{u}^2\right)dt + \rho u\dot{u} + \frac{\eta}{2}u^2 - \rho u^0 v^0 - \frac{\eta}{2}u^0 u^0 \quad ; t_0 \geq 0 \qquad (5.6)$$

elde edilir. Burada $t = 0$ anındaki başlangıç koşullarından faydalanılmıştır. Benzer işlemler tekrar edilip, $\dot{u}\ddot{u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\dot{u}^2$ ve $u,_i.\dot{u},_i = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}u,_i^2$ eşitlikleri dikkate alındığında;

$$\int_0^{t_0} \nabla.(\dot{u}\nabla u)dt = \eta\int_0^{t_0} \dot{u}^2 dt + \frac{1}{2}\left(u,_i\, u,_i + \rho\dot{u}^2\right) - \frac{1}{2}\left(u,_i^0\, u,_i^0 + \rho v^0 v^0\right) \quad ; t_0 \geq 0 \qquad (5.7)$$

ifadesi gerçeklenir . $\lambda_0 = \eta/(1+\rho)$ olmak üzere;

$$F(x,t_0)=\int_0^{t_0}\nabla.[(\dot{u}+\lambda_0 u)\nabla u]dt \qquad ;\ x\in B \quad , \quad 0\le t_0<T \tag{5.8}$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 5.1. F fonksiyonu;

$$F(x,t_0)\ge \lambda_0\int_0^{t_0}\left(u,_i\,u,_i+\rho\dot{u}^2\right)dt+\frac{\rho}{2(1+\rho)}\dot{u}^2+\frac{1}{2}u,_i\,u,_i-R^0(x) \qquad ;\ 0\le t_0<T$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat : Elde edilen (5.6) ve (5.7) ifadeleri (5.8)'de kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$F(x,t_0)=\int_0^{t_0}\left[\lambda_0\left(u,_i\,u,_i-\rho\dot{u}^2\right)+\eta\,\dot{u}^2\right]dt+\frac{1}{2}\rho\dot{u}^2+\rho\lambda_0 u\dot{u}+\frac{\lambda_0\eta}{2}u^2$$
$$+\frac{1}{2}u,_i\,u,_i-\lambda_0\left(\rho u^0v^0+\frac{\eta}{2}u^0u^0\right)-\frac{1}{2}\left(u,_i^0\,u,_i^0+\rho v^0v^0\right)$$

olarak bulunur. Tüm pozitif ε sabitleri için bu ifadede yer alan birkaç terim;

$$\frac{1}{2}\rho\dot{u}^2+\rho\lambda_0 u\dot{u}+\frac{\lambda_0\eta}{2}u^2=\frac{1}{2}\left(\rho\varepsilon\dot{u}+\frac{\eta}{(1+\rho)\varepsilon}u\right)^2+\frac{1}{2}\left(\rho-\rho^2\varepsilon^2\right)\dot{u}^2$$
$$+\frac{\eta^2}{2(1+\rho)}\left\{1-\left[\varepsilon^2(1+\rho)\right]^{-1}\right\}u^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\varepsilon^2=(1+\rho)^{-1}$ seçilirse, eşitliğin sağ yanındaki ilk terimin pozitif olmasından faydalanarak;

$$\frac{1}{2}\rho\dot{u}^2+\rho\lambda_0 u\dot{u}+\frac{\lambda_0\eta}{2}u^2\ge\frac{\rho}{2(1+\rho)}\dot{u}^2 \tag{5.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan yine $F(x,t_0)$'ın açılımında yer alan bazı terimler için;

$$\lambda_0\left(u,_i u,_i - \rho \dot{u}^2\right) + \eta \dot{u}^2 = \lambda_0 u,_i u,_i + \frac{1}{(1+\rho)}\left[\eta(1+\rho) - \eta\rho\right]\dot{u}^2$$

$$= \lambda_0\left(u,_i u,_i + \dot{u}^2\right) \tag{5.10}$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde son olarak $F(x,t_0)$'da, elde edilen (5.9) ve (5.10) ifadeleri ile daha önceden bilinen (5.5) ifadesi kullanıldığında, istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıda homojen olmayan birinci mertebeden adi bir diferansiyel eşitsizliğin çözümlerinin asimptotik davranışı üzerine bazı yorumların yapılacağı bir lemma'dan söz edilecektir. Bu lemma gelecek kısımda problemdeki (5.1) denkleminin çözümleri için uzaysal azalım kestirimlerinin sonuçlandırılmasında kullanılacaktır.

Lemma 5.2. $w(t)$ ve $R(t)$;

$$\lim_{z\to\infty}\int_z^\infty R(t)\exp\left[-\int_0^t w^{-1}(x)dx\right]dt = 0 \tag{5.11}$$

olacak şekilde negatif yönde olmayan bir doğru üzerinde tanımlanan iki pozitif fonksiyon ve $G(t)\in C'$ olsun. Ayrıca $G(t)$ fonksiyonu;

$$G \le w\left[\frac{d}{dt}G + R\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} G(t)\exp\left[-\int_0^t w^{-1}(x)dx\right] = 0 \tag{5.12}$$

ifadelerini sağlayacak şekilde seçilmiş olsun. O zaman;

$$\limsup_{t\to\infty} G(t) \le 0$$

dır.

