T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ TOPLAMLARI VE FİBONACCİ POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEDAT KARADAYI

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Refik KESKİN

Nisan 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ TOPLAMLARI VE FİBONACCİ POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEDAT KARADAYI

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 22/04/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Refik KESKİN Jüri Başkanı	Doç.Dr. Halim ÖZDEMİR Üye	Prof.Dr. İbrahim OKUR Üye

ÖNSÖZ

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, başlangıcından sonuna kadar, yardım ve önerilerini benden esirgemeyen, karşılaştığım problemlerin çözümünde deneyimlerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Refik KESKİN'e teşekkür ederim. Ayrıca her durumda özverisi ve desteği ile yanımda olan değerli eşim Demet KARADAYI'ya ve bugünlere gelebilmem için maddi manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada Fibonacci toplamları ve Fibonacci polinomları ele alındı. Birinci bölümde konuyla ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi. İkinci bölümde Fibonacci ve Lucas polinomları tanıtıldı ve bunlarla ilgili teoremler ifade edildi. Son bölümde de Fibonacci ve Lucas sayılarını katsayı kabul eden polinomlar ele alındı ve türev yardımıyla Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili toplamlar elde edildi.

FİBONACCİ SUMS AND FİBONACCİ POLYNOMİALS

SUMMARY

In this study, Fibonacci polynomials and Fibonacci summations are examined. In the first chapter, the main definitions and theorems are given. In the second chapter, Fibonacci and Lucas polynomials are investigated and some theorems concerning with Fibonacci and Lucas polynomials are given. The last chapter is related to the summations containing Fibonacci and Lucas numbers.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanacağımız temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Birinci tümevarım ilkesi: Her n doğal sayısı için $p(n)$ bir önerme olsun.

a) $p(1)$ doğru olsun.

b) $p(n)$ doğru iken $p(n+1)$ de doğru olsun.

Bu takdirde her n için $p(n)$ doğrudur.

İkinci tümevarım ilkesi: Her n doğal sayısı için $p(n)$ bir önerme olsun.

a) $p(1)$ doğru olsun.

b) $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $p(k)$ doğru iken $p(n+1)$ de doğru olsun.

Bu takdirde her n için $p(n)$ doğrudur.

Tanım 1.1: $F_1 = 1, F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $n \in Z$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

biçiminde tanımlanan (F_n) dizisine Fibonacci dizisi ve F_n sayılarına da Fibonacci sayıları denir. Dizinin terimleri; 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,… biçimindedir.

Tanım 1.2: $n \geq 1$ için $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ biçiminde tanımlanan sayılara negatif indisli Fibonacci sayıları denir.

Teorem 1.1:(Cassini Formülü) $n \in Z$ için $F_{n-1}F_{n+1} - F_n{}^2 = (-1)^n$ 'dir.

Teorem 1.2: $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere, her $n \in Z$ için;

a) $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ 'dir.

b) $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ 'dir.

Teorem 1.3: $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü α negatif kökü β olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ 'dir.

Tanım 1.3: $L_0 = 2, L_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ile tanımlı sayılara Lucas sayıları denir.

Tanım 1.4: $n \geq 1$ için $L_{-n} = (-1)^n L_n$ biçiminde tanımlanan sayılara negatif indisli Lucas sayıları denir.

Teorem 1.4: $n \geq 1$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$ 'dir.

Teorem 1.5: $5F_n^{\,2} = L_n^{\,2} - 4(-1)^n$ 'dir.

Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili geniş bilgi için [1] ve [2] numaralı kaynaklara bakılabilir.

BÖLÜM 2. FİBONACCİ POLİNOMLARI

Tanım 2.1: $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$ ve $n\geq 3$ olmak üzere $f_n(x)=xf_{n-1}(x)+f_{n-2}(x)$ bağıntısı ile tanımlanan polinomlara Fibonacci polinomları denir. Fibonacci polinomlarının ilk on tanesini yazalım;

$f_1(x)=1$

$f_2(x)=x$

$f_3(x)=x^2+1$

$f_4(x)=x^3+2x$

$f_5(x)=x^4+3x^2+1$

…

$f_{10}(x)=x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x$

tir.

$f_n(x)$'in derecesi $n\geq 1$ iken $n-1$ dir. Fibonacci polinomları ve Fibonacci sayıları arasında $n\geq 1$ olmak üzere $f_n(1)=F_n$ ilişkisi vardır. Örneğin $f_4(1)=F_4$'tür. Ayrıca $f_1(2)=1$, $f_2(2)=2$ ve $n\geq 3$ olmak üzere

$$f_n(2)=2f_{n-1}(2)+f_{n-2}(2)$$

eşitliği söz konusudur. Bu eşitlikten elde edilen sayılar

$$P_n=f_n(2)$$

biçimindeki Pell sayılarıdır. Pell sayıları 1,2,5,12,29… şeklindedir.

Tanım 2.2: $f_0(x)=0$ olmak üzere $f_{-n}(x)=(-1)^{n+1} f_n(x)$ bağıntısı ile tanımlanan polinomlara negatif indisli Fibonacci polinomları denir.

Teorem 2.1: $n \geq 3$ olmak üzere $x\sum_{i=1}^{n} f_i(x)= f_{n+1}(x)+ f_n(x)-1$'dir.

İspat: $f_n(x)=xf_{n-1}(x)+ f_{n-2}(x)$ bağıntısını kullanırsak

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i+1}(x)=x\sum_{i=1}^{n} f_i(x)+\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(x)$$

olur. Buradan

$$f_n(x)+ f_{n+1}(x)=x\sum_{i=1}^{n} f_i(x)+ f_0(x)+ f_1(x)$$

bulunur. $f_0(x)=0$ olduğundan

$$x\sum_{i=1}^{n} f_i(x)= f_{n+1}(x)+ f_n(x)-1$$

elde edilir.

Tanım 2.3: $l_0(x)=2$ **,** $l_1(x)=x$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$l_n(x)=xl_{n-1}(x)+l_{n-2}(x)$$

biçiminde tanımlanan polinomlara Lucas polinomları denir. Lucas polinomlarının ilk 10 tanesini yazalım;

$l_1(x)=x$

$l_2(x)=x^2+2$

$l_3(x)=x^3+3x$

$l_4(x)=x^4+4x^2+2$

…

$l_{10}(x) = x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2$

dir.

Lucas polinomları ve Lucas sayıları arasında $n \geq 0$ için $l_n(1) = L_n$ ilişkisi vardır.

Tanım 2.4: Negatif indisli Lucas polinomları $l_{-n}(x) = (-1)^n l_n(x)$ biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.2: Her $n \in Z$ için $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$ 'dir.

Burada $\alpha(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$ 'dir.

İspat: $\alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{x^2+4}$ olduğunu kullanarak her n doğal sayısı için n

$f_n(x) = \dfrac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}$ olduğunu tümevarımla gösterelim. İddia $n = 1$ için doğrudur. Çünkü,

$$f_1(x) = \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\sqrt{x^2+4}} = 1$$

dir. İddia n için doğru, yani $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}$ olsun.

$$f_{n+1}(x) = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

ifadesinin doğru olduğu gösterilecek. Fibonacci polinomlarının tanımından

$$f_{n+1}(x) = x f_n(x) + f_{n-1}(x)$$

tir. Burada $f_n(x)$ ve $f_{n-1}(x)$ değerleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$f_{n+1}(x) = x\left(\frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}\right) + \left(\frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(x\alpha^n(x)-x\beta^n(x)+\alpha^{n-1}(x)-\beta^{n-1}(x)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\alpha^{n-1}(x)\left(1+x\alpha(x)\right)-\beta^{n-1}(x)\left(1+x\beta(x)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}\right)-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x^2-x\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\left(\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\left(\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)\right]$$

bulunur. Ayrıca

$\left(\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)$ ve $\left(\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)$ ifadeleri paydalarının eşlenikleri ile

çarpılıp düzenlenirse

$\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$ ve $\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$ bulunur.

Böylece

$$f_{n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}\right)-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}\right)\right]$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$f_{n+1}(x) = \frac{\alpha^n(x)\alpha(x)}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{\beta^n(x)\beta(x)}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

olur.

Şu halde iddia $n+1$ için de doğrudur. Tümevarım ilkesine göre her n için ifade doğrudur. Diğer yandan $n=0$ için $f_0(x) = \frac{\alpha^0(x)-\beta^0(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$ =0 doğrudur. Şimdi de $n \in N$ olmak üzere $f_{-n}(x) = \frac{\alpha^{-n}(x)-\beta^{-n}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$ olduğunu gösterelim.

$f_{-n}(x) = \frac{\alpha^{-n}(x)-\beta^{-n}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} = \frac{\frac{1}{\alpha^n(x)} - \frac{1}{\beta^n(x)}}{\alpha(x)-\beta(x)}$ olur. Buradan,

$$f_{-n}(x) = \frac{\frac{\beta^n(x)-\alpha^n(x)}{(-1)^n}}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

$$= \frac{(-1)^n(\beta^n(x)-\alpha^n(x))}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(\alpha^n(x)-\beta^n(x))}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

$$f_{-n}(x) = (-1)^{n+1} f_n(x)$$

elde edilir. Şu halde her $n \in Z$ için

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

olur.

Teorem 2.3: Her $n \in Z$ için $l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$'dir.

İspat: Önce her $n \in N$ için $l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$ olduğunu tümevarımla gösterelim.İddia $n=1$ için doğrudur. Çünkü

$l_1(x)=\alpha(x)+\beta(x)=x$ doğrudur. İddia n için doğru, yani $l_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x)$ olsun. $l_{n+1}(x)=\alpha^{n+1}(x)+\beta^{n+1}(x)$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim. Burada

$$l_{n+1}(x)=f_{n+2}(x)+f_n(x)$$

olduğu kullanılırsa

$$l_{n+1}(x)=\frac{\alpha^{n+2}(x)-\beta^{n+2}(x)}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

ve böylece

$$l_{n+1}(x)=\frac{\alpha^n(x)\left(\alpha^2(x)+1\right)-\beta^n(x)\left(\beta^2(x)+1\right)}{\sqrt{x^2+4}}$$

elde edilir.

$$\alpha(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

olduğundan

$$\alpha^2(x)+1=\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+4}+x^2+4}{4}+1=\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}+4}{2}$$

olur. Buradan

$$\frac{\alpha^2(x)+1}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}+4}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}=\alpha(x)$$

bulunur. Böylece,

$$l_{n+1}(x)=\alpha^n(x)\alpha(x)+\beta^n(x)\beta(x)$$

ve buradan

$$l_{n+1}(x)=\alpha^{n+1}(x)+\beta^{n+1}(x)$$

elde edilir. Şu halde iddia $n+1$ için de doğrudur. Tümevarım ilkesine göre her n için ifade doğrudur. Diğer yandan $n=0$ için $l_0(x)=\alpha^0(x)+\beta^0(x)$=2 doğrudur.

Şimdi de her n doğal sayısı için $l_{-n}(x)=\alpha^{-n}(x)+\beta^{-n}(x)$ olduğunu gösterelim.

$l_{-n}(x)=\dfrac{1}{\alpha^n(x)}+\dfrac{1}{\beta^n(x)}$ olup buradan $l_{-n}(x)=\dfrac{\beta^n(x)+\alpha^n(x)}{(-1)^n}$ olduğu görülür.
Dolayısıyla

$$l_{-n}(x)=(-1)^n l_n(x)$$

bulunur. Şu halde her $n\in Z$ için

$$l_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x)$$

dir.

Teorem 2.4: Her $n\in Z$ için $\alpha^n(x)=\alpha(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)$ 'tir.

İspat: $f_n(x)=\dfrac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}$ olduğundan

$$\alpha(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)=\alpha(x)\left(\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{\alpha^{n-1}(x)-\beta^{n-1}(x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

yazılır. Buradan

$$\alpha(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)=\frac{\alpha^{n+1}(x)-\alpha(x)\beta^n(x)+\alpha^{n-1}(x)-\beta^{n-1}(x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{\alpha^n(x)\left(\alpha(x)+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{\beta^n(x)\left(\alpha(x)+\dfrac{1}{\beta(x)}\right)}{\sqrt{x^2+4}}$$

olur. Burada $\alpha(x)\beta(x)=-1$ olduğu kullanılırsa

$$\alpha(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)=\frac{\alpha^n(x)\big(\alpha(x)-\beta(x)\big)}{\sqrt{x^2+4}}=\alpha^n(x)$$

tir.Yani,

$$\alpha^n(x)=\alpha(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)$$

tir.

