T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EN DİK İNİŞ YÖNTEMİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KENAN YILDIRIM

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. MUSTAFA ERÖZ

Haziran 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EN DİK İNİŞ YÖNTEMİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kenan YILDIRIM

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez. 02/ 06 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ERÖZ	**Doç. Dr. Mehmet ÖZEN**	**Yrd. Doç. Dr. Sıtkı DUMAN**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada benden desteklerini esirgemeyen, bana her zaman yardımcı olan çok kıymetli hocalarım Yrd.Doç.Dr.Mustafa ERÖZ ve Prof.Dr.Abdullah YILDIZ a teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca bana tez çalışmalarımda yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç.Dr. Muhsin İNCESU ya ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim kıymetli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{+}$	: $\mathcal{H}$ hilbert uzayındaki pozitif operatörler uzayı
$S_{\mathcal{H}}$	: $\mathcal{H}$ hilbert uzayındaki operatörler uzayı
X'	: X uzayının dual uzayı
$X \times Y$	: X ve Y uzaylarının kartezyen çarpımı
$\sigma(A)$	: A operatörünün spektral ayrışımı
$f_n \rightharpoonup f_0$	: Zayıf yakınsama
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\|x\|$	: x vektörünün normu
A^*	: A nın eş operatörü
$\mathcal{B}(X)$	: X üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\nabla\Phi$	: Φ nın gradyan fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: En dik iniş yöntemi, minimum nokta, gradient metodu

Bu çalışmada lineer ve nonlineer denklem takımlarının çözümünün bulunmasında oldukça önemli yeri olan ve operatörlerin maksimum veya minimum tespitinde kullanılan ve diğer yöntemlere göre çözüm için gerekli olan başlangıç noktası seçimini daha serbest kılan en dik iniş yönteminin teorisine ve uygulamalarına yer verilmiştir.

U normlu uzay ve Φ genellikle reel değerli, nonlineer fonksiyonel ve alttan sınırlı olsun. Alttan sınırlı olduğu için ve $\forall\, u \in U$ vektörü için $\Phi(u) \geq c$ olacak şekilde c sabiti vardır. Buna göre $\Phi(u)$ nin bir infimumu yani $\inf_{u \in U}\{\Phi(u)\}$ sayısı vardır. Bu çalışmada $\Phi(u^*) = \inf_{u \in U}\{\Phi(u)\}$ ve $u_n \to u^*$ olacak şekilde u_n dizisi varsa bunun için kullanılabilecek bir yaklaştırım yöntemi üzerinde durulmuştur.

Tezin birinci bölümünde ileride kullanılacak olan bazı teoremlere ve bilinmesi gereken temel tanımlara yer verilmiş ve ait oldukları kaynakça son kısımlarda numara ile belirtilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde çalışmanın asıl konusu olan En Dik İniş Yönteminin teorisi anlatılmış olup teorik bir uygulamaya yer verilmiştir.

Son bölüm olan üçüncü kısımda da yöntemin uygulaması niteliğinde birkaç uygulamaya yer verilmiştir. Bu bölümde yer alan uygulamaların çözümünde kullanılan matematiksel programlara ekler kısmında yer verilmiştir.

STEEPEST DESCENT METHOD AND ITS APPLICATIONS

SUMMARY

Keywords: Steepest descent , minimum point, gradient method

In this thesis, the use of steepest descent method in the approximate solution of the linear and nonlineer operator equations is investigated.

Some basic mathematical concepts are given in the first chapter.Some of them can be listed as Lipschtz condition, Banach and Hilbert space, Frechet derivative.

In the second chapter, detailed information about steepest descent method and its theory is presented.

In the following chapter, the application of steepest descent method to a linear differantial equation and to a system of linear equation is given. Additionally, by giving some examples, theoretical and practical results are displayed in the last chapter.

Also, the packet programs of the solutions obtained by steepest descent method are taken place in the appendix.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Lineer ve nonlineer denklem takımlarının çözümünün bulunması için ardışık yöntemler geliştirilmesi fikri öncelikle Isaac Newton tarafından 17.yüzyılda ortaya atılmış olup bugünkü bilinen adıyla Newton yöntemi geliştirilmiştir. Newton yönteminin geliştirilmesinden sonra bilim adamları tarafından birçok ardışık yöntem geliştirilmiş olup, bu yöntemlerden birisi de bu çalışmada ele alınan en dik iniş yöntemidir.

En dik iniş yöntemi operatörlerin maksimum veya minimumlarının tespitinde kullanılan ve lineer diferansiyel denklemlerde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılan oldukça kullanışlı bir ardışık yöntemdir.

Bu kısımda yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1. $\boldsymbol{X}$ bir $\boldsymbol{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|.\| : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{x} \to \|\boldsymbol{x}\|$ dönüşümü $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ ve $\forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}$ için

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
(N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$;
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı ya da sadece normlu uzay adı verilir [2] .

Tanım 1.1.2. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [2].

Tanım 1.1.3. X Banach uzayının D alt kümesinde tanımlı $A: D \to X$ operatörü verilmiş olsun. Eğer

$$\forall\, x, y \in D \ \text{ için } \quad \|Ax - Ay\| \ \leq \alpha \|x - y\|$$

olacak şekilde $\alpha > 0$ sayısı varsa $A : D \to X$ operatörüne Lipschitz koşulunu sağlıyor denir ve α sayısına da Lipschitz sabiti adı verilir [2] .

Tanım 1.1.4. $K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.
$(.\,,.) : X \times X \to K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(.\,,.)$ ye X üzerinde bir iç çarpım , $(X, (.\,,.))$ ikilisine de iç çarpım uzayı adı verilir:

a) Her $x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
b) Her $x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (Kompleks eşlenik) ;
c) Her $x, y \in X$ ve $a \in K$ için $(ax, y) = a(x, y)$;
d) Her $x, y, z \in X$ için $(x + y\,, z) = (x, z) + (y, z)$ [2].

Tanım 1.1.5. Bir $(X\,, (.\,,.))$ iç çarpım uzayı $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ normuna göre tam ise yani $(X\,, (.\,,.))$ içindeki her Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsarsa bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [2].

Tanım 1.1.6. X bir K sayı cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir normlu uzay olsun.X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $L(X, K)$ Banach uzayına X in normlu duali denir ve X' ile gösterilir [2].

Teorem 1.1.7. (Riesz Gösterilim Teoremi). $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $f \in \mathcal{H}'$ ise her $u \in \mathcal{H}$ için $f(u) = (u, u_f)$ olacak şekilde tek bir $u_f \in \mathcal{H}$ vektörü vardır ve fonksiyonelin normu $\|f\| = \|u_f\|$ ile verilir [1].

Tanım 1.1.8. X normlu bir uzay X uzayının duali X' olmak üzere, $X = X''$ ise X uzayına refleksif uzay adı verilir [2] .

Tanım 1.1.9. $(X, \|.\|)$ normlu bir uzay olsun. X in sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa $(X, \|.\|)$ uzayına ayrılabilir normlu uzay adı verilir [2] .

Teorem 1.1.10. U normlu vektör uzayı olmak üzere $U^{'}$ duali ayrılabilirse U da ayrılabilirdir [1] .

Teorem 1.1.11. Bir Banach uzayı ancak ve ancak duali refleksif ise refleksifdir [1].

Teorem 1.1.12. Bir refleksif Banach uzayının kapalı bir alt uzayıda refleksiftir [1].

Tanım 1.1.13. Bir V vektör uzayının boş olmayan bir kümesi A olsun. V nin A kümesini içine alan bütün alt uzaylarının arakesitine A nın Lineer kabuğu adı verilir. Dolayısıyla A alt kümesinin lineer kabuğu bu kümeyi içine alan en küçük alt uzaydır [1].

Tanım 1.1.14. Bir V uzayının bir A alt kümesinin lineer kabuğu V de yoğunsa A kümesi V uzayında bir temel küme adını alır [1].

Teorem 1.1.15. Tanım bölgesi sayılabilir olan bir dönüşümün değer bölgesi de sayılabilir bir kümedir [1].

Teorem 1.1.16. X ve Y sayılabilir kümeler olduğu taktirde $X \times Y$ kümesi de sayılabilirdir [1].

Teorem 1.1.17. Sayılabilir bir kümenin tüm sonlu altkümeleri ailesi de sayılabilirdir [1].

Teorem 1.1.18. Bir normlu uzay ancak ve ancak sayılabilir bir temel kümesi varsa ayrılabilirdir [1].

Tanım 1.1.19. $\{u_n\} \subset U$ dizisi bir $u_0 \in U$ noktasına güçlü yakınsıyorsa $u_n \rightarrow u_0$ ile gösterilir bu durumda güçlü yakınsama $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\| = 0$ anlamına gelir

Tanım 1.1.20. Her $f \in U'$ için sonlu bir $\lim_{n\to\infty} f(u_n)$ sayısı varsa u_n dizisine zayıf yakınsak bir dizi denir. $\{ u_n\} \in U$ dizisi bir $u_0 \in U$ vektörüne zayıf yakınsayan bir dizi ise her $f \in U'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n - u_0) = 0$$

yada eşdeğer anlamda $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u_0)$ sağlanır. $u_0 \in U$ ya $\{ u_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir [1].

Görülüyor ki zayıf yakınsamada vektör dizilerinin yerini skaler sayı dizileri almıştır. $u_n \rightharpoonup u_0$ ile zayıf yakınsamayı göstereceğiz. $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \alpha_f \in \mathbb{F}$ olsa da her $f \in U'$ için $f(u_0) = \alpha_f$ olacak şekilde bir $u_0 \in U$ bulunmayabilir. Dolayısıyla zayıf yakınsak bir dizinin her zaman bir zayıf limitinin var olduğu söylenemez. Şimdi bir $\{f_n\} \subset U'$ fonksiyoneller dizisini göz önüne alalım. $f_n \rightarrow f_0 \in U'$ olursa $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_0\| = 0$ çıkar. $f_n \rightharpoonup f_0$ ise her $F \in U''$ için $\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f_0)$ olacaktır. Öte yandan zayıf* topolojiye göre her $u \in U$ vektörü için sonlu bir $\lim_{n\to\infty} f(u_n)$ sayısı varsa $\{f_n\}$ dizisine zayıf* yakınsak denir. $\{f_n\} \subset U'$ dizisi $f_0 \in U'$ fonksiyoneline zayıf yakınsayan bir dizi ise her u$\in U$ için $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f_0(u)$ olmalıdır. Dual uzaydaki zayıf* yakınsama $f_n \rightharpoonup f_0$ ile gösterilecektir. f_0 dizinin zayıf* limiti adını alır. Zayıf* yakınsayan bir dizinin her zaman bir zayıf* limitinin var olduğu söylenemez [1].

Teorem 1.1.21. Bir refleksif normlu uzayda her sınırlı dizinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır [1].

Tanım 1.1.22. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ bir lineer operatör olsun. $A = A'$ eşitliği geçerli ise A ya kendine eş operatör adı verilir [2].

Teorem 1.1.23. I birim operatör olmak üzere, her $A \in \mathcal{S}_H$ için

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1, u \in H} |(Au, u)|$$

olur. Ayrıca

$$m = \inf_{\|u\|=1} (Au, u) \quad \text{ve} \quad M = \sup_{\|u\|=1} (Au, u) \quad \text{ise} \quad m\mathrm{I} \le A \le M\mathrm{I}$$

yazılabilir [1].

Teorem 1.1.24. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{+}$ pozitif operatörler uzayını göstermek üzere $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{+} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun . A nın tek bir $K = A^{1/2}$ karekökü vardır [1].

Tanım 1.1.25. Eğer $\forall h \in X$ için

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0, h)$$

limiti varsa bu limite F operatörünün x_0 noktasında Lagrange anlamında birinci varyasyonu denir [2].