İspat : İlk olarak $R_1(t)$ fonksiyonu;

$$R_1(t) = R_1(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right] + \exp\left[\int_{0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]\int_{t_0}^{t} R(x)\exp\left[-\int_{0}^{x} w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx$$

olarak düşünülsün. Burada eşitliğin her iki yanının türevi alındığında;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_1(t) &= R_1(t_0)\frac{d}{dt}\exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right] \\ &+ \frac{d}{dt}\exp\left[\int_{0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]\int_{t_0}^{t} R(x)\exp\left[-\int_{0}^{x} w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx \\ &+ \exp\left[\int_{0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} R(x)\exp\left[-\int_{0}^{x} w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx \qquad (*)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan;

$$\frac{d}{dt}\exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right] = \frac{1}{w(t)}\exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]$$

$$\frac{d}{dt}\exp\left[\int_{0}^{t} w^{-1}(x)dx\right] = \frac{1}{w(t)}\exp\left[\int_{0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]$$

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} R(x)\exp\left[-\int_{0}^{x} w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx = R(t)\exp\left[-\int_{0}^{t} w^{-1}(\xi)d\xi\right]$$

eşitlikleri sağlanır. Burada Leibniz kuralı uygulanmıştır. Bulunan değerler (*)’da yerlerine yazılıp, eşitliğin her iki yanı $w(t)$ ile çarpıldığında;

$$w(t)\frac{d}{dt}R_1(t) = R_1(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]$$

$$+\exp\left[\int_{0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]\int_{t_0}^{t} R(x)\exp\left[-\int_{0}^{x} w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx + w(t)R(t)$$

olur. O halde;

$$wR = w\frac{d}{dt}R_1 - R_1$$

dir. Ayrıca (5.12)'nin ilk koşulu,

$$G \le w\frac{d}{dt}G + wR$$

olduğundan wR değeri yerine yazıldığında;

$$G + R_1 \le w\frac{d}{dt}(G + R_1) \qquad ;\ t \ge t_0 \ge 0$$

eşitsizliği bulunur. Burada $G(t_0) > 0$ olacak şekilde bir t_0'ın varlığı kabul edilsin. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanı $\exp\left[-\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]$ ile çarpılıp, $[t_0, t]$ aralığında integrallendiğinde;

$$(G + R_1)(t) \ge (G + R_1)(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right] \qquad ;\ t \ge t_0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik gerektiği gibi düzenlendiğinde;

$$G(t) \ge \exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]\left\{G(t_0) - \int_{t_0}^{t} R(x)\exp\left[-\int_{0}^{x} w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx\right\} \qquad ;\ t \ge t_0 \qquad (**)$$

sonucuna varılır. Burada bir t_0 ’ın varlığında eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci çarpan için;

$$G(t_0) > \int_{t_0}^{\infty} R(x)\exp\left[-\int_0^x w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx$$

olursa, kabul gereği;

$$G(t) > 0$$

olacağından,

$$G(t) > \exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]$$

olmalıdır. Ancak, (5.12) asimptotik koşulu;

$$G(t) \le \exp\left[\int_0^t w^{-1}(x)dx\right]$$

olmasını gerektirdiğinden çelişki ortaya çıkar. O halde böyle bir t_0 yoktur. Bu yüzden;

$$G(t) \le \int_t^{\infty} R(x)\exp\left[-\int_0^x w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx \qquad ;\ t \ge 0 \qquad (***)$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman (**)’daki ikinci çarpan ya sıfır ya da negatiftir. Bu durumda;

$$G(t) \le 0$$

dır. (**)’dan;

$$G(t) \le \exp\left[\int_{t_0}^{t} w^{-1}(x)dx\right]$$

elde edilir. Bu da (5.12) asimptotik koşulunu sağlar. (5.11)’den,

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{\infty} R(x)\exp\left[-\int_{0}^{x} w^{-1}(\xi)d\xi\right]dx = 0$$

olduğu görülür. Son olarak (***) eşitsizliğinin her iki yanının $t \to \infty$ için limiti alınıp, elde edilen son ifadede de kullanıldığında;

$$\lim_{t\to\infty}\sup G(t) \le 0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

5.3. Bir Azalım Teoremi

Bu kısımda (5.1), (5.2) ve (5.3) tarafından tanımlanan problemin çözümleri için uzaysal bir azalım kestirimi ifade edilecektir. Ayrıca kesit alan üzerinde,

$$G(z,t_0) = \int_0^{t_0}\int_{D(z)} u,_1(\dot{u} + \lambda_0 u)dadt \qquad ; \; z \ge 0 \quad , \quad t_0 > 0 \tag{5.13}$$

fonksiyonu tanımlansın. (5.2) koşulu gereği, silindirin yan yüzeyinde $u = 0$ olmasından,

$$-G(z,t_0) + G(z+h,t_0) = -\int_0^{t_0}\int_{D(z)} u,_1(\dot{u} + \lambda_0 u)dadt + \int_0^{t_0}\int_{D(z+h)} u,_1(\dot{u} + \lambda_0 u)dadt$$

eşitliği yazılabilir. $D(z)$'te $\nabla u.n = -\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = -u,_1$ ve $D(z+h)$'da $\nabla u.n = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = u,_1$ olduğundan;

$$-G(z,t_0)+G(z+h,t_0)=\int_0^{t_0}\int_{D(z)}(\dot{u}+\lambda_0 u)(\nabla u.n)dadt+\int_0^{t_0}\int_{D(z+h)}(\dot{u}+\lambda_0 u)(\nabla u.n)dadt$$
$$=\int_0^{t_0}\int_{\partial B(z,z+h)}(\dot{u}+\lambda_0 u)(\nabla u.n)dadt$$

elde edilir. Divergence teoremi gereği;

$$-G(z,t_0)+G(z+h,t_0)=\int_0^{t_0}\int_{\partial B(z,z+h)}(\dot{u}+\lambda_0 u)(\nabla u.n)dadt$$
$$=\int_0^{t_0}\int_{B(z,z+h)}\nabla.[(\dot{u}+\lambda_0 u)\nabla u]dvdt$$

olduğu görülür. $F(x,t_0)=\int_0^{t_0}\nabla.[(\dot{u}+\lambda_0 u)\nabla u]dt$ olduğundan bu ifade son eşitlikte kullanıldığında;

$$G(z+h,t_0)=G(z,t_0)+\int_{B(z,z+h)}F(x,t_0)dv \qquad ;\ h>0 \quad , \quad t_0>0 \qquad (5.14)$$

sonucuna varılır. (5.14) ifadesi düzenlendiğinde;

$$G(z+h,t_0)-G(z,t_0)=\int_z^{z+h}\int_{D(\xi)}F(x,t_0)dad\xi$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadedeki her iki taraf $1/h$ ile çarpılıp $h\to 0$ için limite geçildiğinde;

$$\frac{\partial}{\partial z}G(z,t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\int\limits_{z}^{z+h}\int\limits_{D(\xi)}F(x,t_0)dad\xi}{h}$$

ifadesi elde edilir. Ancak burada eşitliğin sağ yanındaki terim için $0/0$ belirsizliği söz konusudur. Bu durumda bu terime bir kez L'Hospital kuralı uygulandığında;

$$\frac{\partial}{\partial z}G(z,t_0)=\int\limits_{D(z)}F(x,t_0)da$$

bulunur. (5.13) ifadesi,

$$G(z,t_0)=\int\limits_{0}^{t_0}\int\limits_{D(z)}u,_1\dot{u}dadt+\int\limits_{0}^{t_0}\int\limits_{D(z)}u,_1\lambda_0\,udadt$$

