

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**D-BOYUTLU D-PARAMETRELİ DEFORME BOZON
CEBİRİ VE BU CEBİRİN İNHOMOJEN
DEĞİŞMEZLİK GRUBU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre DİL

Enstitü Anabilim Dalı : FİZİK
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr.
Ali Serdar ARIKAN

HAZİRAN 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**D-BOYUTLU D-PARAMETRELİ DEFORME BOZON
CEBİRİ VE BU CEBİRİN İNHOMOJEN
DEĞİŞMEZLİK GRUBU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

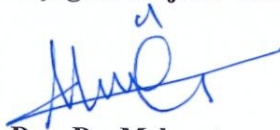
Emre DİL

Enstitü Anabilim Dalı : FİZİK

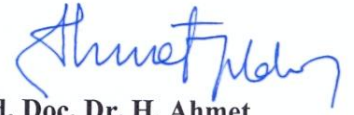
Bu tez 04/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.



**Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar
ARIKAN
Jüri Başkanı**



**Doç. Dr. Mehmet
ÖZEN
Üye**



**Yrd. Doç. Dr. H. Ahmet
YILDIRIM
Üye**

TEŞEKKÜR

Öncelikle beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul ettiği için ve yüksek lisans tez çalışmalarım boyunca bilgilerini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca ihmal ettiğim eşim ve ailemin bana gösterdikleri sabır ve desteklerden dolayı kendilerine de derinden şükranlarımı sunarım.

Emre DİL

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
SUMMARY.....	ix
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
KUANTUM HARMONİK SALINICI SİSTEMİ.....	4
BÖLÜM 3.	
DEFORME BOZON CEBİRLERİ.....	11
3.1. Bir Boyutlu ve Bir Parametrelili Deforme Bozon Cebiri.....	12
3.2. D-Boyutlu ve Bir Parametrelili Deforme Bozon Cebiri.....	15
3.3. D-Boyutlu ve İki Parametrelili Deforme Bozon Cebiri.....	16
3.4. D-Boyutlu ve D-Parametrelili Deforme Bozon Cebiri.....	18
BÖLÜM 4.	
KUANTUM MATRİS GRUPLARI.....	19
4.1. Grup, Cisim, Vektör Uzayı ve Cebir.....	19
4.1.1. Grup.....	19
4.1.2. Cisim.....	20
4.1.3. Vektör uzayı.....	20

4.1.4. Cebir.....	21
4.2. Lie Grupları ve Lie Cebirleri.....	24
4.3. $SO(3)$ ve $SU(2)$ Lie Grupları ve Lie Cebirleri.....	28
4.4. Jordan-Schwinger Yaklaşımı.....	33
4.5. Ko-Cebir, Bi-Cebir ve Hopf Cebiri.....	35
BÖLÜM 5.	
D-BOYUTLU D-PARAMETRELİ DEFORME BOZON CEBİRİNİN İNHOJEN DEĞİŞMEZLİK GRUBU.....	43
BÖLÜM 6.	
SONUÇLAR.....	60
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ.....	64

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

a	: Yok etme operatörü
a^*	: Yaratma operatörü
c	: Yok etme operatörünün normalizasyon katsayısı
c'	: Yaratma operatörünün normalizasyon katsayısı
δ_{ij}	: Kronecker delta fonksiyonu
E	: Hamiltonyen operatörünün özdeğeri
H	: Hamiltonyen operatörü
h	: Planck sabiti
\hbar	: Planck sabitinin 2π ' ye bölünmüş hali
m	: Kütle
N	: Sayı operatörü
n	: Sayı operatörünün özdeğeri
$[N]$: Deforme sayı operatörü
$[n]$: Deforme sayı operatörünün özdeğeri
$ n\rangle$: Sayı operatörünün özketi
ν	: Işığın frekansı
λ	: Işığın dalga boyu
p	: Momentum operatörü
ψ	: Dalga fonksiyonu
q	: Deformasyon parametresi
V	: Potansiyel enerji
ω	: Açısal frekans
x	: Pozisyon operatörü

- $GL(n)$: Genel lineer grup
 $GL_{q_{ij}, p_{ij}}(n)$: Deforme genel lineer grup
 $O(n)$: Dik dönüşüm grubu
 $SO(n)$: Özel dik dönüşüm grubu
 $SU(n)$: Özel birimsel dönüşüm grubu
 $SU_q(2)$: Deforme özel birimsel dönüşüm grubu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1.	Birleşme özelliği (soldaki) ve birim fonksiyon (sağdaki) için değişmeli diyagram	37
Şekil 4.2.	Ko-birleşme özelliği (soldaki) ve ko-birim fonksiyon (sağdaki) için değişmeli diyagram	38
Şekil 4.3.	Bi-cebirdeki ko-çarpım ve standart çarpımın simetrik uyumu için değişmeli diyagram	39
Şekil 4.4.	Bi-cebirdeki ko-çarpım ve birim fonksiyonun uyumu için değişmeli diyagram	39
Şekil 4.5.	Bi-cebirdeki ko-birim fonksiyon ve standart çarpımın uyumu için değişmeli diyagram	39
Şekil 4.6.	Bi-cebirdeki ko-birim fonksiyon ve birim fonksiyonun uyumu için değişmeli diyagram	39
Şekil 4.7.	Hopf cebirindeki antipodun tanımı	40

ÖZET

Anahtar kelimeler: Bozon Cebiri, Deforme Bozon Cebiri, İnhomojen Kuantum Değişmezlik Grupları, Hopf Cebiri

Bu çalışmada d -boyutlu, d -parametrelili deforme bozon cebiri ele alınmış ve bu cebirin inhomojen değişmezlik grubuna sahip olduğu gösterilmiştir. Ardından bu cebirin iki boyutlu hali için R -Matrisi yazılıp, bu matrisin Yang-Baxter denklemini sağladığı gösterilmiştir.

D-DIMENSIONAL D-PARAMETER DEFORMED BOSON ALGEBRA AND THE INHOMOGENEOUS INVARIANCE GROUP OF THIS ALGEBRA

SUMMARY

Key Words: Boson Algebra, Deformed Boson Algebra, Inhomogeneous Quantum Invariance Groups, Hopf Algebra

In this study, d-dimensional and d-parameter deformed boson algebra is considered and it is proved that this algebra has an inhomogeneous invariance group. After that, for two dimensional case of this algebra R-Matrix is constructed and it is proved that this matrix satisfies the Yang-Baxter equation.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Fizik yasaları 19. Yüzyılda atomik mertebelerdeki bazı olayları açıklamada yetersiz kaldı. Mesela kara cisim ışımada, dışarı yayılan enerjinin değeri için deneysel veriler teorik hesaplamalarla tutarsız çıkıyordu. Diğer bir tutarsızlık fotoelektrik olayda söz konusuydu. Fotoelektrik olay ışığın o zamana kadar kabul edilen dalga doğasıyla açıklanmaya çalışıldığında, yine deneysel veriler teorik veriler ile tutarsızlık gösteriyordu. Bu örnekleri çoğaltmak mümkündür. 1923 yılında Arthur Compton' un yapmış olduğu deney ki bu deney Compton Etkisi olarak da bilinir, ışığın dalga modeli ile açıklanamamaktaydı. Yine 1923 yılında, elektron demetini kristal yapıdaki bir örgü üzerine gönderen de Broglie, elektron demetinin kırınıma uğradığını gözlemlemiştir. Bu durum Compton olayının aksine elektronun parçacık yapısıyla açıklanamamaktaydı [1]. Tüm bu olaylar için ihtiyaç duyulan açıklamalara kuantum mekaniği sayesinde ulaşmak mümkün oldu. Max Planck kara cisim ışımada yayılan ışık enerjisinin ışığın frekansı ile orantılı olduğunu ve tüm enerji değerlerinde olamayacağını, ancak izin verilen bazı enerji değerlerinde olabileceğini gösterdi. Bu durum enerjinin kesikli olması anlamına geliyordu. Einstein fotoelektrik olayda, ışığın dalga doğasının yanında bir de parçacık doğası olması gerektiğini belirterek bu olay için ihtiyaç duyulan tutarlı teorik hesaplamaları yapmıştı. Einstein ışığın parçacık yapısına sahip olduğunu ortaya koyarken, bu parçacıklara $h\nu$ enerjisine ve h/λ momentumuna sahip fotonlar adını vermişti. Buradaki h , Planck sabitini gösterirken, ν ışığın frekansını ve λ da ışığın dalga boyunu göstermektedir. Compton olayında da serbest elektronla çarpışan ışığın, çarpışma sonrası sapma açısının hesabında, yine ışığın parçacık yapısı, yani “fotonlar” göz önüne alınmıştır. Bu çarpışmadaki enerji ve momentum korunumu yasaları foton ve elektron için uygulanmış ve doğru sonuca ulaşılmıştır. de Broglie ise kristal örgü üzerine gönderilen ve kırınıma uğrayan elektron demeti için, maddi parçacık olarak kabul edilen elektronların da bir dalga doğasında olması gerektiğini söyleyerek, bu olaydaki teorik tutarsızlıkları gidermiştir. Bu olay sonucunda da, bir p

momentumuna sahip herhangi bir maddi parçacığa, h/p kadar bir dalga boyuna sahip bir dalganın eşlik ettiği gerçeğine varılmıştır. Işığın parçacık doğası ve maddi parçacıkların dalga doğası, bir objenin fizikte hem dalga, hem de parçacık olarak ele alınabileceğini bize göstermiştir [1].

Kısaca özetlemek gerekirse kuantum mekaniği yaklaşımı, varlıkların parçacık-dalga dualitesinin varlığını ve enerji gibi bazı fiziksel büyüklerin kesikli değerler alabileceği gerçeğini ortaya koymaktadır.

Klasik fizik yasaları ile çözülebilen her problemin kuantum fiziği yaklaşımları ile de çözülebilmesi aslında klasik fiziğin kuantum fiziğinin bir limit durumu olduğunu göstermektedir. Yani, kuantum mekaniği denklemlerindeki h sabiti sıfıra giderken denklemler bilinen klasik fizik denklemlerine dönüşmektedir. Bu yüzden klasik fizik yasaları ile açıklanabilen her olay, kuantum fiziği yasaları ile de açıklanmalıdır.

Bu çalışmanın temelindeki fiziksel sistem harmonik salıncı sistemidir. Klasik fizikte, harmonik salıncı bir yayda titreşim hareketi yapan bir kütle olarak düşünülebileceği gibi dairesel bir yörüngede dolanan bir kütle olarak da düşünülebilir. Söz konusu kütle için klasik fizik denklemleri göz önüne alındığında, bu kütlenin konum, enerji ya da momentumunu veren ifadeleri bulmak hiç de zor değildir. Öte yandan harmonik salıncı sistemi kuantum mekaniğin olarak da ele alınabilir. Kuantum harmonik salıncı problemi için, salınım yapan kütleye eşlik eden dalga fonksiyonu ve bu kütlenin sahip olmaya izinli olduğu enerji değerleri farklı metotlar ışığında bulunabilir. Öyle ki istenilen çözüm Hermite polinomları yardımıyla bulunabileceği gibi çarpanlara ayırma metodu olarak da bilinen metot çerçevesinde de bulunabilir. Çarpanlara ayırma metodu çerçevesinde tanımlanan operatörler ki bu operatörlere yaratma ve yok etme operatörleri de denilir, kendi aralarında bir komütasyon bağıntısına sahiptir. Bu operatörler sistemin enerji seviyesinin $\hbar\omega$ kadar artırılması ya da azaltılmasından sorumludur. Burada sistemin enerjisini $\hbar\omega$ kadar arttırmak ya da azaltmak yerine, her biri $\hbar\omega$ enerjiye sahip özdeş parçacıklardan oluşan sisteme $\hbar\omega$ enerjisine sahip bir başka parçacığı eklemek ya da çıkarmak eşdeğer olarak düşünülebilir. Yaratma ve yok etme operatörlerinin sağlamış olduğu cebirsel yapı, söz konusu özdeş parçacıkların

karakteristik özellikleri ışığında bozon cebiri olarak da bilinirler. Bu bozon cebirinin reel bir q -deformasyon parametresi ile deforme edilmesi sonucu q -deforme bozon cebiri elde edilir.

Bu çalışmada, d -parametre ile deforme edilmiş d -boyutlu bir bozon cebirinin kuantum değişmezlik grubu araştırıldı. Öyle ki böyle bir simetrinin varlığından bahsedebilmek için öncelikle cebirin elemanlarını dönüştüren bir dönüşüm matrisi yazıldı. Ancak bu matrisin elemanları operatörlerden oluşmaktaydı. Bu operatörlerin sağlamış olduğu cebirsel yapının Hopf cebiri aksiyomlarını sağladığı gösterilerek, göz önüne alınan sistemin bir inhomojen kuantum değişmezlik grubuna sahip olduğu gösterildi. Söz konusu kuantum grubu için R -Matrisi yazılıp, bu R -Matrisinin Yang-Baxter denklemini sağlayıp sağlamadığı incelendi.

BÖLÜM 2. KUANTUM HARMONİK SALINICI SİSTEMİ

Harmonik salınıcı problemini çözmek için salınıcı içerisindeki parçacığı tanımlayan dalga fonksiyonlarını ve bu dalga fonksiyonlarına karşı gelen parçacığın enerji değerlerini bulmak yeterli olacaktır. Bunu gerçekleştirmek için Schrödinger dalga denklemi

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (2.1a)$$

eşitliği ile ifade edilen potansiyel için

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (2.1b)$$

şeklinde yazılarak çözülebilir. Burada m kütleyi ω da açısal frekansı göstermektedir. Kolaylık olması açısından da bir boyutlu bir sistem göz önüne alınmıştır. Buna rağmen (2.1b) diferansiyel denklemini çözmek çok da kolay değildir. Ancak bu denklemin Hermite polinomları yardımıyla çözümü pek çok lisans kitabında mevcuttur. Bu sebeple burada bu metot ışığında elde edilen çözüm irdelenmeyecektir. Çalışmanın bundan sonraki bölümünde sağlamış olduğu kolaylıklardan faydalanmak maksadı ile, P. A. M. Dirac tarafından geliştirilen Dirac notasyonu (Bra-Ket notasyonu) kullanılacaktır [2]. Bu notasyon ışığında parçacığın durumunu tanımlayan dalga fonksiyonu terimi yerine parçacığın özketi, enerjisi yerine de enerji özdeğeri terimleri kullanılacaktır.