Tanım 1.1.26. $A \in L(X, Y)$ olmak üzere F operatörünün $x_0 \in X$ noktasında $\delta F(x_0, h) = Ah$ şeklinde birinci varyasyonu varsa $F : X \to Y$ operatörü x_0 noktasında Gato türevlenebilir (G-türevlenebilir) denir, A operatörüne ise F operatörünün Gato türevi denir ve $A = F'(x_0)$ şeklinde yazılır [2].

Teorem 1.1.27. $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli $u \in U$ vektörü için ekstremum değerini alıyorsa ve bu nokta $Df(u)$ Gateaux türevi varsa $Df(u) = 0$ olur [2].

Tanım 1.1.28. U, V normlu vektör uzayları ve $T: U \to V$ bir operatör olsun.
$\Omega = D(T) \subseteq U$ bir açık küme olmak üzere bir $u \in \Omega$ vektöründe

$$\lim_{\|\Delta u\| \to 0} \frac{\|T(u+\Delta u)-T(u)-T^{'}(u)\Delta u\|}{\|\Delta u\|} = 0 \quad , \qquad \forall \Delta u \in U \tag{1.1}$$

bağıntısı sağlanacak şekilde bir $T^{'}(u) \in \mathrm{B}(U,V)$ sürekli lineer operatörü varsa $T^{'}(u)$ operatörü T operatörünün u vektöründeki Frechet türevi adını alır.u vektörüne $T^{'}(u)$ operatörüne karşı getiren $T^{'}: U \to B(U,V)$ operatörüne ise T nin Frechet türevi adı verilir [2].

Doğal olarak T' operatörünün tanım bölgesi T nin Frechet türevinin tanımlanabildiği vektörleri içerir. (1.1) tanımının her $\epsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $\delta(\epsilon) > 0$ sayısının her $\|\Delta u\| < \delta$ için

$$\frac{\|T(u+\Delta u)-T(u)-T^{'}(u)\Delta u\|}{\|\Delta u\|} < \varepsilon$$

veya

$$\|T(u+\Delta u)-T(u)-T^{'}(u)\Delta u\| \leq \varepsilon\|\Delta u\|$$

olacak şekilde bulunabileceği anlamını taşıdığı açıktır. Buradan

$$T(u+w)-T(u) = T^{'}(u)(w) + \omega(u;w) \quad , \quad \lim_{\|\omega\| \to 0} \frac{\|\omega(u;w)\|}{\|w\|} = 0$$

yazılabileceği de görülür. Görülüyor ki normu yeter derecede küçük w vektörleri için Frechet türevi $T(u+w)-T(u)$ vektörünü sürekli bir lineer operatör aracılığıyla yaklaşık olarak ifade etme olanağını vermektedir. Bu tanımlar αT ve $T+S$ operatörleri u vektöründe Frechet-türetilebilirse

$$(\alpha T)^{'}(u) = \alpha T^{'}(u)$$

ve

$$(T+S)^{'}(u) = T^{'}(u) + S^{'}(u) = (T^{'}+S^{'})(u)$$

olacağını ifade eder [2].

Teorem 1.1.29. U bir normlu vektör uzayı, V bir Banach uzayı ve T:U→V sürekli olarak Frechet-türetilebilen bir operatör olsun. Bu koşullarda her $u_0, u_1 \in U$ vektör çifti için

$$T(u_1) - T(u_2) = \int_{u_0}^{u_1} T'(u)(u_1 - u_0)\, du$$

yazılabilir [1].

Teorem 1.1.30. U bir normlu vektör uzayı, V bir Banach uzayı ve T:U→V sürekli olarak Frechet-türetilebilen bir operatör olsun. Bir konveks $\Omega \subset U$ alt kümesinde T' Lipschitz sürekli, yani her u,w ∈ Ω vektörü için

$$\|T'(u) - T'(w)\| \leq k\|(u) - (w)\|, \ k > 0$$

ise her $u_0, u_1 \in \Omega$ için

$$\|T(u_1) - T(u_0) - T'(u_0)(u_1 - u_0)\| \leq \frac{1}{2}k\|u_1 - u_0\|^2$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

Teorem 1.1.31. U bir normlu uzay ve $M \in U$ bir alt uzayı olsun. Bir $u_0 \in U$ vektörü için $\delta = d(u_0, M) > 0$ bulunuyorsa her $u \in M$ vektörü için

$$f(u) = 0, f(u_0) = \delta \quad \text{ve} \quad \|f\| = 1$$

olacak şekilde bir f lineer fonksiyoneli vardır [1].

Teorem 1.1.32. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kendine eş bir operatör yani $A = A'$ ise spektrumu reel eksenin $[m, M]$ kapalı aralığı içinde bulunur. Bu aralığın uç noktaları da $\sigma(A)$ nın içindedir [1].

Teorem 1.1.33. A kendine eş kompakt bir operatördür. Sıfırdan farklı $\{\mu_n\}$ özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerinin ortonormal kümesi $\{\phi_n\}$ ise her $u \in \mathcal{H}$ için

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (u, \phi_n)\phi_n$$

bulunur [1].

Teorem 1.1.34. Her n pozitif tamsayısı için μ_n özdeğeri

$$|\mu_n| = \sup\{|(Au, u)| : \|u\| = 1 \; ve \; 1 \leq m \leq n-1 \; için \; (u, \phi_m) = 0\}$$

bağıntısını sağlar [1].

Teorem 1.1.35. A kendine eş kompakt bir operatör ve sıfırdan farklı özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerinin $\{\phi_n\}$ ortonormal kümesinin kapalı lineer kabuğu $\mathfrak{M}$ ise $\mathfrak{M}^{\perp} = \mathcal{N}(A)$ olur. Ancak ve ancak $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ olduğu taktirde $\{\phi_n\}$ bir tam ortonormal kümedir [1].

BÖLÜM 2. EN DİK İNİŞ YÖNTEMİ

$\Phi : U \to \mathbb{R}$ genellikle lineer olmayan bir reel değerli fonksiyonel ve U bir reel ya da kompleks normlu vektör uzayı olsun. U fonksiyoneli alttan sınırlı olsun, yani her $u \in U$ vektörü için $\Phi(\mathrm{u}) \geq c$ olacak şekilde bir c reel sabitinin bulunduğu kabul edilsin. Bu takdirde $\{\Phi(\mathrm{u})\}$ reel sayılar kümesi alttan sınırlı olduğu için bir infimumu, yani bir $\inf_{u\in U}\{\Phi(\mathrm{u})\}$ sayısı vardır.

Bu ikinci kısımda

$$\Phi(u^*) = \inf_{u\in U}\{\Phi(\mathrm{u})\}$$

olacak şekilde bir $u^* \in U$ vektörünün var olup olmadığı sorusu ve eğer varsa bu vektörü belirlemek için kullanılabilecek bir ardışık yaklaşım yöntemi irdelenmeye çalışılacaktır.

Bu şartlarda her

$$u \in U \text{ için } \Phi(u) \geq \Phi(u^*)$$

yazılabileceğinden genellikle takip edilecek yol

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_{\mathrm{n}}) = \inf_{u\in U}\{\Phi(\mathrm{u})\}$$

şeklinde Φ fonksiyonelini minimum kılan bir $\{u_{\mathrm{n}}\} \subset U$ dizisini oluşturmak olacaktır. $\{u_{\mathrm{n}}\}$ dizisi bir $u^* \in U$ vektörüne yakınsarsa Φ sürekli olduğu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_{\mathrm{n}}) = \Phi(u^*)$$

çıkar ve aranan çözüm de bulunmuş olur. Lineer ya da lineer olmayan operatörler içeren denklemlerin çözümü çoğu zaman uygun bir fonksiyoneli minimum kılan vektörün bulunmasına indirgenebilir.

Skaler sayılarla uğraşmanın getirdiği kolaylık özellikle bilgisayar kullanımı açısından elverişli algoritmaların geliştirilmesine olanak sağlar.

2.1. En Dik İniş Yöntemi

Φ Fonksiyonelinin Fréchet-türetilebilir olduğu kabul edilsin. $\Phi(u)$ bir $u^* \in U$ vektöründe minimum değerine ulaşıyorsa Teorem 1.1.27 e göre $\Phi'(u^*) = 0$ olmalıdır. Bu koşulu sağlayan vektörlere Φ fonksiyonelinin durağan noktaları adı verilir. Ancak kolayca anlaşılabileceği gibi bir durağan nokta bir lokal minimuma karşı gelir. Yani ancak

$$u \in B_r\,(u^*) \quad \text{ise} \quad \Phi(u) \geq \Phi(u^*)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliğin her $u \in U$ vektörü için geçerli olduğu global minimum $\Phi'(u^*) = 0$ koşulu ile her zaman belirlenemez. Ancak konveks bir fonksiyonel söz konusu olduğunda ise bu durum değişir. $\Phi{:}U \rightarrow \mathrm{R}$ fonksiyoneli her $0 \leq \alpha \leq 1$ sayısı ve $u_1, u_2 \in U$ vektörleri için

$$\Phi[\alpha u_1 + (1-\alpha)\, u_2] \leq \alpha\Phi(u_1) + (1-\alpha)\, \Phi(u_2)$$

bağıntısını sağlarsa konveksdir denir.

$\phi{:}\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ fonksiyonu $\phi\,(t; u, w) = \Phi\,(u + tw)$ olacak şekilde tanımlanırsa Φ konveks olduğundan ϕ de konveks bir fonksiyon olur.

Gerçekten kolayca

$$\begin{aligned}\phi\,[\alpha t_1 + (1-\alpha)\,t_2\,;u,w] &= \Phi[\,\alpha(u+t_1 w) + (1-\alpha)(u+t_2 w)] \\ &\le \alpha\,\Phi(u+t_1 w) + (1-\alpha)\Phi(u+t_2 w) \\ &= \alpha\phi(t_1;u,w) + (1-\alpha)\phi(t_2;u,w)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyonsa türevi azalmaz, yani

$t_2 \ge t_1$ ise $f'(t_2) \ge f'(t_1)$

olur. Bunu görmek için $t_3 \ge t_1$ olmak üzere

$$f[\alpha t_1 + (1-\alpha)\,t_3] \le \alpha f(t_1) + (1-\alpha) f(t_3)$$

bağıntısı ele alınsın. Ortalama değer teoremine göre

$$f(t_3) = f(t_1) + f'(t_2)(t_3 - t_1)\ , \quad t_2 \in (t_1, t_3)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\frac{f[\alpha t_1 + (1-\alpha)(t_3 - t_1)] - f(t_1)}{(1-\alpha)(t_3 - t_1)} \le f'(t_2)$$

eşitsizliği bulunur. $\alpha \to 1$ limitine geçilirse $f'(t_2) \ge f'(t_1)$ sonucu elde edilir [1].

Teorem 2.1.1. $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ konveks ve türetilebilir bir fonksiyonel ise $\boldsymbol{\Phi}' = \mathbf{0}$ denklemini sağlayan her $\boldsymbol{u}$ vektörü $\boldsymbol{\Phi}$ nin bir global minimumu olur.

İspat: $u^* \in U$ vektörü $\Phi'(u^*) = 0$ denklemini sağlasın. Φ konveks ve türetilebilir olduğundan herhangi bir $w \in U$ vektörü ve bir $\theta \in (0,1)$ sayısı için

$$\Phi(u^* + w) - \Phi(u^*) = \phi(1;\, u^*, w) - \phi(0;\, u^*, w) = \phi'(\theta;\, u^*, w)$$
$$\geq \phi'(0;\, u^*, w) = \Phi'(u^*)(w) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her

$w \in U$ $için$ $\Phi(u^* + w) \geq \Phi(u^*)$

bulunur. Bu kısımda bir Φ fonksiyonelini minimum yapan bir $\{ u_n \} \subset U$ dizisini oluşturmak için bir yöntem geliştirilecektir.