şeklinde yazılıp, terimlere ayrı ayrı Schwarz eşitsizliği uygulandığında;

$$|G(z,t_0)|\le\int\limits_{0}^{t_0}\left\{\left(\int\limits_{D(z)}u,_1u,_1\,da\right)^{1/2}\left[\left(\int\limits_{D(z)}\dot{u}^2da\right)^{1/2}+\lambda_0\left(\int\limits_{D(z)}u^2da\right)^{1/2}\right]\right\}dt$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki ifade,

$$|G(z,t_0)|\le\int\limits_{0}^{t_0}\left\{\underbrace{\left(\int\limits_{D(z)}u,_1u,_1\,da\right)^{1/2}\left(\int\limits_{D(z)}\dot{u}^2da\right)^{1/2}}_{\langle 1\rangle}+\underbrace{\left(\int\limits_{D(z)}u,_1u,_1\,da\right)^{1/2}\left(\lambda_0^2\int\limits_{D(z)}u^2da\right)^{1/2}}_{\langle 2\rangle}\right\}dt$$

şeklinde düzenlenip, $\langle 1\rangle$, $\sqrt{\varepsilon_1}$ sabiti ile bölünüp, çarpıldıktan sonra bu terime Cauchy eşitsizliği uygulanır ve yapılanlar $\langle 2\rangle$'de bir $\sqrt{\varepsilon_2}$ sabiti için tekrarlanırsa;

$$\left|G(z,t_0)\right| \le \int_0^{t_0} \left\{ \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}\right) \int_{D(z)} u,_1 u,_1 \, da + \frac{\varepsilon_1}{2} \int_{D(z)} \dot{u}^2 da + \frac{\lambda_0^2 \varepsilon_2}{2} \int_{D(z)} u^2 da \right\} dt$$

olur. Devamında bu eşitsizliğin sağ yanındaki son terim için Poincare eşitsizliği uygulandığında;

$$\left|G(z,t_0)\right| \le \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}\right) \int_0^{t_0} \int_{D(z)} u,_1 u,_1 \, dadt + \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^{t_0} \int_{D(z)} \dot{u}^2 dadt$$

$$+ \lambda_0^2 \alpha^{-1}(z) \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^{t_0} \int_{D(z)} \left(u,_2 u,_2 + u,_3 u,_3\right) dadt$$

dir. $\alpha^{-1}(z)$, homojen Dirichlet sınır koşuluyla $D(z)$'deki Laplace operatörünün sıfır olmayan ilk öz değeridir ancak burada Poincare sabiti olarak kullanılmıştır. Şimdi $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \rho \lambda_0^2 \alpha^{-1}(z)$ ve $\varepsilon_2 = \lambda_0^{-1/2} \alpha^{1/2}(z) \left[1 + \alpha(z) \rho^{-1} \lambda_0^{-2}\right]^{1/2}$ olarak alınsın. $\lambda_0 \ge 1$ için;

$$\left|G(z,t_0)\right| \le \frac{1}{2}\left[\lambda_0 \alpha^{-1}(z) + \lambda_0^{-1} \rho^{-1}\right]^{1/2} \lambda_0 \int_0^{t_0} \int_{D(z)} \left(u,_i u,_i + \rho \dot{u}^2\right) dadt$$

olduğu görülür. Bulunan bu eşitsizliğe lemma 5.1 uygulanıp, $\int_{D(z)} F(x,t_0) da = \frac{\partial}{\partial z} G(z,t_0)$ olduğu da dikkate alındığında;

$$\left|G(z,t_0)\right| \le \frac{1}{2}\left[\lambda_0^{-1} \rho^{-1} + \lambda_0 \alpha^{-1}(z)\right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} G(z,t_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\lambda_0^{-1} \rho^{-1} + \lambda_0 \alpha^{-1}(z)\right]^{1/2} \int_{D(z)} R^0(x) da \tag{5.15}$$

elde edilir. Faber-Krahn eşitsizliği;

$$\alpha(z) \ge \pi j_0^2 A^{-1}(z) \tag{5.16}$$

şeklindedir. Burada j_0, J_0 Bessel fonksiyonunun en küçük pozitif sıfırı ve $A(z)$, $D(z)$'de bir bölgedir. (5.16) eşitsizliği (5.15) eşitsizliğine uygulandığında;

$$|G(z,t_0)| \leq w^{1/2}(z)\frac{\partial}{\partial z}G(z,t_0) + w^{1/2}(z)\int_{D(z)} R^0(x)da$$

olur. Burada, $w(z) = (1/4)\left\{\lambda_0^{-1}\rho^{-1} + \lambda_0\left(A(z)/\pi j_0^2\right)\right\}$'dir. Mutlak değer tanımından,

$$G(z,t_0) \leq w^{1/2}(z)\frac{\partial}{\partial z}G(z,t_0) + w^{1/2}(z)\int_{D(z)} R^0(x)da$$

veya

$$-G(z,t_0) \leq w^{1/2}(z)\frac{\partial}{\partial z}G(z,t_0) + w^{1/2}(z)\int_{D(z)} R^0(x)da \tag{5.17}$$

olmalıdır. Çözümler üzerinde aşağıdaki asimptotik koşul kadar,

$$\lim_{z\to\infty} G(z,t_0)\exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right] = 0 \tag{5.18}$$