Teorem 2.5: Her $n\in Z$ için $\beta^n(x)=\beta(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)$'tir.

İspat: $f_n(x)=\dfrac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}$ olduğundan

$$\beta(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)=\beta(x)\left(\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{\alpha^{n-1}(x)-\beta^{n-1}(x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

tür. Buradan

$$\beta(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)=\frac{-\beta^{n+1}(x)-\alpha^n(x)\beta(x)+\alpha^{n-1}(x)-\beta^{n-1}(x)}{\sqrt{x^2+4}}$$

elde edilir. Böylece

$$\beta(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)=\frac{\alpha^n(x)\left(\beta(x)+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{\beta^n(x)\left(\beta(x)+\dfrac{1}{\beta(x)}\right)}{\sqrt{x^2+4}}$$

olur. Burada $\alpha(x)\beta(x)=-1$ olduğu kullanılırsa

$$\beta(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)=\frac{-\beta^n(x)\big(\beta(x)-\alpha(x)\big)}{\sqrt{x^2+4}}=\beta^n(x)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\beta^n(x)=\beta(x)\,f_n(x)+f_{n-1}(x)$$

elde edilir.

Teorem 2.6: Her $n\in Z$ için $\alpha^n(x)=\dfrac{l_n(x)+\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)}{2}$'dir.

İspat: $f_n(x)=\dfrac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$ ve $\alpha(x)-\beta(x)=\sqrt{x^2+4}$ olduğu biliniyor.

Buradan

$$\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)+\beta^n(x)=\alpha^n(x)$$

yazılır. Ayrıca $l_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x)$ olduğu kullanılırsa

$$\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)+l_n(x)-\alpha^n(x)=\alpha^n(x)$$

elde edilir. Buradan da

$$\alpha^n(x)=\frac{l_n(x)+\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)}{2}$$

bulunur.

Teorem 2.7: Her $n\in Z$ için $\beta^n(x)=\dfrac{l_n(x)-\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)}{2}$ 'dir.

İspat: $f_n(x)=\dfrac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$ ve $\alpha(x)-\beta(x)=\sqrt{x^2+4}$ olduğu kullanılırsa

$$\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)+\beta^n(x)=\alpha^n(x)$$

yazılır. Ayrıca $l_n(x)=\alpha^n(x)+\beta^n(x)$ olduğundan

$$\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)=l_n(x)-\beta^n(x)-\beta^n(x)$$

olur. Buradan

$$\beta^n(x)=\frac{l_n(x)-\sqrt{x^2+4}\,f_n(x)}{2}$$

elde edilir.

Teorem 2.8: Her $n \in Z$ için

$$f_n(x)\left(x^2+4\right) = l_{n+1}(x) + l_{n-1}(x) \quad \text{ve} \quad l_{n+1}(x) = x l_n(x) + l_{n-1}(x) \text{ 'dir.}$$

İspat: $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$ ve $l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$ olduğu kullanılarak ispat yapılabilir.

Teorem 2.9: $P(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{2} & \dfrac{x^2+4}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{x}{2} \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda her $n \in Z$ için

$$P^n(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat: Önce ifadenin her n doğal sayısı için doğru olduğunu gösterelim. İddia $n = 1$ için doğrudur. Çünkü;

$$P(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{l_1(x)}{2} & \dfrac{f_1(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{f_1(x)}{2} & \dfrac{l_1(x)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{2} & \dfrac{x^2+4}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{x}{2} \end{bmatrix}$$

dir. İddia n için doğru, yani

$$P^n(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

olsun.

$$P^{n+1}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{l_{n+1}(x)}{2} & \dfrac{f_{n+1}(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{f_{n+1}(x)}{2} & \dfrac{l_{n+1}(x)}{2} \end{bmatrix}$$

ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$P^n(x)P(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{x}{2} & \dfrac{x^2+4}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{x}{2}\end{bmatrix}$$

ise

$$P^n(x)P(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)}{4} & \dfrac{xf_n(x)\left(x^2+4\right)+l_n(x)(x^2+4)}{4}\\ \dfrac{xf_n(x)+l_n(x)}{4} & \dfrac{xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)}{4}\end{bmatrix}$$

olur. $P^{n+1}(x)=P^n(x)P(x)$ olduğunu göstermek için

$$\frac{xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)}{4}=\frac{l_{n+1}(x)}{2}$$

ve

$$\frac{f_n(x)}{2}=\frac{xf_n(x)+l_n(x)}{4}$$

olduğu gösterilmelidir. İlk önce

$$\frac{xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)}{4}=\frac{l_{n+1}(x)}{2}$$

olduğunu gösterelim. Teorem 2.8'den

$$f_n(x)\left(x^2+4\right)=l_{n+1}(x)+l_{n-1}(x)$$

olduğu biliniyor. Ayrıca

$$l_{n+1}(x)=xl_n(x)+l_{n-1}(x)$$

olduğu kullanılırsa

$$f_n(x)\left(x^2+4\right)=xl_n(x)+l_{n-1}(x)+l_{n-1}(x)$$

olur, yani

$$f_n(x)\left(x^2+4\right)=xl_n(x)+2l_{n-1}(x)$$

olur. Bu ifade de her iki tarafa $xl_n(x)$ eklenirse

$$xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)=2xl_n(x)+2l_{n-1}(x)$$

elde edilir. Buradan

$$xl_n(x)+l_{n-1}(x)=\frac{xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$l_{n+1}(x)=\frac{xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}$$

ve buradan

$$\frac{xl_n(x)+f_n(x)\left(x^2+4\right)}{4}=\frac{l_{n+1}(x)}{2}$$

elde edilir. Şimdi de

$$\frac{f_n(x)}{2}=\frac{xf_n(x)+l_n(x)}{4}$$

olduğunu gösterelim. Teorem 2.8'den

$$f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)=l_n(x)$$

olduğu biliniyor. Ayrıca

$$f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_{n-1}(x)$$

olduğu kullanılırsa,

$$xf_n(x)+f_{n-1}(x)+f_{n-1}(x)=l_n(x)$$

olur. Bu eşitlikte her iki tarafa $xf_n(x)$ eklenirse

$$2xf_n(x)+2f_{n-1}(x)=xf_n(x)+l_n(x)$$

bulunur. Buradan

$$2(xf_n(x)+f_{n-1}(x))=xf_n(x)+l_n(x)$$

olur. Böylece

$$2f_{n+1}(x) = xf_n(x) + l_n(x)$$

yani

$$\frac{f_n(x)}{2} = \frac{xf_n(x) + l_n(x)}{4}$$

elde edilir. Böylece İddia $n+1$ için de doğru olduğundan her n doğal sayısı için

$$P^n(x) = \begin{bmatrix} \frac{l_n(x)}{2} & \frac{f_n(x)(x^2+4)}{2} \\ \frac{f_n(x)}{2} & \frac{l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de $n \in N$ için

$$P^{-n}(x) = \begin{bmatrix} \frac{l_{-n}(x)}{2} & \frac{f_{-n}(x)(x^2+4)}{2} \\ \frac{f_{-n}(x)}{2} & \frac{l_{-n}(x)}{2} \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$P^{-n}(x) = (P^n(x))^{-1}$ olduğundan $P^n(x)$ matrisinin tersini bulalım.

$$(P^n(x))^{-1} = \frac{1}{\det P^n(x)} \begin{bmatrix} \frac{l_n(x)}{2} & -\frac{f_n(x)(x^2+4)}{2} \\ -\frac{f_n(x)}{2} & \frac{l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$(P^n(x))^{-1} = (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{l_n(x)}{2} & -\frac{f_n(x)(x^2+4)}{2} \\ -\frac{f_n(x)}{2} & \frac{l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$(P^n(x))^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^n l_n(x)}{2} & \dfrac{(-1)^{n+1} f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{(-1)^{n+1} f_n(x)}{2} & \dfrac{(-1)^n l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da

$$(P^n(x))^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^n l_n(x)}{2} & \dfrac{(-1)^{n+1} f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{(-1)^{n+1} f_n(x)}{2} & \dfrac{(-1)^n l_n(x)}{2} \end{bmatrix} = P^{-n}(x)$$

bulunur. $n=0$ ise teoremin doğru olduğunu görmek kolaydır. Şu halde her $n \in Z$

için

$$P^n(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

dır.

Teorem 2.10: Her $n \in Z$ için ’dir.

İspat: Bu teoremin ispatını $P(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{2} & \dfrac{x^2+4}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{x}{2} \end{bmatrix}$ polinomunu kullanarak

yapacağız. Önceki teoreme göre

$$P^n(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2} \end{bmatrix}$$

dır.

$$\det P(x) = -1$$

olduğundan $(\det P(x))^n = -1$ olur. Böylece

$$\det\left(P^n(x)\right) = \frac{l_n^{\,2}(x)}{4} - \frac{f_n^{\,2}(x)\left(x^2+4\right)}{4} = (-1)^n$$

ve buradan

$$l_n^{\,2}(x) - \left(x^2+4\right) f_n^{\,2}(x) = 4(-1)^n$$

elde edilir.

Teorem 2.11: Her $n \in Z$ olmak üzere

$Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $Q^n(x) = \begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}$'dir.

İspat: Önce her n doğal sayısı için

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için tümevarım kullanılacaktır. İddia n=1 için doğrudur. Çünkü

$$Q(x) = \begin{bmatrix} f_2(x) & f_1(x) \\ f_1(x) & f_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q(x)$$

tir. İddia n için doğru, yani

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olsun. İddianın $n+1$ içinde doğru olduğunu gösterelim.

$$Q^{n+1}(x) = \begin{bmatrix} f_{n+2}(x) & f_{n+1}(x) \\ f_{n+1}(x) & f_n(x) \end{bmatrix}$$

olur.

$$Q^n(x)Q(x)=\begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ifadesinden

$$Q^n(x)Q(x)=\begin{bmatrix} f_{n+1}(x)x+f_n(x) & f_{n+1}(x) \\ f_n(x)x+f_{n-1}(x) & f_n(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{n+2}(x) & f_{n+1}(x) \\ f_{n+1}(x) & f_n(x) \end{bmatrix}=Q^{n+1}(x)$$

bulunur. Dolayısıyla İddia $n+1$ için de doğrudur. $n=0$ ise teoremin doğru olduğunu görmek kolaydır. Benzer şekilde $n\in N$ için

$Q^{-n}(x)=\begin{bmatrix} f_{-n+1}(x) & f_{-n}(x) \\ f_{-n}(x) & f_{-n-1}(x) \end{bmatrix}$ olduğu ispatlanabilir.

Teorem 2.12: Her $m,n\in Z$ için;

a) $f_{m+n}(x)=f_m(x)\,f_{n+1}(x)+f_{m-1}(x)\,f_n(x)$

b) $(-1)^n f_{m-n}(x)=f_m(x)\,f_{n-1}(x)-f_{m-1}(x)\,f_n(x)$

tir.