U normlu uzayının seçilen bir vektörü u olsun. Φ nin u vektöründe Fréchet-türetilebilir olduğu varsayılsın. Her hangi bir $w \in U$ vektörü için $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yukarıdaki gibi

$$\phi(t; u, w) = \Phi(u + tw), \quad t > 0$$

olarak ele alınsın. Φ nin u vektöründe w vektörü doğrultusundaki türevini

$$\frac{\partial \Phi(u)}{\partial w} = \frac{1}{||w||}\phi'(t; u, w)|_{t=0} = \frac{1}{||w||}\Phi'(u)(w) = \Phi'(u)(v_w)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $v_w = \frac{w}{\|w\||}$ vektörü w doğrultusunda boyu 1 olan birim vektördür. Bir u vektöründe her doğrultuda $\frac{\partial \Phi(u)}{\partial w}$ reel sayılar kümesi

$$\left|\frac{\partial \Phi(u)}{\partial w}\right| \leq \|\Phi'(u)\| \|v_w\| = \|\Phi'(u)\|$$

bağıntısı nedeniyle alttan ve üsten sınırlıdır ve

$$-\|\Phi'(u)\| \leq \frac{\partial \Phi(u)}{\partial w} \leq \|\Phi'(u)\|$$

eşitsizliği yazılabilir. Belli bir w doğrultusunda $\frac{\partial \Phi(u)}{\partial w}$ türevinin minimum olduğunu varsayılsın. Bu minimumun bir negatif sayıya karşı geleceği açıktır. Bu w vektörünün doğrultusuna Φ nın u vektöründe en dik iniş doğrultusu adı verilecektir. u vektöründen en dik iniş doğrultusunda ilerlendiği kabul edilirse t sayısı 0 dan başlayarak arttırıldığında $\Phi(u + tw)$ değeri $\Phi(u)$ değerine göre azalır, böylece fonksiyonelin minimumuna yaklaşılır. w vektörü doğrultusunda ilerlemeye sadece $\Phi(u + tw)$ fonksiyonelinin değeri yeniden artmaya başlayıncaya kadar devam etmek anlamlı olacaktır.

Bu şekilde bir durumla karşılaşıldığında durup yeni bir dik iniş doğrultusu belirlemek ve bu yeni doğrultuda ilerlemek gerekecektir. Bu yaklaşım iteratif olarak tekrar edilirse minimuma yaklaşacağı umulan vektörler dizisi oluşturulabilir. Bundan sonra bu şemaya nasıl işlerlik kazandırabileceği gösterilecektir.

Keyfi olarak seçilen bir u_0 vektöründen başlayarak $u_0, u_1, \dots, u_n$ vektörlerinin belirlendiği kabul edilsin.

u_n vektöründeki en dik iniş doğrultusu w_{n+1} olmak üzere u_{n+1} vektörü

$$u_{n+1} = u_n + t_{n+1} w_{n+1} \tag{2.1}$$

olarak ele alınsın. $t_{n+1} > 0$ sayısal parametresine iniş değeri adı verilecektir. Bu iniş değerini belirlemek için $\phi(\mathrm{t}; u_n, w_{n+1})$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyon $[0, t_{n+1}]$ aralığında azalacaktır.

t_{n+1} sayısı

$$\phi'(\mathrm{t}; u_n, w_{n+1}) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. $\phi(\mathrm{t}; u_n, w_{n+1})$ fonksiyonu $\mathrm{t} > 0$ ekseni üzerinde bir noktada bir minimuma erişirse bu noktayı t_{n+1} iniş değeri almak da ikinci bir seçenek olarak alınabilir. Φ fonksiyoneli sıkıca konveks olduğu takdirde iniş değeri için bu iki yaklaşım da aynı sonucu verir.

Her $0 < \alpha < 1$ sayısı ve $u_1, u_2 \in U$ için

$$\Phi(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) < \alpha\Phi(u_1) + (1-\alpha)\,\Phi(u_2)$$

eşitsizliği sağlanırsa Φ sıkıca konveks olarak adlandırılır. Bu takdirde $\phi(t;\, u, w)$ fonksiyonu da sıkıca konveks olur ve

$$t_2 > t_1 \quad \text{ise} \quad \phi'(t_2; u, w) > \phi'(\mathrm{t}_1; u, w)$$

bulunur. Yani $\phi'(\mathrm{t};\, u, w)$ artan bir fonksiyon olur.

Dolayısıyla

$$\phi'(\mathrm{t};\, u_n, w_{n+1}) = 0$$

denkleminin ancak bir kökü vardır ve Teorem 2.1.1. e göre bu sayının belirlediği u_{n+1} vektörü Φ fonksiyonelinin bir global minimumuna karşı gelir.

Çeşitli koşullar altında fonksiyonelin minimumuna erişen bir dizi sağlayan bu yaklaşım en dik iniş yöntemi adını alır.

w en dik iniş doğrultusu birim küre üzerinde $\Phi'(u)$ sürekli lineer fonksiyonelinin minimumuna karşı geldiğine w vektörü eğer varsa

$$\Phi'(u)(w) = \inf_{\|v\|=1} \Phi'(u)(v) = -\sup_{\|v\|=1} \{-\Phi'(u)(v)\} = -\|\,\Phi'(u)\|$$

denklemini sağlamalıdır. Bir lineer fonksiyonelin birim küre üzerinde minimumuna erişmesi zorunlu olmadığından bu denklemi sağlayan bir w vektörü bulunmayabilir. Yani bir u vektöründe bir en dik iniş doğrultusunun her zaman var olduğu söylenemez. Ancak U bir refleksif uzay olduğu takdirde en dik iniş doğrultusunun her zaman var olduğu gösterilebilir:

$$\|\Phi'(u)\| = \sup_{\|\upsilon\|\leq 1} |\Phi'(u)(\upsilon)|$$

bağıntısı göz önünde tutulursa bir

$\{\upsilon_n\} \subset B_1[0]$ dizisi $\lim_{n\to\infty} |\Phi'(u)(\upsilon_n)| = \| \Phi'(u)\|$

olacak şekilde bulunabilir. $\{\upsilon_n\}$ sınırlı bir dizi olduğu için Teorem 1.1.20 uyarınca bir υ^* vektörüne zayıf yakınsayan bir $\left\{\upsilon_n^{(1)}\right\}$ alt dizisi var olacaktır.

Yani

$\forall f \in U'$ için $\lim_{n\to\infty} f\left(\upsilon_n^{(1)}\right) = f(\upsilon^*)$

yazılabilir. Her f sürekli lineer fonksiyoneli için

$$\lim_{n\to\infty} \left|f\left(\upsilon_n^{(1)}\right)\right| = |f(\upsilon^*)| \leq \|f\|\|\upsilon^*\|$$

yazılabilir.

$$\left|f\left(\upsilon_n^{(1)}\right)\right| \leq \|f\|\left\|\upsilon_n^{(1)}\right\| \leq \|f\|$$

olduğuna dikkat edilirse

$\forall f \in U'$ için $\lim_{n\to\infty} \left|f\left(\upsilon_n^{(1)}\right)\right| \leq \|f\|$

bulunur. Buradan $\|\upsilon^*\| \leq 1$, yani $\upsilon^* \in B_1[0]$ çıkar.

$$\left\{\Phi'(u)\left(\upsilon_n^{(1)}\right)\right\}$$

alt dizisi de $\| \Phi'(u)\|$ sayısına yakınsayacağından

$$\|\Phi'(u)\| = \lim_{n\to\infty}|\Phi'(u)(v_n)| = \lim_{n\to\infty}\left|\Phi'(u)\left(v_n^{(1)}\right)\right| = |\Phi'(u)(v^*)|$$

sonucuna varılır. Öte yandan

$$|\Phi'(u)(v^*)| = \|\Phi'(u)\| \leq \|\Phi'(u)\|\|v^*\|$$

olduğuna göre

$$\|v^*\| \geq 1 \text{ yani } \|v^*\| = 1$$

bulunur.

Buna göre v^* ya da $-v^*$ vektörü en dik iniş doğrultusunu belirler. Bu doğrultunun tek olma zorunluluğunun bulunmadığı açıktır. Ancak U vektör uzayı sıkıca konveks olduğu takdirde bu doğrultuda tek olarak belirlenir. Sıkıca konveks bir uzayda

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \frac{1}{2}\|u_1 + u_2\| = 1$$

bağıntısını sağlayan $u_1,\ u_2 \in U$ vektörleri varsa $u_1 = u_2$ bulunur. Gerçekten bu durumda

$$\|u_1 + u_2\| = \|u_1\| + \|u_2\|$$

yazabileceğimizden $u_1 = \alpha u_2,\ \alpha > 0$ ve buradan da $\alpha = 1$ çıkar. Şimdi bir u vektöründe

$$\|u_1\| = \|u_2\| = 1$$

olmak üzere u_1 ve u_2 en dik iniş doğrultusunun bulunduğu varsayılsın. Bu varsayımla

$\frac{1}{2}\|v_1 + v_2\| \leq 1$ ve $\Phi'(u)(v_1) = \Phi'(u)(v_2) = -\|\Phi'(u)\|$

bağıntıları yazılabilir. Dolayısıyla da

$$\Phi'(u)\left[\frac{1}{2}(v_1 + v_2)\right] = -\|\Phi'(u)\|$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\frac{1}{2}\|v_1 + v_2\| \geq 1$$

çıkacağı açıktır ve

$$\frac{1}{2}\|v_1 + v_2\| = 1$$

bulunur. Buna göre U sıkıca konveks olduğu takdirde $v_1 = v_2$ olması gerektiği sonucuna varılır.

Şimdi bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış reel değerli ve alttan sınırlı bir Φ fonksiyoneli göz önüne alınsın. H refleksif olduğundan en dik iniş doğrultusu daima vardır, ayrıca iç çarpım uzayları sıkıca konveks olduğundan böyle bu doğrultu tek olarak belirlenir.

$\nabla\Phi(u) \in \mathrm{H}$ gradyan vektörüne başvurulduğu takdirde $\Phi'(u)$ sürekli lineer fonksiyoneli

$$\Phi'(u)(w) = (\nabla\Phi(u), w)_H$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu fonksiyonelin normu da

$$\|\Phi'(u)\|_{H'} = \|\nabla\Phi(u)\|_H$$

bağıntısını sağlar. Buna göre

$$v = -\nabla\Phi(u)/\|\nabla\Phi(u)\|_H$$

birim vektörü için

$$\Phi'(u)(v) = \left(\nabla\Phi(u), -\frac{\nabla\Phi(u)}{\|\nabla\Phi(u)\|_H}\right)_H = -\|\nabla\Phi(u)\|_H = -\|\Phi'(u)\|_{H'}$$

yazılabileceğinden

$$w = -\nabla\Phi(u)$$

vektörü bir u vektöründe tek olarak belirli en dik iniş doğrultusunu, $\nabla\Phi(u)$ vektörü de en dik çıkış doğrultusunu gösterir. Buna göre en dik iniş yöntemindeki dizi

$$w_{n+1} = -\nabla\Phi(u_n) \text{ ile } u_{n+1=}u_n - t_{n+1}\nabla\Phi(u_n)$$

şeklinde oluşturulur. t_{n+1} iniş değeri ϕ fonksiyonunun yukarıdaki şekildeki gibi

$$\phi(\text{t}; u_n, w_{n+1}) = \Phi(u_n - t\nabla\Phi_{(u_n)})$$

şeklinde tanımlanması nedeniyle

$$\begin{aligned}\Phi'(\text{t}; u_n, w_{n+1}) &= lim_{\tau\to 0}\frac{\Phi[u_n - t\nabla\Phi_{(u_n)} - \tau\nabla\Phi_{(u_n)}] - \Phi(u_n - t\nabla\Phi_{(u_n)})}{\tau} \\ &= -\Phi'(u_n - t\nabla\Phi_{(u_n)})(\nabla\Phi_{(u_n)}) \\ &= -\left(\nabla\Phi\left(u_n - t\nabla\Phi_{(u_n)}\right), \nabla\Phi_{(u_n)}\right)_H = 0\end{aligned}$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olarak belirlenebilir.