(5.4) başlangıç koşulunun da sağlandığı varsayılırsa, bu asimptotik koşul (5.17)'deki ilk eşitsizlikle birlikte lemma 5.2'yi gerçekler. O halde;

$$\lim_{z\to\infty}\sup G(z,t_0) \leq 0 \tag{5.19}$$

dır. Şimdi (5.17)'deki ikinci eşitsizlik dikkate alınıp, eşitsizliğin her iki yanı $\exp\left[\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right]$ ile çarpılıp ve son olarak $[z_0, z]$ aralığında integrallendiğinde,

$$-G(z,t_0)\exp\left[\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right] \le -G(z_0,t_0)\exp\left[\int_0^{z_0} w^{-1/2}(r)dr\right]$$
$$+\int_{z_0}^{z}\exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r)dr\right]\left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da\right)dx_1$$

eşitsizliği sağlanır. Daha sonra eşitsizliğin her iki yanı $\exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right]$ ile çarpıldığında, $0 \le z_0 \le z$ için;

$$-G(z,t_0) \le -G(z_0,t_0)\exp\left[-\int_{z_0}^{z} w^{-1/2}(r)dr\right]$$
$$+\exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right]\int_{z_0}^{z}\exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r)dr\right]\left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da\right)dx_1 \qquad (5.20)$$

bulunur. $z+h=z_0+h=z^*$ olarak düşünülürse, (5.14)'den;

$$-G(z,t_0) = \int_{B(z,z^*)} F(x,t_0)dv - G(z^*,t_0)$$
$$-G(z_0,t_0) = \int_{B(z_0,z^*)} F(x,t_0)dv - G(z^*,t_0)$$

eşitlikleri geçerli olacaktır. Bulunan bu eşitlikler (5.20)'de kullanıldığında, $0 \le z_0 \le z \le z^*$ için;

$$\int_{B(z,z^*)} F(x,t_0)dv \le G(z^*,t_0) + \left[\int_{B(z_0,z^*)} F(x,t_0)dv - G(z^*,t_0)\right]\exp\left[-\int_{z_0}^{z} w^{-1/2}(r)dr\right]$$
$$+\exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right]\int_{z_0}^{z}\exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r)dr\right]\left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da\right)dx_1 \qquad (5.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece aşağıdaki önerme ispatlanabilir.

Önerme 5.1. (5.18) asimptotik koşulunu sağlayan (5.1), (5.2), (5.3) başlangıç sınır değer probleminin bir çözümü u olsun. Varsayılsın ki başlangıç koşulları (5.4)'ü sağlayacak şekilde verilmiş olsun. O zaman (5.21) tahmini tüm $0 \le z_0 \le z \le z^*$ için sağlanır.

$G(z^*, t_0) = 0$ olacak şekilde $z^* > 0$ olması halinde, tüm $0 \le z_0 \le z \le z^*$ (5.21)'den aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\int_{B(z,z^*)} F(x,t_0)dv \le \left[\int_{B(z_0,z^*)} F(x,t_0)dv \right] \exp\left[-\int_{z_0}^{z} w^{-1/2}(r)dr \right]$$
$$+\exp\left[-\int_{0}^{z} w^{-1/2}(r)dr \right] \int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_{0}^{x_1} w^{-1/2}(r)dr \right] \left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da \right) dx_1 \qquad (5.22)$$

Not : Eğer başlangıç koşulları üzerindeki (5.4) koşulu,

$$\lim_{z\to\infty} \int_{z}^{\infty} \left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da \right) \exp\left[-\int_{0}^{x_1} w^{-1/2}(r)dr \right] dx_1 = 0 \qquad (5.23)$$

şeklinde yumuşatılırsa (5.21) ve (5.22) yine elde edilebilir.

Şimdi varsayılsın ki;

$$\int_{0}^{\infty} w^{-1/2}(r)dr = \infty \qquad (5.24)$$

ve

$$\lim_{z\to\infty} w^{1/2}(z) \int_{D(z)} R^0(x)da = 0 \qquad (5.25)$$

olsun. O zaman (5.24) kabulünden,

$$\lim_{z\to\infty} \exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right]\int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r)dr\right]\left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da\right)dx_1 = \frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliği ortaya çıkar. Bu durumda bir kez L'Hospital kuralı uygulanarak,

$$\lim_{z\to\infty} \exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right]\int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r)dr\right]\left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da\right)dx_1 = \lim_{z\to\infty} w^{1/2}(z)\int_{D(z)} R^0(x)da$$

olduğu görülür. Bu da (5.25) kabulü gereği,

$$\lim_{z\to\infty} \exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r)dr\right]\int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r)dr\right]\left(\int_{D(x_1)} R^0(x)da\right)dx_1 = 0$$

olması demektir. Yukarıdaki ifade dikkate alınarak (5.20) eşitsizliğinde $z \to \infty$ için limite geçildiğinde,

$$\lim_{z\to\infty} - G(z,t_0) \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikle birlikte (5.19) eşitsizliği de göz önünde bulundurulduğunda;

$$\lim_{z\to\infty} G(z,t_0) = 0$$

olarak bulunur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1. (5.18) asimptotik koşulunu sağlayan (5.1), (5.2), (5.3) başlangıç sınır değer probleminin bir çözümü u olsun. Eğer silindirde başlangıç koşulları (5.4) ve (5.25)'i sağlar ve bu koşullarla birlikte (5.24) te sağlanırsa tüm $z_0 \leq z \leq \infty$ için;

$$\int_{B(z,\infty)} \left[\eta \int_0^{t_0} \left(u,_i u,_i + \rho \dot{u}^2 \right) dt + \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 + \frac{(1+\rho)}{2} u,_i u,_i \right] dv$$

$$\leq (1+\rho) \left\{ \int_{B(z,\infty)} R^0(x) dv + \left[\int_{B(z_0,\infty)} F(x,t_0) dv \right] \exp\left[-\int_{z_0}^{z} w^{-1/2}(r) dr \right] \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r) dr \right] \int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r) dr \right] \left(\int_{D(x_1)} R^0(x) da \right) dx_1 \right\} \tag{5.26}$$

kestirimi elde edilir.