Harmonik salınıcı sistemi içindeki parçacığın Hamiltonyen'i

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (2.2)$$

şeklindedir. Buradaki H , p ve x sırasıyla, Hamiltonyen, momentum ve konum operatörleridir. Bu operatörler fiziksel gözlenebilirliğe karşılık geldiğinden Hermitseldir. Hamiltonyen operatörünü aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan operatörler çerçevesinde yeniden yazmak mümkündür.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right), \quad (2.3)$$

Bu operatörler sırasıyla, yok etme ve yaratma operatörleri olarak bilinirler. Operatörlerin bu şekilde adlandırılmalarının sebebi ilerleyen kısımlarda anlatılacaktır. (2.3) eşitliğindeki $*$ işareti, operatörün transpozununun, kompleks eşleniği anlamında kullanılmaktadır. (2.3) eşitliğinde verilen tanım ışığında yaratma ve yok etme operatörleri çarpılırsa,

$$a^* a = \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) + \frac{i}{2\hbar} (xp - px) \quad (2.4)$$

ifadesi elde edilir. Burada xp ve px ifadeleri operatör çarpımı olduğundan birbirine eşit değildir. Kuantum mekaniğinden, kanonik komütasyon bağıntısı $xp - px = i\hbar$ olduğu aşikardır. Bu bağıntı (2.4) denkleminde yerine konulduğunda ve gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$a^* a = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemden H operatörü çekilirse,

$$H = \hbar\omega \left(a^* a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.6)$$

denklemini elde edilir.

$$N = a^* a \quad (2.7)$$

tanımlaması çerçevesinde, Hamiltonyen

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (2.8)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $|n\rangle$, N operatörünün özketini göstermek üzere

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (2.9)$$

eşitliği yazıldığında, Hamiltonyen operatörü için

$$H|n\rangle = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle$$

yazılabileceğinden, (2.9) eşitliği kullanılarak

$$H|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega |n\rangle \quad (2.10)$$

ifadesi elde edilir.

a , a^* operatörlerinin sırasıyla yok etme ve yaratma operatörleri olarak isimlendirilmelerindeki gerekçe hakkında fikir sahibi olmak için, önce bu operatörlerin kendi aralarındaki komütasyon bağıntısına, ardından da her ikisinin de N operatörü ile aralarındaki komütasyon bağıntılarına bakmak uygun olacaktır. Bu bağıntılar sırasıyla,

$$[a, a^*] = aa^* - a^*a = \frac{1}{2\hbar}(-i[x, p] + i[p, x]) = 1 \quad (2.11)$$

$$[N, a] = [a^*a, a] = a^*[a, a] + [a^*, a]a = -a \quad (2.12)$$

$$[N, a^*] = [a^*a, a^*] = a^*[a, a^*] + [a^*, a^*]a = a^* \quad (2.13a)$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir.

$$Na^*|n\rangle = ([N, a^*] + a^*N)|n\rangle$$

ifadesi, (2.13a) eşitliği kullanılarak

$$Na^*|n\rangle = a^*|n\rangle + a^*n|n\rangle \quad (2.13b)$$

şeklinde yazılabileceği gibi;

$$Na|n\rangle = ([N, a] + aN)|n\rangle$$

ifadesi de, (2.12) eşitliği kullanılarak

$$Na|n\rangle = -a|n\rangle + an|n\rangle \quad (2.13c)$$

şeklinde yazılabilir. Yani (2.13b) ve (2.13c) eşitlikleri için sırasıyla

$$Na^*|n\rangle = (n+1)a^*|n\rangle \quad (2.14)$$

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \quad (2.15)$$

eşitliklerini yazmak mümkündür.

(2.14) ve (2.15) eşitlikleri aslında N operatörü için birer özdeğer denklemi gibi düşünülebilir. (2.14)' de, N operatörünün özdeğer denkleminde elde edilen özdeğer $n+1$ olduğuna göre, bu operatörün etki ettiği özket de aslında $|n+1\rangle$ özketi gibi düşünülebilir. Şöyle ki;

$$a^*|n\rangle = c'|n+1\rangle. \quad (2.16)$$

yazılabilir. Aynı şekilde, (2.15)' de, N operatörünün özdeğer denkleminde elde edilen özdeğer $n-1$ olduğuna göre, bu operatörün etki ettiği özket de aslında $|n-1\rangle$ özketi için yazılmış gibi düşünülebilir. Yani;

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle. \quad (2.17)$$

yazılabilir.

İşte buradan görülüyor ki, a^* operatörü, $|n\rangle$ durumundaki sistemi bir birim artırarak, $|n+1\rangle$ durumuna dönüştürmüştür. $|n\rangle$ notasyonu ile gösterilen durum n tane özdeş parçacıktan oluşan bir sistem olarak yorumlanabildiğinden, a^* operatörü bu yorum çerçevesinde n özdeş parçacıklı sistemden $(n+1)$ özdeş parçacıklı sisteme geçişi sağlamıştır. Yani bir parçacığın yaratılması ile ilgili işlem yapmıştır. Bu sebeple a^* operatörü yaratma operatörü olarak da adlandırılır. Benzer şekilde, a operatörü de, $|n\rangle$ durumundaki sistemi bir birim azaltarak $|n-1\rangle$ durumuna dönüştürmüştür. Bu yüzden a operatörü de yok etme operatörü olarak adlandırılır.

(2.17) eşitliğindeki c normalizasyon katsayısı

$$\langle n|N|n\rangle = \langle n|a^*a|n\rangle$$

$$n = (\langle n|a^*)(a|n\rangle) = c^*c = c^2$$

eşitlikleri kullanılarak

$$c = \sqrt{n}$$

şeklinde bulunabilir.

Benzer şekilde (2.16) eşitliğindeki c' normalizasyon katsayısı da

$$\langle n|(N+1)|n\rangle = \langle n|aa^*|n\rangle$$

$$n+1 = (\langle n|a)(a^*|n\rangle) = c'c'^* = c'^2$$

eşitlikleri kullanılarak

$$c' = \sqrt{n+1}$$

şeklinde bulunabilir.

Bu normalizasyon katsayıları (2.16) ve (2.17) eşitliklerinde yerine konursa

$$a^*|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.18)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.19)$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitlikler göz önüne alınan sistemdeki N operatörü için aşağıdaki yorumu yapmayı mümkün kılar. N operatörü $|n\rangle$ durumuyla ifade edilen, bir sisteme etki ettiğinde, aslında orada kaç tane parçacık olduğunu ölçer. Mesela n tane parçacıktan oluşan bir sistemi ifade eden $|n\rangle$ durum özketine etki eden N operatörü, bu sistemin kaç parçacıktan oluştuğunu ifade eden n özdeğerini verir. Bu yüzden N operatörüne sayı operatörü de denilir. Ayrıca N operatörünün lineer

fonksiyonu olan H operatörü de n parçacıktan oluşan sistemi tanımlayan $|n\rangle$ durum özketine etki ederse, bu n parçacıklı sistemin enerjisi ölçülmüş olur.

Bu çalışmanın asıl temelini oluşturan bağıntı, (2.11) ve (2.12) eşitliklerinde ifade edilen komütasyon bağıntılarıdır. Bu bağıntılar, literatürde standart bozon cebiri olarak da bilinirler. Ancak bu çalışmada ele alınacak cebirler deforme bozon cebirleri olacaktır. Bu yüzden üçüncü bölümde deforme bozon cebirleri hakkında özet bir bilgi verilecektir.

BÖLÜM 3. DEFORME BOZON CEBİRLERİ

Kuantum harmonik salıncı sistemi göz önüne alınarak elde edilen

$$aa^* - a^*a = 1 \quad (3.1)$$

$$[N, a^*] = a^* \quad (3.2)$$

$$[N, a] = -a \quad (3.3)$$

ifadelerinden, (3.1) eşitliğinin reel bir q parametresi ile deformasyonu sonucu elde edilen yapı q -deforme bozon cebiri olarak bilinir. Deforme edilmiş bu cebirsel yapının önemi kuantum grupları ile arasındaki ilişkinin varlığının gösterilmesi ile bir kat daha artmıştır. Öyle ki, Macfarlane [3] ve Biedenharn [4] yapmış oldukları çalışmalarda, q -deforme bozon cebirlerini kullanarak $SU_q(2)$ deforme Lie cebirinin inşa edilebileceğini göstermiştir [5]. İstatistik mekanik alanında yapılan çalışmalara bakıldığında sadece bir deformasyon parametresi değil, iki deformasyon parametresi içeren sistemlerin de geniş bir uygulama alanına sahip oldukları görülebilir. Ancak bu çalışmalarda söz konusu olan sistemler sadece deforme bozon sistemleri değildir. Fermiyon cebiri olarak bilinen cebirsel yapının deformasyonu da istatistik mekanik ile ilgili çalışmalarda önemli sonuçların elde edilmesinde kullanılmaktadır. Kuantum cebiri, kuantum optiğinden [6], fermiyon-bozon etkileşimlerine [7] kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ancak bu çalışmada deforme parçacık cebirlerinin uygulamalarından bahsedilmeyecektir. d -boyutlu ve d -parametrelili deforme bozon cebiri ele alınıp, bu cebirin sahip olduğu simetri incelenecektir. Bu sebeple bu bölümde öncelikle çok boyutlu bozon cebirinin çok parametrelili deformasyonu hakkında kısaca bilgi verilecektir.

3. 1. Bir Boyutlu ve Bir Parametrelili Deforme Bozon Cebiri

(3.1) eşitliğiyle verilen komütasyon bağıntısı reel bir q parametresiyle deforme edildiğinde

$$aa^* - q^2 a^* a = 1 \quad (3.4)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade ilk kez Arık ve Coon tarafından ortaya konmuştur [8,9]. Buradaki a ve a^* operatörleri standart bozon cebirindekinden farklı olarak, sırasıyla deforme yok etme ve deforme yaratma operatörleri olarak isimlendirilirler. Standart bozon cebirinde a^*a operatörü sayı operatörü olarak adlandırılmıştı. Bu isimlendirmenin arkasında yatan sebep de bu operatörün spektrumunun doğal sayıları vermesi ile alakalıydı. Ancak (3.4) denklemi ile tanımlanan cebirsel yapıda a^*a operatörünün spektrumunun standart harmonik salıncınınkinden farklı olacağı aşıkardır. Fakat bu farklılık $q = 1$ için ortadan kalkacaktır. Bu sebeple (3.4) eşitliğini sağlayan deforme yok etme ve yaratma operatörleri için de a^*a ifadesi deforme sayı operatörü olarak adlandırılır ve

$$a^*a = [N] \quad (3.5)$$

ile gösterilir. Benzer şekilde aa^* ifadesi için de

$$aa^* = [N + 1] \quad (3.6)$$

yazılabilir. Deforme sayı operatörü $[N]$ için özdeğer denklemi, $|n\rangle$ özketleri göstermek üzere

$$[N]|n\rangle = [n]|n\rangle \quad (3.7)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Bu durumda

$$[N + 1]|n\rangle = [n + 1]|n\rangle \quad (3.8)$$

eşitliği de yazılabileceğinden, (3.4) eşitliği bir $|n\rangle$ özketine etki ettirilirse

$$[n + 1] - q^2[n] = 1 \quad (3.9)$$

ifadesi elde edilir. Burada fark denkleminin $[0] = 0$ ilk durumu ile

$$[1] = 1$$

$$[2] = 1 + q^2$$

$$[3] = 1 + q^2(1 + q^2) = 1 + q^2 + q^4$$

.

.

$$[n] = 1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n-2} \quad (3.10)$$

eşitlikleri ile ifade edilen bir tekrarlılama bağıntısını sağladığı görülebilir. Denklem (3.10)'u düzenlemek üzere

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$$

matematiksel özdeşliğinden faydalanılırsa, (3.10) ifadesi daha sade olarak

$$[n] = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade deforme sayı operatörünün özdeğeri için elde edilmiştir. Böylece deforme sayı operatörü için

$$[N] = \frac{1 - q^{2N}}{1 - q^2} \quad (3.12)$$

yazılabilir. Eşitlik (3.4)' e ilave olarak deforme bozon cebirini tanımlayan komütasyon bağıntıları, standart harmonik salınıcı cebirine benzer şekilde

$$[N, a] = -a \quad (3.13)$$

$$[N, a^*] = a^* \quad (3.14)$$

denklemleri ile ifade edilir. Burada çok önemli bir nokta a ve a^* sırasıyla deforme yok etme ve yaratma operatörü iken, bunlarla komütasyon bağıntısı içinde bulunan sayı operatörü, deforme sayı operatörü $[N]$ değil, standart sayı operatörü N ' dir.

Kuantum harmonik salınıcının yok etme ve yaratma operatörleri arasındaki komütasyon bağıntısının bir parametre ile deformasyonu sadece eşitlik (3.4)' deki gibi gerçekleştirilmemiştir. Mesela Macfarlane [3] ve Biedenharn [4] birbirinden bağımsız bir şekilde yapmış oldukları çalışmalarda deforme bozon cebirini (3.4) denkleminde farklı bir ifade ile tanımlamıştır. Yapmış oldukları tanımlar çerçevesinde, deforme bozon cebiri ile deforme Lie cebiri inşa etmenin mümkün olduğunu göstermişlerdir. Biedenharn' ın ele aldığı cebir

$$aa^* - qa^*a = q^{-N} \quad (3.15)$$

ifadesini içermektedir. Yine buradaki q reel ve pozitif deformasyon parametresidir. Unutulmamalıdır ki, (3.15) ifadesi (3.13) ve (3.14) eşitlikleri ile beraber deforme bozon cebirini oluşturmaktadır.