Şimdi en dik iniş yönteminin Φ fonksiyonelinin minimum noktasına yakınsama sorunu daha yakından irdelenmeye çalışılacaktır. Bu yöntemle bir $\{u_n\}$ vektörler dizisini

$u_{n+1} = u_n + t_{n+1}w_{n+1} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$

bağıntısı aracılığıyla oluşturulduğu varsayılsın. Burada w_{n+1} birim vektörü u_n vektöründeki en dik iniş doğrultusunu göstermektedir. Bu noktada birden fazla en dik iniş doğrultusu varsa w_{n+1} bunlardan her hangi biri olarak seçilecektir. ϕ(t; u_n, w_{n+1}) fonksiyonun t> 0 ekseni üzerindeki bir noktada minimuma eriştiği noktayı t_{n+1} iniş değeri olarak alınsın. Yani t_{n+1} değerini

$$\Phi\,(u_n + t_{n+1}w_{n+1}\,) = \min_{t\geq 0}(u_n + tw_{n+1})$$

koşulu yardımıyla bulunsun. Daha önce de değinildiği gibi sıkıca konveks bir fonksiyonel söz konusu olduğunda iki yaklaşım da aynı sonucu verir. Bu durumda

$$\forall\ t\geq 0 \text{ için } \Phi(u_{n+1}) \leq \Phi\,(u_n + tw_{n+1})$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Aşağıdaki çözümlemede rastgele seçilen bir $u_0 \in U$ başlangıç vektörüne bağımlı olarak oluşturulan

$$\Omega_0 = \{u \in U\ :\ \Phi(u) \leq\ \Phi(u_0)\} \subseteq\ U$$

kümesinin sınırlı olduğu, yani her $u \in \Omega_0$ için $\|u\| \leq$ r olacak şekilde bir r $>$ 0 sayısının bulunduğu da varsayılsın. Oluşum kuralı göz önünde tutulursa $\{u_n\}$ dizisinin Ω_0 kümesinde yer alacağı açıktır.

Teorem 2.1.2. U bir normlu vektör uzayı ve Φ: $U \rightarrow\ \mathbb{R}$ türetilebilir bir fonksiyonel olsun. Φ' Fréchet türevinin $\rho > r$ olmak üzere $B_\rho[0]$ kapalı yuvarında Lipschitz sürekli olduğu kabul edilsin. Bu takdirde en dik iniş yöntemiyle oluşturulan $\{u_n\}$ dizisi $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi\,'(u_n) = 0$ koşulunu sağlar.

İspat: Yukarıdaki varsayımlara göre

$$u, w \in\ B_\rho[0] \text{ için } \|\Phi'(u) - \Phi'(w)\| \leq \text{k}\|u - w\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k > 0$ sabiti vardır ve Teorem 1.1.29 uyarınca $u_1, u_2 \in B_\rho[0]$ vektör çifti için

$$|\Phi(u_1) - \Phi(u_2) - \Phi'(u_2)(u_1 - u)| \leq \frac{1}{2}k\|u_1 - u_2\|^2$$

yazılabilir. Görüleceği gibi teoremi ispatlamak için bu eşitsizlik önem taşımaktadır. Dolayısıyla Φ nin ikinci Fréchet türevi varsa ve $B_\rho[0]$ üzerinde $\Phi''(u)$ bilineer operatörü $\|\Phi''(u)\| \leq k$ daha güçlü koşulunu sağlıyorsa teorem yine geçerli olur.

Şimdi $u_2 = u$, $u_1 = u + v$ olarak seçilsin. $u,\ u + v \in B_\rho[0]$ için yukarıdaki bağıntıdan yararlanılırsa

$$\begin{aligned}\Phi'(u + v) &= \Phi(u) + \Phi'(u)(v) + [\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi'(u)(v)] \\ &\leq \Phi(u) + \Phi'(u)(v) + \frac{1}{2}k\|v\|^2\varepsilon\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. $0 < t \leq \rho - r$ koşulunu sağlayan t için, $\|w_{n+1}\| = 1$ olduğuna göre

$$\|u_n + tw_{n+1}\| \leq \|u_n\| + t\,\|w_{n+1}\| \leq r + t \leq \rho$$

çıkar. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizliği u yerine u_n, v yerine tw_{n+1} alarak uygulanırsa

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \Phi(u_n + tw_{n+1}) \leq \Phi(u_n) + t\Phi'(u_n)(w_{n+1}) + \frac{1}{2}kt^2$$

sonucuna varılır. Bu eşitsizlik

$$-\Phi'(u_n)(w_{n+1}) \leq \frac{\Phi(u_n) - \Phi(u_{n+1})}{t} + \frac{1}{2}kt \tag{2.2}$$

şekline de dönüştürülebilir. $-\Phi'(u_n)(w_{n+1}) = \|\Phi'(u_n)\|$ eşitliği (2.2) kullanılırsa

$$\|\Phi'(u_n)\| \leq \frac{\Phi(u_n)-\Phi(u_{n+1})}{t} + \frac{1}{2}kt$$

elde edilir.$u \in \Omega_0$ için bu kez

$$\begin{aligned}|\Phi(u)| &\leq |\Phi(u) + \Phi'(0)(v)| + |\Phi(u) - \Phi(0) - \Phi'(0)(u)| \\ &\leq |\Phi(0)| + \|\Phi'(0)\|\|u\| + \frac{1}{2}k\|u\|^2 \\ &\leq |\Phi(0)| + \|\Phi'(0)\|r + \frac{1}{2}kr^2\end{aligned}$$

bulunur.

$$M = |\Phi(0)| + \|\Phi'(0)\|r + \frac{1}{2}$$

alınırsa

$|\Phi(u)| \leq M$ veya $-M \leq \Phi(u) \leq M$

çıkar. Buna göre Ω_0 alt kümesi üzerinde $\Phi(u)$ alttan sınırlıdır.

Bu durumda $\{\Phi(u_n)\}$ azalan reel sayılar kümesi alttan sınırlı olduğuna göre yakınsaktır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısını göz önüne alalım. $t < min\{\varepsilon, \rho - r\}$ seçildiğinde $n \geq N$ için

$$\frac{[\Phi(u_n) - \Phi(u_{n+1})]}{t} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır. Buradan hareketle

$$\|\Phi'(u_n)\| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}k\right), \; n \geq N$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} \Phi'_{(u_n)} = 0$$

olduğunu ifade eder. $\Phi'(u)$ operatörü Ω_0 kümesi üzerinde sürekli olduğundan

$u_n \to u^*$ ise $\Phi'(u^*) = 0$

çıkar.

Buna göre en dik iniş dizisinin bir limiti varsa bu vektör Φ fonksiyoneli için bir durağan nokta olur. Öte yandan en dik iniş dizisinin yığınak noktaları varsa bu noktalar Φ fonksiyonelinin durağan noktalarıdır. Gerçekten dizinin bir yığınak noktası varsa bu noktaya yakınsayan bir alt dizisi vardır ve yine $\Phi'(u) = 0$ koşulu sağlanır.Φ bir konveks fonksiyonel olduğu takdirde en dik iniş yönteminin yakınsamasına ilişkin daha duyarlı sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 2.1.3. U bir normlu vektör uzayı ve $\Phi : U \to$ R türetilebilir, alttan sınırlı bir konveks fonksiyonel olsun. $m = \inf_{u \epsilon U} \Phi(u)$ ve $\{u_n\}$ bir u_0 vektöründen kaynaklanan bir en dik iniş dizisi ise

$\Phi(u_n) - m \leq \mathrm{c}\|\Phi'(u_n)\|$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: Tanımdaki şartlar sağlansın ve

$\Omega_0 = \{u \in U : \Phi(u) \leq \Phi(u_0)\}$

kümesi sınırlı olsun. Dolayısıyla

$\Omega_1 = \{u \in U : u = u_1 - u_2 ; u_1, u_2 \in \Omega_0\}$

kümesi de sınırlıdır. $\Omega_1 \subset B_c[0]$ $o$larak alınsın.

$\Omega_0 \subset B_r[0]$

ise

$$\Omega_1 \subset B_{2r}[0]$$

yani $c \leq 2r$ olacağı açıktır. Her hangi bir $w \in U$ vektörü ve uygun bir $\theta \in (0,1)$ sayısı için Φ konveks ve türetilebilir olduğundan

$$\begin{aligned}\Phi(u_n + w) - \Phi(u_n) &= \phi(1; u_n, w) - \phi(0; u_n, w) = \phi'(\theta; u_n, w)\\ &\leq \phi'(0; u_n, w) = \Phi'(u_n)(w)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\inf_{\|w\| \leq C} \Phi(u_n + w) - \Phi(u_n) \geq \inf_{\|w\| \leq C} \Phi'(u_n)(w)$$

yazılabilir.{ u_n } $\subset \Omega_0$ olduğuna göre

$$\Omega_0 \subseteq \{ u_n + w : w \in B_c[0] \} \subseteq U$$

küme içermesine dikkat edilirse

$$m = \inf_{u \in U} \Phi(u) \leq \inf_{\|w\| \leq C} \Phi(u_n + w) \leq \inf_{u \in \Omega_0} \Phi(u)$$

sıralaması elde edilir. Ancak Ω_0 kümesinin tanımından

$$\inf_{u \in \Omega_0} \Phi(u) = m$$

olur. Yani

$$\inf_{\|w\| \leq C} \Phi(u_n + w) = m$$

çıkar.

$$\inf_{\|w\|\leq C} \Phi'(u_n)(w) = c \inf_{\|z\|\leq 1} \Phi'(u_n)(z) = -c\|\Phi'(u_n)\|$$

yazılabilmesi nedeniyle

$$m - \Phi(u_n) \geq -c\|\Phi'(u_n)\|$$

bulunur. Buradan eşitsizlik -1 ile çarpılır ve tersine döndürülürse istenen sonuç elde edilir.

Teorem 2.1.2 ve Teorem 2.1.3 deki koşullar beraberce sağlandığı takdirde $\{ u_n \}$ en dik iniş dizisinin Φ fonksiyonelini minimum kılan bir dizi olacağı, yani

$$\Phi(u_n) \geq \inf_{u\in U} \Phi(u)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı görülür. $\Phi'(u)$ Lipschitz sürekli olduğu takdirde $\{\Phi(u_n)\}$ dizisinin yakınsama hızı için bir üst sınır verilebilir.

Teorem 2.1.4. U bir normlu vektör uzayı ve $\Phi: U \rightarrow$ R alttan sınırlı, türetilebilir, konveks bir reel değerli fonksiyonel olsun. U üzerinde $\Phi'(u)$ Fréchet türevi Lipschitz sürekli olmak üzere $m = \inf_{u\in U} \Phi(u)$ ve $\{u_n\}$ bir en dik iniş dizisiyse

$$\Phi(u_n) - m = O(1 / n)$$

bulunur.

İspat: $\lambda_n = \Phi(u_n) - m$ alınsın. $\{ u_n \}$ bir en dik iniş dizisi olduğuna göre her n için $\lambda_n > 0$ olacaktır. Dizi

$$u_{n+1} = u_n + t_{n+1} w_{n+1}, \ \|w_{n+1}\| = 1$$

olacak şekilde oluşturulsun. Teoremde öngörülen koşullarına göre her reel t sayısı için

$\Phi(u_n + tw_{n+1}) \leq \Phi\,(u_n)$ +t$\Phi'(u_n)(\,w_{n+1}) + \frac{1}{2}kt^2$

yazılabilir (Teorem 2.1.2).