İspat : Eğer silindirde başlangıç koşulları (5.4) ve (5.25)’i sağlar ve bu koşullarla birlikte (5.24) te sağlanırsa bu durumda $G(\infty, t_0) = 0$ olması gerekir. Önerme 5.1 dikkate alındığında yine aynı koşullar altında $G(z^*, t_0) = 0$ ’dır. O halde $z^* = \infty$ olarak düşünülürse, $G(\infty, t_0) = 0$ koşulu altında (5.22) ifadesi,

$$\int_{B(z,\infty)} F(x,t_0)\, dv \leq \left[\int_{B(z_0,\infty)} F(x,t_0) dv \right] \exp\left[-\int_{z_0}^{z} w^{-1/2}(r) dr \right]$$

$$+ \exp\left[-\int_0^z w^{-1/2}(r) dr \right] \int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r) dr \right] \left(\int_{D(x_1)} R^0(x) da \right) dx_1 \quad \text{(i)}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan lemma 5.1 gereğince $\lambda_0 = \eta/(1+\rho)$ olup, η ve ρ pozitif sabitlerdir. Lemma 5.1’de verilen eşitsizliğin her iki yanı $(1+\rho)$ ile çarpılıp, $B(z,\infty)$ üzerinde integrallendiğinde;

$$\int_{B(z,\infty)} \left[\eta \int_0^{t_0} \left(u,_i u,_i + \rho \dot{u}^2 \right) dt + \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 + \frac{(1+\rho)}{2} u,_i u,_i \right] dv$$

$$\leq (1+\rho) \left[\int_{B(z,\infty)} R^0(x) dv + \int_{B(z,\infty)} F(x,t_0) dv \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bulunan bu eşitsizliğin sağ yanındaki son terime (i) uygulandığında tüm $z_0 \le z \le \infty$ için;

$$\int_{B(z,\infty)} \left[\eta \int_0^{t_0} \left(u,_i u,_i + \rho \dot{u}^2 \right) dt + \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 + \frac{(1+\rho)}{2} u,_i u,_i \right] dv$$

$$\le (1+\rho) \left\{ \int_{B(z,\infty)} R^0(x) dv + \left[\int_{B(z_0,\infty)} F(x,t_0) dv \right] \exp\left[-\int_{z_0}^{z} w^{-1/2}(r) dr \right] \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\int_0^{z} w^{-1/2}(r) dr \right] \int_{z_0}^{z} \exp\left[\int_0^{x_1} w^{-1/2}(r) dr \right] \left(\int_{D(x_1)} R^0(x) da \right) dx_1 \right\}$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

(5.2) sınır koşulları;

$$u = 0 \qquad ; \; D(z^*) \times [0,T)$$

koşulunda birleştirildiği zaman metotlar, yarı sonsuz bir silindir için gerçeklenen teorem 5.1'in ispatında uygulanıp aynı zamanda sınırlı silindirler için de uyarlanabilir. $D(z^*)$ silindirin diğer yüzeyidir. Eğer dik kesitlerin alanı pozitif bir C sabiti için;

$$A(z) \le C z^2 \qquad ; \; z \ge 0$$

eşitsizliğini sağlarsa, basit bir hesaplamayla;

$$A^{-1/2}(z) \ge C^{-1/2} z^{-1}$$

olur. Burada eşitsizliğin her iki yanı $[0,t]$ aralığında integre edildiğinde;

$$\int_0^t A^{-1/2}(z)dz \geq C^{-1/2}\int_0^t \frac{1}{z}dz = C^{-1/2}\ln z\Big|_0^t$$

dır. Her iki taraftan $t \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t A^{-1/2}(z)dz \geq C^{-1/2}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty}\ln(t-\varepsilon)$$

$$\int_0^\infty A^{-1/2}(z)dz \geq C^{-1/2}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\varepsilon} \geq \infty$$

$$\int_0^\infty A^{-1/2}(z)dz = \infty$$

elde edilir ki bu da (5.24) koşulu sağlanıyor demektir. (5.24) koşulundaki w fonksiyonu pozitif bir fonksiyondur ve $A(z)$ de dik kesitlerin alanını temsil ettiğinden yine pozitif bir fonksiyon olacaktır. Şimdi (5.25) koşulu herhangi bir zamanda,

$$\lim_{z\to\infty} z\int_{D(z)} R^0(x)da = 0$$

eşitliğini sağlasın. Birçok diğer yeterli koşullar (5.24) ve (5.25)'i sağlar. Örneğin sıcaklık için, başlangıç koşulları $u(x,0) = u^0(x) = 0$ ve $\dot{u}(x,0) = v^0(x) = 0$ olduğunda $R^0(x) = 0$ olacağından (5.26)'da $z^* = \infty$ alınarak, tüm $z_0 \leq z \leq z^*$ için;

$$\int_{B(z,z^*)}\left[\eta\int_0^{t_0}\left(u,_i u,_i + \rho\dot{u}^2\right)dt + \frac{\rho}{2}\dot{u}^2 + \frac{(1+\rho)}{2}u,_i u,_i\right]dv$$

$$\leq (1+\rho)\left[\int_{B(z_0,z^*)} F(x,t_0)dv\right]\exp\left[-\int_{z_0}^{z} w^{-1/2}(r)dr\right]$$

olduğu bulunur.

5.4. Yarı Lineer Dalga Denklemleri İçin Bir Genişleme

Bu bölümde lineer olmayan damping terimli hiperbolik denklemlerin sonuçları ve önceki metotların bazı olası genişlemeleri incelenecektir. Yarı lineer dalga denklemi;

$$\ddot{u} + g(\dot{u}) = \Delta u, \tag{5.27}$$

formunda düşünülsün. Burada, g lineer olmayan bir fonksiyondur. Bazı yeni makalelerde yarı lineer dalga denklemleri için temporal azalma kestirimleri incelenmiştir. Şimdi g fonksiyonunun c_1 ve c_2 pozitif sabitleri için;

$$g(s)s \geq c_1|s|^2 \qquad , \qquad |g(s)| \leq c_2|s| \tag{5.28}$$

eşitsizliklerini sağladığı varsayılsın. İşlem kalabalığından kurtulmak için problemin ifadesi biraz daha basitleştirilsin. (5.2) sınır koşulları ve (5.27) denklemi tarafından tanımlanan problem için başlangıç koşulları,