İspat: $Q^{m+n}(x)$ matrisini yazalım.

$$Q^{m+n}(x)=\begin{bmatrix} f_{m+n+1}(x) & f_{m+n}(x) \\ f_{m+n}(x) & f_{m+n-1}(x) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

olur. Diğer yandan

$$Q^{m+n}(x)=Q^m(x)Q^n(x)=\begin{bmatrix} f_{m+1}(x) & f_m(x) \\ f_m(x) & f_{m-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$Q^m(x)Q^n(x)=\begin{bmatrix} f_{m+1}(x)\,f_{n+1}(x)+f_m(x)\,f_n(x) & f_{m+1}(x)\,f_n(x)+f_m(x)\,f_{n-1}(x) \\ f_m(x)\,f_{n+1}(x)+f_{m-1}(x)\,f_n(x) & f_m(x)\,f_n(x)+f_{m-1}(x)\,f_{n-1}(x) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olur. (2.1) ve (2.2) eşit olduğundan

$$f_{m+n}(x)=f_m(x)\,f_{n+1}(x)+f_{m-1}(x)\,f_n(x)$$

bulunur. Ayrıca,

$$Q^{m-n}(x)=\begin{bmatrix} f_{m-n+1}(x) & f_{m-n}(x) \\ f_{m-n}(x) & f_{m-n-1}(x) \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

tir. Buradan

$$Q^{m-n}(x)=Q^{m}(x)Q^{-n}(x)=\begin{bmatrix} f_{m+1}(x) & f_{m}(x) \\ f_{m}(x) & f_{m-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{-n+1}(x) & f_{-n}(x) \\ f_{-n}(x) & f_{-n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} f_{m+1}(x) & f_{m}(x) \\ f_{m}(x) & f_{m-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{n} f_{n-1}(x) & (-1)^{n+1} f_{n}(x) \\ (-1)^{n+1} f_{n}(x) & (-1)^{n} f_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} f_{m+1}(x) & f_{m}(x) \\ f_{m}(x) & f_{m-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{n-1}(x) & -f_{n}(x) \\ -f_{n}(x) & f_{n+1}(x) \end{bmatrix}(-1)^{n}$$

$$Q^{m-n}(x)=(-1)^{n}\begin{bmatrix} f_{m+1}(x)f_{n-1}(x)-f_{m}(x)f_{n}(x) & f_{m}(x)f_{n+1}(x)-f_{m+1}(x)f_{n}(x) \\ f_{m}(x)f_{n-1}(x)-f_{m-1}(x)f_{n}(x) & f_{m-1}(x)f_{n+1}(x)-f_{m}(x)f_{n}(x) \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

bulunur. (2.3) ile (2.4) eşit olduğundan

$$(-1)^{n} f_{m-n}(x)=f_{m}(x)f_{n-1}(x)-f_{m-1}(x)f_{n}(x)$$

olur.

Teorem 2.13: Her $n\in Z$ için $f_{n+1}(x)f_{n-1}(x)-f_{n}^{2}(x)=(-1)^{n}$'dir.

İspat: $Q(x)=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $Q^{n}(x)=\begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_{n}(x) \\ f_{n}(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}$

olduğu biliniyor. Bu ifadelerin determinantları alınırsa,

$$\det Q(x)=-1$$

ve

$$(\det Q(x)^{n})=(-1)^{n}$$

elde edilir. Buradan

$$f_{n+1}(x)\,f_{n-1}(x)-f_n^{\,2}(x)=(-1)^n$$

olur.

Teorem 2.14: Her $n\in Z$ için $f_{2n}(x)=f_n(x)l_n(x)$'dir.

İspat: Teorem 2.12'den

$$f_{m+n}(x)=f_m(x)\,f_{n+1}(x)+f_{m-1}(x)\,f_n(x)$$

olduğu biliniyor. Burada $m=n$ alınırsa

$$f_{2n}(x)=f_n(x)\,f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)\,f_n(x)$$

elde edilir. Böylece

$$f_{2n}(x)=f_n(x)\left[f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)\right]$$

olur. $l_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)$ olduğu kullanılırsa

$$f_{2n}(x)=f_n(x)l_n(x)$$

elde edilir.

Teorem 2.15: Her $m,n\in Z$ için

a) $2l_{m+n}(x)=l_m(x)l_n(x)+f_m(x)\,f_n(x)\left(x^2+4\right)$

b) $2\,f_{m+n}(x)=f_m(x)l_n(x)+l_m(x)\,f_n(x)$

dir.

İspat: $P^n(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2}\end{bmatrix}$ ifadesi

$$P^{m+n}(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{l_{m+n}(x)}{2} & \dfrac{f_{m+n}(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_{m+n}(x)}{2} & \dfrac{l_{m+n}(x)}{2}\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

biçiminde yazılabilir. $P^{m+n}(x)=P^m(x)P^n(x)$ olduğundan

$$P^{m+n}(x)=P^m(x)P^n(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{l_m(x)}{2} & \dfrac{f_m(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_m(x)}{2} & \dfrac{l_m(x)}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2}\end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$P^{m+n}(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{l_m(x)l_n(x)+f_m(x)f_n(x)\left(x^2+4\right)}{4} & \dfrac{\left(x^2+4\right)\left[l_m(x)f_n(x)+f_m(x)l_n(x)\right]}{4}\\ \dfrac{f_m(x)l_n(x)+l_m(x)f_n(x)}{4} & \dfrac{f_m(x)f_n(x)\left(x^2+4\right)+l_m(x)l_n(x)}{4}\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

olur. (2.5) ve (2.6) matrislerinin eşitliğinden

$$2l_{m+n}(x)=l_m(x)l_n(x)+f_m(x)f_n(x)\left(x^2+4\right)$$

ve

$$2f_{m+n}(x)=f_m(x)l_n(x)+l_m(x)f_n(x)$$

bulunur.

Teorem 2.16: $2l_{2n}(x)=l_n^2(x)+\left(x^2+4\right)f_n^2(x)$ ‘dir.

İspat: Teorem 2.15’den

$$2l_{m+n}(x)=l_m(x)l_n(x)+f_m(x)f_n(x)\left(x^2+4\right)$$

olduğu biliniyor. Burada $m=n$ alınırsa,

$$2l_{2n}(x)=l_n^{\,2}(x)+\left(x^2+4\right)f_n^{\,2}(x)$$

bulunur.

Teorem 2.17: Her $n\in N$ ve $m,k\in Z$ olmak üzere,

$$\textbf{a)}\ f_{mn+k}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_m^{\,j}(x)\,f_{m-1}^{\,n-j}(x)\,f_{j+k}(x)$$

$$\textbf{b)}\ l_{mn+k}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_m^{\,j}(x)\,f_{m-1}^{\,n-j}(x)\,l_{j+k}(x)$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı için $P^n(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2}\end{bmatrix}$ polinomunu kullanacağız.

$$l_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)$$

olduğundan,

$$P^n(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{l_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{l_n(x)}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)}{2}\end{bmatrix}$$

bulunur.

$f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_{n-1}(x)$ eşitliği $P^n(x)$ 'de yerine yazılırsa

$$P^n(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{xf_n(x)+2f_{n-1}(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2}\\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{xf_n(x)+2f_{n-1}(x)}{2}\end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$P^n(x)=\begin{bmatrix} \dfrac{xf_n(x)}{2} & \dfrac{f_n(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \dfrac{f_n(x)}{2} & \dfrac{xf_n(x)}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f_{n-1}(x) & 0 \\ 0 & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$P^n(x)=f_n(x)P(x)+f_{n-1}(x)\mathrm{I}$$

bulunur. Bu eşitlik yardımıyla

$$P^{mn+k}(x)=f_{mn+k}(x)P(x)+f_{mn+k-1}(x) \tag{2.7}$$

elde edilir. Buradan

$$\left(P^m(x)\right)^n P^k(x)=\left(f_m(x)P(x)+f_{m-1}(x)\mathrm{I}\right)^n P^k(x)$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left(f_m(x)l_n(x)-l_m(x)f_n(x)\right)K(x)\right]$$

yazılır. Böylece

$$\left(P^m(x)\right)^n P^k(x)=\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(f_m(x)P(x)\right)^j\left(f_{m-1}(x)\mathrm{I}\right)^{n-j}\right)P^k(x)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_m{}^j(x)P^j(x)\,f_{m-1}^{n-j}(x)P^k(x)$$

$$\left(P^m(x)\right)^n P^k(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_m{}^j(x)\,f_{m-1}^{n-j}(x)P^{k+j}(x) \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.7) ve (2.8)'den,

$$f_{mn+k}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_m^j(x)\,f_{m-1}^{n-j}(x)\,f_{j+k}(x)$$

ve

$$l_{mn+k}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_m^j(x)\,f_{m-1}^{n-j}(x)l_{j+k}(x)$$

bulunur.

Teorem 2.18: Her $m,n\in Z$ için

$$\textbf{a)}\, l_m(x)\,l_n(x)-\left(x^2+4\right) f_m(x)\, f_n(x)=2(-1)^n\, l_{m-n}(x)$$

$$\textbf{b)}\, f_m(x)\,l_n(x)-l_m(x)\, f_n(x)=2(-1)^n\, f_{m-n}(x)$$

dir.

İspat: $P^m(x)=\begin{bmatrix} \frac{l_m(x)}{2} & \frac{f_m(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \frac{f_m(x)}{2} & \frac{l_m(x)}{2} \end{bmatrix}$ olduğu biliniyor. Buradan

$$P^m(x)=\begin{bmatrix} \frac{l_m(x)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l_m(x)}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{f_m(x)\left(x^2+4\right)}{2} \\ \frac{f_m(x)}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca

$$P^m(x)=\frac{1}{2}\left[l_m(x)\mathrm{I}+f_m(x)K(x)\right]$$

olduğundan

$$P^{m-n}(x)=P^mP^{-n}=\frac{1}{4}\left(l_m(x)\mathrm{I}+f_m(x)K(x)\right)\left(l_{-n}(x)\mathrm{I}+f_{-n}(x)K(x)\right)$$

yazılır. Buradan

$$\frac{1}{2}\left(l_{m-n}(x)\mathrm{I}+f_{m-n}(x)K(x)\right)=\frac{1}{4}\left(l_m(x)\mathrm{I}+f_m(x)K(x)\right)$$

$$\times\frac{1}{4}\left((-1)^n\, l_n(x)\mathrm{I}+(-1)^{n+1}\, f_n(x)K(x)\right)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\left(l_{m-n}(x)\mathrm{I}+f_{m-n}(x)K(x)\right)=\frac{1}{4}(-1)^{n}$$

$$\times\left[l_m(x)l_n(x)-l_m(x)f_n(x)K(x)+f_m(x)l_n(x)K(x)-f_m(x)f_n(x)K^2(x)\right]$$

bulunur. Böylece

$$(-1)^n\frac{1}{2}\left(l_{m-n}(x)\mathrm{I}+f_{m-n}(x)K(x)\right)=\frac{1}{4}\left[\left(l_m(x)l_n(x)-\left(x^2+4\right)f_m(x)f_n(x)\right)\mathrm{I}\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left(f_m(x)l_n(x)-l_m(x)f_n(x)\right)K(x)\right]$$

olur. Buradan

$$l_m(x)l_n(x)-\left(x^2+4\right)f_m(x)f_n(x)=2(-1)^n l_{m-n}(x)$$

ve

$$f_m(x)l_n(x)-l_m(x)f_n(x)=2(-1)^n f_{m-n}(x)$$

bulunur.

Teorem 2.19: Her $m,n\in Z$ olmak üzere,

a) $l_m(x)l_n(x)=l_{m+n}(x)+(-1)^n l_{m-n}(x)$

b) $l_{m+n}(x)-(-1)^n l_{m-n}(x)=\left(x^2+4\right)f_m(x)f_n(x)$

dir.

İspat: Teorem 2.15 ve Teorem 2.18'den dolayı

$$2l_{m+n}(x)=l_m(x)l_n(x)+f_m(x)f_n(x)\left(x^2+4\right)$$

ve

$$l_m(x)l_n(x)-\left(x^2+4\right)f_m(x)f_n(x)=2(-1)^n l_{m-n}(x)$$

olduğu biliniyor. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$2\left(l_{m+n}(x)+(-1)^n l_{m-n}(x)\right)=2l_m(x)l_n(x)$$

elde edilir. Buradan

$$l_m(x)l_n(x)=l_{m+n}(x)+(-1)^n l_{m-n}(x)$$

bulunur. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa

$$2\left(l_{m+n}(x)-(-1)^n l_{m-n}(x)\right)=2f_m(x)\,f_n(x)$$

olur. Böylece

$$l_{m+n}(x)-(-1)^n l_{m-n}(x)=\left(x^2+4\right)f_m(x)\,f_n(x)$$

bulunur.

Teorem 2.20: Her $m,n\in Z$ olmak üzere,

a) $f_{m+n}(x)\,f_{m-n}(x)-f_m^{\,2}(x)=-(-1)^{m-n}\,f_n^{\,2}(x)$

b) $l_{m+n}(x)l_{m-n}(x)-l_m^{\,2}(x)=(-1)^{m-n}\left(x^2+4\right)f_n^{\,2}(x)$

tir.