$\Phi'(u_n)(\,v_{n+1}) = -\,\|\Phi'(u_n)\|$

bağıntısı hatırlanılırsa

$\Phi(u_n + tw_{n+1}) \leq \Phi\,(u_n) - t\|\Phi'(u_n)\| \; + \frac{1}{2}\mathrm{k}t^2$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı

$t \;=\; \tau_n \;= \frac{\|\Phi'(u_n)\|}{k} > 0$

için minimum olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda_n - \lambda_{n+1} &= \;\Phi\,(u_n) \text{ - } \Phi\,(u_{n+1}) \geq \Phi\,(u_n) \text{ - } \Phi\,(u_n{+}\tau_n\, w_{n+1}) \\ &\geq \;\tau_n\,\|\Phi'(u_n)\| - \frac{1}{2}k\tau_n{}^2 = \frac{1}{2k}\|\Phi'(u_n)\|^2 \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan Teorem 2.1.3. uyarınca

$\|\Phi'(u_n)\| \;\geq \dfrac{\lambda_n}{c}$

eşitsizliği sağlanacaktır. Dolayısıyla

$\mu \;= (2kc^2)^{\,-1} > 0$ tanımı ile $n = 1, 2, ...$ için

$\lambda_n - \lambda_{n+1} \geq \;\mu\,\lambda_n^2$ sonucuna varılır . { λ_n } azalan bir dizi olduğuna göre

$\lambda_n^2 \geq \lambda_{n+1}^2$ ve $\lambda_n - \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}\;[(\lambda_n \,/\, \lambda_{n+1}) - 1] \;\geq\; \mu\,\lambda_{n+1}^2$

yazılabilir. Böylece

$$(\lambda_n / \lambda_{n+1}) - 1 \geq \mu \lambda_{n+1}$$

elde edilir. $\lambda_n = \frac{v_n}{n}$ alınsın. Buradan da son eşitsizlik bu tanımla

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{\mu v_{n+1}}{n+1}\right)$$

şeklini alır.

Buradan kolayca görülebileceği gibi

$n \geq 1$ için $v_{n+1} \geq 2 / \mu$

olduğunda

$$v_{n+1} \leq v_n$$

sonucu çıkar. Buna göre

$$v_{n+1} \leq max\{2/\mu, v_n\}$$

yazılabilir ve $v_0 = max\{2/\mu, v_1\}$ alınırsa her n için $v_n \leq v_0$, dolayısıyla da

$$\lambda_n = \Phi(u_n) - m \leq \frac{v_0}{n}, n = 1, 2, \ldots$$

bulunur.Bu ise istenilen sonuçtur.

Şimdi bu sonuca dayanarak en dik iniş dizisinin uzayın bir vektörüne yakınsaması koşulları irdelenmeye çalışılacaktır. Önce bazı tanımlara gereksinim olacaktır.

Tanım 2.1.5. U vektör uzayı üzerinde $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(\mathrm{u}) = \infty$$

bağıntısını sağlıyorsa bir baskıcı fonksiyonel adını alır. Bir u vektörüne zayıf yakınsayan keyfi bir $\{u_n\}$ dizisi göz önüne alalım.

$$u_n \rightharpoonup u \;\Rightarrow \underline{lim}\, \Phi\,(u_n) \geq \Phi(\mathrm{u})$$

özelliği varsa Φ zayıf olarak alttan yarı-sürekli bir fonksiyoneldir denir.

Teorem 2.1.6. U bir normlu vektör uzayı ve $\Phi : U \to \mathbb{R}$ sürekli olarak Fréchet-türetilebilen bir fonksiyonel olsun. Her $u, w \in U$ için

$$\Phi'(\,u + w)(w) - \Phi'(u)(w) \geq 0 \tag{2.3}$$

ise Φ zayıf olarak alttan yarı-süreklidir.

İspat:

$$u_n \to u \text{ ise } \lim_{n\to\infty} \Phi'(u)(u_n - u) = 0$$

olacaktır. Teorem 1.1.21 ve Teorem 2.1.3 varsayımından yararlanılarak

$$\Phi(u_n) - \Phi(u) - \Phi'(u)(u_n - u) = \int_0^1 [\Phi'[u + t(u_n - u)](u_n - u) - \Phi'(u)(u_n - u)]\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t} [\Phi'[\mathrm{u} + t(u_n - u)][t(u_n - u)] - \Phi'(u)[t(u_n - u)]\mathrm{dt} \geq 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \inf \Phi\,(u_n) \geq \Phi(u)$$

çıkar.

Uzayda fonksiyoneli minimum kılan bir vektörün varlığı için yeter koşullar aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 2.1.7. U bir refleksif Banach uzayı, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ baskıcı ve zayıf olarak alttan yarı-sürekli bir fonksiyonel ise Φ minimumuna bir $u^* \in U$ vektöründe ulaşır.

İspat: Φ baskıcı olduğuna göre

$\|u\| > r$ için $\Phi(u) > \Phi(0) + 1$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla Φ fonksiyonelinin minimumu ancak $B_r\ [0]$ kapalı yuvarı içinde bulunabilir.

$$m = \inf_{u \in U} \Phi(u) = \inf_{u \in B_r\ [0]} \Phi(u)$$

yazılırsa $\Phi\ (u_n) \to m$ bağıntısını sağlayan bir $\{u_n\} \subset B_r\ [0]$ dizisi bulunur. Bu dizi sınırlı olduğu için Teorem 1.1.31 uyarınca bir $u^* \in U$ vektörüne zayıf yakınsayan bir $\left\{u_n^{(1)}\right\}$ alt dizisi vardır. $u^* \in B_r\ [0]$ olacağı kolaylıkla gösterilebilir.

$u_n^{(1)} \rightharpoonup u^*$ olması nedeniyle

$\forall f \in U'$ için $f(\,u_n^{(1)}) \to f(u^*)$

yazılabilir. Öte yandan

$u^* \notin B_r\ [0]$ ise $\delta = d(u^*, B_r\ [0]) > 0$

olacağına göre

$f_0(u^*) = \delta,\ \|f_0\| = 1$

ve

$\forall\, u \in B_r\,[0]$ için $f_0(u) = 0$

özelliğini taşıyan bir $f_0 \in U'$ fonksiyonelinin var olduğu Teorem 1.1.23. den anlaşılmaktadır.

Bu durumda varılan

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_0\left(u_n^{(1)}\right) = f_0(u^*) = \delta > 0$$

çelişkisi ancak ve ancak $u^* \in B_r\,[0]$ alarak giderilebilir. Bir yan ürün olarak elde edilen bu sonuç "Bir refleksif Banach uzayında her kapalı yuvar zayıf kapalıdır " şeklinde de yorumlanabilir.

Φ fonksiyoneli zayıf olarak alttan yarı-sürekli olduğundan

$$m = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(u_n^{(1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \inf \Phi\left(u_n^{(1)}\right) \geq \Phi(\mathrm{u}^*)$$

yazılabilir.

Tanım nedeniyle $m \leq \Phi(\mathrm{u}^*)$ yazılması gerekeceğinden $\Phi(\mathrm{u}^*) = m$ sonucuna varılır. Dolayısıyla Φ fonksiyonelinin minimumuna u^* vektöründe ulaştığı gösterilmiş olur.

Son olarak

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \inf_{u\in U} \Phi(u)$$

koşulunu sağlayan, ya da başka bir deyişle Φ fonksiyonelini minimum kılan bir $\{u_n\} \subset U$ dizisinin bir $u^* \in U$ vektörüne yakınsama koşulları irdelenecektir.

Teorem 2.1.8. U bir refleksif Banach uzayı, $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ baskıcı ve sürekli olarak olarak Fréchet- türetilebilen bir fonksiyonel olsun. $w \neq 0$ koşulunu sağlayan her $u, w \in U$ vektör çifti için

$$\Phi'(u+w)(w) - \Phi'(u)(w) > 0 \tag{2.4}$$

eşitsizliği gerçeklenirse Φ fonksiyonelini minimum kılan her $\{u_n\}$ dizisi tek bir $u^* \in U$ vektörüne zayıf yakınsar.

İspat: Teorem 2.1.6 ve Teorem 2.1.7. ın koşulları gerçekleştiği için fonksiyoneli minimum kılan bir $u^* \in U$ vektörü vardır. Şimdi (2.4) varsayımı nedeniyle bu vektörün tek olduğu gösterilecektir.

$$\Phi(u^*) = \Phi(u^{**}) = \inf_{u \in U} \Phi(u)$$

bağıntısını sağlayan iki u^* ve u^{**} vektörünün bulunduğu ve

$$u^{**} - u^* = w \neq 0$$

olduğu varsayılsın. Bu durumda

$$\Phi'(u^*) = \Phi'(u^{**}) = 0$$

yazılır ve

$$0 = \Phi'(u^{**})(w) - \Phi'(u^*)(w) = \Phi'(u^* + w)(w) - \Phi'(u^*)(w)$$

elde edilir. Bu da (2.4) ile çelişir. Dolayısıyla u^* vektörü tektir.

Fonksiyonel baskıcı olduğu takdirde minimum kılıcı $\{u_n\}$ dizisinin sınırlı olacağı görülür. Dolayısıyla bu dizinin her alt dizisi de sınırlıdır. U refleksif olduğundan böyle her alt dizinin U nun bir vektörüne zayıf yakınsayan bir alt dizisi vardır.

Teorem 2.1.8. uyarınca bu alt diziler ancak Φ yi minimum kılan u^* vektörüne zayıf yakınsayabilir. Bu vektör tek olarak belirlendiğine göre $\{u_n\}$ dizisinin her alt dizisinin aynı u^* vektörüne zayıf yakınsayan bir alt dizisi bulunacaktır. Bu durumda $\{u_n\}$ dizisi de u^* vektörüne zayıf yakınsamak zorundadır. Aksi halde bir

$\left\{u_n^{(1)}\right\} \subset \{u_n\}$ alt dizisi için $u_n^{(1)} \rightarrow u^{**} \neq u^*$

olacaktır. Buda mümkün değildir.

Teorem 2.1.8. Teorem 2.1.7. deki koşullara ek olarak

$$\Phi'(u+w)(w) - \Phi'(u)(w) \geq C\|w\|^2, \quad \forall u, w \in U \tag{2.5}$$

koşulu da sağlansın. Burada $C > 0$ bir sabittir. Bu durumda fonksiyoneli minimum kılıcı dizi minimum kılan u^* vektörüne güçlü olarak yakınsar.

İspat: Teorem 2.1.5 deki yol izlenirse (2.5) den yararlanılırsa

$$\Phi(u_n) - \Phi(u) - \Phi'(u^*)(u_n - u) = \int_0^1 \frac{1}{t}\big[\Phi'[u^* + t(u_n - u^*)][\mathrm{t}(u_n - u^*)] - \Phi'(u^*)[\mathrm{t}(u_n - u^*)]\big]dt \geq 0$$

$$\geq C\|u_n - u^*\|^2 \int_0^1 \frac{t^2}{t}dt = \frac{1}{2}C\|u_n - u^*\|^2$$

yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty}[\Phi(u_n) - \Phi(u^*)] = 0 \text{ ve } \Phi'(u^*) = 0$$

olduğundan bu ifade

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u^*\|^2 \leq 0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u^*\| = 0$$

olur. Dolayısıyla da $u_n \to u^*$ bulunur.

Uygulama 2.1.1. $\mathcal{H}$ bir kompleks Hilbert uzayı ve $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kendine eş sürekli bir lineer operatör olsun.

$$m = \inf_{\|u\|=1}(Au, u) \text{ ve } M = \sup_{\|u\|=1}(Au, u)$$

ile A nın sınırları gösterilsin ve $m > 0$ olsun.

$$Au = v \tag{2.6}$$

denklemi ele alınsın. $0 \notin \sigma(A)$ olduğundan Teorem 1.1.26 ya göre A^{-1} ters operatörü vardır ve her $v \in \mathcal{H}$ vektörü için tek bir $u^* = A^{-1}v$ çözümü bulunur. Şimdi her $u \in \mathcal{H}$ için reel değerli

$$\Phi(u) = (Au, u) - [(u, v) + (v, u)] \tag{2.7}$$

olacak şekilde ele alınsın. (2.6) nın çözümü (2.7) nin bir minimumuna karşı gelir. Tersi olarak da (2.7) yi minimum kılan vektör (2.7) nın çözümüdür. Gerçekten

$$v = Au^* \text{ ise } \Phi(u) = (Au, u) - (u, Au^*) - (Au^*, u)$$
$$= (Au, u) - (Au, u^*) - (Au^*, u) = (A(u - u^*), u - u^*) - (Au^*, u^*)$$

yazılabilir.