$$u(x,0) = 0 \qquad , \qquad \dot{u}(x,0) = 0 \qquad ; \; x \in B \tag{5.29}$$

olsun. Varsayılsın ki, dik kesit tüm $x_1 \geq 0$ için sabit olsun ve D ile gösterilsin. İkinci kısımda (5.6) ve (5.7) ifadelerini elde etmekte kullanılan uygulamalar tekrar edilip $u\ddot{u} = \frac{d}{dt}(u\dot{u}) - \dot{u}^2$, $u,_i \dot{u},_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u,_i^2$ ve $\dot{u}\ddot{u} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{u}^2$ ifadeleri de dikkate alındığında, (5.29) başlangıç koşulları ile birlikte,

$$\int_0^{t_0} \nabla.(u.\nabla u)dt = u\dot{u} + \int_0^{t_0} (u,_i u,_i + u g(\dot{u}) - \dot{u}\dot{u})dt$$

$$\int_0^{t_0} \nabla.(\dot{u}.\nabla u)dt = \frac{1}{2}(u,_i u,_i + \dot{u}\dot{u}) + \int_0^{t_0} g(\dot{u})\dot{u}\,dt$$

eşitlikleri bulunur. Üçüncü kısımdaki G fonksiyonunun tanımlanışına benzer şekilde,

$$H(z,t_0)=\int_0^{t_0}\int_{D(z)} u,_1(\dot{u}+\lambda_1 u)dadt \qquad ; \ z\geq 0 \quad , \quad t_0>0$$

fonksiyonu tanımlansın. Buradaki λ_1 pozitif sabiti daha sonradan belirlenecektir. 5.3'teki $G(z,t_0)$ fonksiyonu için uygulanan işlemler bir λ_1 pozitif sabiti varlığında $H(z,t_0)$ üzerinde bire bir tekrar edildiğinde;

$$H(z+h,t_0)=H(z,t_0)+\int_{B(z,z+h)}\int_0^{t_0}\nabla.[(\dot{u}+\lambda_1 u)\nabla u]dtdv \quad ; \ h>0 \ , \ t_0>0 \qquad (5.30)$$

eşitliği elde edilir. Yine 5.3'te gösterildiği gibi bu ifadenin de doğrudan diferansiyeli alındığında;

$$\frac{\partial}{\partial z}H(z,t_0)=\int_{D(z)}\int_0^{t_0}\nabla.[(\dot{u}+\lambda_1 u)\nabla u]dtda$$

bulunur. Şimdi λ_1, $\alpha^{1/2}(0)$ den küçük bir pozitif sayı olarak alınsın. $\alpha(0)$, 5.3'teki gibi homojen sınır koşullarına sahip D bölgesindeki Laplace operatörünün sıfır olmayan ilk öz değeridir. Ayrıca D bölgesindeki $\alpha(0)$'la bağlantılı olarak (5.16) kestirimi dikkate alınsın. Diğer yandan yukarıdaki ifade;

$$\frac{\partial}{\partial z}H(z,t_0)=\int_{D(z)}\left\{\int_0^{t_0}\nabla.(\dot{u}.\nabla u)dt+\lambda_1\int_0^{t_0}\nabla.(u.\nabla u)dt\right\}da$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin sağındaki terimlerin yukarıda elde edilmiş olan eşitlikleri yerlerine yazıldığında;

$$\frac{\partial}{\partial z}H(z,t_0)=\int_{D(z)}\left\{\lambda_1 u\dot{u}+\frac{1}{2}(u,_i u,_i+\dot{u}\dot{u})+\int_0^{t_0}[\lambda_1(u,_i u,_i+ug(\dot{u})-\dot{u}\dot{u})+g(\dot{u})\dot{u}]dt\right\}da \qquad (ii)$$

olduğu görülür. Diğer yandan;

$$\int_{D(z)} \lambda_1 u\dot{u}da \le \int_{D(z)} \left(\frac{\lambda_1^2 u^2}{2} + \frac{\dot{u}^2}{2} \right) da$$

eşitsizliğinin sağ yanındaki ilk terime Poincare eşitsizliği uygulandığında;

$$\int_{D(z)} \lambda_1 u\dot{u}da \le \int_{D(z)} \left(\frac{\lambda_1^2 \alpha^{-1}(0)}{2} u,_i u,_i + \frac{\dot{u}^2}{2} \right) da$$

olur. Burada $\alpha^{-1}(0)$, Poincare sabitidir. O halde;

$$\int_{D(z)} \lambda_1 u\dot{u}da \ge \int_{D(z)} \left(-\frac{\lambda_1^2 \alpha^{-1}(0)}{2} u,_i u,_i - \frac{\dot{u}^2}{2} \right) da$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda;

$$\int_{D(z)} \left[\lambda_1 u\dot{u} + \frac{1}{2}(u,_i u,_i + \dot{u}\dot{u}) \right] da \ge \int_{D(z)} \left[-\frac{\lambda_1^2 \alpha^{-1}(0)}{2} u,_i u,_i - \frac{\dot{u}^2}{2} + \frac{1}{2} u,_i u,_i + \frac{\dot{u}^2}{2} \right] da$$

$$= \frac{1}{2} \int_{D(z)} \left[1 - \lambda_1^2 \alpha^{-1}(0) \right] u,_i u,_i \, da$$

eşitsizliği sağlanır. λ_1, $\alpha^{1/2}(0)$ den küçük bir pozitif sayı olduğundan $0 < \lambda_1^2 \alpha^{-1}(0) < 1$ dir ve böylece $1 - \lambda_1^2 \alpha^{-1}(0) > 0$ eşitsizliği geçerlidir. O zaman;

$$\int_{D(z)} \left[\lambda_1 u\dot{u} + \frac{1}{2}(u,_i u,_i + \dot{u}\dot{u}) \right] da \ge 0$$

olmalıdır. Bu son eşitsizlik (ii)'de kullanıldığında;

$$\frac{\partial}{\partial z} H(z,t_0) \ge \int_{D(z)} \int_0^{t_0} \left[\lambda_1 (u,_i u,_i + u g(\dot{u}) - \dot{u}\dot{u}) + g(\dot{u})\dot{u} \right] dt da \tag{5.31}$$