İspat: Teorem 2.15'den

$$2f_{m+n}(x)=f_m(x)l_n(x)+l_m(x)\,f_n(x)$$

ve Teorem 2.18'den

$$f_m(x)l_n(x)-l_m(x)\,f_n(x)=2(-1)^n\,f_{m-n}(x)$$

olduğu biliniyor. Bu iki denklem taraf tarafa çarpılırsa

$$4(-1)^n\,f_{m+n}(x)\,f_{m-n}(x)=f_m^{\,2}(x)l_n^{\,2}(x)-f_n^{\,2}(x)l_m^{\,2}(x) \qquad (2.7)$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 2.10'a göre

$$l_n^{\,2}(x)-\left(x^2+4\right)f_n^{\,2}(x)=4(-1)^n$$

olup bu ifade (2.7)'de yerine yazılırsa

$$(-1)^n f_{m+n}(x)\,f_{m-n}(x)=f_m^{\,2}(x)\,l_n^{\,2}(x)-\left(x^2+4\right)f_m^{\,2}(x)\,f_n^{\,2}(x)-4(-1)^m f_n^{\,2}(x)$$

olur. Buradan

$$f_{m+n}(x)\,f_{m-n}(x)=\frac{f_m^{\,2}(x)\left[l_n^{\,2}(x)-\left(x^2+4\right)f_n^{\,2}(x)\right]-4(-1)^m f_n^{\,2}(x)}{4(-1)^n}$$

elde edilir. Böylece

$$f_{m+n}(x)\,f_{m-n}(x)=\frac{f_m^{\,2}(x)\,4(-1)^n-4(-1)^m f_n^{\,2}(x)}{4(-1)^n}$$

olur. Buradan,

$$f_{m+n}(x)\,f_{m-n}(x)=f_m^{\,2}(x)-(-1)^{m-n}f_n^{\,2}(x)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$f_{m+n}(x)\,f_{m-n}(x)-f_m^{\,2}(x)=-(-1)^{m-n}f_n^{\,2}(x)$$

elde edilir. Aynı şekilde Teorem 2.15'e göre

$$2l_{m+n}(x)=l_m(x)\,l_n(x)+f_m(x)\,f_n(x)\left(x^2+4\right)$$

ve Teorem 2.18'e göre

$$l_m(x)\,l_n(x)-\left(x^2+4\right)f_m(x)\,f_n(x)=2(-1)^n l_{m-n}(x)$$

olduğu biliniyor. Bu iki denklem taraf tarafa çarpılırsa

$$4(-1)^n l_{m+n}(x)\,l_{m-n}(x)=l_m^{\,2}(x)\,l_n^{\,2}(x)-\left(x^2+4\right)^2 f_m^{\,2}(x)\,f_n^{\,2}(x) \tag{2.8}$$

bulunur. Teorem 2.10'a göre

$$l_n^2(x)-(x^2+4)f_n^2(x)=4(-1)^n$$

dir. Bu eşitlik (2.8)’de yerine yazılırsa

$$4(-1)^n l_{m+n}(x)l_{m-n}(x)=l_m^2(x)l_n^2(x)-(x^2+4)f_n^2(x)l_m^2(x)+4(-1)^m(x^2+4)f_n^2(x)$$

olur. Böylece

$$l_{m+n}(x)l_{m-n}(x)=\frac{l_m^2(x)\left[l_n^2(x)-(x^2+4)f_n^2(x)\right]+4(-1)^m(x^2+4)f_n^2(x)}{4(-1)^n}$$

elde edilir. Buradan da

$$l_{m+n}(x)l_{m-n}(x)=\frac{l_m^2(x)4(-1)^n+4(-1)^m(x^2+4)f_n^2(x)}{4(-1)^n}$$

bulunur. Böylece $l_{m+n}(x)l_{m-n}(x)-l_m^2(x)=(-1)^{m-n}(x^2+4)f_n^2(x)$

elde edilir. Buradan da

$$l_{m+n}(x)l_{m-n}(x)-l_m^2(x)=(-1)^{m-n}(x^2+4)f_n^2(x)$$

bulunur.

Teorem 2.21: Her $m\in Z$ olmak üzere

$l_{m+1}(x)l_{m-1}(x)-l_m^2(x)=(-1)^{m-1}(x^2+4)f_n^2(x)$’dir.

İspat: Teorem 2.20’den

$$l_{m+n}(x)l_{m-n}(x)-l_m^2(x)=(-1)^{m-n}(x^2+4)f_n^2(x)$$

olduğu biliniyor. Burada $n=1$ alınırsa

$$l_{m+1}(x)l_{m-1}(x)-l_m^2(x)=(-1)^{m-1}(x^2+4)f_n^2(x)$$

olduğu kolayca görülebilir.

BÖLÜM 3. FİBONACCİ VE LUCAS TOPLAMLARI

Bu bölümde $\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^j$ ve $\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j$ toplamları kullanılarak değişik toplam formülleri elde edilecektir.

Teorem 3.1: $x^{n+1}F_{n-1} + x^n F_n - x = \left(x^2 + x - 1\right)\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^j$ 'dir.

İspat: Önce $x \neq 0$ olsun. Eğer $x \neq -\alpha$ ve $x \neq -\beta$ ise

$\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\alpha^j - \beta^j\right)x^j\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\alpha^j x^j - \beta^j x^j\right)\right\}$ olur. Buradan

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha x)^j - \sum_{j=1}^{n-1}(\beta x)^j\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{(\alpha x)^n - 1}{\alpha x - 1} - \frac{(\beta x)^n - 1}{\beta x - 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{(\beta x - 1)\left(\alpha^n x^n - 1\right) - (\alpha x - 1)\left(\beta^n x^n - 1\right)}{-x^2 - x + 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{\alpha^n \beta x^{n+1} - \beta x - \alpha^n x^n + 1 - \alpha\beta^n x^{n+1} + \alpha x + \beta^n x^n - 1}{-x^2 - x + 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{x^{n+1}\left(\alpha^n\beta - \alpha\beta^n\right) - x^n\left(\alpha^n - \beta^n\right) + x(\alpha - \beta)}{-x^2 - x + 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{\sqrt{5}\alpha\beta x^{n+1}F_{n-1} - \sqrt{5}x^n F_n + x\sqrt{5}}{-x^2 - x + 1}\right\} = \frac{x^{n+1}F_{n-1} + x^n F_n - x}{x^2 + x - 1}$$

bulunur. Şu halde

$$x^{n+1}F_{n-1} + x^n F_n - x = \left(x^2 + x - 1\right)\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^j \qquad (3.1)$$

olur. $x = 0$ ise (3.1) ifadesi doğrudur. Bu eşitlik $x = \alpha$ ve $x = \beta$ için doğrudur.

(3.1) ifadesinde $x = \alpha$ alınırsa

$$\alpha^{n+1}F_{n-1} + \alpha^n F_n - \alpha = \left(\alpha^2 + \alpha - 1\right)\sum_{j=1}^{n-1} F_j \alpha^j$$

olur.

$\left(\alpha^2+\alpha-1\right)=2\alpha$ olduğundan

$$\alpha^{n+1}F_{n-1}+\alpha^n F_n-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n-1}F_j\alpha^j$$

bulunur. Şimdi bu ifadenin doğru olduğunu tümevarımla ispatlayalım. İddia $n=2$ için doğrudur, çünkü

$$\alpha^3F_1+\alpha^2F_2-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{1}F_j\alpha^j$$

eşitliğinden

$$\alpha^3+\alpha^2-\alpha=2\alpha^2$$

olur. Burada $\alpha^3=\alpha^2+\alpha$ olduğu kullanılırsa eşitliğin doğru olduğu görülür. İddia n için doğru, yani

$$\alpha^{n+1}F_{n-1}+\alpha^n F_n-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n-1}F_j\alpha^j$$

olsun. İddianın $n+1$ için doğru, yani

$$\alpha^{n+2}F_n+\alpha^{n+1}F_{n+1}-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n}F_j\alpha^j$$

olduğu gösterilecek.

$$\alpha^{n+1}F_{n-1}+\alpha^n F_n-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n-1}F_j\alpha^j$$

eşitliğinin her iki yanına $2\alpha F_n\alpha^n$ eklenirse,

$$2\alpha F_n\alpha^n+\alpha^{n+1}F_{n-1}+\alpha^n F_n-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n-1}F_j\alpha^j+2\alpha F_n\alpha^n$$

bulunur. Buradan

$$F_n\alpha^{n+1}+F_n\alpha^{n+1}+\alpha^{n+1}F_{n-1}+\alpha^n F_n-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n-1}F_j\alpha^j+2\alpha F_n\alpha^n$$

olur. Böylece

$$\alpha^{n+1}(F_n+F_{n-1})+F_n(\alpha^{n+1}+\alpha^n)-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n}F_j\alpha^j$$

elde edilir. Burada

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ve $\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$ olduğu kullanılırsa,

$$\alpha^{n+2}F_n+\alpha^{n+1}F_{n+1}-\alpha=2\alpha\sum_{j=1}^{n}F_j\alpha^j$$

bulunur. Şu halde iddia $n+1$ içinde doğru olur. Dolayısıyla (3.1) ifadesi $x=\alpha$ için doğrudur. Benzer şekilde (3.1) ifadesinin $x=\beta$ içinde doğru olduğu tümevarımla ispatlanabilir.

Teorem 3.2: $\sum_{j=1}^{n} F_j L_{j+1} = \frac{F_n L_{n+2} + F_{2n+2} - 1}{2}$ ’dir.

İspat: Teorem3.1’den

$$x^{n+1}F_{n-1} + x^n F_n - x = \left(x^2 + x - 1\right)\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^j$$

olduğu biliniyor. Bu eşitlikte $x=\alpha$ ve $x=\beta$ yazalım.

$x=\alpha$ ise

$$\alpha^{n+1}F_{n-1} + \alpha^n F_n - \alpha = \left(\alpha^2 + \alpha - 1\right)\sum_{j=1}^{n-1} F_j \alpha^j$$

olur. $\alpha^2 + \alpha - 1 = 2\alpha$ olduğundan

$$\alpha^{n+1}F_{n-1} + \alpha^n F_n - \alpha = 2\alpha\sum_{j=1}^{n-1} F_j \alpha^j \tag{3.2}$$

dir. $x=\beta$ ise

$$\beta^{n+1}F_{n-1} + \beta^n F_n - \beta = 2\beta\sum_{j=1}^{n-1} F_j \beta^j \tag{3.3}$$

dir. (3.2) ve (3.3) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$F_{n-1}\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) + F_n\left(\alpha^n + \beta^n\right) - \left(\alpha + \beta\right) = 2\sum_{j=1}^{n-1} F_j\left(\alpha^{j+1} + \beta^{j+1}\right)$$

olur. Buradan

$$F_{n-1}L_{n+1} + F_n L_n - 1 = 2\sum_{j=1}^{n-1} F_j L_{j+1}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{n} F_j L_{j+1} = \frac{F_n L_{n+2} + F_{2n+2} - 1}{2}$$

bulunur.

Teorem 3.3: $\sum_{j=1}^{n} F_j F_{j+1} = \frac{2F_{n+1}{}^2 - (-1)^n - 1}{2}$ ’dir.

İspat: (3.2) ifadesinden (3.3) ifadesini taraf tarafa çıkarırsak;

$$F_{n-1}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)+F_n\left(\alpha^n-\beta^n\right)-(\alpha-\beta)=2\sum_{j=1}^{n-1}F_j\left(\alpha^{j+1}-\beta^{j+1}\right)$$

olur. Buradan,

$$F_{n-1}F_{n+1}\sqrt{5}+F_nF_n\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}F_jF_{j+1}$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki taraf $\sqrt{5}$ ile bölünürse,

$$F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_n-1=2\sum_{j=1}^{n-1}F_jF_{j+1}$$

elde edilir. $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^{\ 2}=(-1)^n$ olduğu kullanılırsa,

$$F_{n-1}F_{n+1}+F_n^{\ 2}-2F_n^{\ 2}=(-1)^n$$

ve buradan,

$$\frac{2F_n^{\ 2}+(-1)^n-1}{2}=\sum_{j=1}^{n-1}F_jF_{j+1}$$

bulunur. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{n}F_jF_{j+1}=\frac{2F_{n+1}^{\ 2}-(-1)^n-1}{2}$$

elde edilir.