Dolayısıyla her $u \in \mathcal{H}$ için

$$\Phi(u) \geq m(u - u^*, u - u^*) - (Au^*, u^*) \geq -(Au^*, u^*) = \Phi(u^*)$$

elde edilir. Buna göre u^* vektörü Φ fonksiyonelini minimum kılar. Ters olarak bir u_0 vektörü Φ yi minimum yapan nokta olsun. Buna sonuca göre

$$\Phi(u_0) = \Phi(u^*)$$

olmalıdır. Dolayısıyla

$$0 = \Phi(u_0) - \Phi(u^*) = (A(u_0 - u^*), u_0 - u^*) \geq m\|u_0 - u^*\|^2$$

elde edilir. Buradan $u_0 = u^*$ çıkar. Şimdi (2.6) denkleminin çözümü (2.7) fonksiyonelinin minimumunu en dik iniş yöntemiyle belirlenmeye çalışılacaktır. Her hangi iki $u, w \in \mathcal{H}$ vektörü ile

$$\begin{aligned} \phi(t; u, w) &= \Phi(u + tw) \\ &= \Phi(u) + t[(Au - v, w) + (w, Au - w)] + t^2(Aw, w) \end{aligned}$$

yazılabilineceğine göre u vektöründeki Fréchet türevi

$$\Phi'(u)(w) = (Au - v, w) + (w, Au - v) = 2\Re(Au - v, w)$$

olarak hesaplanır. Yukarıdaki ifadenin normu 1 olan w' vektörleri üzerinde maksimumuna

$$w' = (Au - v) / \|Au - v\|$$

vektöründe ulaşacağı hemen görülür. Dolayısıyla u vektöründe en dik iniş doğrultusu

$$-w = v - Au$$

olur.

Yöntemi uygulamak için seçilen keyfi bir vektör u_0 olsun. En dik iniş doğrultusunu $-w_1$ vektörü belirlemektedir. Burada

$$w_1 = Au_0 - v$$

ile verilmektedir. t_1 iniş değerini

$$\phi'(t;\ u_0, -w_1) = 0$$

denkleminin çözümü olarak seçilir.

$$\phi(\ t;\ u_0, -w_1) = \Phi(u_0) - 2t\|w_1\|^2 + t^2(Aw_1, w_1)$$

bagıntısından kolaylıkla

$$t_1 = \frac{\|w_1\|^2}{(Aw_1, w_1)} > 0$$

sonucunu elde edilir ve

$$u_1 = u_0 - t_1 w_1$$

olarak belirlenir. Böyle devam edilirse $\{u_n\}$ en dik iniş dizisinin $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$u_{n+1} = u_n - \ t_{n+1} w_{n+1}, \qquad w_{n+1} \ = Au_n - v, \quad t_{n+1} = \frac{\|w_{n+1}\|^2}{(Aw_{n+1}, w_{n+1})}$$

şeklinde belirlenebileceği kolayca gerçeklenebilir. Şimdi bu dizinin u^* çözüm vektörüne yakınsadığı gösterilmeye çalışılacaktır. A bir pozitif operatör olduğuna göre Teorem 1.1.16. deki gibi belirlenebilen kendine eş bir K kare kökü vardır.

Dolayısıyla $\Phi(u)$ fonksiyonelini $K^2 \ = A$ olmak üzere

$$\Phi(u) = (A(u - u^*), u - u^*) - (Au^*, u^*) \quad (2.8)$$
$$= (K(u - u^*), K(u - u^*)) - (Ku^*, Ku^*)$$
$$= \|K(u - u^*\|^2 - \|Ku^*\|^2$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi kendine eş, sürekli bir $B: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineer operatörü

$$B = \mathrm{I} - kA$$

olarak tanımlansın ve $k > 0$ sayısı B nin normu mümkün olabilen en küçük değeri alacak şekilde seçilsin.

$\|u\| = 1$ olan vektörler için

$$(Bu, u) = 1 - k(Au, u)$$

yazılabileceğinden B nin üst sınırı $1 - km$, alt sınırı ise $1 - kM$ olur.

Teorem 1.1.16 göz önünde tutulursa minimum normun

$$1 - km = -(1 - kM) \quad \text{veya} \quad k = \frac{2}{M+m}$$

seçimine karşı geleceği açıktır. Dolayısıyla

$$\|B\| = 1 - km = kM - 1 = \frac{M - m}{M + m} < 1$$

bulunur. B operatörü aracılığı ile

$n = 0, 1, 2, \ldots$ için $v_{n+1} = Bu_n + kv = u_n - k(Au_n - v) = u_n - kw_{n+1}$

olacak şekilde vektör dizisi tanımlansın. u_n vektörleri yukarıda belirlenen en dik iniş dizisinin elemanlarıdır.

u_n den $-w_{n+1}$ doğrultusunda ilerlenirse fonksiyoneldeki azalma en fazla t_{n+1} iniş değeri için gerçekleşeceğinden

$$\Phi(v_{n+1}) \geq \Phi(u_{n+1})$$

olacaktır. Bu eşitsizlikten yararlanarak aşağıdaki eşitsizlik

$$\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u^*) \leq \Phi(v_{n+1}) - \Phi(u^*)$$

yazılabilir.

$$\Phi(u^*) = -\|Ku^*\|^2$$

bağıntısına dikkat edilirse (2.8) den

$$\|K(u_{n+1} - u^*)\| \leq \|K(v_{n+1} - u^*)\|$$

elde edilir.

$$Bu^* = u^* - kv$$

olduğunu göz önüne alınırsa

$$v_{n+1} - u^* = B(u_n - u^*) \quad \text{ve} \quad K(v_{n+1} - u^*) = KB(u_n - u^*)$$

sonucuna varılır. K operatörü A ile komütatif olduğundan B ile de komütatiftir.

Dolayısıyla

$$\|K(v_{n+1} - u^*)\| \leq \|B\|\|K(u_n - u^*)\|$$

veya

$$\|K(u_{n+1} - u^*)\| \le \frac{M-m}{M+m}\|K(u_n - u^*)\|$$

elde edilir. Buradan da kolayca

$$\|K(u_{n+1} - u^*)\| \le \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|u_0 - u^*)\|, \ \ n = 1,2,\dots \tag{2.9}$$

sonucu çıkar. Teorem 1.1.16. uyarınca A spektrumu $[m, M]$ kapalı aralığı içinde olup uç noktalarda spektruma aittir. $f(t)$ bu aralıkta sürekli bir fonksiyonsa $f(A)$ operatörü de kendine eş ve süreklidir. Spektral dönüşüm teoremine göre

$$f\big(\sigma(A)\big) = \sigma(f(A))$$

yazılabilir ve yine Teorem 1.1.16. nedeniyle

$$\|f(A)\| = \max_{t\in\sigma(A)} |f(t)|$$

olur. $\sigma(A)$ kapalı olduğundan supremum yerine maksimum yazılabilir.

$\sqrt{t}$ ve $1 / \sqrt{t}$ fonksiyonları $[m, M]$ aralığı üzerinde sürekli olduklarına göre spektral dönüşüm teoreminden yararlanılırsa

$$\|K\| = \left\|A^{1/2}\right\| = \max_{t\in\sigma(A)} \sqrt{t} = \sqrt{M} \ , \ \|K^{-1}\| = \max_{t\in\sigma(A)}(1 / \sqrt{t}) = 1/\sqrt{m}$$

elde edilir. Bu verilerle de

$$\|K(u_0 - u^*)\| \le \|K^{-1}A(u_0 - u^*)\| \le \|K^{-1}\| \, \|Au_0 - v\| = \frac{\|w_1\|}{\sqrt{m}}$$

bulunur. Bu ilişkilerden yararlanılırsa (2.9) dan kolaylıkla

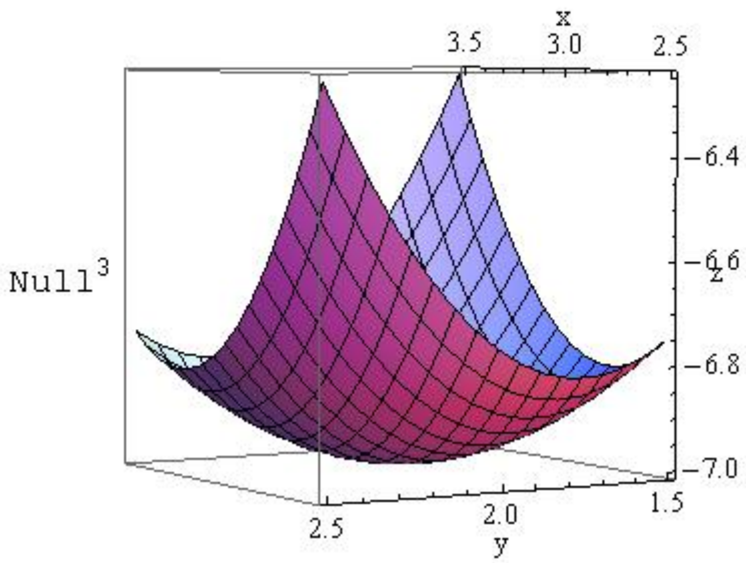
$$\|u_n - u^*\| = \|K^{-1}K(u_n - u^*)\| \le \frac{1}{m}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|w_1\| \tag{2.10}$$

sonucuna varılır. Bu da $n \to \infty$ için $\{u_n\}$ dizisinin u^* vektörüne yakınsadığını ifade eder.

BÖLÜM 3. EN DİK İNİŞ YÖNTEMİ UYGULAMALARI

Uygulama 3.1.1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - y - xy$ fonksiyonu veriliyor. En dik iniş yöntemi yardımıyla $f(x,y)$ fonksiyonunun minumum noktasını bulunuz ve minimum değerini hesaplayınız.

Öncelikle $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - y - xy$ fonksiyonunun minimum noktasının var olduğu fonksiyonun aşağıdaki grafiğinden dolayısıyla yapısından anlaşılmaktadır. $f(x,y)$ konveks olduğundan minimum noktası vardır.



Şekil 3. 1. $\boldsymbol{f(x,y)}$ fonksiyonun grafiği

O halde fonksiyonun minimum nokta tespiti için en dik iniş yöntemi kullanılabilir. Önce fonksiyonun gradiyenti bulunacaktır.

Bilinen gradiyent tanımından fonksiyonun gradiyenti grad $f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$;

grad $f(x,y) = (2x - 4 - y)i + (2y - 1 - x)j$

olarak elde edilir. Başlangıç noktası

$(x_0, y_0) = (2, -1)$ ve h = 1/10

olarak alınsın.

$x_1 = x_0 - h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}$ ve $y_1 = y_0 - h\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)}$

olmak üzere yerlerine yazılırsa

$x_1 = x_0 - h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}$ = 2-(2.2-(-4)+1) $(1/10)$ = $\frac{19}{10}$;

$y_1 = y_0 - h\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)}$ = -1-(2.(-1)-(-1)-(-2)) $\left(\frac{1}{10}\right)$ = $\frac{-5}{10}$

olmak üzere $(x_1, y_1) = (\frac{19}{10}, -\frac{5}{10})$ bulunur.