bulunur. (5.28)'deki ikinci eşitsizlik yardımıyla elde edilen $u\,g(\dot{u}) \leq c_2 |u||\dot{u}|$ eşitsizliğinin her iki yanı $D(z)$'te integrallenip ve ardından Schwarz eşitsizliği uygulandığında;

$$\int_{D(z)} u\,g(\dot{u})da \leq c_2 \left(\int_{D(z)} u^2 da \right)^{1/2} \left(\int_{D(z)} \dot{u}^2 da \right)^{1/2}$$

olduğu görülür. Ayrıca bulunan bu son eşitsizliğe tüm $\varepsilon > 0$ için Cauchy eşitizliği uygulandığında;

$$\int_{D(z)} u\,g(\dot{u})da \leq \frac{c_2}{2\varepsilon} \left(\int_{D(z)} u^2 da \right) + \frac{c_2 \varepsilon}{2} \left(\int_{D(z)} \dot{u}^2 da \right)$$

elde edilir. Son olarak yukarıdaki eşitsizliğin sağ yanındaki ilk terim için Poincare eşitsizliği kullanıldığında;

$$\int_{D(z)} u\,g(\dot{u})da \leq \frac{c_2}{2\varepsilon\alpha(0)} \int_{D(z)} u,_i\, u,_i\, da + \frac{c_2 \varepsilon}{2} \int_{D(z)} \dot{u}^2 da \tag{5.32}$$

sonucuna varılır. (5.32) eşitsizliği gereği;

$$\int_{D(z)} \int_0^{t_0} u\,g(\dot{u})dt\,da \geq \int_{D(z)} \int_0^{t_0} \left[\left(-\frac{c_2}{2\varepsilon\alpha(0)} \right) u,_i\, u,_i + \left(-\frac{c_2 \varepsilon}{2} \right) \dot{u}^2 \right] dt\,da \tag{iii}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (5.28)'deki ilk eşitsizlikten;

$$\int_{D(z)} \int_0^{t_0} g(\dot{u})\dot{u}\,dt\,da \geq c_1 \int_{D(z)} \int_0^{t_0} \dot{u}^2 dt\,da \tag{iv}$$

bulunabilir. (iii) ve (iv) ifadeleri (5.31)'de yerlerine yazıldığında;

$$\frac{\partial}{\partial z}H(z,t_0) \geq \int\limits_{D(z)} \int\limits_0^{t_0} \left\{ \lambda_1 \left(1 - \frac{c_2}{2\varepsilon\alpha(0)} \right) u,_i \, u,_i + \left[c_1 - \lambda_1 \left(1 + \frac{c_2 \varepsilon}{2} \right) \right] \dot{u}^2 \right\} dtda \qquad \text{(v)}$$

eşitsizliği sağlanır. $\varepsilon > \dfrac{c_2}{2\alpha(0)} > 0$ olursa;

$$1 - \frac{c_2}{2\varepsilon\alpha(0)} \geq \beta_1 > 0$$

ve $0 < \lambda_1 < \dfrac{c_1}{(1 + c_2 \varepsilon / 2)}$ olursa;

$$c_1 - \lambda_1 \left(1 + \frac{c_2 \varepsilon}{2} \right) \geq \beta_2 > 0$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu durumda her iki eşitsizlik için de ortak bir $w = \min(\lambda_1 \beta_1, \beta_2) > 0$ sayısı bulunabilir. Son olarak w sayısı dikkate alındığında (v) eşitsizliği;

$$\frac{\partial}{\partial z}H(z,t_0) \geq w \int\limits_{D(z)} \int\limits_0^{t_0} \left(u,_i \, u,_i + \dot{u}^2 \right) dtda \qquad ; \; z \geq 0 \quad , \quad 0 \leq t_0 < T \qquad (5.33)$$

şeklinde olur. Yine 5.3'te (5.13) ifadesine uygulanan Schwarz, Cauchy ve Poincare eşitsizlikleri bire bir $H(z,t_0)$ ifadesine uygulanıp ε_1 ve ε_2 sabitleri de aynı seçildiğinde;

$$\left| H(z,t_0) \right| \leq \frac{1}{2} \left[\lambda_1 \alpha^{-1}(z) + \lambda_1^{-1} \rho^{-1} \right]^{1/2} \lambda_1 \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{D(z)} \left(u,_i \, u,_i + \rho \dot{u}^2 \right) dadt$$

olduğu görülür. Devamında da 5.3'te yapılanlardan hareketle Faber-Krahn eşitsizliği kullanılıp, $w(z)$ fonksiyonu $w(z) = (1/4)\lambda_1^2 \left\{ \lambda_1^{-1} \rho^{-1} + \lambda_1 \left(A(z) / \pi j_0^2 \right) \right\}$ olarak dikkate alındığında,

$$\left|H\left(z,t_0\right)\right| \leq w^{1/2}\left(z\right)\int_0^{t_0}\int_{D(z)}\left(u,_i\, u,_i + \rho \dot{u}^2\right)dadt \tag{5.34}$$

eşitsizliği bulunur. (5.33)'ten,

$$\int_{D(z)}\int_0^{t_0}\left(u,_i\, u,_i + \dot{u}^2\right)dtda \leq w^{-1}\frac{\partial}{\partial z}H\left(z,t_0\right) \qquad ;\ z \geq 0 \quad , \quad 0 \leq t_0 < T$$

dir. (5.34)'de özel olarak $\rho = 1$ seçilip, yukarıdaki ifade (5.34)'e uygulandığında;

$$\left|H\left(z,t_0\right)\right| \leq w^{-1}\, w^{1/2}\left(z\right)\frac{\partial}{\partial z}H\left(z,t_0\right) \qquad ;\ z \geq 0 \quad , \quad 0 \leq t_0 < T \tag{5.35}$$

şeklinde ölçüm fonksiyonuna göre yazılmış birinci mertebeden bir diferansiyel eşitsizlik elde edilir. Buradan hareketle (5.29) başlangıç koşulları, (5.2) sınır koşulları ve (5.27) denklemi tarafından belirlenen problemin çözümleri için uzaysal üstel bir azalım sonucuna varılabilir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; dalga denklemi, ısı denklemi, hiperbolik ısı denklemi ve bir takım çalışmalarda ortaya çıkmış olan bazı denklemler için tanımlanan hacim integral ölçümünün asimptotik davranışları, farklı sınır veya başlangıç sınır koşulları altında hangi tür artım ya da azalım özellikleri gösterdiği vurgulanmıştır. Parabolik ve aykırı parabolik denklemlerin çalışmalarında elde edilen benzer sonuçların damping terimli dinamik problemleriyle tanımlanan hiperbolik denklemler için de geçerli olduğu gözlemlenmiştir.