Teorem 3.4: $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j F_j^{\ 2}=\dfrac{(-1)^{n+1}\{(n+1)F_{n+1}L_n-(n+2)F_nL_{n+1}\}+2}{5}$’dir.

İspat: $Q(x)=\sum_{j=1}^{n-1}F_jx^j$ alınırsa Teorem 3.1’deki ifade

$$x^{n+1}F_{n-1}+x^nF_n-x=\left(x^2+x-1\right)Q(x)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan her iki yanın türevi alınırsa,

$$(n+1)x^nF_{n-1}+nx^{n-1}F_{n-1}=(2x+1)Q(x)+\left(x^2+x-1\right)Q^{'}(x)$$

bulunur. Bu eşitlikte $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ yazalım.

$x=-\alpha$ ise

$$(-1)^n(n+1)\alpha^nF_{n-1}+(-1)^{n-1}n\alpha^{n-1}F_n-1=-\sqrt{5}Q(-\alpha) \tag{3.4}$$

dır. $x=-\beta$ ise

$$(-1)^n(n+1)\beta^nF_{n-1}+(-1)^{n-1}n\beta^{n-1}F_n-1=\sqrt{5}Q(-\beta) \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) ifadelerini taraf tarafa toplarsak;

$$(-1)^n (n+1) F_{n-1}\left(\alpha^n + \beta^n\right) + (-1)^{n-1} nF_n \left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) - 2 = \sqrt{5}\left(-Q(-\alpha) + Q(-\beta)\right)$$

bulunur. Bu eşitlikte $L_n = \alpha^n + \beta^n$ ve $L_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ yazılırsa,

$$(-1)^n (n+1) F_{n-1} L_n - (-1)^n nF_n L_{n-1} - 2 = -\sqrt{5}\left(Q(-\alpha) - Q(-\beta)\right)$$

olur. Buradan da

$$\frac{(-1)^n \left\{-nF_n L_{n-1} + (n+1) F_{n-1} L_n\right\} - 2}{5} = -\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j F_j^{\,2}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j F_j^{\,2} = \frac{(-1)^{n+1} \left\{(n+1) F_{n+1} L_n - (n+2) F_n L_{n+1}\right\} + 2}{5}$$

olur.

Teorem 3.5: $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j F_{2j} = (-1)^n F_n F_{n+1}$ ' dir.

İspat: (3.4) ifadesinden (3.5) ifadesini taraf tarafa çıkarırsak

$$(-1)^n (n+1) F_{n-1}\left(\alpha^n - \beta^n\right) + (-1)^{n-1} nF_n \left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) = -\sqrt{5}\left(Q(-\alpha) + Q(-\beta)\right)$$

olur. Bu eşitlikte $F_n = \alpha^n - \beta^n$ ve $F_{n-1} = \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}$ olduğu kullanılırsa

$$(-1)^n (n+1) F_{n-1} F_n + (-1)^{n-1} nF_n F_{n-1} = -\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j F_j L_j$$

elde edilir. Böylece

$$(-1)^{n+1} F_n F_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j F_{2j}$$

olur. Buradan

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j F_{2j} = (-1)^n F_n F_{n+1}$$

elde edilir.

Teorem 3.6:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j jF_j F_{j-1} = \frac{(-1)^n (n+1)\left[F_n L_n + F_{n+1} L_{n-1} + (-1)^n (n+1)\right] + 2(-1)^{n+1} F_{n+1} F_n}{10}$$

dur.

İspat: $Q(x)=\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^j$ olmak üzere (3.1) ifadesinin türevinin,

$$(n+1)x^n F_{n-1} + n x^{n-1} F_{n-1} = (2x+1)Q(x) + \left(x^2+x-1\right)Q^{'}(x)$$

olduğu biliniyor. Bu ifadenin ikinci türevi alınırsa

$$n(n+1)x^{n-1}F_{n-1} + n(n-1)x^{n-2}F_n = 2Q(x) + 2(2x+1)Q'(x) + \left(x^2+x-1\right)Q''(x)$$

olur. $x=-\alpha$ alınırsa

$$n(n+1)(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}F_{n-1} + n(n-1)(-1)^n \alpha^{n-2}F_n = 2Q(-\alpha) - 2\sqrt{5}Q^{'}(-\alpha) \tag{3.6}$$

olur. $x=-\beta$ alınırsa

$$n(n+1)(-1)^{n-1}\beta^{n-1}F_{n-1} + n(n-1)(-1)^n \beta^{n-2}F_n = 2Q(-\beta) + 2\sqrt{5}Q^{'}(-\beta) \tag{3.7}$$

elde edilir.

(3.6) ve (3.7) ifadelerini taraf tarafa toplarsak,

$$n(n+1)(-1)^{n-1}F_{n-1}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right) + n(n-1)(-1)^n F_n\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right) = 2Q(-\alpha)$$
$$+2Q(-\beta) - 2\sqrt{5}\left(Q'(-\alpha) - Q'(-\beta)\right)$$

olur. Buradan

$$n(n+1)(-1)^{n-1}F_{n-1}L_{n-1} + n(n-1)(-1)^n F_n L_{n-2} = 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j F_j L_j - 10\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1} jF_j F_{j-1}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{(-1)^{n-1} n\left((n+1)F_{n-1}L_{n-1} - (n-1)\left(F_n L_{n-2}\right)\right) + 2(-1)^n F_n F_{n-1}}{10} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j jF_j F_{j-1}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{(-1)^{n-1} n\left(nF_{n-1}L_{n-1} + F_{n-1}L_{n-1} - nF_n L_{n-2} + F_n L_{n-2}\right) + 2(-1)^n F_n F_{n-1}}{10} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j jF_j F_{j-1}$$

elde edilir. Ayrıca $F_{n-1}L_{n-1} - F_n L_{n-2} = (-1)^{n-1}$ olduğu kullanılırsa

$$\frac{(-1)^{n-1} n\left(F_{n-1}L_{n-1} + F_n L_{n-2} + n(-1)^{n-1}\right) + 2(-1)^n F_n F_{n-1}}{10} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j jF_j F_{j-1}$$

olur. Şu halde

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j jF_j F_{j-1} = \frac{(-1)^n (n+1)\left[F_n L_n + F_{n+1}L_{n-1} + (-1)^n (n+1)\right] + 2(-1)^{n+1} F_{n+1}F_n}{10}$$

dur.

Teorem 3.7: $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\, jF_jL_{j-1}=\dfrac{(n+1)(-5n+4)-2(-1)^{n+1}\left((5n+5)F_n^{\,2}-L_nF_{n+1}\right)}{10}$

dur.

İspat: (3.6) ifadesinden (3.7) ifadesini taraf tarafa çıkarırsak

$$n(n+1)(-1)^{n-1}F_{n-1}^{\,2}+n(n-1)(-1)^{n}F_nF_{n-2}=2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}F_j^{\,2}-2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\, jF_jL_{j-1}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{(-1)^{n}n\left((n-1)F_nF_{n-2}-(n+1)F_{n-1}^{\,2}\right)}{2}-\frac{(-1)^{n-1}L_{n-1}F_n-2n}{5}=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\, jF_jL_{j-1}$$

bulunur. $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^{\,2}=(-1)^{n}$ ve $F_nF_{n-2}-F_{n-1}^{\,2}=(-1)^{n+1}$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{5n(-1)^{n}\left((-1)^{n+1}(n-1)-2F_{n-1}^{\,2}\right)+2(-1)^{n}L_{n-1}F_n+4n}{10}=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\, jF_jL_{j-1}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{-5n(n-1)-10(-1)^{n}nF_{n-1}^{\,2}+2(-1)^{n}L_{n-1}F_n+4n}{10}=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\, jF_jL_{j-1}$$

bulunur.Dolayısıyla

$$\frac{n(-5n+9)-2(-1)^{n}\left(5nF_{n-1}^{\,2}-L_{n-1}F_n\right)}{10}=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\, jF_jL_{j-1}$$

ve buradan

$$\frac{(n+1)(-5n+4)-2(-1)^{n+1}\left((5n+5)F_n^{\,2}-L_nF_{n+1}\right)}{10}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\, jF_jL_{j-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.8: $\left(-x^2-x+1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}L_jx^j\right)=-x^{n+1}L_{n-1}-x^nL_n-x+2$ ’dir.

İspat: Önce $x\neq 0$ olsun. Eğer $x\neq-\alpha$ ve $x\neq-\beta$ ise;

$$\sum_{j=0}^{n-1}L_jx^j=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^jx^j+\sum_{j=0}^{n-1}\beta^jx^j=\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha x)^j+\sum_{j=0}^{n-1}(\beta x)^j=\frac{(\alpha x)^n-1}{\alpha x-1}+\frac{(\beta x)^n-1}{\beta x-1}$$

$$=\frac{(\beta x-1)\left((\alpha x)^n-1\right)+(\alpha x-1)\left((\beta x)^n-1\right)}{-x^2-x+1}$$

olur. Buradan

$$\left(-x^2-x+1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j\right)=(\beta x-1)\left((\alpha x)^n-1\right)+(\alpha x-1)\left((\beta x)^n-1\right)$$

$$=\alpha^n\beta x^{n+1}-\beta x-\alpha^n x^n+1+\alpha\beta^n x^{n+1}-\alpha x-\beta^n x^n+1$$

$$=x^{n+1}\left(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n\right)-x^n\left(\alpha^n+\beta^n\right)-x(\alpha+\beta)+2$$

elde edilir. Böylece

$$\left(-x^2-x+1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j\right)=x^{n+1}(-1)\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)-x^n L_n-x+2$$

$$=-x^{n+1}L_{n-1}+x^n L_n+x-2$$

olur. Buradan

$$\left(x^2+x-1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j\right)=x^{n+1}L_{n-1}+x^n L_n+x-2$$

bulunur. Buradan da

$$\left(-x^2-x+1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j\right)=-x^{n+1}L_{n-1}-x^n L_n-x+2 \tag{3.8}$$

elde edilir. $x=0$ ise (3.8) ifadesi doğrudur. Bu eşitlik $x=\alpha$ ve $x=\beta$ için doğrudur. (3.8) ifadesinde $x=\alpha$ alınırsa

$$\left(-\alpha^2-\alpha+1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^j\right)=-\alpha^{n+1}L_{n-1}-\alpha^n L_n-\alpha+2$$

olur. $\left(-\alpha^2-\alpha+1\right)=-2\alpha$ olduğundan

$$-2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^j\right)=-\alpha^{n+1}L_{n-1}-\alpha^n L_n-\alpha+2$$

bulunur. Şimdi bu ifadenin doğru olduğunu tümevarımla ispatlayalım. İddia $n=1$ için doğrudur, çünkü

$$-2\alpha\left(\sum_{j=0}^{1} L_j \alpha^j\right)=-\alpha^3 L_1-\alpha^2 L_2-\alpha+2$$

eşitliğinden .

$$-2\alpha^2-4\alpha=-\alpha^3-3\alpha^2-\alpha+2$$

olur. Burada $\alpha^2=\alpha+1$ eşitliği kullanılırsa her iki tarafın $-6\alpha-2$ olduğu görülür. İddia n için doğru, yani

$$-2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\alpha^j\right) = -\alpha^{n+1}L_{n-1} - \alpha^n L_n - \alpha + 2$$

olsun. İddianın $n+1$ için doğru, yani

$$-2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n} L_j\alpha^j\right) = -\alpha^{n+2}L_n - \alpha^{n+1}L_{n+1} - \alpha + 2$$

olduğu gösterilecek.

$$-2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\alpha^j\right) = -\alpha^{n+1}L_{n-1} - \alpha^n L_n - \alpha + 2$$

eşitliğinin her iki yanına $-2\alpha L_n\alpha^n$ eklenirse,

$$-2\alpha L_n\alpha^n - 2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\alpha^j\right) = -\alpha^{n+1}L_{n-1} - \alpha^n L_n - \alpha + 2 - 2\alpha L_n\alpha^n$$

bulunur. Buradan

$$-2\alpha L_n\alpha^n - 2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\alpha^j\right) = -\alpha^{n+1}L_{n-1} - \alpha^n L_n - \alpha + 2 - \alpha L_n\alpha^n - \alpha L_n\alpha^n$$

olur. Böylece

$$-2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n} L_j\alpha^j\right) = -\left[\alpha^{n+1}(L_n + L_{n-1}) + L_n(\alpha^{n+1} + \alpha^n) + \alpha - 2\right]$$

elde edilir. Burada

$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ ve $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ olduğu kullanılırsa,

$$-2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n} L_j\alpha^j\right) = -\alpha^{n+2}L_n - \alpha^{n+1}L_{n+1} - \alpha + 2$$

bulunur. Şu halde iddia $n+1$ içinde doğru olur. Dolayısıyla (3.8) ifadesi $x=\alpha$ için doğrudur. Benzer şekilde (3.8) ifadesinin $x=\beta$ içinde doğru olduğu tümevarımla ispatlanabilir.