Macfarlane' ın ele aldığı cebir ise Biedenharn' ın ele aldığı cebirden küçük bir farkla (3.15) yerine

$$aa^* - q^{-1}a^*a = q^N \quad (3.16)$$

ifadesini içermektedir.

Her ne kadar eşitlik (3.4) ile (3.15) ve (3.16) ifadeleri oldukça farklı görünseler de

$$a' \rightarrow q^{\pm 1/2} a q^{\mp N/2} \quad (3.17)$$

dönüşümü altında bu ifadelerin birbirleri ile ilişkilerini görmek mümkündür [10]. Burada üslü ifadelerde aşağıya yazılan işaretler (3.4) ile (3.15) denklemleri arasındaki dönüşümü ortaya koymak için yazılmışken, yukarıya yazılan işaretler (3.4) ve (3.16) denklemleri arasındaki dönüşümü ortaya koymak için yazılmıştır.

3. 2. D-Boyutlu ve Bir Parametrelili Deforme Bozon Cebiri

Bir parametrelili deforme bozon cebirlerinin çok boyutlu genelleştirmeleri çok çeşitlidir. Arık ve Coon [9] bir boyutlu q-deforme cebirini d tane komütatif kopya alarak

$$a_i a_i^* - q^2 a_i^* a_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (3.18)$$

$$[a_i, a_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (3.19)$$

şeklinde genelleştirirken, Pusz-Woronowicz [11] bu genelleştirmeyi

$$a_i a_j = q a_j a_i, \quad i < j, \quad i = 1, 2, \dots, d-1 \text{ ve } j = 2, 3, \dots, d \quad (3.20)$$

$$a_i a_j^* = q a_j^* a_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (3.21)$$

$$a_1 a_1^* - q^2 a_1^* a_1 = 1 \quad (3.22)$$

$$a_i a_i^* - q^2 a_i^* a_i = a_{i-1} a_{i-1}^* - a_{i-1}^* a_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, d \quad (3.23)$$

$$a_d a_d^* - a_d^* a_d = q^{2N} \quad (3.24)$$

eşitlikleri ışığında gerçekleştirmiştir. Pusz-Woronowicz (PW) salıncı olarak da bilinen bu sistem $SU_q(d)$ simetrisine sahip olacak şekilde genelleştirilmiştir.

Bir başka d-boyutlu genelleştirme ise

$$a_i a_j^* - q a_j^* a_i = q^N \delta_{ij} \quad (3.25)$$

$$[a_i, a_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (3.26)$$

eşitlikleri ile ifade edilen Newton salıncıdır [12]. Bu sistemin Newton salıncısı olarak isimlendirilmesinin sebebi, harmonik salıncı için kuantizasyon işlemine Hamiltonyen denklemi yerine Newton denklemi göz önüne alınarak başlanması ve çok boyutlu genelleştirmesinin Newton denkleminin göstermiş olduğu $U(d)$ simetrisine sahip olacak şekilde gerçekleştirilmesidir [13].

3. 3. D-Boyutlu ve İki Parametrelili Deforme Bozon Cebiri

Kuantum harmonik salıncı sisteminin yok etme ve yaratma operatörleri arasındaki komütasyon bağıntısının deforme edilmiş hallerine bakıldığında bu deformasyon işlemlerinin sırasıyla Arık-Coon ve Macfarlane-Biedenharn salıncılarında

$$aa^* - q^2 a^* a = 1$$

$$aa^* - qa^* a = q^{-N}$$

eşitlikleri ile ifade edildiği hatırlanacaktır. Bu eşitliklerin

$$aa^* - q_1^2 a^* a = q_2^{-2N} \quad (3.27)$$

şeklinde daha genel bir ifadesinin yazılmasının mümkün olduğunu görmek hiç de zor değildir. $q_1 = q$ ve $q_2 = 1$ için eşitlik (3.27), eşitlik (3.4) ile özdeş hale gelirken, $q_1 = q$ ve $q_2 = q^{-1}$ için de eşitlik (3.27), eşitlik (3.15) ile özdeş hale gelmektedir. İki tane deformasyon parametresi içeren (3.27) ifadesi için deforme sayı operatörü $[N]$ 'nin spektrumu

$$[n] = \frac{q_1^{2N} - q_2^{2N}}{q_1^2 - q_2^2} \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilen Fibonacci temel sayılarıdır. Bu sebeple bu salıncı Fibonacci Salıncısı [5] olarak adlandırılmıştır. İki deformasyon parametresi içeren bu sistemin çok boyutlu genelleştirmesini PW salıncısında uygulanan metot ışığında gerçekleştirmek mümkündür. Öyle ki, Fibonacci salıncısını tanımlayan eşitlikler çok boyut için

$$a_i a_j = \frac{q_1}{q_2} a_j a_i, \quad i < j, \quad i = 1, 2, \dots, d-1, \quad j = 2, 3, \dots, d \quad (3.29)$$

$$a_i a_j^* = q_1 q_2 a_j^* a_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (3.30)$$

$$a_1 a_1^* - q_1^2 a_1^* a_1 = q_2^{2N} \quad (3.31)$$

$$a_i a_i^* - q_1^2 a_i^* a_i = a_{i-1} a_{i-1}^* - q_2^2 a_{i-1}^* a_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, d \quad (3.32)$$

$$a_d a_d^* - q_2^2 a_d^* a_d = q_1^{2N} \quad (3.33)$$

$$\sum_{i=1}^d a_i^* a_i = \frac{q_1^{2N} - q_2^{2N}}{q_1^2 - q_2^2} \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir.

3. 4. D-Boyutlu ve D-Parametrelili Deforme Bozon Cebiri

Çok boyutlu ve çok parametrelili deforme bozon cebirlerinin genel bir halini $d(d+1)$ deformasyon parametresi içerecek şekilde

$$a_i a_i^* - q_i^2 a_i^* a_i = H_i = \prod_{j=1}^d m_{ji}^{2N_j}, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (3.35)$$

$$a_i a_j = \frac{m_{ij}}{m_{ji}} a_j a_i, \quad i \neq j \quad (3.36)$$

$$a_i a_j^* = m_{ij} m_{ji} a_j^* a_i, \quad i \neq j \quad (3.37)$$

$$a_i H_j = m_{ij}^2 H_j a_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (3.38)$$

eşitlikleri ile yazmak mümkündür [14]. Bu eşitlikler $m_{ij} \rightarrow q_i$ limit durumunda, inhomojen kuantum simetrisi incelenecek olan

$$a_i a_j - \frac{q_i}{q_j} a_j a_i = 0 \quad (3.39)$$

$$a_i a_j^* - q_i q_j a_j^* = H \delta_{ij} \quad (3.40)$$

$$a_i H = q_i^2 H a_i \quad (3.41)$$

eşitlikleri ile ifade edilen d-boyutlu ve d-parametrelili bozon cebirini verir. Burada $i, j = 1, 2, \dots, d$ olup, H Hermitsel bir operatördür. (3.39), (3.40) ve (3.41) eşitlikleri ile ifade edilen sistemin kuantum simetrisinin varlığının nasıl inceleneceği hakkında fikir vermesi maksadı ile gelecek bölümde bazı temel tanımlardan bahsedilecektir.

BÖLÜM 4. KUANTUM MATRİS GRUPLARI

Kuantum grubu kavramı tanımlanmadan önce bu kavramın daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacak tanımları kısaca hatırlatmak uygun olacaktır.

4.1. Grup, Cisim, Vektör Uzayı ve Cebir

4.1.1. Grup

G bir küme ve g_1, g_2, \dots, g_n de bu kümenin elemanlarını göstermek üzere bu kümenin elemanları arasında tanımlanmış ve \circ şeklinde gösterilen bir grup işlemi için $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$g_i, g_j \in G \quad \Rightarrow \quad g_i \circ g_j \in G, \quad \text{kapalılık}$$

$$g_i, g_j, g_k \in G \quad \Rightarrow \quad g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k, \quad \text{birleşme}$$

$$\forall g_i \in G \quad \Rightarrow \quad g_i \circ g_1 = g_1 \circ g_i = g_i, \quad g_1 \text{ birim eleman}$$

$$\forall g_i \in G \quad \Rightarrow \quad g_i \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g_i = g_1, \quad g_i^{-1} \text{ ters eleman}$$

aksiyomları sağlanıyorsa G kümesine \circ işlemi altında bir grup denir ve (G, \circ) şeklinde gösterilir [15]. Eğer $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ şartı da sağlanıyorsa G 'ye değişmeli (komütatif) veya Abelyen grup denilir.

4.1.2. Cisim

F bir küme olmak üzere ve bu kümenin elemanları arasında toplama $+$ ve skaler çarpım \bullet olmak üzere, iki ayrı işlem tanımlandığında;

F kümesi toplama işlemi $+$ altında Abelyen bir grup

F kümesi sıfır hariç $(F - \{0\})$ çarpma işlemi \bullet altında Abelyen bir grup ve

Çarpma işlemi, toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahip

oluyorsa F kümesine toplama işlemi $+$ ve çarpma işlemi \bullet altında bir cisimdir denilir ve $(F, +, \bullet)$ şeklinde gösterilir [16]. Reel sayılar ve kompleks sayılar cisime birer örnektir.

4.1.3. Vektör uzayı

Bir vektör uzayı, elemanları $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ile gösterilen bir V kümesi ile birlikte elemanları $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$ olan bir F cisiminden oluşur ve V kümesinin elemanları arasında tanımlanmış bir toplama işlemi $+$ ve F cisminin elemanları ile V vektör kümesinin elemanları arasında tanımlanmış bir çarpma işleminden \bullet oluşur. Öyle ki bu durumda

$(V, +)$ Abelyen bir gruptur ve

$$f_i \in F \text{ ve } v_j \in V \Rightarrow f_i \bullet v_j \in V, \quad \text{kapalılık}$$

$$f_i, f_j \in F \text{ ve } v_k \in V \Rightarrow f_i \bullet (f_j \bullet v_k) = (f_i \bullet f_j) \bullet v_k, \quad \text{birleşme}$$

$$1 \in F \text{ ve } v_i \in V \Rightarrow 1 \bullet v_i = v_i \bullet 1 = v_i, \quad \text{birim}$$

$$f_i, f_j \in F \text{ ve } v_k, v_l \in V \Rightarrow f_i \bullet (v_k + v_l) = f_i \bullet v_k + f_i \bullet v_l \text{ veya}$$

$$\Rightarrow (f_i + f_j) \bullet v_k = f_i \bullet v_k + f_j \bullet v_k, \text{ dağılma}$$

aksiyomları sağlanmalıdır. Ayrıca söz konusu vektör uzayı $(V, +; F)$ şeklinde gösterilir [15].

4.1.4. Cebir

Elemanları $v_1, v_2, \dots \in V$ ile gösterilen ve vektör olarak adlandırılan bir V kümesi ile elemanları $f_1, f_2, \dots \in F$ olan bir F cisminde; V kümesi elemanları arasında tanımlanmış bir vektörel toplama işlemi $+$, F cisminin elemanları ile V vektör kümesinin elemanları arasında tanımlanmış bir çarpma işlemi \bullet ve V kümesinin elemanları arasında tanımlanmış bir vektörel çarpma işlemi \diamond ' dan oluşur. Öyle ki V ' ye F cismi üzerinde tanımlanmış bir cebir diyebilmek için $(V, +; F)$ bir vektör uzayı olmalı ve

$$v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 \diamond v_2 \in V, \text{ kapalılık}$$

$$v_1, v_2, v_3 \in V \Rightarrow v_1 \diamond (v_2 + v_3) = v_1 \diamond v_2 + v_1 \diamond v_3,$$

$$\Rightarrow (v_1 + v_2) \diamond v_3 = v_1 \diamond v_3 + v_2 \diamond v_3, \text{ dağılma}$$

aksiyomları sağlanmalıdır. Bu yapı $(V, \diamond, +; F)$ şeklinde de gösterilir [15]. Eğer söz konusu yapı aşağıdaki ek aksiyomları da sağlarsa o zaman isimlendirmelerde küçük değişiklikler olacaktır. Şöyle ki;

$$v_1 \diamond (v_2 \diamond v_3) = (v_1 \diamond v_2) \diamond v_3, \text{ birleşmeli cebir}$$

$$v_1 \diamond 1 = 1 \diamond v_1 = v_1, \text{ birim elemanlı cebir}$$

$$v_1 \diamond (v_2 \diamond v_3) = (v_1 \diamond v_2) \diamond v_3 + v_2 \diamond (v_1 \diamond v_3), \text{ türetilme özelliğine sahip cebir}$$

şeklinde adlandırılacaktır. Cebir tanımını daha somutlaştırmak için aşağıda cebir yapısını sağlayan örnekler verilmiştir.

$n \times n$ matrislerin oluşturduğu bir küme, matris toplamı ve skaler ile matrisin çarpımı işlemleri altında n^2 boyutlu bir vektör uzayı oluşturur. Üçüncü bir işlem olarak matris çarpım işlemi tanımlanırsa,

$$(A \diamond B)_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk} \quad (4.1)$$

bu matrislerin kümesinden oluşan vektör uzayı matris çarpımı işlemi altında birleşmeli bir cebir oluşturur. Çünkü $n \times n$ matrisleri arasındaki matris çarpımı sonucu elde edilen eleman yine $n \times n$ matristir. Matris çarpım işlemi matris toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir. Matris çarpım işlemi birleşme özelliğine de sahiptir.