İterasyona aynı şekilde devam edilirse

$x_2 = x_1 - h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_1, y_1)} = \frac{19}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{38}{10} - 4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{187}{100}$;

$y_2 = y_1 - h\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_1, y_1)} = -\frac{5}{10} - (2.\left(-\frac{5}{10}\right) - 1 - \frac{19}{10})\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{5}{10} + \frac{39}{100} = -\frac{11}{100}$

olmak üzere

$(x_2, y_2) = (\frac{187}{100}, -\frac{11}{100})$

bulunur.

$$x_3 = x_2 - h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_2, y_2)} = \frac{187}{100} - (2.(\frac{187}{100}) - 4 + \frac{11}{100})\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1870}{1000} + \frac{415}{1000} = \frac{2285}{1000};$$

$$y_3 = y_2 - h\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_2, y_2)} = -\frac{11}{100} - (2.(-\frac{11}{100}) - 1 - \frac{187}{100})(\frac{1}{10}) = -\frac{11}{100} + \frac{299}{1000} = \frac{189}{1000}$$

olmak üzere $(x_3, y_3) = (\frac{2285}{1000}, \frac{189}{1000})$ hesap edilir.

İşleme matematiksel program ile devam edilirse 21. adımda

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - y - xy$$

fonksiyonun minimum noktası

$$(x_{21}, y_{21}) = (3,2)$$

olarak hesap edilir. Böylelikle de fonksiyonun minimum değeri

$$\min f(x,y) = -7$$

olarak bulunur.

Gerçekten de bilinen yöntemlerle $f(x,y)$ fonksiyonunun minimumu hesap edilirse min değerinin -7 olduğu görülür.

3.1. Lineer ve Lineer Olmayan Denklem Takımlarında En Dik İniş Yöntemi

Lemma 3.2.1. $\boldsymbol{A}$ simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olmak üzere $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ probleminin çözümü

$$q(x) = < x, Ax > - 2 < x, b >$$

şeklindeki kuadratik formun minimize edilmesi problemine denktir.

İspat: Öncelikle q fonksiyonun bir doğru boyunca nasıl davrandığına bakılması gereklidir. x, v birer vektör ve t bir skaler olmak üzere $x + tv$ ışını göz önüne alınsın. $A^T = A$ olduğuda kullanılarak

$$\begin{aligned} q(x + tv) &= < x + tv, A(x + tv) > \; - < x + tv, b > \\ &= < x , Ax > \; + t < x, Av, > \; + t < v, Ax > + t^2 < v, Ax > \\ &\qquad -2 < x, b > - 2t < x, b > \\ &= q(x) + 2t < v, Ax > -2t < v, b > + t^2 < v, Av > \\ &= q(x) + 2t < v, Ax - b > + t^2 < v, Av > \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Buradaki (3.1) denklemindeki t^2 nin katsayısının pozitif olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle $q(x)$ fonksiyonu $(x + tv)$ üzerinde bir minimuma sahiptir. (3.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dt} q(x + tv) = 2 < v, A\mathrm{x} - \mathrm{b} > + 2\mathrm{t} < v, Av >$$

olur. Bu türevi sıfıra eşitlenirse q nun ışın boyunca minumumu bulunabilir. Yani minimum noktayı veren t değeri

$$t^* = \frac{< v, b - Ax >}{< v, Av >}$$

olur. Bu değeri kullanarak q fonksiyonunun ışın üzerinde alacağı minimum değeri

$$\begin{aligned} q(x + t^* v) &= q(x) + t^*[2 < v, Ax - b > + t^* < v, Av >] \\ &= q(x) + t^*[2 < v, Ax - b > + < v, b - Ax >] \\ &= q(x) - \frac{< v, b - Ax >^2}{< v, b - Av >} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu denklemde görülüyor ki v vektörü $b - Ax$ kalanına dik olduğunda, yani

$< v, b - Ax > \neq 0$

iken q minimum değerini alır.

x vektörü $Ax = b$ nin çözümü değilse

$< v, b - Ax > \neq 0$

ifadesini sağlayan birçok v vektörü bulunabilir. Bu durumda $Ax = b$ ise q fonksiyonu $q(x)$ ten daha küçük bir değer alamaz.

Bu ispat $Ax = b$ sisteminin çözümü için ardışık bir metot sunmaktadır. Metodun k. Adımında olduğu varsayılsın.

$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$

değerlerinin bilindiğini kabul edilsin. Uygun bir $v^{(k)}$ yönü için (k+1). Adımdaki x vektörü

$$t_k = \frac{< v^{(k)}, b - Ax^{(k)} >}{< v^{(k)}, A\, v^{(k)} >}$$

olmak üzere

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k\, v^{(k)}$$

biçiminde hesaplanır. $\| v^{(k)} \| = 1$ seçilirse t_k değeri $x^{(k)}$ ile $x^{(k+1)}$ arasındaki mesafeyi ölçer.

Lemma 3.2.2. $\boldsymbol{A}$ simetrik matris ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) =< x, Ax > -2 < x, b >$

ise x deki gradiyenti $2(Ax - b)$ dir.

İspat:

$$g(x,y) = < \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} > -2 < \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} >$$

$$g(x,y) = x^2 a_{11} + xya_{12} + y^2 a_{22} + xya_{21} - 2xb_1 - 2yb_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 2xa_{11} + ya_{12} + ya_{21} - 2b_1 = 2(xa_{11} + ya_{12} - b_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = xa_{21} + xa_{12} + 2ya_{22} - 2b_2 = 2(xa_{12} + ya_{22} - b_2)$$

$$grad\ (x,y) = 2(Ax - b)$$

olur.

Uygulama 3.2.2.

$$2x - y = -1$$
$$-x + 2y = 3$$
$$-y + 2z = -1$$

lineer denklem sisteminin çözümünü $x_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alarak en dik iniş yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem takımını temsil eden matris

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $x_1 = x_0 + t_0 v_0$ olduğundan t_0 ve v_0 ı hesaplamak gereklidir.

$v_0 = b - Ax_0$ olduğundan

$$v_0 = b - Ax_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$t_0 = \frac{<v_0, v_0>}{<v_0, Av_0>} = \frac{< \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} >}{< \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} >} = \frac{17}{58} = 0.293103$$

olarak hesaplanır. t_0 , $x_1 = x_0 + t_0 v_0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.413793 \\ 1.879931 \\ 0.413793 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. İşleme matematiksel program yardımı ile devam edilirse

k = 2 için t =1.7 , $x_2 = \begin{bmatrix} 0.501724 \\ 1.996554 \\ 0.501724 \end{bmatrix}$;

k = 3 için t = 0.293103 , $x_3 = \begin{bmatrix} 0.499703 \\ 1.99958 \\ 0.499703 \end{bmatrix}$;

k = 4 için t = 1.7 , $x_4 = \begin{bmatrix} 0.500006 \\ 1.99999 \\ 0.500006 \end{bmatrix}$;

k = 5 için t = 0.293103 , $x_5 = \begin{bmatrix} 0.49999 \\ 2 \\ 0.49999 \end{bmatrix}$;

k = 6 için t = 1.7 , $x_6 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

olarak elde edilir. Gerçekten de lineer denklem takımının çözümü

$$x_g = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

dir.

Lemma 3.2.3. En dik iniş yöntemiyle

$$\boldsymbol{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0}$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

şeklindeki lineer olmayan denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için basit olarak

$\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = 0$

şeklindeki denklem çözülürse aranan çözüm bulunmuş olur[4].

Uygulama 3.2.3

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 - \cos(x_1x_2) - \frac{1}{2} = 0$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + sinx_3 + 1.06 = 0$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} = 0$$

olarak verilen nonlineer denklem sistemini başlangıç çözümü $x_0 = (0.5,0.5,0.5)^t$ ve $t_0 = 0{,}1$ alarak çözünüz.

Çözüm :$g(x_1,x_2,x_3)$=$[f_1(x_1,x_2,x_3)]^2 + [f_2(x_1,x_2,x_3)]^2 + [f_3(x_1,x_2,x_3)]^2$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\nabla g(x_1,x_2,x_3) &\equiv \nabla g(x)\\ &= (2f_1(x_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + 2f_2(x_1)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)\\ &+ 2f_3(x_1)\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), 2f_1(x_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + 2f_2(x_1)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\\ &+ 2f_3(x_1)\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x), 2f_1(x_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) + 2f_2(x_1)\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)\\ &+ 2f_3(x_1)\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x))\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}\nabla g(x) = [(3 + sin(x_1x_2)\,x_2 + 2x_1 - x_2e^{-x_1x_2}), (x_1\,sin(x_1x_2)\\ - 162(x_2 + 0.1 - x_1e^{-x_1x_2}), (cosx_3 + 20)]^t\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$x_0 = (0.5,0.5,0.5)^t$

başlangıç değeri kullanılırsa

$g(x_0) = 1159.24$, $v^0 = \frac{\nabla g(x_0)}{\|\nabla g(x_0)\|} = [-0.0131206{,}0.9897569{,}0.1421648]^t$

olarak bulunur .

$x_1 = x_0 + t_0 v_0$

genel formülünde bu iterasyonla devam edilirse

$k = 1$, $x_1 = [0.5065602\,, 0.005121952\,, 0.4289176]^t$, $g(x_1) = 363.5173$
$k = 2$, $x_2 = [0.5045557\,, 0.06421983\,, -0.5155808]^t$, $g(x_2) = 1.874157$
$k = 3$, $x_3 = [0.5068673\,, 0.001808132\,, -0.5179668]^t$, $g(x_3) = 0.0132214$
$k = 4$, $x_4 = [0.5067566\,, 0.001208410\,, -0.5235992]^t$, $g(x_4) = 0.0005774$

olarak çözüm elde edilir.

Görüldüğü gibi $k = 4$ için bulunan çözüm gerçek çözüm olan

$x_g = [0.5000073\,, 0.00100012\,, -0.5548797]^t$

çözümüne çok yakındır ve sistemin tutarlılığı

$g(x_4) = 0.0005774$

sonucundan da belli olmaktadır.

Uygulama 3.2.4.

$\boldsymbol{y'' = -sinx}$ olmak üzere lineer diferansiyel denkleminin çözümünü başlangıç çözümü $\boldsymbol{u_0 = 0{,}00296574(x-\pi)^7(x)^7}$ ve sınır değerleri $\boldsymbol{u(0) = u(\pi) = 0}$ olmak üzere en dik iniş yöntemi ile çözünüz.

Çözüm : Bu sorunun en dik iniş yöntemiyle

$u_{n+1} = u_n - t_{n+1} w_{n+1}$

şeklinde çözülebilmesi için

t_{n+1} ve w_{n+1}

değerlerinin hesaplanması gereklidir.

$w_1 = Au_0 - v$ den w_1 yön vektörü ve

$$t_1 = \frac{\|w_1\|}{(Aw_1, w_1)}$$

den de t_1 yön vektörü belirlenecektir.