Teorem 3.9: $\sum_{j=0}^{n} L_j L_{j+1} = \dfrac{L_{n+2}L_n + L_{n+1}{}^2 - 3}{2}$ ’dir.

İspat: Teorem 3.8’den $\left(-x^2 - x + 1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j\right) = -x^{n+1}L_{n-1} - x^n L_n - x + 2$ olduğu biliniyor. Bu eşitlikte $x=\alpha$ ve $x=\beta$ yazalım. $x=\alpha$ ise

$$2\alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\alpha^j\right) = \alpha^{n+1}L_{n-1} + \alpha^n L_n + \alpha - 2 \qquad (3.9)$$

dir. $x=\beta$ ise

$$2\beta\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\beta^j\right)=\beta^{n+1}L_{n-1}+\beta^n L_n+\beta-2 \tag{3.10}$$

dir. (3.9) ve (3.10) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$2\sum_{j=0}^{n-1} L_j\left(\alpha^{j+1}+\beta^{j+1}\right)=\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)L_{n-1}+\left(\alpha^n+\beta^n\right)L_n-3$$

olur. Böylece

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j L_{j+1}=\frac{L_{n+1}L_{n-1}+L_n{}^2-3}{2}$$

elde edilir. Burada n yerin $n+1$ yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{n} L_j L_{j+1}=\frac{L_{n+2}L_n+L_{n+1}{}^2-3}{2}$$

bulunur.

Teorem 3.10: $\sum_{j=0}^{n} L_j F_{j+1}=\dfrac{F_{n+2}L_n+F_{2n+2}+1}{2}$ ’dir.

İspat: (3.9) ifadesinden (3.10) ifadesini taraf tarafa çıkarırsak

$$2\sum_{j=0}^{n-1} L_j\left(\alpha^{j+1}-\beta^{j+1}\right)=\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)L_{n-1}+\left(\alpha^n-\beta^n\right)L_n+\sqrt{5}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafını $\sqrt{5}$ ile bölersek

$$2\sum_{j=0}^{n-1} L_j F_{j+1}=F_{n+1}L_{n-1}+F_nL_n+1$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j F_{j+1}=\frac{F_{n+1}L_{n-1}+F_nL_n+1}{2}$$

bulunur. Burada n yerine $n+1$ alınırsa

$$\sum_{j=0}^{n} L_j F_{j+1}=\frac{F_{n+2}L_n+F_{2n+2}+1}{2}$$

elde edilir.

Teorem 3.11: $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_jF_j=\dfrac{(-1)^{n-1}L_nL_{n-1}-2}{5}$ ’dir.

İspat: $Q(x)=\sum_{j=1}^{n-1} L_jx^j$ olmak üzere (3.8) ifadesini yazıp türevini alalım.

$$\left(x^2+x-1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j\right)=x^{n+1}L_{n-1}+x^n L_n+x-2$$

eşitliği

$$\left(x^2+x-1\right)Q(x)=x^{n+1}L_{n-1}+x^n L_n+x-2$$

olarak yazılabilir. Türev alınırsa

$$(2x+1)Q(x)+\left(x^2+x-1\right)Q'(x)=(n+1)x^n L_{n-1}+nx^{n-1}L_n+1$$

elde edilir. Bu eşitlikte $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ yazalım. $x=-\alpha$ ise

$$-\sqrt{5}Q(-\alpha)=(n+1)(-\alpha)^n L_{n-1}+n(-\alpha)^{n-1}L_n+1 \qquad (3.11)$$

olur. $x=-\beta$ ise

$$-\sqrt{5}Q(-\beta)=(n+1)(-\beta)^n L_{n-1}+n(-\beta)^{n-1}L_n+1 \qquad (3.12)$$

dir. (3.11) ve (3.12) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\sqrt{5}\left(Q(-\beta)-Q(-\alpha)\right)=(-1)^n(n+1)L_{n-1}-(-1)^n nL_n L_{n-1}+2$$

yani

$$-\sqrt{5}\sum_{j=0}^{n-1}L_j\left((-\alpha)^j-(-\beta)^j\right)=(-1)^n L_n L_{n-1}(n+1-n)+2$$

olur. Buradan

$$-5\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j F_j=(-1)^n L_n L_{n-1}+2$$

bulunur. Şu halde

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j F_j=\frac{(-1)^{n-1}L_n L_{n-1}-2}{5}$$

dir.

Teorem 3.12: $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L_J^{\,2}=(-1)^{n+1}\left[(n+1)L_{n+1}F_n-(n+2)L_n F_{n+1}\right]$'dir.

İspat: (3.11) ifadesinden (3.12) ifadesi taraf tarafa çıkarılırsa

$$-\sqrt{5}\left(Q(-\alpha)-Q(-\beta)\right)=(n+1)L_{n-1}\left(\alpha^n-\beta^n\right)-nL_n(-1)^n\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)$$

yani

$$-\sqrt{5}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^J L_J^{\,2}=(n+1)L_{n-1}(-1)^n\left(\alpha^n-\beta^n\right)-nL_n(-1)^n\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{5}$ ile bölünürse

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^J L_J^{\ 2}=(-1)^n\left[nL_nF_{n-1}-(n+1)L_{n-1}F_n\right]$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^J L_J^{\ 2}=(-1)^n nL_nF_{n-1}-(-1)^n(n+1)L_{n-1}F_n$$

elde edilir. Burada n yerine $n+1$ yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L_J^{\ 2}=(-1)^{n+1}\left[(n+1)L_{n+1}F_n-(n+2)L_nF_{n+1}\right]$$

bulunur.

Teorem 3.13: $n\geq 2$ olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L_j\, jF_{j-1}=\frac{(-1)^{n+1}\left[n(n+1)L_{n+1}L_{n-1}-(n+1)(n+2)L_n^{\ 2}\right]-2\left[2(n+2)-(-1)^{n+1}L_{n+1}F_n\right]}{10}$$

dur.

İspat: (3.8) ifadesinin birinci türevinin,

$$(2x+1)Q(x)+\left(x^2+x-1\right)Q'(x)=(n+1)x^nL_{n-1}+nx^{n-1}L_n+1$$

olduğu biliniyor. Bu ifadenin ikinci türevi alınırsa

$$2Q(x)+(2x+1)Q'(x)+(2x+1)Q'(x)+\left(x^2+x-1\right)Q''(x)=n(n+1)x^{n-1}L_{n-1}$$
$$+n(n-1)x^{n-2}L_n$$

bulunur. Buradan

$$2Q(x)+2(2x+1)Q'(x)+\left(x^2+x-1\right)Q''(x)=n(n+1)x^{n-1}L_{n-1}+n(n-1)x^{n-2}L_n$$

elde edilir. $\left(x^2+x-1\right)Q''(x)$ ifadesi $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ için sıfır'dır.

$x=-\alpha$ için;

$$2Q(-\alpha)+2(-2\alpha+1)Q'(-\alpha)=(-1)^{n-1}n(n+1)\alpha^{n-1}L_{n-1}+(-1)^n n(n-1)\alpha^{n-2}L_n \quad (3.13)$$

dir. $x=-\beta$ için;

$$2Q(-\beta)+2(-2\beta+1)Q'(-\beta)=(-1)^{n-1}n(n+1)\beta^{n-1}L_{n-1}+(-1)^n n(n-1)\beta^{n-2}L_n \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$2\left[Q(-\alpha)+Q(-\beta)\right]+2\sqrt{5}\left[-Q'(\alpha)+Q'(\beta)\right]=(-1)^{n-1}n(n+1)L_{n-1}^{\ 2}$$
$$+(-1)^n n(n-1)L_nL_{n-2}$$

bulunur. Ayrıca

$$Q(-\alpha)+Q(-\beta)=\sum_{j=0}^{n-1} L_j\left[(-\alpha)^j+(-\beta)^j\right]$$

dir. Burada $L_j=\alpha^j+\beta^j$ yazılırsa

$$Q(-\alpha)+Q(-\beta)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j^{\,2}$$

elde edilir. $Q'(x)=\sum_{j=0}^{n-1} L_j jx^{j-1}$ olduğundan

$$-Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)=-\sum_{j=0}^{n-1} L_j j(-\alpha)^{j-1}+\sum_{j=0}^{n-1} L_j j(-\beta)^{j-1}$$

olur. Buradan,

$$-Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j j\alpha^{j-1}-\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j j\beta^{j-1}$$

bulunur. Böylece

$$-Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j j\left(\alpha^{j-1}-\beta^{j-1}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$2\sqrt{5}\left[-Q'(\alpha)+Q'(\beta)\right]=2\sqrt{5}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j j\left(\alpha^{j-1}-\beta^{j-1}\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı $\sqrt{5}$ ile çarpılıp bölünürse,

$$2\sqrt{5}\left[-Q'(\alpha)+Q'(\beta)\right]=10\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j jF_{j-1}$$

bulunur. Buradan

$$2\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j^{\,2}+10\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j jF_{j-1}=-(-1)^n n(n+1)L_{n-1}^{\,2}+(-1)^n n(n-1)L_nL_{n-2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j^{\,2}=\left[2(n+1)-(-1)^n L_nF_{n-1}\right]$$

olduğu kullanılırsa

$$10\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j jF_{j-1}=(-1)^n n(n-1)L_nL_{n-2}-(-1)^n n(n+1)L_{n-1}^{\,2}$$

$$-2\left[2(n+1)-(-1)^n L_nF_{n-1}\right]$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j jF_{j-1} = \frac{(-1)^n\left[n(n-1)L_nL_{n-2} - n(n+1)L_{n-1}{}^2\right] - 2\left[2(n+1) - (-1)^n L_nF_{n-1}\right]}{10}$$

elde edilir. Bu ifadede n yerine $n+1$ alınırsa

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L_j jF_{j-1} = \frac{(-1)^{n+1}\left[n(n+1)L_{n+1}L_{n-1} - (n+1)(n+2)L_n{}^2\right] - 2\left[2(n+2) - (-1)^{n+1} L_{n+1}F_n\right]}{10}$$

bulunur.

Teorem 3.14:

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L_j jL_{j-1} = \frac{2(-1)^{n+1}L_{n+1}L_n + 4 + 5(-1)^{n+1}\left[n(n+1)F_{n-1}L_{n+1} - (n+1)(n+2)F_{2n}\right]}{10}$$

dur.