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi bütün $n \times n$ matrisleri göz önüne almak yerine, sadece

$$A^T = -A \quad (4.2)$$

eşitliğini sağlayan $n \times n$ antisimetrik matrisler göz önüne alındığında, bu elemanlardan oluşan kümenin matris çarpımı altında bir cebir oluşturmayacağı aşıkardır. Çünkü matris çarpımı altında, iki tane antisimetrik matrisin çarpımı yine bir antisimetrik matris vermek zorunda değildir. Ancak $n \times n$ antisimetrik matrisler için matris çarpımı yerine antisimetrizasyonu sağlayan özel bir çarpım işlemi tanımlamak mümkündür. Öyle ki

$$A \diamond B = [A, B] = AB - BA \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanan bu özel işlem A ve B ' nin komütasyon bağıntısı olarak da bilinir. A ve B antisimetrik matrisler olduğundan

$$A^T = -A \text{ ve } B^T = -B$$

eşitliklerini sağlar. A ile B arasında tanımlanan \diamond işlemi altında elde edilen C matrisinin de antisimetrik bir matris olacağını

$$A \diamond B = C = AB - BA \quad \Rightarrow$$

$$C^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -C$$

eşitlikleri ışığında görmek mümkündür. Öyleyse

$$\diamond : V \otimes V \rightarrow V, \quad v_1, v_2, v_3 \in V, \quad b, c \in F \text{ olmak üzere}$$

$$v_1 \diamond v_2 \in V \tag{4.4}$$

$$(v_1 + v_2) \diamond v_3 = v_1 \diamond v_3 + v_2 \diamond v_3 \text{ ve } v_1 \diamond (v_2 + v_3) = v_1 \diamond v_2 + v_1 \diamond v_3 \tag{4.5}$$

aksiyomlarının sağlandığı söylenebilir. Yani antisimetrik matrislerin oluşturduğu küme matris toplamı ve F cisminin elemanları ile skaler çarpım altında bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayı da tanımlanan komütasyon bağıntısı işlemi altında bir cebirdir.

$$[v_1, v_2] = v_1 v_2 - v_2 v_1$$

$$[v_1, b v_2 + c v_3] = b [v_1, v_2] + c [v_1, v_3]$$

eşitliklerini sağlayan cebirsel yapı Jacobi özdeşliği olarak da bilinen

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \tag{4.6}$$

eşitliğini de sağladığından Lie Cebiri olarak da adlandırılır. Jacobi özdeşliği aslında tamamen türetilme özelliğinin komütasyon bağıntısı işlemi için düzenlenmiş halidir. Yani türetilme özelliği olarak bilinen

$$[A,[B,C]] = [[A,B],C] + [B,[A,C]] \quad (4.7)$$

eşitliği düzenlenerek eşitlik (4.6) kolaylıkla elde edilebilir.

4.2. Lie Grupları ve Lie Cebirleri

Bir grup elemanlarını ifade eden parametrelerin sürekli ve türevlenebilir olması, bu grubun bir Lie grubu olması anlamına gelir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta her sürekli grubun Lie grubu olarak adlandırılmayacağıdır.

Genel lineer grubu $GL(n;R)$ matris çarpımı altında Lie grubuna bir örnektir. Yine dik dönüşümler de Lie grubu yapısındadır. Mesela iki boyutta dönme işlemini ifade eden bir dik dönüşüm matrisi incelendiğinde, bunun için düzlemde bir V vektörünü θ kadar döndüren R matrisi

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

formunda yazılabilir. V vektörünün bileşenleri x ve y ile, dönüşmüş vektörün x' ve y' bileşenleri ve R dönüşüm matrisi birbirlerine

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

denklemleri ile bağlıdır. Burada R matrisinin bir dik matris olduğu kolayca görülebilmektedir. Öyle ki

$$RR^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (4.10)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Bu sebeple iki boyutta dönme işlemini gerçekleştiren R matrisinin $O(2)$ grubuna ait olduğu söylenebilir. Ayrıca bu matrisin determinanı incelendiğinde

$$\det R = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (4.11)$$

olduğu görülür. Bu durumda da determinanı 1 olan bir dik dönüşüm matrisi “özel dik dönüşüm matrisi” olarak adlandırılır ve $SO(2)$ şeklinde gösterilir. $SO(2)$ dönüşüm matrislerinin parametreleri olan θ açılara bakıldığında sürekli oldukları görülür ve ayrıca bu matrisin elemanları θ parametresine göre türevlenebilir olduğundan $SO(2)$ dönüşüm matrislerinin oluşturduğu gruba bir Lie grubu denilebilir [17]. Gerek genel lineer dönüşüm grubu, gerekse dik dönüşüm grubu reel yerine kompleks ifadeler de içerebilir. Bu durumda bu gruplar sırasıyla $GL(n, C)$ ve $O(n, C)$ şeklinde gösterilirler [18].

Lie grubunun elemanlarının her mertebeden türevlenebilme özelliği, grup üretici kavramının tanımlanabilmesini mümkün kılmıştır. Bu özellik sayesinde grubun bütün elemanlarıyla ilgilenmek yerine grubun birim elemanının komşuluğundaki grup elemanları üzerine çalışmak mümkün olmaktadır [19].

Biraz önce göz önüne alınan dönüşüm matrisinin, 1 birim matrisi olmak üzere

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

eşitliği ışığında

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = 1 \cos \theta + i \sigma_2 \sin \theta = \exp(i \sigma_2 \theta) \quad (4.13)$$

şeklinde yeniden yazılabileceğini söylemek mümkündür [19]. Burada σ_2 $SO(2)$ grubunun üretici olarak adlandırılır. Bu üretici $R(\theta)$ matrisinin birim eleman civarında türevini alarak da görmek mümkündür. Öyle ki

$$\sigma_2 = -i \left. \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} \quad (4.14)$$

eşitliğinin sağlandığını görmek hiç de zor değildir. Burada i çarpanı üretici Hermitsel yapmak için konulmuştur [19]. Eşitlik (4.13)' de yazılan ifade birim elemanın sonsuz küçük komşuluğunda

$$R(\delta\theta) = 1 + i\sigma_2\delta\theta \quad (4.15)$$

şeklinde de lineer bir şekilde yazılabilir. Burada $\delta\theta$ ' nin iki ve daha yüksek mertebeden terimleri göz ardı edilmiş ve dolayısıyla bu terimler eşitlik (4.15)' deki toplam ifadesinde yazılmamıştır.

Eşitlik (4.15) sonsuz küçük dönmeye karşı gelmektedir. Bu sonsuz küçük dönmeler k kere uygulandığında sonlu dönme elemanı $R(\theta)$ ' yi elde etmek mümkündür. Bunu görmek için öncelikle $\delta\theta_1$ ve $\delta\theta_2$ dönmelerinin her ikisine birden karşılık gelen elemanın

$$R(\delta\theta_1)R(\delta\theta_2) = R(\delta\theta_1 + \delta\theta_2) = (1 + i\sigma_2\delta\theta_1)(1 + i\sigma_2\delta\theta_2) \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabileceğini hatırlamak uygun olacaktır. Bu durumda

$$R(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} [R(\delta\theta)]^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + i\sigma_2\delta\theta_1)^k \quad (4.17)$$

eşitliğini yazmak mümkündür. k defa dönme için $\delta\theta = \theta/k$ seçildiğinde, eşitlik (4.17)

$$R(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + i\sigma_2 \frac{\theta}{k} \right)^k \quad (4.18)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece grup elemanının

$$R(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\sigma_2\theta)^k}{k!} = \exp(i\sigma_2\theta) \quad (4.19)$$

şeklinde üstel bir biçimde yazılabildiğini görmek tekrar mümkün olacaktır [19].

Bir grubun üretici, o grubun sonsuz küçük dönmelerine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla $SO(2)$ grubunda, eşitlik (4.15)' den görülebileceği gibi sadece bir üretic vardır. Grubun üreticileri, grubun mertebesi ile aynı boyutta lineer bir vektör uzayı oluşturur [19].

Herhangi bir Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri hakkında yeterince detaylı fikir sahibi olmak için üretici birden fazla olan bir Lie grubunu göz önüne almak uygun olacaktır. Birden fazla grup parametresi içeren bir grubun elemanları R_i ile gösterilsin. Burada $i = 1, 2, \dots$ şeklinde değerler alabilmektedir. Bu grubun sonsuz küçük grup parametresi ε_i için grup elemanları

$$R_i(\varepsilon_i) = 1 + iJ_i\varepsilon_i \quad (4.20)$$

$$R_i^{-1}(\varepsilon_i) = 1 - iJ_i\varepsilon_i \quad (4.21)$$

şeklinde lineer bir formda yazılabilir. Çünkü ε_i sonsuz küçük olduğundan, yukarıdaki ifadede ε_i ' nin iki ve daha yüksek mertebeden terimleri ihmal edilebilmiştir. Öyleyse, grubun $R_j^{-1}(\varepsilon_j)R_i^{-1}(\varepsilon_i)R_j(\varepsilon_j)R_i(\varepsilon_i)$ elemanı için

$$R_j^{-1}(\varepsilon_j)R_i^{-1}(\varepsilon_i)R_j(\varepsilon_j)R_i(\varepsilon_i) = 1 + \varepsilon_i\varepsilon_j[J_i, J_j] + \dots \quad (4.22)$$

ifadesi yazılabilir. Ancak unutmamak gerekir ki grup aksiyomlarındaki kapalılık özelliği şartı, eşitlik (4.22)' deki ifadenin yine bir grup elemanı olmasını zorunlu kılmaktadır. Bu sebeple eşitlik (4.22)

$$R_j^{-1}(\varepsilon_j)R_i^{-1}(\varepsilon_i)R_j(\varepsilon_j)R_i(\varepsilon_i) = 1 + \varepsilon_i\varepsilon_j \sum_k C_{ij}^k J_k + \dots \quad (4.23)$$

şeklinde yazılabilecektir. Buradan da

$$[J_i, J_j] = \sum_k C_{ij}^k J_k \quad (4.24)$$

eşitliği elde edilir [19]. Grubun üreteçleri arasındaki işlem eşitlik (4.24)' deki komütatör ile tanımlandığı takdirde, grubun üreteçlerinin oluşturmuş olduğu vektör uzayının bir cebir olduğunu söylemek mümkün olur. Bu cebir türetilme özelliğini de sağladığından dolayı Lie cebiri olarak adlandırılır [15]. Burada C_{ij}^k grubun yapı sabitidir.

Şimdi daha somut olması açısından $SO(3)$ ve $SU(2)$ Lie gruplarına karşılık gelen Lie cebirleri arasındaki ilişkileri hatırlamak uygun olacaktır.

4.3. $SO(3)$ ve $SU(2)$ Lie Grupları ve Lie Cebirleri

$SO(3)$ Lie grupları elemanları dik (orthogonal) olma şartını sağlayan ve determinantları 1 olan 3×3 ' lük matrislerin, matris çarpımı altında oluşturdukları bir gruptur. Bu grubun elemanları aslında 3 boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde, bir vektörün bir eksen boyunca belli bir açı ile dönmesini sağlar. Yani bu grubun elemanı bir vektöre matris çarpımı ile etki ederse, çarpım sonucu elde edilen vektör, o eksene göre belirtilen açı kadar dönmüş vektörü verir. Mesela z eksenine göre ϕ açısı kadar döndürülen bir vektörü ifade etmek için kullanılacak $SO(3)$ grubu elemanı

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

şeklinde yazılabilir. Bilindiği gibi 3 boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde x ve y olarak isimlendirilen iki eksen daha vardır. x ve y eksenleri için dönme açıları sırasıyla θ ve φ olarak tanımlanırsa, bu eksenlere göre dönmeleri ifade edecek grup elemanları

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $SO(3)$ grubu ϕ , θ ve φ parametreleriyle tanımlanır. Yani bu üç parametre bu grubu tanımlamaya yetmektedir. Bu parametrelerin sayısı aynı zamanda bu grubun üreteçlerinin sayısını vermektedir [20]. Şimdi (4.14) denklemine benzer şekilde, $SO(3)$ Lie grubunun üreteçleri sırasıyla

$$J_z = -i \frac{\partial R_z(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$J_x = -i \frac{\partial R_x(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$J_y = -i \frac{\partial R_y(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. $SO(3)$ grubu elemanlarının, yani dönme operatörleri $R_x(\theta)$, $R_y(\varphi)$ ve $R_z(\phi)$ ' nin birim eleman komşuluğunda lineer olarak yazılması istenirse, bu operatörleri sonsuz küçük olmayan θ , φ ve ϕ açıları için değil, bunun yerine sonsuz küçük olan $\delta\theta$, $\delta\varphi$ ve $\delta\phi$ açıları için ele almak gerekir. Bunun açıkça görülmesi için (4.25), (4.26) ve (4.27)' de verilen ifadeler, sonsuz küçük açılar için

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

eşitlikleri yardımıyla

$$R_x(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\theta \\ 0 & -\delta\theta & 1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$R_y(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\varphi & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$R_z(\delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi & 0 \\ -\delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilir. Burada sonsuz küçük açılar için iki ve daha yüksek dereceli terimler ihmal edilmiştir. Böylece (4.31), (4.32) ve (4.33) eşitliklerinde ifade edilen

grup operatörleri, kendi üreteçlerinin cinsinden, lineer olarak aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$R_x(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\theta \\ 0 & -\delta\theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \delta\theta = 1 + iJ_x \delta\theta \quad (4.34)$$

$$R_y(\delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\phi & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\phi = 1 + iJ_y \delta\phi \quad (4.35)$$

$$R_z(\delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi & 0 \\ -\delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\phi = 1 + iJ_z \delta\phi. \quad (4.36)$$

Eğer (4.24) eşitliğindeki gibi $SO(3)$ grubunun üreteçleri arasındaki komütasyon bağıntıları yazılmak istenirse; bu bağıntılar (4.28), (4.29) ve (4.30) eşitlikleri kullanılarak

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_y, J_z] = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y \quad (4.37)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikler $SO(3)$ Lie grubuna karşı gelen Lie cebirini ifade eden eşitliklerdir. $SO(3)$ Lie cebirinin bazları J_x , J_y ve J_z ' dir. (4.19) eşitliğinden de bilindiği gibi, sonsuz küçük değişimlerin art arda uygulanmasından sonlu değişimler için $SO(3)$ Lie grubunun elemanları inşa edilebilir. Öyle ki bu elemanlar $SO(3)$ Lie cebirinin bazlarının üstel fonksiyonları şeklinde yazılabilirler. Yani J_x , J_y ve J_z $SO(3)$ Lie cebirinin bazları olmak üzere; $SO(3)$ Lie grubunun elemanları $R_x(\theta)$, $R_y(\phi)$ ve $R_z(\phi)$ için

$$R_x(\theta) = \exp(i\theta J_x) \quad (4.38)$$

$$R_y(\varphi) = \exp(i\varphi J_y) \quad (4.39)$$

$$R_z(\phi) = \exp(i\phi J_z) \quad (4.40)$$

yazılabilir. Elbette bu durum sadece $SO(3)$ için gerçekleşmez. $SU(2)$ ve diğer Lie grupları ve bu grupların cebirleri için de geçerlidir.