$v = -sinx$ ve $u_0 = 0{,}00296574(x-\pi)^7(x)^7$

olarak alınırsa

$w_1 = Au_0 - v = sinx + [(0{,}00296574).(42x^5.(x-\pi)^7 + 7x^6(7(x-\pi)^6 + 7x^6(x-\pi)^6 + 42x^7(x-\pi)^5)]$

olarak hesaplanır ve

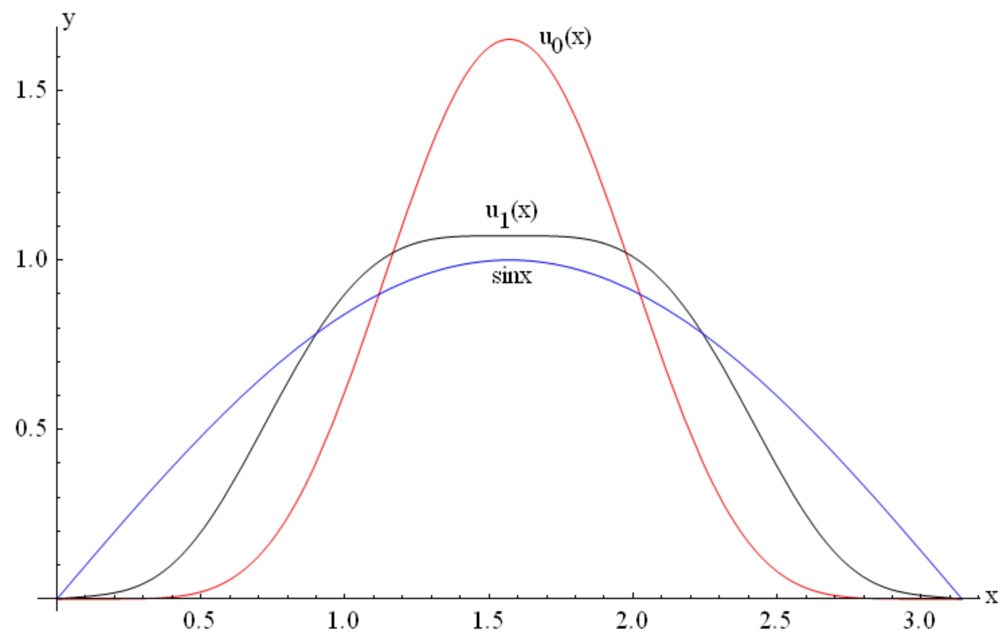
$$t_1 = \frac{\|w_1\|}{(Aw_1, w_1)}$$

yerine yazılırsa

$t_1 = -0.0693001$ olarak hesaplanır. $u_1 = u_0 - t_1 w_1$ de yerine yazılırsa

$u_1 = 0.00296574(x-\pi)^7x^7 - 0.0693001(-0.124561(\pi-x)^7x^5 + 0.290642(\pi-x)^6x^6 - 0.124561(\pi-x)^5x^7 - sinx$

olarak hesaplanır. Elde edilen u_1 çözümünün ve başlangıç çözümü olan u_0 çözümünün ve gerçek çözüm olan $sinx$ in grafikleri aşağıda verilmiştir. En dik iniş yöntemiyle elde edilen u_1 çözümünün gerçek çözüm olan $sinx$ e u_0 başlangıç çözümünden daha iyi yaklaştığı aşağıdaki grafikten görülmektedir.



Şekil 3. 2. u_1 , u_0 yaklaşımlarının ve sinx in grafigi

İşleme en dik iniş yöntemiyle devam edilirse yani $u_1 = u_0 - t_1w_1$ de u_0 yerine u_1 alınırsa yani $u_2 = u_1 - t_2w_2$ oluşturulursa

$w_2 = Au_1 - sinx$ ve $t_2 = \frac{\|w_2\|}{(Aw_2, w_2)}$ den $t_2 = -0.0431442$

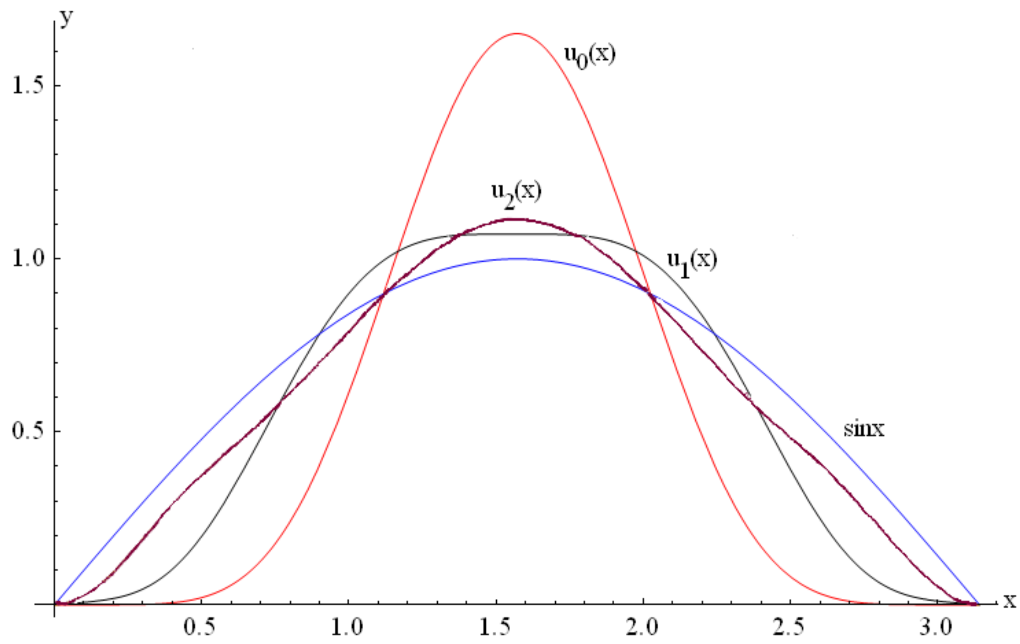
olarak hesaplanır.

Buradan

u_2=0.00296574(π-x)^{7}x^7-0.069300(-0.12456(π-x)^{7}x^5+0.29064 (π-x)^{6}x^6-0.12456(π-x)^{5}x^7-Sin[x])-0.04314(-0.12456(π-x)^{7}x^5 +0.29064(π-x)^{6}x^6-0.12456(π-x)^{5}x^7-Sin[x]+0.069300 (-2.49122(π-x)^{7}x^3+17.4385(π-x)^{6}x^4-31.3894(π-x)^{5}x^5 +17.4385(π-x)^{4}x^6-2.49122(π-x)^{3}x^7+Sin[x]))

olarak bulunur.

İkinci adımda elde edilen u_2 yaklaşımının gerçek sonuca ilk yaklaşımdan daha iyi yakınsadığı aşağıdaki grafikten görülmektedir.



Şekil 3. 3. u_1 , u_0 , u_2 yaklaşımlarının ve sinx in grafiği

EKLER

MATEMATİKSEL PROGRAMLAR

Uygulama 3.1 ve 3.3. için matematiksel program kodları

```
grad = {∂x f[{x, y}], ∂y f[{x, y}]};
g[{x_, y_}] = grad;
norm[v_] := N[√(v.v)];
s[{x_, y_}] = - g[{x, y}] / √(g[{x, y}].g[{x, y}]);
P⃗0 = {0.99, 1.01};
S⃗0 = s[P⃗0];
Print["  f[X⃗]  = ", f[{x, y}]];
Print[" ∇f[X⃗]  = ", g[{x, y}]];
Print[" ∇f[X⃗]  = ", g[{x, y}]];
Print["    P⃗0   = ", P⃗0];
Print["∇f[P⃗0]  = ", g[P⃗0]];
Print[""];
Print["    S⃗0   = -∇f[P⃗0]/‖∇f[P⃗0]‖"];
Print["    S⃗0   = ", - g[P⃗0], "/", √(g[P⃗0].g[P⃗0])];
Print["    S⃗0   = ", s[P⃗0]];
Print["f[P⃗0 + ν S⃗0]  = f[", P⃗0 + ν S⃗0, "]"];
Print["f[P⃗0 + ν S⃗0]  = ", Expand[f[P⃗0 + ν S⃗0]]];
```

```
P⃗0 = P⃗1;
S⃗0 = s[P⃗0];
Print[" f[X⃗] = ", f[{x, y}]];
Print[" ∇f[X⃗] = ", g[{x, y}]];
Print["  P⃗0  = ", P⃗0];
Print["∇f[P⃗0] = ", g[P⃗0]];
Print[""];
Print["  S⃗0  = -∇f[P⃗0]/‖∇f[P⃗0]‖"];
```

```
f[{ 0.990000000000,  1.010000000000}] = -6.242647772493
f[{ 2.490148500437,  0.995147044550}] = -6.242647772493
f[{ 2.497647765143,  1.752572779846}] = -6.810717619870
f[{ 2.872574606840,  1.748860632899}] = -6.952693320061
f[{ 2.874448871708,  1.938161384573}] = -6.988176807766
f[{ 2.968153019387,  1.937233620734}] = -6.997045071123
f[{ 2.968621447818,  1.984544892209}] = -6.999261485012
f[{ 2.992040596078,  1.984313019454}] = -6.999815425545
f[{ 2.992157668749,  1.996137359234}] = -6.999953869955
f[{ 2.998010734155,  1.996079408092}] = -6.999988470880
f[{ 2.998039993716,  1.999034623770}] = -6.999997118568
f[{ 2.999502829779,  1.999020140245}] = -6.999999279854
f[{ 2.999510142519,  1.999758726913}] = -6.999999820016
f[{ 2.999875743993,  1.999755107096}] = -6.999999955017
```

Uygulama 3.2 için matematiksel program kodları

```
A = ( 2  -1  0
     -1   2 -1
      0  -1  2 );

b = ( -1
       3
      -1 ); x = ( 1
                  1
                  1 );

Do[
  v = (b - A.x); pay = Norm[(Transpose[v].v)];
  payda = Norm[(Transpose[v]).(A.v)];
  t = N[pay/payda];
  x = x + t * v;
  Print["k=", k, ", t=", t, " x=", x]
  , {k, 1, 10}]
```

```
k=1, t=0.293103 x={{0.413793}, {1.87931}, {0.413793}}
k=2, t=1.7 x={{0.501724}, {1.99655}, {0.501724}}
k=3, t=0.293103 x={{0.499703}, {1.99958}, {0.499703}}
k=4, t=1.7 x={{0.500006}, {1.99999}, {0.500006}}
k=5, t=0.293103 x={{0.499999}, {2.}, {0.499999}}
k=6, t=1.7 x={{0.5}, {2.}, {0.5}}
k=7, t=0.293103 x={{0.5}, {2.}, {0.5}}
```

Uygulama 3.4 için matematiksel program kodları

```
Clear[u1, u];
u[x_] := 0.002965736629319 * x^7 * (π - x)^7;
v = -Sin[x] - u''[x];
av = D[v, {x, 2}];
a1 = Re[∫_0^π (v * v) dx];
a2 = Re[∫_0^π (av * v) dx];
t = N[a1/a2];
u1 = u[x] + t * v;
q = Re[∫_0^π (u1 * D[u1, {x, 2}]) dx - 2 * (∫_0^π (u1 * (-Sin[x])) dx)]
Plot[{u[x], u1, Sin[x]}, {x, 0, π},
 PlotStyle → {Red, Black, Blue}]


v2 = -Sin[x] - D[u1, {x, 2}];
av2 = D[v2, {x, 2}];
a31 = Re[∫_0^π (v2 * v2) dx];
a42 = Re[∫_0^π (av2 * v2) dx];
t2 = N[a31/a42];
u2 = u1 + t2 * v2;
q = Re[∫_0^π (u2 * D[u2, {x, 2}]) dx - 2 * (∫_0^π (u2 * (-Sin[x])) dx)]
Plot[{u[x], u1, u2, Sin[x]}, {x, 0, π},
 PlotStyle → {Red, Black, Yellow, Blue}]
```

KAYNAKLAR

[1] ŞUHUBİ, E.; Fonksiyonel Analiz , İTÜ vakfı yayınları, 2001.

[2] MUSAYEV, B., ALP, M., Fonksiyonel Analiz, Tek Ağaç Eylül yayınevi, 1999.

[3] YILDIZ, A., ERÖZ, M., Fonksiyonel Analiz, SAÜ yayınları, 2009.

[4] BAYRAM, M., Nümerik Analiz, 2002.

[5] EPPERSON, J., Introduction to Numerical Analysis, 2001.

[6] YOSİDA, K., Functional Analysis, Springer-Verlag, 1968.

[7] AMİRALİ, G., DURU,H., Nümerik Analiz, Pegem Yayıncılık, 2002.

[8] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley and Sons, 1987.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Ordu ili Mesudiye ilçesinde doğan Kenan YILDIRIM sırasıyla Koca Rağıp Paşa ilköğretim okulunu , Bağcılar lisesini bitirdikten sonra 2004 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenim görmeye başladı. 2008 yılında lisans öğrenimini bitirdi . 2008 yılı güz döneminde aynı Üniversite de Matematik A.B.D de yüksek lisans öğrenimine başladı. Ve 2009 yılında Muş Alparslan Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak atandı.Halen aynı üniversitede araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.