İspat: (3.13) ifadesinden (3.14) ifadesi taraf tarafa çıkarılırsa,

$$2\left[Q(-\alpha) - Q(-\beta)\right] - 2\sqrt{5}\left[Q'(-\alpha) + Q'(-\beta)\right] = (-1)^{n-1} n(n+1)\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right)L_{n-1}$$
$$+(-1)^n n(n-1)\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)L_n$$

bulunur. Diğer yandan

$$Q(-\alpha) - Q(-\beta) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j\left(\alpha^j - \beta^j\right)$$

ve

$$Q'(-\alpha) - Q'(-\beta) = \sum_{j=0}^{n-1} L_j\, j(-1)^{j-1}\left(\alpha^{j-1} + \beta^{j-1}\right)$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$2\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_j\left(\alpha^j - \beta^j\right)\right) - 2\sqrt{5}\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\, j(-1)^{j-1}\left(\alpha^{j-1} + \beta^{j-1}\right)\right) = -(-1)^n n(n+1)$$
$$\times F_{n-1}L_{n-1} + (-1)^n n(n-1)F_{n-2}L_n$$

elde edilir. Buradan

$$2\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_jF_j\right) + 2\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\, j(-1)^j L_{j-1}\right) = -(-1)^n\left[n(n-1)F_{n-2}L_n - n(n+1)F_{n-1}L_{n-1}\right]$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j L_jF_j = \frac{(-1)^{n-1}L_nL_{n-1} - 2}{5}$$

olduğu kullanılırsa

$$2\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j\, j\left(-1\right)^j L_{j-1}\right)=\frac{2\left(-1\right)^n L_n L_{n-1}+4}{5}+\left(-1\right)^n\left[n\left(n-1\right)F_{n-2}L_n-n\left(n+1\right)F_{n-1}L_{n-1}\right]$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j\, j\left(-1\right)^j L_{j-1}=\frac{\left(-1\right)^n L_n L_{n-1}+4}{5}+\frac{\left(-1\right)^n\left[n\left(n-1\right)F_{n-2}L_n-n\left(n+1\right)F_{n-1}L_{n-1}\right]}{2}$$

elde edilir. Bu ifade de paydalar eşitlenirse,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j\, j\left(-1\right)^j L_{j-1}=\frac{2\left(-1\right)^n L_n L_{n-1}+4+5\left(-1\right)^n\left[n\left(n-1\right)F_{n-2}L_n-n\left(n+1\right)F_{n-1}L_{n-1}\right]}{10}$$

bulunur. Burada n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^j L_j\, jL_{j-1}=\frac{2\left(-1\right)^{n+1} L_{n+1}L_n+4+5\left(-1\right)^{n+1}\left[n\left(n+1\right)F_{n-1}L_{n+1}-\left(n+1\right)\left(n+2\right)F_nL_n\right]}{10}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^j L_j\, jL_{j-1}=\frac{2\left(-1\right)^{n+1} L_{n+1}L_n+4+5\left(-1\right)^{n+1}\left[n\left(n+1\right)F_{n-1}L_{n+1}-\left(n+1\right)\left(n+2\right)F_{2n}\right]}{10}$$

bulunur.

Teorem 3.15:

$$\sum_{j=2}^{n-1}\left(-1\right)^j j\left(j-1\right)F_{j-2}F_j=\frac{-\left\{5n\left(n-1\right)\left(-1\right)^n\left[\left(n+1\right)L_{n-2}F_{n-1}-\left(n-2\right)L_{n-3}F_n\right]\right\}}{75}+$$

$$+\frac{-\left\{3n\left(-5n+9\right)-6\left(-1\right)^n\left(5nF_{n-1}{}^2-L_{n-1}F_n\right)\right\}}{75}\text{'tir.}$$

İspat: $Q\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n-1}F_jx^j$ olmak üzere (3.1) ifadesinin ikinci türevinin

$$n(n+1)x^{n-1}F_{n-1}+n\left(n-1\right)x^{n-2}F_n=2Q\left(x\right)+2\left(2x+1\right)Q'\left(x\right)+\left(x^2+x-1\right)Q''\left(x\right)$$

olduğu biliniyor. Bu ifadenin üçüncü türevi alınırsa

$$n(n-1)(n+1)x^{n-2}F_{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}F_n=2Q'\left(x\right)+4Q'\left(x\right)+\left(4x+2\right)Q''(x)$$

$$+\left(2x+1\right)Q''\left(x\right)+Q'''\left(x\right)\left(x^2+x-1\right)$$

bulunur.

$A\left(x\right)=n(n+1)\left(n-1\right)x^{n-2}F_{n-1}+n\left(n-1\right)\left(n-2\right)x^{n-3}F_n$ alınırsa

$$A(x)=6Q'(x)+(6x+3)Q''(x)+Q'''(x)(x^2+x-1)$$

yazılır. Bu ifadede $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ yazalım. $x=-\alpha$ ise

$$A(-\alpha)=6Q'(-\alpha)-3\sqrt{5}Q''(-\alpha) \tag{3.15}$$

dır. $x=-\beta$ ise

$$A(-\beta)=6Q'(-\beta)+3\sqrt{5}Q''(-\beta) \tag{3.16}$$

olur. (3.15) ve (3.16) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=6\left[Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)\right]+3\sqrt{5}\left[Q'(-\beta)-Q'(-\alpha)\right]$$

bulunur.

$$Q(x)=\sum_{j=1}^{n-1}F_j x^j \quad , \quad Q'(x)=\sum_{j=1}^{n-1}F_j jx^{j-1} \quad , \quad Q''(x)=\sum_{j=2}^{n-1}j(j-1)F_j x^{j-2}$$

olduğundan

$$Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)=\sum_{j=1}^{n-1}jF_j\left[(-\alpha)^{j-1}+(-\beta)^{j-1}\right]$$

ve böylece

$$Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\, jF_jL_{j-1}$$

elde edilir. Ayrıca

$$Q''(-\beta)-Q''(-\alpha)=\sum_{j=2}^{n-1}j(j-1)F_j\left[(-\alpha)^{j-2}-(-\beta)^{j-2}\right]$$

dir. Burada sağ taraf $\sqrt{5}$ ile çarpılıp bölünür ve $F_{j-2}=\dfrac{\alpha^{j-2}-\beta^{j-2}}{\alpha-\beta}$ olduğu kullanılırsa

$$Q''(-\beta)-Q''(-\alpha)=-\sqrt{5}\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_{j-2}F_j$$

bulunur. Böylece,

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=6\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\, jF_jL_{j-1}-15\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_{j-2}F_j \tag{3.17}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$A(x)=n(n+1)(n-1)x^{n-2}F_{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}F_n$$

alınmıştı. Burada $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ yazılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=n(n-1)(n+1)(-1)^n\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right)F_{n-1}+n(n-1)(n-2)(-1)^{n-1}$$
$$\times\left(\alpha^{n-3}+\beta^{n-3}\right)F_n$$

bulunur. Ayrıca $L_{n-2}=\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}$ ve $L_{n-3}=\alpha^{n-3}+\beta^{n-3}$ olduğu kullanılırsa

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=n(n-1)(n+1)(-1)^n L_{n-2}F_{n-1}-n(n-1)(n-2)(-1)^n L_{n-3}F_n$$

elde edilir. Buradan

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=n(n-1)(-1)^n\left[(n+1)L_{n-2}F_{n-1}-(n-2)L_{n-3}F_n\right]$$

bulunur. $n(n-1)(-1)^n\left[(n+1)L_{n-2}F_{n-1}-(n-2)L_{n-3}F_n\right]=R$ olsun.

$$\frac{n(-5n+9)-2(-1)^n\left(5nF_{n-1}{}^2-L_{n-1}F_n\right)}{10}=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\, jF_jL_{j-1}$$

eşitliğinde de $\dfrac{n(-5n+9)-2(-1)^n\left(5nF_{n-1}{}^2-L_{n-1}F_n\right)}{10}=N$ olsun. Ayrıca

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\, jF_jL_{j-1}=\frac{n(-5n+9)-2(-1)^n\left(5nF_{n-1}{}^2-L_{n-1}F_n\right)}{10}$$

olduğu biliniyor. Bu eşitlikler (3.17) ifadesinde yerine yazılırsa

$$R+6N=-15\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j j(j-1)F_{j-2}F_j=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\, jF_j\left(\alpha^{j-1}-\beta^{j-1}\right)$$

bulunur. Buradan

$-\dfrac{R}{15}-\dfrac{6N}{15}=\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_{j-2}F_j$ yazılır. Böylece

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_{j-2}F_j=-\frac{n(n-1)(-1)^n\left[(n+1)L_{n-2}F_{n-1}-(n-2)L_{n-3}F_n\right]}{15}$$
$$-\frac{n(-5n+9)-2(-1)^n\left(5nF_{n-1}{}^2-L_{n-1}F_n\right)}{25}$$

elde edilir. Burada gerekli payda eşitleme işlemleri yapılırsa

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_{j-2}F_j=\frac{-\left\{5n(n-1)(-1)^n\left[(n+1)L_{n-2}F_{n-1}-(n-2)L_{n-3}F_n\right]\right\}}{75}+$$
$$+\frac{-\left\{3n(-5n+9)-6(-1)^n\left(5nF_{n-1}{}^2-L_{n-1}F_n\right)\right\}}{75}$$ bulunur.

Teorem 3.16:

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2}=\frac{-\left\{5(-1)^n n(n-1)\left[(n+1)F_{n-2}F_{n-1}-(n-2)F_{n-3}F_n\right]\right\}}{15}+$$

$$+\frac{-\left\{3(-1)^{n-1}n\left(F_{n-1}L_{n-1}+F_nL_{n-2}+n(-1)^{n-1}\right)+6(-1)^n F_nF_{n-1}\right\}}{15}$$

tir.

İspat: (3.15) ifadesinden (3.16) ifadesi taraf tarafa çıkarılırsa

$$A(-\alpha)-A(\beta)=6\left[Q'(-\alpha)-Q'(-\beta)\right]-3\sqrt{5}\left[Q''(-\alpha)+Q''(-\beta)\right] \qquad (3.18)$$

bulunur. Ayrıca,

$$Q'(-\alpha)-Q'(-\beta)=\sum_{j=1}^{n-1} jF_j\left[(-\alpha)^{j-1}-(-\beta)^{j-1}\right]=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\, jF_j\left(\alpha^{j-1}-\beta^{j-1}\right)$$

$$=-\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\, jF_jF_{j-1}$$

ve

$$Q''(-\alpha)+Q''(-\beta)=\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_j\left(\alpha^{j-2}+\beta^{j-2}\right)$$

olur. Buradan

$$Q''(-\alpha)+Q''(-\beta)=\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2}$$

bulunur. Bu eşitlikler (3.18) ifadesinde yerine yazılırsa

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=-6\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\, jF_jF_{j-1}-3\sqrt{5}\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2} \qquad (3.19)$$

elde edilir. Ayrıca

$$A(x)=n(n+1)(n-1)x^{n-2}F_{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}F_n$$

eşitliğinde $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ alınıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=\sqrt{5}(-1)^n n(n-1)(n+1)F_{n-2}F_{n-1}-\sqrt{5}n(n-1)(n-2)(-1)^n F_{n-3}F_n$$

ve buradan

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=\sqrt{5}(-1)^n n(n-1)\left[(n+1)F_{n-2}F_{n-1}-(n-2)F_{n-3}F_n\right]$$

elde edilir. Burada

$\sqrt{5}(-1)^n n(n-1)\left[(n+1)F_{n-2}F_{n-1}-(n-2)F_{n-3}F_n\right]=T$ olsun. Ayrıca

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=-6\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\, jF_jF_{j-1}-3\sqrt{5}\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2}$$

eşitliğinde

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\, jF_jF_{j-1}=\frac{(-1)^{n-1}n\left(F_{n-1}L_{n-1}+F_nL_{n-2}+n(-1)^{n-1}\right)+2(-1)^nF_nF_{n-1}}{10}$$

olduğu biliniyor. Burada

$$\frac{(-1)^{n-1}n\left(F_{n-1}L_{n-1}+F_nL_{n-2}+n(-1)^{n-1}\right)+2(-1)^nF_nF_{n-1}}{10}=S$$

olsun. Bu eşitlikler (3.19) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$T+6\sqrt{5}S=-3\sqrt{5}\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2}$$

bulunur. Buradan

$$-\frac{T}{3\sqrt{5}}-2S=\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2}=\frac{-(-1)^n n(n-1)\left[(n+1)F_{n-2}F_{n-1}-(n-2)F_{n-3}F_n\right]}{3}-$$
$$-\frac{(-1)^{n-1}n\left(F_{n-1}L_{n-1}+F_nL_{n-2}+n(-1)^{n-1}\right)+2(-1)^nF_nF_{n-1}}{5}$$

bulunur. Burada gerekli payda eşitleme işlemleri yapılırsa

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)F_jL_{j-2}=\frac{-\left\{5(-1)^n n(n-1)\left[(n+1)F_{n-2}F_{n-1}-(n-2)F_{n-3}F_n\right]\right\}}{15}+$$
$$+\frac{-\left\{3(-1)^{n-1}n\left(F_{n-1}L_{n-1}+F_nL_{n-2}+n(-1)^{n-1}\right)+6(-1)^nF_nF_{n-1}\right\}}{15}$$

elde edilir.