$SU(2)$ Lie grubunun elemanları birimsel matris olma koşulunu sağlayan ve determinantları 1 olan 2×2 ' lik matrislerdir. Bu grubun grup işlemi matris çarpımıdır. Bu grubun elemanı olan matrisler genel olarak

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

şeklinde yazılabilir. $SU(2)$ Lie grubunun mertebesi üçtür. Bu grubun elemanları üç adet reel grup parametresi ile ifade edilebilir. Bu parametreler α , β ve γ olarak yazıldığında ve $SU(2)$ Lie grubunun üreteçleri olarak

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

eşitlikleri ile ifade edilen Pauli spin matrisleri kullanıldığında, $SU(2)$ Lie grubunun elemanları

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(\frac{-i\gamma\sigma_3}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\beta\sigma_2}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\alpha\sigma_1}{2}\right) \quad (4.45)$$

şeklinde yazılabilir [19]. Bu grubun üreteçleri arasındaki komütasyon bağıntıları daha önce $SO(3)$ Lie grubu için yazılan Lie cebirine benzer şekilde

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3 \quad (4.46)$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1 \quad (4.47)$$

$$[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2 \quad (4.48)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Öyle ki $J_k = \sigma_k/2$ için $SU(2)$ ve $SO(3)$ Lie grupları için elde edilen Lie cebirlerinin aynı olduğu görülür.

$SO(3)$ grubunun üreteçleri için yazılan Lie cebiri Cartan-Weyl formu olarak bilinen bir formda da sıklıkla karşımıza çıkar. Öyle ki (4.37)' de ifade edilen Lie cebiri

$$J_+ = J_x + iJ_y, \quad J_- = J_x - iJ_y, \quad J_z = J_z \quad (4.49)$$

tanımlamaları çerçevesinde,

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z \quad (4.50)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Gelecek bölümde de harmonik salıncı cebiri olarak bilinen, yaratma ve yok etme operatörleri arasındaki komütasyon bağıntısı kullanılarak (4.50)' deki Lie cebirinin inşa edilebileceğinden kısaca bahsedilecektir.

4.4. Jordan-Schwinger Yaklaşımı

Birbirlerinden bağımsız iki harmonik salıncı cebiri göz önüne alındığında

$$a_1 a_1^* - a_1^* a_1 = 1 \quad (4.51)$$

$$a_2 a_2^* - a_2^* a_2 = 1 \quad (4.52)$$

$$a_1 a_2^* - a_2^* a_1 = 0 \quad (4.53)$$

$$a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0 \quad (4.54)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerdeki yaratma ve yok etme operatörleri kullanılarak

$$J_+ = a_1^* a_2 \quad (4.55)$$

$$J_- = a_2^* a_1 \quad (4.56)$$

$$J_z = a_1^* a_1 - a_2^* a_2 \quad (4.57)$$

operatörlerini tanımlamak mümkündür. J_+ , J_- ve J_z operatörleri arasındaki komütasyon bağıntılarının, (4.51)-(4.54) eşitliklerini kullanarak, açısal momentum operatörleri tarafından sağlanan Lie cebiri olduğunu görmek mümkündür. Bu yaklaşım Jordan-Schwinger yaklaşımı olarak bilinir [3,4] ve bu durumun gerçekleştiğini görmek için sırasıyla aşağıdaki eşitlikleri göz önüne almak uygun olacaktır:

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= \left[\frac{1}{2} (a_1^* a_1 - a_2^* a_2), a_1^* a_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (a_1^* a_1 a_1^* a_2 - a_2^* a_2 a_1^* a_2 - a_1^* a_2 a_1^* a_1 + a_1^* a_2 a_2^* a_2) \\ &= \frac{1}{2} (a_1^* a_2 (a_1 a_1^* - a_1^* a_1) + (a_2 a_2^* - a_2^* a_2) a_1^* a_2) \end{aligned}$$

$$= a_1^* a_2 = J_+ \quad (4.58)$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} [J_z, J_-] &= \left[\frac{1}{2} (a_1^* a_1 - a_2^* a_2), a_2^* a_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} (a_1^* a_1 a_2^* a_1 - a_2^* a_2 a_2^* a_1 - a_2^* a_1 a_1^* a_1 + a_2^* a_1 a_2^* a_2) \\ &= \frac{1}{2} ((a_1^* a_1 - a_1 a_1^*) a_2^* a_1 + a_2^* a_1 (a_2^* a_2 - a_2 a_2^*)) \\ &= -a_2^* a_1 = -J_- \end{aligned} \quad (4.59)$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= [a_1^* a_2, a_2^* a_1] = a_1^* a_2 a_2^* a_1 - a_2^* a_1 a_1^* a_2 \\ &= a_1^* a_1 a_2 a_2^* - a_1 a_1^* a_2^* a_2 = a_1^* a_1 a_2 a_2^* - a_1 a_1^* (a_2 a_2^* - 1) \\ &= a_1^* a_1 a_2 a_2^* - a_1 a_1^* a_2 a_2^* + a_1 a_1^* = (a_1^* a_1 - a_1 a_1^*) a_2 a_2^* + a_1 a_1^* \\ &= -a_2 a_2^* + a_1 a_1^* = 2J_z \end{aligned} \quad (4.60)$$

ifadesi elde edilir.

4.5. Ko-Cebir, Bi-Cebir ve Hopf Cebiri

Şimdiye kadar Lie grubu ve Lie cebirinden bahsedildi. Ancak mevcut çalışmada kuantum grubunun kullanılmasından dolayı kuantum grupları hakkında da özet bir bilgi verilmesi uygun olacaktır. Cebir' in tanımı bölüm (4.1.4)' de yapılmıştı. Buna

göre bir cebir $(A, \diamond, +; F)$ şeklinde gösteriliyordu. Cebir aksiyomlarından hatırlanacağı gibi, bir cebirin cebir olması için gerek ve yeterli şart, cebir için tanımlanan A vektör uzayındaki bilineer (bilinear) çarpımın $m: A \otimes A \rightarrow A$ hem kapalılık özelliğinin hem de A kümesi elemanları arasındaki toplama işlemi $+$ 'nin üzerine dağılma özelliğinin var olmasıydı.

Bölüm (4.1.4)'de de belirtildiği gibi cebir aksiyomlarına birleşme özelliği ilave edildiğinde, bu cebire birleşmeli cebir adı verilir. Bu özellik $v_1, v_2, v_3 \in A$ olmak üzere,

$$v_1 \diamond (v_2 \diamond v_3) = (v_1 \diamond v_2) \diamond v_3$$

şeklinde gösterilebildiği gibi $v_1, v_2, v_3 \in V$ için

$$m \circ (m(v_1, v_2), v_3) = m \circ (v_1, m(v_2, v_3)) \quad (4.61)$$

şeklinde de gösterilebilir [21]. Burada \circ işareti fonksiyonel bileşkeyi temsil etmek için kullanılmıştır. Eşitlik (4.61)'de birleşme özelliği tanım kümesinin elemanları kullanılarak ortaya konmuştur. Oysa bu özellik aşağıdaki gibi sadece tanım kümeleri kullanılarak da ifade edilebilir.

$$m(m(A \otimes A) \otimes A) = m(A \otimes m(A \otimes A)) \quad (4.62)$$

Vektör uzayındaki birim işlemci $\forall v_i \in A$ için $id(v_i) = v_i$ tanımlanırsa, (4.62)'de ifade edilen eşitlik

$$m[m(A \otimes A) \otimes id(A)] = m[id(A) \otimes m(A \otimes A)] \quad (4.63)$$

şeklinde yeniden yazılabileceği gibi, bu eşitlik

$$m(m \otimes id) = m(id \otimes m) \quad (4.64)$$

şeklinde de ifade edilebilir [16,21].

Eğer ele alınan cebir birleşme özelliğinin yanında, ayrıca birim elemana da sahipse bu cebire birim elemanlı birleşmeli cebir denir. Söz konusu özellik $\eta: F \rightarrow A$ lineer dönüşümü için

$$m(id \otimes \eta) = m(\eta \otimes id) = id \quad (4.65)$$

eşitliği ile ifade edilebilir.

Bir cebir, birleşme özelliğine ve birim elemana sahipse; cebirin sahip olmuş olduğu bu özellikler (4.64) ve (4.65) eşitlikleri ile ifade edilebileceği gibi, aşağıdaki diyagramlarla da özetlenebilir:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes m} & A \otimes A \\
 \downarrow m \otimes id & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes F \cong A \cong F \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes id} & A \otimes A \\
 \downarrow id \otimes \eta & \searrow id & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

Şekil 4.1. Birleşme özelliği (soldaki) ve birim fonksiyon (sağdaki) için değişmeli diyagram

Yukarıdaki diyagramlara değişmeli diyagramlar denmesinin sebebi, diyagramların her iki yönüne de gidildiğinde aynı sonuca varılmasıdır.

Değişmeli ve birim elemanlı cebir tanımının (4.1) diyagramı ile ifade edilmesi $(C, \Delta, +, \varepsilon; F)$ şeklinde gösterilen ko-cebirin de nasıl tanımlanabileceği hakkında bir öngörü de bulunabilmeyi mümkün kılar. Çünkü ko-cebir ile kastedilen yapı, A ile gösterilen cebirsel yapının dualidir [16,21].

Ko-cebir

$$(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta \quad (4.66)$$

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes id)\Delta \quad (4.67)$$

eşitliklerinin sağlanması kaydıyla

$$\Delta: C \rightarrow C \otimes C$$

$$\varepsilon: C \rightarrow F$$

lineer dönüşümleri ile tanımlanır.

Cebir için çizilen değişmeli diyagramlara benzer şekilde ko-cebir için yazılan eşitlik (4.66) ve (4.67) için de;

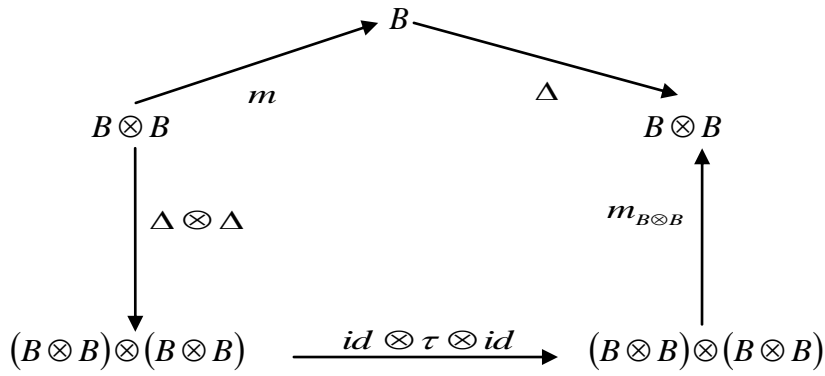
Şekil 4.2. Ko-birleşme özelliği (soldaki) ve ko-birim fonksiyon (sağdaki) için değişmeli diyagram

değişmeli diyagramlarını çizmek mümkündür.

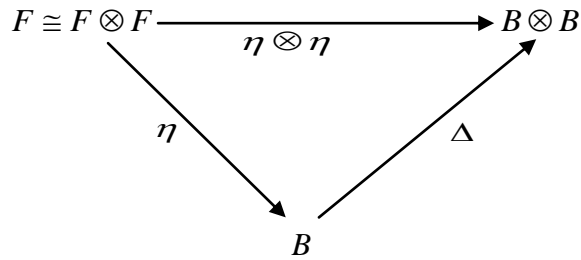
F cismi üzerine tanımlanmış bir bi-cebir $(B, +, \diamond, \eta, \Delta, \varepsilon; F)$ olmak kaydıyla F üzerinde hem bir cebir hem de bir ko-cebirdir. Öyle ki bi-cebirin cebirsel yapısı, ko-cebirin cebirsel yapısı ile uyumludur. Bu durum

$$\tau: B \otimes B \rightarrow B \otimes B$$

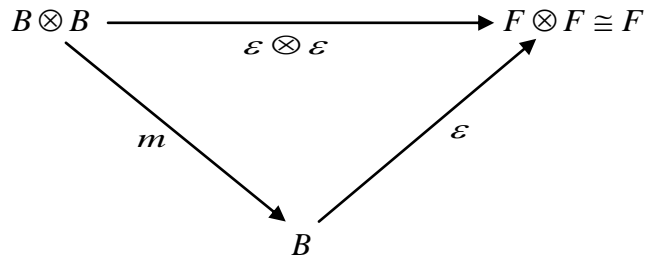
şeklinde tanımlanan bir permütasyon operatörü yardımıyla aşağıdaki diyagramlar ile özetlenebilir [21].