Bu sunum kaynağını; Flavin, Knops, Horgan, Payne, Knowles, Toupin, Quintanilla, Dennemeyer, Rionero, Çelebi ve Kalantarov gibi önemli araştırmacıların eserlerinden almıştır. Bu araştırmacıların birlikte ya da tek başına hazırladıkları eserlerin ayrıntılarına sunum içerisinde yer verilmiştir. Sunumda; Neumann problemi, ısı denklemi, hiperbolik ısı denklemi, lineer dalga denklemi veya yarı lineer dalga denklemini içeren başlangıç sınır değer problemlerinin incelenmesinden sonra bazı özel koşullar altında Phragmen-Lindelöf tipi sonuçlara ulaşılmıştır.

Çalışmanın geneline bakıldığında, lineer sınır koşulları altında incelenen Neumann problemi ya da başlangıç sınır değer problemlerinde azalım kestirimleri elde edilirken, lineer olmayan sınır koşulları altında incelenen başlangıç sınır değer probleminde birbirinden farklı davranışlar sergileyen artırım kestirimleri ortaya konmuştur. Yine çalışmanın genelinde problemlerde uygun şekilde tanımlanmış bir ölçüm fonksiyonunun üzerinden kestirimler elde edilirken lineer olmayan sınır koşulları altında incelenen problemde çözümler üzerinden bir kestirim elde edilmiş, sonrasında bu elde edilen kestirimden hareketle bir ölçüm fonksiyonu tanımlanmış ve diğer bölümlerde de olduğu gibi bazı asimptotik koşullar altında Phragmen-Lindelöf tipi bir sonuca varılmıştır. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler de birbirinden farklı basamaklar takip edilmiş olsa da kullanılan yöntem hacim integral metodudur ve amaç, problemin ölçüm fonksiyonuna göre yazılmış birinci mertebeden bir diferansiyel eşitsizlik elde edip, buradan da bir artım ya da azalım kestirimine ulaşabilmektir. Diğer bölümlerden farklı olarak üçüncü bölümde incelenen bölgenin farklı yapısına göre ölçüm fonksiyonunun üstel veya polinomik azalım özellikleri gösterdiği ortaya konmuştur. Üçüncü, dördüncü ve beşinci kısımlarda yarı sonsuz bölgeler üzerinde çalışırken bir asimptotik koşul konmadığı zaman artırım kestirimleri elde edilmiştir. Kısaca ikinci bölümde bir telin hareketi gözlemlenirken, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde birbirinden farklı koşullar altında birbirinden farklı denklemleri içeren birbirinden farklı bölgeler üzerinde birbirinden farklı problemlerin çözümleri ya da çözümlerinin (ya da türevlerinin) negatif olmayan bir fonksiyonunu içeren ölçüm fonksiyonu üzerinden artırım veya azalım kestirimleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada bazı kısmi diferansiyel denklemler tarafından birbirinden farklı başlangıç ve sınır koşulları altında tanımlanan problemler incelenmiştir. Bu problemler dikkate alınarak daha farklı denklemler ve koşullar altında başka problemlerin çözümlerinin veya uygun şekilde tanımlanmış ölçüm fonksiyonlarının davranışları incelenebilir. Dördüncü bölümde yer verildiği gibi lineer olmayan sınır koşulları altında da problemler tanımlanıp davranışları araştırılabilir. Beşinci bölümde yarı lineer dalga denklemlerinin bir sınıfı için kullanılan metot ve sonuçların bazı olası genişlemelerine değinilmiş, bu kısım tanımlanan ölçüm fonksiyonuna göre yazılmış birinci mertebeden bir diferansiyel eşitsizliğin elde edilmesiyle tamamlanmıştır. Buradan hareketle daha farklı yöntemler yardımıyla yarı lineer dalga denklemlerini içeren problemlerin çözümleri ya da ölçüm fonksiyonları için azalım kestirimleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] DENNEMEYER, R., Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, McGrow-Hill Book Company, pp. 160-179, New York, 1968

[2] FLAVIN, J.N., RIONERO, S., Qualitative Estimates for Partial Differential Equations, CRC Press, pp. 75-91, 101, 102, Florida, 1996

[3] ÇELEBİ, A.O., KALANTAROV, V.K., Spatial Behavior Estimates for the Wave Equation under Nonlinear Boundary Conditions, Mathematical and Computer Modelling, 34, pp. 527-532, 2001

[4] QUINTANILLA, R., A Spatial Decay Estimate for the Hyperbolic Heat Equation, SIAM J. Math. Anal., 27, 1, pp. 78-91, 1996

[5] HORGAN, C.O., PAYNE, L.E., Phragmen-Lindelof Type Results for Harmonic Functions with Nonlinear Boundary Conditions, Arch. Rational Mech. Anal., 122, pp. 123-144, 1993

[6] YILMAZ, Y., Doğrusal Olmayan Dalga Denklemlerinin Çözümlerinin Global Davranışları, Doktora Tezi, SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 2003

ÖZGEÇMİŞ

Zehra Örs, 20.07.1983’te İzmit’te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kocaeli’nin Körfez ilçesinde tamamladı. 2001 yılında Yarımca Süper Lisesi’nden mezun oldu. 2002 yılında başladığı GÜ Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bölüm üçüncülüğü ile 2006 yılında bitirdi. Aynı yıl SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans programına başladı. 2006-2008 yılları arasında özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2008 yılında evlenip Ankara'ya yerleşti.