Teorem 3.17:

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)L_jF_{j-2}=\frac{-\left\{15(-1)^n\left[n(n-1)F_{n-2}L_n-n(n+1)F_{n-1}L_{n-1}\right]\right\}}{75}$$
$$+\frac{-\left\{5n(n-1)(-1)^n\left[(n+1)L_{n-2}L_{n-1}-(n-2)L_{n-3}L_n\right]+6(-1)^nL_nL_{n-1}+12\right\}}{75}$$

İspat: $Q(x)=\sum_{j=1}^{n-1} L_j x^j$ olmak üzere

$$\left(x^2+x-1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j\right)=x^{n+1}L_{n-1}+x^n L_n+x-2$$

ifadesinin ikinci türevinin

$$2Q(x)+2(2x+1)Q'(x)+\left(x^2+x-1\right)Q''(x)=n(n+1)x^{n-1}L_{n-1}+n(n-1)x^{n-2}L_n$$

olduğu biliniyor. Bu ifadenin üçüncü türevini alırsak

$$n(n+1)(n-1)x^{n-2}L_{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}L_n = 2Q'(x)+4Q'(x)+(4x+2)Q''(x)$$
$$+\left(x^2+x-1\right)Q'''(x)+(2x+1)Q''(x)$$

bulunur.

$$A(x)=n(n+1)(n-1)x^{n-2}L_{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}L_n$$

olsun. Böylece

$$A(x)=6Q'(x)+(6x+3)Q''(x)+\left(x^2+x-1\right)Q'''(x)$$

yazılır. Burada $x=-\alpha$ ise

$$A(-\alpha)=6Q'(-\alpha)-3\sqrt{5}Q''(-\alpha) \tag{3.20}$$

dır. $x=-\beta$ ise

$$A(-\beta)=6Q'(-\beta)+3\sqrt{5}Q''(-\beta) \tag{3.21}$$

olur. (3.20) ve (3.21) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=6\left[Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)\right]+3\sqrt{5}\left[Q''(-\beta)-Q''(-\alpha)\right] \tag{3.22}$$

bulunur. Diğer yandan

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^j \quad , \quad Q'(x)=\sum_{j=1}^{n-1} L_j\, j x^{j-1} \quad , \quad Q''(x)=\sum_{j=2}^{n-1} L_j\, j(j-1)x^{j-2}$$

olduğundan

$$Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)=\sum_{j=1}^{n-1} jL_j\left[(-\alpha)^{J-1}+(-\beta)^{J-1}\right]$$

dir. Burada $L_{j-1}=(-\alpha)^{J-1}+(-\beta)^{J-1}$ yazılırsa

$$Q'(-\alpha)+Q'(-\beta)=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{J-1}\, jL_j L_{j-1}$$

bulunur.

$$Q''(-\alpha)-Q''(-\beta)=-\sum_{j=2}^{n-1} j(j-1)L_J\left[(-\alpha)^{J-2}-(-\beta)^{J-2}\right]$$

ifadesin sağ tarafı $\sqrt{5}$ ile çarpılıp bölünür ve $F_{j-2}=(-\alpha)^{J-2}+(-\beta)^{J-2}$ yazılırsa

$$Q''(-\alpha)-Q''(-\beta)=-\sqrt{5}\sum_{j=2}^{n-1} j(j-1)(-1)^J L_j F_{J-2}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.22) ifadesinde yerine yazılırsa

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=-6\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j jL_jL_{j-1}-15\sum_{J=2}^{n-1}(-1)^j j(j-1)L_jF_{j-2} \qquad (3.23)$$

bulunur. Ayrıca

$$A(x)=n(n+1)(n-1)x^{n-2}L_{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}L_n$$

eşitliğinde $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ yazılıp taraf tarafa toplama işlemi yapılırsa

$$A(-\alpha)+A(-\beta)= n(n-1)(n+1)(-1)^n\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right)L_{n-1}+n(n-1)(n-2)(-1)^{n-1}$$
$$\times\left(\alpha^{n-3}+\beta^{n-3}\right)L_n$$

bulunur. Burada $L_{n-2}=\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}$ ve $L_{n-3}=\alpha^{n-3}+\beta^{n-3}$ yazılırsa

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=(-1)^n n(n-1)(n+1)L_{n-2}L_{n-1}-n(n-1)(n-2)(-1)^n L_{n-3}L_n$$

elde edilir.

$$A(-\alpha)+A(-\beta)=(-1)^n n(n-1)\left[(n+1)L_{n-2}L_{n-1}-(n-2)L_{n-3}L_n\right]=R$$

olsun. Diğer yandan

$$\sum_{j=0}^{n-1}L_j j(-1)^j L_{j-1}=\frac{2(-1)^n L_nL_{n-1}+4+5(-1)^n\left[n(n-1)F_{n-2}L_n-n(n+1)F_{n-1}L_{n-1}\right]}{10}$$

olduğu biliniyor. $\sum_{j=0}^{n-1}L_j j(-1)^j L_{j-1}=N$ olsun. Bu eşitlikler (3.23) ifadesinde yerine yazılırsa

$$R=-6N-15\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j j(j-1)L_jF_{j-2}$$

elde edilir. Buradan

$$R+6N=-15\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j j(j-1)L_jF_{j-2}$$

bulunur. Böylece

$$-\frac{R}{15}-\frac{2N}{5}=\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\ j(j-1)L_jF_{j-2}$$

elde edilir. Burada R ve N yerine yazılıp gerekli payda eşitleme işlemleri yapılırsa

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\ j(j-1)L_jF_{j-2}=\frac{-\left\{15(-1)^n\left[n(n-1)F_{n-2}L_n-n(n+1)F_{n-1}L_{n-1}\right]\right\}}{75}$$

$$+\frac{-\left\{5n(n-1)(-1)^n\left[(n+1)L_{n-2}L_{n-1}-(n-2)L_{n-3}L_n\right]+6(-1)^nL_nL_{n-1}+12\right\}}{75}$$

bulunur.

Teorem 3.18:

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\ j(j-1)L_jL_{j-2}=\frac{-\left\{5(-1)^n\,n(n-1)\left[(n+1)F_{n-2}L_{n-1}-(n-2)F_{n-3}L_n\right]\right\}}{15}$$

$$+\frac{-\left\{3(-1)^n\left[n(n-1)L_nL_{n-2}-n(n+1)L_{n-1}{}^2\right]-6\left[2(n+1)-(-1)^nL_nF_{n-1}\right]\right\}}{15}$$

tir.

İspat: (3.20) ifadesinden (3.21) ifadesi taraf tarafa çıkarılırsa,

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=6\left[Q'(-\alpha)-Q'(-\beta)\right]-3\sqrt{5}\left[Q''(-\alpha)+Q''(-\beta)\right] \tag{3.24}$$

bulunur. Bu eşitlikte,

$$Q'(-\alpha)-Q'(-\beta)=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\ jL_j\left(\alpha^{j-1}-\beta^{j-1}\right)$$

dir. Bu ifadenin sağ tarafı $\sqrt{5}$ ile çarpılıp bölünür ve $F_{j-1}=\dfrac{\alpha^{j-1}-\beta^{j-1}}{\alpha-\beta}$ olduğu kullanılırsa,

$$Q'(-\alpha)-Q'(-\beta)=-\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\ jL_jF_{j-1}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$Q''(-\alpha)+Q''(-\beta)=\sum_{j=2}^{n-1}j(j-1)(-1)^jL_j\left(\alpha^{j-2}+\beta^{j-2}\right)$$

ifadesinde

$$L_{j-2}=\alpha^{j-2}+\beta^{j-2}$$

olduğu kullanılırsa

$$Q''(-\alpha)+Q''(-\beta)=\sum_{j=2}^{n-1} j\,(j-1)(-1)^{j} L_j L_{j-2}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.24) ifadesinde yerine yazılırsa

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=-6\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\, jL_j F_{j-1}-3\sqrt{5}\sum_{j=2}^{n-1} j\,(j-1)(-1)^{j}\, L_j L_{j-2} \tag{3.25}$$

bulunur. Diğer yandan

$$A(x)=n(n+1)(n-1)\,x^{n-2}L_{n-1}+n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}L_n$$

eşitliğinde $x=-\alpha$ ve $x=-\beta$ yazılıp taraf tarafa çıkarma işlemi yapılırsa

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=n(n-1)(n+1)(-1)^{n}\left(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\right)L_{n-1}+n(n-1)(n-2)(-1)^{n-1}$$
$$\times\left(\alpha^{n-3}-\beta^{n-3}\right)L_n$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafı $\sqrt{5}$ ile çarpılıp bölünür ve

$$F_{n-2}=\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\sqrt{5}} \text{ ve } F_{n-3}=\frac{\alpha^{n-3}-\beta^{n-3}}{\sqrt{5}}$$

olduğu kullanılırsa

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=\sqrt{5}n(n-1)(n+1)(-1)^{n}\,F_{n-2}L_{n-1}-\sqrt{5}n(n-1)(n-2)(-1)^{n}\,F_{n-3}L_n$$

elde edilir.

$$A(-\alpha)-A(-\beta)=\sqrt{5}n(n-1)(-1)^{n}\left[(n+1)F_{n-2}L_{n-1}-(n-2)F_{n-3}L_n\right]=T$$

olsun.

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j}\,L_j\, jF_{j-1}=\frac{(-1)^{n}\left[n(n-1)L_nL_{n-2}-n(n+1)L_{n-1}{}^{2}\right]-2\left[2(n+1)-(-1)^{n}\,L_nF_{n-1}\right]}{10}$$

olduğu biliniyor.

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j}\,L_j\, jF_{j-1}=S$$

olsun. Bu eşitlikler (3.25) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T+6\sqrt{5}S=-3\sqrt{5}\sum_{j=2}^{n-1} j\,(j-1)(-1)^{j}\,L_jL_{j-2}$$

bulunur. Burada her iki taraf $-3\sqrt{5}$ ile çarpılıp bölünürse

$$-\frac{T}{3\sqrt{5}}-2S=\sum_{j=2}^{n-1} j\,(j-1)(-1)^{j}\,L_jL_{j-2}$$

elde edilir. Bu eşitlikte T ve S yerine yazılırsa

$$\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j\, j(j-1)L_jL_{j-2}=\frac{-\left\{5(-1)^n\, n(n-1)\left[(n+1)F_{n-2}L_{n-1}-(n-2)F_{n-3}L_n\right]\right\}}{15}$$

$$+\frac{-\left\{3(-1)^n\left[n(n-1)L_nL_{n-2}-n(n+1){L_{n-1}}^2\right]-6\left[2(n+1)-(-1)^n L_nF_{n-1}\right]\right\}}{15}$$

bulunur.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas polinomları ile beraber Fibonacci ve Lucas toplamları ele alındı. Yapılan çalışmalar k-Fibonacci sayıları ve k-Fibonacci polinomları içinde araştırılabilir. k-Fibonacci sayıları ve k-Fibonacci polinomları için [4] no'lu kaynak incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] KOSHY,T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley, Newyork 2001.

[2] VAJDA,S., Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Sections, Ellis Horwood. Limited Publ.,England 1989.

[3] KESKİN,R. and DEMİRTÜRK,B., Some New Fibonacci and Lucas Identities by Matrix Methods, İnternational Journal of Mathematical Education İn. Science and Technology, 2009,1-9.

[4] FALCON,S and PLAZA,A., On k-Fibonacci secuences and polynomials, Choas, Solutions and Frectals, 2009,1005-1019.

ÖZGEÇMİŞ

Sedat Karadayı, 06.06.1978 tarihinde Geyve'de doğdu. İlk, orta ve lise tahsilini İstanbul'da yaptı. Ardından Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 1999 yılında bitirdi. Aynı yıl Sakarya'da öğretmenlik görevine başladı. Halen Ankara Sincan Anadolu İmam-Hatip Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmakta olup, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.