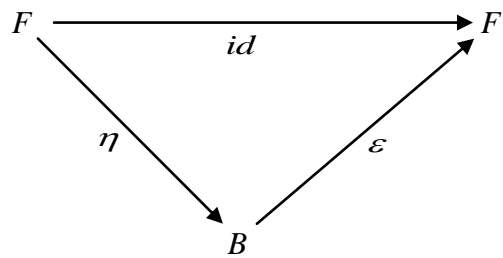
Şekil 4.3. Bi-cebirdeki ko-çarpım ve standart çarpımın simetrik uyumu için değişmeli diyagram



Şekil 4.4. Bi-cebirdeki ko-çarpım ve birim fonksiyonun uyumu için değişmeli diyagram



Şekil 4.5. Bi-cebirdeki ko-birim fonksiyon ve standart çarpımın uyumu için değişmeli diyagram



Şekil 4.6. Bi-cebirdeki ko-birim fonksiyon ve birim fonksiyonun uyumu için değişmeli diyagram

Hopf cebiri

$$m(S \otimes id)\Delta = m(id \otimes S)\Delta$$

eşitliğini sağlayan $S : H \rightarrow H$ lineer dönüşümü ile tanımlanan antipoda (antipode) sahip bir bi-cebirdir [22]. Dolayısıyla Hopf cebiri için şimdiye kadar çizilen değişmeli diyagramlara ek olarak aşağıdaki diyagram da çizilebilir [16,21].

$$\begin{array}{ccccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\quad S \otimes id \quad} & & & H \otimes H \\
 \uparrow \Delta & & & & \downarrow m \\
 H & \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} & F & \xrightarrow{\quad \eta \quad} & H \\
 \downarrow \Delta & & & & \uparrow m \\
 H \otimes H & \xrightarrow{\quad id \otimes S \quad} & & & H \otimes H
 \end{array}$$

Şekil 4.7. Hopf cebirindeki antipodun tanımı

Hopf cebiri için gerekli tanımlamaları yaptıktan sonra, artık kuantum gruplarından bahsetmek mümkün hale gelmiştir. Kuantum grubu isimlendirmesi her ne kadar grup sözcüğü içerse de bilinen grup kavramından daha farklı bir yapıyı anlatmaktadır. Bu yapıya ilk olarak kuantum alan teorisi ve istatistik mekanikte integrallenebilir sistemler çalışılırken ihtiyaç duyulmuştur. Öyle ki Kulish, Reshetikhin [23], Sklyanin, Takhtajan ve Faddeev [24] yapmış oldukları çalışmalarda $SU(2)$ 'nin q-deforme karşılığını yazmışlardır [22]. Drinfel'd [25] ve Jimbo [26] Lie cebirinin deformasyonunu göz önüne alarak kuantum grubu ile ilgili çalışmaları gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmada ise Lie cebirinin deformasyonu ile elde edilen kuantum gruplarından ziyade Woronowicz [27] tarafından gerçekleştirilen yaklaşım ışığında göz önüne alınan kuantum matris grupları ile ilgilenilmiştir.

Kuantum matris gruplarının matris elemanları operatördür. Bu operatörler arasında tanımlanan cebirsel yapı Hopf cebiri yapısındadır. Dolayısıyla matris elemanları için ko-çarpım, ko-birim ve antipodun Hopf cebiri aksiyomlarını sağlayacak şekilde tanımlanabilmesi gerekir. Matris kuantum grupları için bu tanımlar

$$\Delta(M) = M \overset{\bullet}{\otimes} M$$

$$\varepsilon(M) = 1$$

$$S(M) = M^{-1}$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. Burada $\overset{\bullet}{\otimes}$ gösterimi matris tensör çarpımını temsil etmektedir.

Kuantum matris grubu için bu matrisin elemanları arasındaki bağıntıların toplu halde bulunduğu,

$$RM_1M_2 = M_2M_1R \quad (4.68)$$

eşitliğini sağlayan bir R-Matrisi bulmak mümkündür. Burada M kuantum matrisini göstermek üzere $M_1 = M \otimes 1$ ve $M_2 = 1 \otimes M$ ' dir. Ancak eşitlik (4.68)' deki R-Matrisini, Hopf cebirinin evrensel R-Matrisi olarak adlandırabilmek için bu R-Matrisinin

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (4.69)$$

eşitliği ile ifade edilen Yang-Baxter denklemini sağlaması gerekir. Eşitlik (4.69)' da yazılan R_{12} , R_{13} ve R_{23} sırasıyla

$$(R_{12})_{def}^{abc} = R_{de}^{ab} \delta_f^c \quad (4.70)$$

$$(R_{13})_{def}^{abc} = R_{df}^{ac} \delta_e^b \quad (4.71)$$

$$(R_{23})_{def}^{abc} = R_{ef}^{bc} \delta_d^a \quad (4.72)$$

şeklinde ifade edilebilir.

BÖLÜM 5. D-BOYUTLU D-PARAMETRELİ DEFORME BOZON CEBİRİNİN INHOMOJEN DEĞİŞMEZLİK GRUBU

Üçüncü bölümde, d adet deformasyon parametresi içeren, tutarlı, d -boyutlu bir bozon cebirinin (3.39)-(3.41) denklemleriyle ifade edilebileceği görülmüştü. Bu bölümde bu denklemler için inhomojen kuantum değişmezlik grubunun nasıl araştırıldığı detaylı bir şekilde ortaya konulacaktır. Söz konusu sistem için bir simetrisinin varlığı (3.39)-(3.41) denklemleriyle ifade edilen a_i , a_i^* , H ve 1 operatörleri için bir dönüşüm matrisi yazmayı mümkün kılar. Bu matrisin elemanları

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \kappa_{ik} & \lambda_{ik} & \mu_i & \nu_i \\ \chi_{1k} & \chi_{2k} & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ilk aşamada dikkat edilecek nokta bu matrisin elemanlarının birer operatör olduğudur. Bu matris içerisindeki i ve k indisleri 1 ' den d ' ye kadar değer almaktadır. Yani matrisin ilk başta 4×4 ' lük bir matris gibi görülmesine rağmen, aslında $(2d + 2) \times (2d + 2)$ ' lik bir matris olduğu aşikardır. a_i , a_i^* , H ve 1 için lineer dönüşümler, (5.1) eşitliğiyle ifade edilen dönüşüm matrisini kullanarak, matris tensör çarpımı yardımıyla

$$\begin{pmatrix} a_i' \\ a_i'^* \\ H' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \kappa_{ik} & \lambda_{ik} & \mu_i & \nu_i \\ \chi_{1k} & \chi_{2k} & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_k \\ a_k^* \\ H \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabileceği gibi

$$a_i' = \alpha_{ik} \otimes a_k + \beta_{ik} \otimes a_k^* + \eta_i \otimes H + \gamma_i \otimes 1 \quad (5.3)$$

$$a_i^{*'} = \kappa_{ik} \otimes a_k + \lambda_{ik} \otimes a_k^* + \mu_i \otimes H + \nu_i \otimes 1 \quad (5.4)$$

$$H' = \chi_{1k} \otimes a_k + \chi_{2k} \otimes a_k^* + \chi_3 \otimes H + \chi_4 \otimes 1 \quad (5.5)$$

$$1 = 1 \otimes 1 \quad (5.6)$$

eşitlikleri ile de ifade edilebilir. Eşitlik (5.3)-(5.5) k indisi üzerinden $1'$ den d' ye kadar toplam ifadesi içermesine rağmen, bu eşitliklerde toplam sembolü kullanılmamıştır. Ancak bu eşitliklerdeki k indisinin Einstein indis toplama kuralı çerçevesinde, k indisi üzerinden toplam ifadesine sahip olduğu unutulmamalıdır. Eşitlik (5.4), eşitlik (5.3) ifadesinin kompleks eşleniğinin transpozu olduğundan (5.4) eşitliğindeki κ ve λ operatörlerinin $\kappa_{ik} = \beta_{ik}^*$, $\lambda_{ik} = \alpha_{ik}^*$ eşitliklerini sağlaması gerektiği kolaylıkla görülebilir. H ve 1 Hermitsel olduğundan da $\mu_i = \eta_i^*$ ve $\nu_i = \gamma_i^*$ olur. Ayrıca Hermitsel H operatörünün dönüşüm eşitliğinde yazılan a_k ve a_k^* lı terimler için χ_1 ve χ_2 ler geçmiş çalışmalarda yapılan hesaplamalardan elde edilmiş deneyimlere göre [28,29] sıfır seçilecektir. Bu bilgiler ışığında dönüşüm matrisi M

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \beta_{ik}^* & \alpha_{ik}^* & \eta_i^* & \gamma_i^* \\ 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece her bir dönüşüm için lineer dönüşüm eşitlikleri

$$a_i' = \alpha_{ik} \otimes a_k + \beta_{ik} \otimes a_k^* + \eta_i \otimes H + \gamma_i \otimes 1 \quad (5.8)$$

$$a_i^{\prime} = \beta_{ik}^* \otimes a_k + \alpha_{ik}^* \otimes a_k^* + \eta_i^* \otimes H + \gamma_i^* \otimes 1 \quad (5.9)$$

$$H' = \chi_3 \otimes H + \chi_4 \otimes 1 \quad (5.10)$$

$$1 = 1 \otimes 1 \quad (5.11)$$

biçimini alır. (5.8)-(5.11) denklemlerinde ifade edilen dönüşümler ışığında a_i^{\prime} , a_i^{\prime} , H' operatörleri (3.39)-(3.41) denklemlerindeki a_i , a_i^* , H operatörlerinden farklı olmasına rağmen, söz konusu sistem için araştırılan simetrisinin varlığı a_i^{\prime} , a_i^* , H' operatörlerinin de (3.39)-(3.41) denklemlerindeki eşitlikleri sağlamasını gerektirir. Bu durum dönüşüm matrisi M' nin elemanları arasında aşağıdaki eşitliklerin varlığını zorunlu kılar:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jl} = \frac{q_i q_l}{q_j q_k} \alpha_{jl} \alpha_{ik} \quad (5.12)$$

$$\alpha_{ik} \beta_{jl} = \frac{q_i}{q_j q_k q_l} \beta_{jl} \alpha_{ik} \quad (5.13)$$

$$\beta_{ik} \beta_{jl} = \frac{q_i q_k}{q_j q_l} \beta_{jl} \beta_{ik} \quad (5.14)$$

$$\alpha_{ik} \alpha_{jl}^* = \frac{q_i q_j}{q_k q_l} \alpha_{jl}^* \alpha_{ik} \quad (5.15)$$

$$\alpha_{ik} \beta_{jl}^* = \frac{q_i q_j q_l}{q_k} \beta_{jl}^* \alpha_{ik} \quad (5.16)$$

$$\beta_{ik} \beta_{jl}^* = q_i q_j q_k q_l \beta_{jl}^* \beta_{ik} \quad (5.17)$$

$$\alpha_{ik}\eta_j = \frac{q_i}{q_j q_k} \eta_j \alpha_{ik} \quad (5.18)$$

$$\alpha_{ik}\gamma_j = \frac{q_i}{q_j} \gamma_j \alpha_{ik} \quad (5.19)$$

$$\beta_{ik}\eta_j = \frac{q_i q_k^2}{q_j} \eta_j \beta_{ik} \quad (5.20)$$

$$\beta_{ik}\gamma_j = \frac{q_i}{q_j} \gamma_j \beta_{ik} \quad (5.21)$$

$$\eta_i \eta_j = \frac{q_i}{q_j} \eta_j \eta_i \quad (5.22)$$

$$\eta_i \gamma_j - \frac{q_i}{q_j} \gamma_j \eta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{q_i}{q_j} \alpha_{jk} \beta_{ik} - \alpha_{ik} \beta_{jk} \right) \quad (5.23)$$

$$\gamma_i \gamma_j = \frac{q_i}{q_j} \gamma_j \gamma_i \quad (5.24)$$

$$\alpha_{ik} \chi_3 = \frac{q_i^2}{q_k} \chi_3 \alpha_{ik} \quad (5.25)$$

$$\alpha_{ik} \chi_4 = q_i^2 \chi_4 \alpha_{ik} \quad (5.26)$$

$$\beta_{ik} \chi_3 = q_i^2 q_k^2 \chi_3 \beta_{ik} \quad (5.27)$$

$$\beta_{ik} \chi_4 = q_i^2 \chi_4 \beta_{ik} \quad (5.28)$$

$$\eta_i \chi_3 = q_i^2 \chi_3 \eta_i \quad (5.29)$$

$$\eta_i \chi_4 = q_i^2 \chi_4 \eta_i \quad (5.30)$$

$$\gamma_i \chi_3 = q_i^2 \chi_3 \gamma_i \quad (5.31)$$

$$\gamma_i \chi_4 = q_i^2 \chi_4 \gamma_i \quad (5.32)$$

$$\alpha_{ik} \eta_j^* = \frac{q_i q_j}{q_k} \eta_j^* \alpha_{ik} \quad (5.33)$$

$$\alpha_{ik} \gamma_j^* = q_i q_j \gamma_j^* \alpha_{ik} \quad (5.34)$$

$$\beta_{ik} \eta_j^* = q_i q_j q_k^2 \eta_j^* \beta_{ik} \quad (5.35)$$

$$\beta_{ik} \gamma_j^* = q_i q_j \gamma_j^* \beta_{ik} \quad (5.36)$$

$$\eta_i \eta_j^* = q_i q_j \eta_j^* \eta_i \quad (5.37)$$

$$\eta_i \gamma_j^* - q_i q_j \gamma_j^* \eta_i = \frac{1}{2} (\chi_3 \delta_{ij} + q_i q_j \beta_{jk}^* \beta_{ik} - \alpha_{ik} \alpha_{jk}^*) \quad (5.38)$$

$$\gamma_i \gamma_j^* - q_i q_j \gamma_j^* \gamma_i = \chi_4 \delta_{ij} \quad (5.39)$$

Ancak bu eşitlikler sistemin simetrisini ifade etmek için yazılan matrisin bir kuantum matris grubu olduğunu göstermeye yetmez. Söz konusu matrisin kuantum matris grubu olduğunu söyleyebilmek için, matrisin elemanları arasındaki cebirin Hopf cebiri olması gerekir [28]. (5.12)-(5.39) bağıntıları ile ifade edilen cebirin Hopf cebiri olduğunu gösterebilmek için bu bağıntılarda bulunan operatörlerin koçarpımlarının Hopf cebiri aksiyomlarını sağlayacak şekilde yazılması gerekir. Bu durum matris kuantum grupları söz konusu olduğunda daha kolaydır. Öyle ki söz konusu operatörlerin ko-çarpımları $\Delta: M \rightarrow M \otimes M$

$$\Delta(M) = M \dot{\otimes} M \quad (5.40)$$

ifadesi ışığında tanımlanabilir. Yani

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \beta_{ik}^* & \alpha_{ik}^* & \eta_i^* & \gamma_i^* \\ 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta(M) = M \dot{\otimes} M &= \begin{pmatrix} \alpha_{im} & \beta_{im} & \eta_i & \gamma_i \\ \beta_{im}^* & \alpha_{im}^* & \eta_i^* & \gamma_i^* \\ 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} \alpha_{mk} & \beta_{mk} & \eta_m & \gamma_m \\ \beta_{mk}^* & \alpha_{mk}^* & \eta_m^* & \gamma_m^* \\ 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta(\alpha_{ik}) & \Delta(\beta_{ik}) & \Delta(\eta_i) & \Delta(\gamma_i) \\ \Delta(\beta_{ik}^*) & \Delta(\alpha_{ik}^*) & \Delta(\eta_i^*) & \Delta(\gamma_i^*) \\ 0 & 0 & \Delta(\chi_3) & \Delta(\chi_4) \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.42)$$

olarak yazılabilir. Bu matris tensör çarpımı açık olarak yazıldığında, ko-çarpım elemanları

$$\Delta(\alpha_{ik}) = \alpha_{im} \otimes \alpha_{mk} + \beta_{im} \otimes \beta_{mk}^* \quad (5.43)$$

$$\Delta(\beta_{ik}) = \alpha_{im} \otimes \beta_{mk} + \beta_{im} \otimes \alpha_{mk}^* \quad (5.44)$$

$$\Delta(\eta_i) = \alpha_{im} \otimes \eta_m + \beta_{im} \otimes \eta_m^* + \eta_i \otimes \chi_3 \quad (5.45)$$

$$\Delta(\gamma_i) = \alpha_{im} \otimes \gamma_m + \beta_{im} \otimes \gamma_m^* + \eta_i \otimes \chi_4 + \gamma_i \otimes 1 \quad (5.46)$$

$$\Delta(\beta_{ik}^*) = \beta_{im}^* \otimes \alpha_{mk} + \alpha_{im}^* \otimes \beta_{mk}^* \quad (5.47)$$

$$\Delta(\alpha_{ik}^*) = \beta_{im}^* \otimes \beta_{mk} + \alpha_{im}^* \otimes \alpha_{mk}^* \quad (5.48)$$

$$\Delta(\eta_i^*) = \beta_{im}^* \otimes \eta_m + \alpha_{im}^* \otimes \eta_m^* + \eta_i^* \otimes \chi_3 \quad (5.49)$$

$$\Delta(\gamma_i^*) = \beta_{im}^* \otimes \gamma_m + \alpha_{im}^* \otimes \gamma_m^* + \eta_i^* \otimes \chi_4 + \gamma_i^* \otimes 1 \quad (5.50)$$

$$\Delta(\chi_3) = \chi_3 \otimes \chi_3 \quad (5.51)$$

$$\Delta(\chi_4) = \chi_3 \otimes \chi_4 + \chi_4 \otimes 1 \quad (5.52)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bi-cebirlerdeki ko-cebirin cebir homomorfizmlerinden hatırlanacağı üzere ko-çarpım ve standart çarpım birbirleri ile uyumludur. Buna göre dönüşüm matrisinin elemanları arasındaki (5.12)-(5.39) bağıntıları, aynı şekilde (5.43)-(5.52) eşitlikleriyle verilen ko-cebir elemanları için de sağlanmak zorundadır. Bu çerçevede yapılan işlemler sonunda ko-cebir elemanlarının da (5.12)-(5.39) bağıntılarını sağladığı görülmüştür. Ayrıca bu hesaplamalar esnasında göz önüne alınan denklemlere ek olarak

$$\chi_3 \chi_4 = \chi_4 \chi_3 \quad (5.53)$$

ifadesi elde edilmiştir. Bu ifadenin de ko-cebir elemanları için sağlanıp sağlanmadığı kontrol edildiğinde, tutarlı yapının bozulmadığı görülmüştür.

Ko-birimin

$$\varepsilon(M) = 1 \quad (5.54)$$

tanımı çerçevesinde birim matris yardımıyla elde edilebileceği aşikardır. Bu sebeple, Hopf cebiri yapısının varlığından bahsedebilmemiz

$$S(M) = M^{-1} \quad (5.55)$$

eşitliği çerçevesinde tanımlanan antipodları bulabilmemize bağlıdır. Yani dönüşüm matrisi M 'nin tersinin varlığı incelenmelidir. M matrisinin birbirleri ile değişmeli olmayan operatörler de içermesi sebebiyle bu matrisin tersini bulmak çok da kolay değildir. Öyle ki matris elemanı olan operatörler arasındaki bağıntılar farklı grup parametreleri içermektedir. Bu durumu biraz daha kolaylaştırmak için M dönüşüm matrisini aşağıdaki gibi yazmak uygun olacaktır.

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} & \eta_i & \gamma_i \\ \beta_{ik}^* & \alpha_{ik}^* & \eta_i^* & \gamma_i^* \\ 0 & 0 & \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \Gamma \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

Burada A , Γ ve B matrisleri sırasıyla

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} \\ \beta_{ik}^* & \alpha_{ik}^* \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \eta_i & \gamma_i \\ \eta_i^* & \gamma_i^* \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

$$B = \begin{pmatrix} \chi_3 & \chi_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

şekindedir. M matrisi ile onun tersi M^{-1} çarpıldığında birim matris 1 elde edileceğinden yani $MM^{-1} = M^{-1}M = 1$ olacağından, (5.56)'deki forma göre M^{-1}

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\Gamma B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

şeklinde olmalıdır. Burada M^{-1} ' in bulunması için aslında A^{-1} ve B^{-1} ' in bulunması yeterli olacaktır. B matrisinin elemanlarının değişmeli olmasından dolayı tersinin bulunması kolaydır. Dolayısıyla M matrisinin tersinin varlığından söz etmek için A matrisinin tersinin varlığına odaklanmak uygun olacaktır. A matrisinin elemanları farklı q ve p parametreleri içerdiğinden, bu matrisin tersini bulmak için Schirmacher' in çok parametrelili deforme genel lineer grup $GL_{q_{ij}, p_{ij}}(n)$ için yaptığı çalışmayı hatırlamak uygun olacaktır [30]. Öyle ki Schirmacher' in ele aldığı grup bir kuantum grubu olduğundan bu matrisin tersinin varlığından bahsetmek mümkündür. Eğer burada Schirmacher' in ele aldığı matrisin elemanları ile bizim ele aldığımız A matrisinin elemanları arasındaki komütasyon bağıntıları birbirleriyle tutarlı çıkarsa, bu durum bizi söz konusu A matrisinin, Schirmacher' in göz önüne aldığı $GL_{q_{ij}, p_{ij}}(n)$ kuantum matris grubunun özel bir hali olduğu sonucuna götürecektir, dolayısıyla da A matrisinin tersi olduğu sonucuna ulaştıracaktır. Bunun için önce Schirmacher' in $GL_{q_{ij}, p_{ij}}(n)$ grubu için elde ettiği komütasyon bağıntılarını yazmak gerekir. Bu bağıntılar

$$A^i_a A^i_b = p_{ab} A^i_b A^i_a \quad (5.61)$$

$$A^i_a A^j_a = q_{ij} A^j_a A^i_a \quad (5.62)$$

$$A^i_b A^j_a = \frac{q_{ij}}{p_{ab}} A^j_a A^i_b \quad (5.63)$$

$$A^i_a A^j_b = \frac{p_{ab}}{p_{ij}} A^j_b A^i_a + \left(p_{ab} - \frac{1}{q_{ab}} \right) A^i_b A^j_a \quad (5.64)$$

şeklinde dir. Buradaki üst indisler i ve j ' ler $GL_{q_{ij}, p_{ij}}(n)$ kuantum matris grubundaki satır numaralarını, alt indisler a ve b ' ler de sütun numaralarını temsil etmektedir. (5.61)-(5.64)' daki bağıntılar $i < j$ ve $a < b$ için geçerlidir.

A matrisinin elemanları için elde edilmiş olan komütasyon bağıntılarını

$$\alpha_{ik}\alpha_{jl} = \frac{q_i q_l}{q_j q_k} \alpha_{jl} \alpha_{ik} \quad (5.65)$$

$$\alpha_{ik}\beta_{jl} = \frac{q_i}{q_j q_k q_l} \beta_{jl} \alpha_{ik} \quad (5.66)$$

$$\beta_{ik}\beta_{jl} = \frac{q_i q_k}{q_j q_l} \beta_{jl} \beta_{ik} \quad (5.67)$$

$$\alpha_{ik}\alpha_{jl}^* = \frac{q_i q_j}{q_k q_l} \alpha_{jl}^* \alpha_{ik} \quad (5.68)$$

$$\alpha_{ik}\beta_{jl}^* = \frac{q_i q_j q_l}{q_k} \beta_{jl}^* \alpha_{ik} \quad (5.69)$$

$$\beta_{ik}\beta_{jl}^* = q_i q_j q_k q_l \beta_{jl}^* \beta_{ik} \quad (5.70)$$

şeklinde topluca tekrar yazmak mümkündür. (5.61)-(5.64) bağıntıları ile (5.65)-(5.70) komütasyon bağıntılarını kıyaslamak için indis notasyonunda yazılan A matrisinin açık olarak yazılması gerekir. A matrisinin elemanlarının indisleri için $i, k = 1, 2, 3$ değerleri göz önüne alındığında 6×6 'lık aşağıdaki matris elde edilir.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \\ \beta_{11}^* & \beta_{12}^* & \beta_{13}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* & \alpha_{13}^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* & \beta_{23}^* & \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* & \alpha_{23}^* \\ \beta_{31}^* & \beta_{32}^* & \beta_{33}^* & \alpha_{31}^* & \alpha_{32}^* & \alpha_{33}^* \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

Bu matrise karşı gelen $GLq_{ij}, p_{ij}(n)$ kuantum matris grubu da Schirmacher' in çalışmasında kullandığı notasyon ışığında

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 & A_6^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 & A_6^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 & A_6^3 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & A_4^4 & A_5^4 & A_6^4 \\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & A_4^5 & A_5^5 & A_6^5 \\ A_1^6 & A_2^6 & A_3^6 & A_4^6 & A_5^6 & A_6^6 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

şeklinde ifade edilebilir. (5.72)'deki matris elemanları için yazılan (5.61)-(5.64) komütasyon bağıntıları ile (5.71)'daki matris elemanları için yazılan (5.65)-(5.70) komütasyon bağıntıları mukayese edildiğinde;

$$q_{ij} = p_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{q_i}{q_j} & i < j \leq 3 \\ q_i q_j & i < j \quad 1 < i \leq 3 \quad 3 < j \leq 6 \\ \frac{q_j}{q_i} & 3 < i < j \leq 6 \end{cases} \quad (5.73)$$

eşitlikleri ışığında bu komütasyon bağıntılarının aynı olduğu söylenebilir. Yani (5.71)'de yazılan A matrisi Schirmacher' in göz önüne aldığı çok parametrelili deforme $GLq_{ij}, p_{ij}(n)$ 'in özel bir halidir. Eşitlik (5.73)'de elde edilen sonuç $i, k = 1, 2, \dots, d$ olacak şekilde genelleştirildiğinde

$$q_{ij} = p_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{q_i}{q_j} & i < j \leq d \\ q_i q_j & i < j \quad 1 < i \leq d \quad d < j \leq 2d \\ \frac{q_j}{q_i} & d < i < j \leq 2d \end{cases} \quad (5.74)$$

A matrisinin $GL_{q_{ij}, q_{ij}^{-1}}(2d)$ şeklinde ifade edilen bir kuantum matris grubu olduğu söylenebilir. Yani, göz önüne alınan dönüşüm matrisi M bir kuantum matris grubudur. Burada dikkat edilecek nokta A matrisindeki bağımsız deformasyon parametre sayısının d olmasıdır.

Dönüşüm matrisi M 'nin elemanları arasındaki (5.12)-(5.39) ve (5.53) bağıntılarıyla ifade edilen komütasyon bağıntılarını

$$RM_1M_2 = M_2M_1R \quad (5.75)$$

eşitliğini sağlayan bir R -Matrisi yardımıyla daha öz bir şekilde ifade etmek mümkündür. (5.75) eşitliğindeki M_1 ve M_2 , M dönüşüm matrisini göstermek üzere

$$M_1 = M \otimes 1 \quad (5.76)$$

$$M_2 = 1 \otimes M \quad (5.77)$$

şeklindedir. Yani

eşitliğini kullanarak elde etmek daha kolay olacaktır [31]. (5.79) eşitliğindeki C_1C_2 ve C_2C_1 ifadeleri sırasıyla

$$C_1C_2 = \begin{pmatrix} a_i \\ a_i^* \\ H \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_j \\ a_j^* \\ H \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i a_j \\ a_i a_j^* \\ a_i H \\ a_i \\ a_i^* a_j \\ a_i^* a_j^* \\ a_i^* H \\ a_i^* \\ H a_j \\ H a_j^* \\ HH \\ H \\ a_j \\ a_j^* \\ H \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

$$C_2C_1 = \begin{pmatrix} a_j \\ a_j^* \\ H \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_i \\ a_i^* \\ H \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j a_i \\ a_j^* a_i \\ H a_i \\ a_i \\ a_j a_i^* \\ a_j^* a_i^* \\ H a_i^* \\ a_i^* \\ a_j H \\ a_j^* H \\ HH \\ H \\ a_j \\ a_j^* \\ H \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir.

(5.75) veya (5.79) eşitliği kullanılarak elde edilen R -Matrisinin elemanlarının indis notasyonu ile ifade edilmesinin matris elemanlarının tam olarak anlaşılmasında olası bir karmaşaya sebep olmaması için R -Matrisinin elemanlarını sadece $i, j, k, l = 1, 2$ için yazmak uygun olacaktır. Öyle ki bu R -Matrisi göz önüne alınan (3.39)-(3.41) eşitlikleri ile ifade edilen d -boyutlu d -parametrelili deforme bozon cebirinin dönüşüm matrisi için yazılmış bir matris olmaktan ziyade, $d = 2$ durumuna karşı gelen yapı için elde edilen bir R -Matrisi olacaktır. $i, j, k, l = 1, 2$ için (5.75) veya (5.79) eşitliği göz önüne alınırsa 36×36 'lık bir R -Matrisi elde edilir. Bu R -Matrisinin sıfırdan farklı elemanları da

$$R_1^1 = R_6^6 = R_8^8 = R_{12}^{12} = R_{15}^{15} = 1 \quad (5.82)$$

$$R_{18}^{18} = R_{22}^{22} = R_{24}^{24} = R_{29}^{29} = R_{30}^{30} = R_{31}^{31} = 1 \quad (5.83)$$

$$R_{32}^{32} = R_{33}^{33} = R_{34}^{34} = R_{35}^{35} = R_{36}^{36} = 1 \quad (5.84)$$

$$R_2^2 = R_{21}^{21} = \frac{q_2}{q_1} \quad (5.85)$$

$$R_7^7 = R_{16}^{16} = \frac{q_1}{q_2} \quad (5.86)$$

$$R_3^3 = R_5^5 = R_{27}^{27} = \frac{1}{q_1} \quad (5.87)$$

$$R_{10}^{10} = R_{11}^{11} = R_{28}^{28} = \frac{1}{q_2} \quad (5.88)$$

$$R_4^4 = R_9^9 = \frac{1}{q_1 q_2} \quad (5.89)$$

$$R_{13}^{13} = R_{17}^{17} = R_{25}^{25} = q_1^2 \quad (5.90)$$

$$R_{20}^{20} = R_{23}^{23} = R_{26}^{26} = q_2^2 \quad (5.91)$$

$$R_{14}^{14} = R_{19}^{19} = q_1 q_2 \quad (5.92)$$

$$R_{30}^3 = R_{35}^3 = -\frac{1}{2q_1^2} \quad (5.93)$$

$$R_{30}^{10} = R_{35}^{10} = -\frac{1}{2q_2^2} \quad (5.94)$$

$$R_{30}^{13} = R_{35}^{13} = R_{30}^{20} = R_{35}^{20} = \frac{1}{2} \quad (5.95)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Buradaki üst indisler 36×36 'lık R-Matrisinin satırlarını ve alt indisler de sütunlarını temsil etmektedir.

Elemanları (5.82)-(5.95) eşitlikleri ile ifade edilen R -Matrisi

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} \quad (5.96)$$

şeklinde yazılan Yang-Baxter denklemini de sağlar. (5.96) eşitliğindeki R_{12} , R_{13} ve R_{23} matrisleri

$$(R_{12})_{def}^{abc} = R_{de}^{ab} \delta_f^c \quad (5.97)$$

$$(R_{13})_{def}^{abc} = R_{df}^{ac} \delta_e^b \quad (5.98)$$

$$(R_{23})_{def}^{abc} = R_{ef}^{bc} \delta_d^a \quad (5.99)$$

eşitlikleri ışığında bulunabilir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada (3.39)-(3.41) eşitlikleri ile ifade edilen d -boyutlu, d -parametrelili deforme bozon cebirinin inhomojen kuantum değişmezlik grubunun varlığı, elemanları (5.12)-(5.39) ve (5.53) eşitliklerini sağlayan (5.7) eşitliği ile ifade edilen bir kuantum matrisi yazılablmesinin mümkün olabileceğinin gösterilmesi ile ortaya konmuştur [32]. Eşitlik (5.56)' da A ile gösterilen matrisin, (5.74) eşitlikleri ışığında çok parametrelili genel lineer kuantum matris grubunun özel bir hali olduğu gösterilmiştir. Bu sebeple bundan önce yapılan çalışmaların [29,33,34] isimlendirilmelerine benzer şekilde, söz konusu değişmezlik grubunu $BIGL_{q_{ij}, q_{ij}^{-1}}(2d)$ şeklinde isimlendirmek mümkündür. Burada B bozonik, I inhomojen, $GL_{q_{ij}, q_{ij}^{-1}}(2d)$ de $2d$ boyutlu, çok parametrelili deforme genel lineer kuantum grubunu ifade eden kısaltmalardır. İnhomojen kuantum matris grubunun homojen bölümü için her ne kadar çok sayıda deformasyon parametresinden bahsedilse de $p_{ij} = q_{ij}^{-1}$ eşitlikleri sebebiyle bağımsız deformasyon parametresi sayısının d adet olacağına dikkat edilmelidir.

Literatürde d -boyutlu ve d -parametrelili deforme bozon cebirinin farklı limit durumları için değişmezlik grubunun araştırıldığı birçok çalışma [28-29] ,[33-36] yapılmıştır. Mevcut çalışmanın $q_i = q_j = q$ limit durumunda q -deforme bozonik Newton salıncısı için elde edilen sonuçları [29] verdiğini görmek hiç de zor değildir. Bu durum mevcut çalışma ile q -deforme bozonik Newton salıncısı için yapılan hesaplamaların daha genel halinin ortaya konduğu gerçeğini göstermektedir.

KAYNAKLAR

- [1] GASIOROWICZ, S., Quantum Physics, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1-25, USA, 2003.
- [2] SAKURAI, J. J., Modern Quantum mechanics, Revised Edition, TUAN S. F., Addison Wesley Publishing Company, 89-96, USA, 1994.
- [3] MACFARLANE, A. J., On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU_q(2)$, J. Phys. A, 22, 4581, 1989.
- [4] BIEDENHARN, L. C., The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators, J. Phys. A 22, L873, 1989.
- [5] ARIK, M., DEMIRCAN, E., TURGUT, T., EKINCI, L., MUNGAN, M., Fibonacci Oscillators, Z. Physik C, 55, 89, 1992.
- [6] KLAUDER, J. R., SUDARSHAN, E. C. G., Fundamentals of Quantum Optics, New York, Benjamin, 1968.
- [7] BALLESTEROS, A., CIVITARESE, O., HERRANZ, F.J., REBOIRO, M., Fermion-Boson Interactions and Quantum Algebras, Nucl-th/0212022, 2002.
- [8] ARIK, M., COON, D. D., LAM, Y. M., Operator Algebra of Dual Resonance Models, J. Math phys., Vol 16, pp, 1776-1779, 1975.
- [9] ARIK, M., COON, D. D., Hilbert Spaces of Analytic Functions and Generalized Coherent States, J. Math. Phys., Vol. 17, pp. 524-527, 1976.
- [10] BONATSOS, D., DASKALOYANNIS, C., Quantum Groups and Their Applications in Nuclear Physics, <http://arxiv.org/abs/nucl-th/9909003>, 1999.
- [11] PUSS, W., WORONOWICZ, S., Twisted second quantization, Rep. Math. Phys., Vol. 27, pp. 231, 1989.

- [12] ARIK, M., ATAKISHIYEV, N. M., WOLF, K.B., Quantum Algebraic Structures Compatible with the Harmonic Oscillator Newton Equation, J. Phys A, Vol. 32, pp. L371-L376, 1999
- [13] ALİM, H., İki Boyutlu Deforme Bozon Cebiri İçin İnhomojen Kuantum Değişmezlik Grubu, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.
- [14] ARIKAN, A. S., Multiparameter Generalization of Deformed Particle Algebras, Doktora Tezi, Bogaziçi Üniv., Fen Bilimleri Enstitüsü, 2004.
- [15] GILMORE, R., Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications, John Wiley & Sons, Inc., 1-94 USA, 1974.
- [16] MAJID, S., Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge University Press, 1-6, Great Britain, 1995.
- [17] ROLNICK, W. B., The Fundamental Particles and Their Interactions, Addison Wesley Publishing Company, 1994.
- [18] IACHELLO, F., Lie Algebras and Applications, Springer, 1-3, 15-38, USA, 2006.
- [19] ARFKEN, G. B., WEBER, H. J., Mathematical Methods for Physicists, Elsevier Academic Press, 241-266, USA, 2005.
- [20] RYDER, L. H., Quantum Field Theory, Second Edition, Cambridge University Press, 29-35, United Kingdom, 1996.
- [21] KAYSERİLİOĞLU, U., Quantum Group Structures Associated With Invariances of Some Physical Algebras, Doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2005.
- [22] BIEDENHARN, L.C., LOHE M. A., Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras, World Scientific, 1995.
- [23] KULISH, P., RESHETIKHIN, N., Quantum Linear Problem for the Sine-Gordon Equation and Higher Representations, Zap. Nauch. Seminarov LOMI, 101 1981, 101-110 J. Soviet Math. 23, 2435-2441, 1983.
- [24] SKLYANIN, E., TAKHATAJAN, L., FADDEEV L., Quantum Inverse Problem Method I, Theor. Math. Phys. 40 688-706 1979.

- [25] DRINFELD, V. G.. Quantum groups. Proc. Int. Congr. Math. Berkeley, 1:798, 1986.
- [26] JIMBO, M., Quantum R matrix for the generalized toda system, Comm. in Math. Phys., 102: 537–547, 1986.
- [27] WORONOWICZ, S. L., Compact matrix pseudogroups, Commun. Math. Phys. 111, 613, 1987.
- [28] ALİM, H., ALTINTAŞ, A. A., ARIK, M., ARIKAN, A. S., The Inhomogeneous Quantum Invariance Group of The Two Parameter Deformed Boson Algebra, International Journal of Theoretical Physics, Online First, Volume 49, Number 3, March, 2010.
- [29] ALTINTAŞ, A. A., ARIK, M., ARIKAN, A. S., The inhomogeneous quantum invariance group of the multi-dimensional q -deformed boson algebra, Cent. Eur. J. Phys., DOI: 10.2478/s11534-009-0077-x, 2009.
- [30] SCHIRRMACHER, A., The multiparametric deformation of $GL(n)$ and the covariant differential calculus on the quantum vector space, Z.Phys. C.P., Vol. 50, 321, 1991.
- [31] ARIK, M., GÜN, S., YILDIZ, A., Invariance quantum group of the fermionic oscillator Eur. Phys. J. C 27, 453, 2003.
- [32] ALTINTAŞ, A. A., ARIK, M., ARIKAN, A. S., DİL, E., D-Dimensional and D-Parameter Deformed Boson Algebra and The Inhomogeneous Invariance Group of This Algebra., (Journal of Mathematical Physics Dergisine gönderildi).
- [33] ARIK, M., KAYSERILIOGLU, U., Quantum invariance group of bosons and fermions, Boğaziçi University, preprint, hep-th/0304185.
- [34] ARIK, M., BAYKAL, A., Inhomogeneous quantum groups for particle algebras, Journal of Mathematical Physics, Volume 45, Number 11, 2004.
- [35] ALTINTAŞ, A. A., ARIK, M., The inhomogeneous quantum invariance group of commuting fermions, Central European Journal of Physics, DOI: 10.2478/s11534-006-0041-y, Research article, CEJP 5(1) 70–82, 2007.
- [36] ALTINTAŞ, A. A., ARIK, M., ARIKAN, A. S., The Inhomogeneous Quantum Invariance Group Of Q -Deformed Boson Algebra, Modern Physics Letters A, Volume: 24, Issue: 38, pp. 3137-3142, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Emre Dil, 28.10.1981 de Düzce' de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Düzce' de tamamladı. 1999 yılında Düzce Lisesi' nden mezun oldu ve aynı yıl Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik bölümünde başladığı lisans öğrenimini, 2004 yılında tamamladı. 2006 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik EABD' de başladığı yüksek lisans öğrenimini 2008 yılında tez aşamasında yarıda bıraktı. Ardından tekrar 2009 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik EABD' de yüksek lisans öğrenimine kaldığı yerden başlamış ve öğrenimine burada devam etmektedir. Ayrıca 2004–2009 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığına bağlı devlet okullarında sözleşmeli ve kadrolu öğretmenlik yaptıktan sonra, Ekim 2009' da Sinop Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik bölümüne, Sakarya Üniversitesi'ne 2547 sayılı Yükseköğretim Kanununun 35. Maddesine göre görevlendirilmek üzere araştırma görevlisi olarak atanmıştır. Şubat 2010' da Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başlamıştır ve şu an hala Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

Emre DİL