T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet DAŞDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Tez Danışmanı	:	Yrd. Doç. Dr. Serpil Halıcı

Haziran 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet DAŞDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 10 / 06 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç Dr. Serpil Halıcı **Jüri Başkanı**	**Doç. Dr. Halim Özdemir** **Üye**	**Doç. Dr. Mehmet Bektaşoğlu** **Üye**

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Yrd. Doç. Dr. Serpil Halıcı ya, doğduğum günden itibaren sonsuz sevgi ve şevkatlerini hiçbir zaman eksik etmeyen, beni bugünlere getiren, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve her zaman moral kaynağım olan canım ağabeyime yürek dolusu teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmayı Prof. Dr. Erdoğan Büyükkasap a ithaf ediyorum.

Bu çalışma, Sakarya Üniversitesi tarafından 2009-50-01-028 numaralı FBEYLTEZ projesi olarak Bilimsel Araştırma Projeleri kapsamında desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^H	: A matrisinin kompleks eşleniğinin transpozesi
A^*	: A matrisinin kompleks eşleniği
$A^{o^{-1}}$	: A matrisinin Hadamard tersi
AoB	: A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı
$A \otimes B$	: A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı
$\rho(A)$	: A matrisinin spektral yarıçapı
$\sigma_i(A)$	: A matrisinin $i.$ tekil değeri
$c_1(A)$	: A matrisinin maksimum sütun uzunluğu
$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
$h_n(x)$	: $n.$ Horadam polinomu
H_n	: $n \times n$ mertebeli Hankel matrisi
$r_1(A)$	: A matrisinin maksimum satır uzunluğu
$\lVert A \rVert_1$	: A matrisinin sütun normu
$\lVert A \rVert_2$	: A matrisinin spektral normu
$\lVert A \rVert_F$	: A matrisinin Frobenius normu
$\lVert A \rVert_\infty$	: A matrisinin satır normu
P_n	: $n.$ Pell sayısı
Q_n	: $n.$ Pell-Lucas sayısı
q_n	: $n.$ Modified Pell sayısı

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Matris normları, Hadamard çarpımı, Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları, Modified Pell sayıları.

Bu çalışmada, elemanları özel tanımlı sayı dizilerinden oluşan bazı matrislerin Hadamard çarpımları ve bunların genel özellikleri incelenmiştir. Birinci bölümde, konuyla ilgili olarak yapılan önemli çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölüm, matris normları ve onun özelliklerine ayrıldı. Üçüncü bölümde, matrislerin Hadamard çarpımından bahsedildi. Dördüncü bölümde ise, Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları incelendi ve bu sayı dizilerinin bazı özellikleri bulundu. Bu dizilerden oluşan Hankel matrislerinin çeşitli normları hesaplandı. Dahası, onların spektral normu için alt ve üst sınırları bulundu.

HADAMARD PRODUCT OF SOME SPECIAL MATRICES

SUMMARY

Key Words: Matrix norm, Hadamard product, Pell numbers, Pell-Lucas numbers, Modified Pell numbers.

In this thesis, the Hadamard product of matrices involving special definition of the sequence and their general properties are examined. The important studying concerning with the subject are mentioned in the first chapter. Second chapter is devoted to the matrix norm and its properties. In the third chapter, the Hadamard product of matrices are mentioned. Pell, Pell-Lucas and Modified Pell sequences are investigated in the last chapter and these sequences are found their some properties. Some norms of Hankel matrices involving these sequence are computed. Further, the lower and upper bounds of theirs spectral norms are found.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezi, matrislerin Hadamard çarpımı ve bu çarpımların uygulamaları üzerine bir çalışmadır.

J. Schur 1911 de, matris cebiri ile ilgili olarak oldukça önemli bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmasında matrislerin Hadamard çarpımı konusunu ele almıştır. Schur, $A, B \geq 0$ iken $AoB \geq 0$ olduğunu ifade ve ispat etmiştir [31].

D. Z. Djokovic (1965), $A, B \in M_{m,n}$ olmak üzere, $rank(AoB) \leq (rankA)(rankB)$ olduğunu göstermiştir. Burada A pozitif tanımlı hermit matris ve B pozitif yarı tanımlı hermit matristir. Daha sonra ortaya araştırmaya değer bir soru atmıştır: "Hangi pozitif yarı tanımlı matrisler AoB formunda gösterilebilir?" [8].

T. Ando, R.A. Horn ve C. R. Johnson (1987), $A, B \in M_{m,n}$ ve $A = X^*Y$ olmak üzere, $k = 1, 2, \ldots, \min\{m, n\}$ için $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i(AoB) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i(X)c_i(Y)\sigma_i(B)$ olduğunu gösterdiler. Burada $X \in M_{r,m}$ ve $Y \in M_{r,n}$ dir [4].

R. Mathais (1990), $A = BoC$ şeklinde yazılabilen keyfi bir A matrisinin spektral normu için bir üst sınır bulmuştur [22].

D. Taşçı (1994), matrislerin ℓ_p normları ve determinantlar arasındaki ilişkileri araştırmıştır. Taşçı, $\forall x \in C^n$ ve $1 \leq p, q \leq \infty$ için

$$\lambda_{pq}(n) = \begin{cases} 1, & p \geq q \quad ise \\ n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & p \leq q \quad ise \end{cases}$$

olmak üzere, $|x| \le \lambda_{pq}(n)|x|_q$ olduğunu [38] ve $A = [a_{ij}]$ keyfi $n \times n$ kompleks matris olmak üzere,

$$\det(A^H A) \le \frac{\|A\|_F^{2n}}{n^n}$$

olduğunu göstermiştir[37].

B. Mond ve J. Pecaric (2000), yaptıkları çalışmada eski çalışmalarını genelleştirerek $n \times n$ mertebeli A_i, $i = 1,2,...,k$ ve J, $J^T J = \mathrm{I}$ şeklinde $n^k \times n$ selection matrisi için $\overset{k}{\underset{i=1}{o}} A_i = J^T \left(\overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}} A_i \right) J$ olduğunu gösterdiler [27].

B. Wang ve F. Zhang (1995), iki farklı matrisin Hadamard çarpımı ile elde edilen yeni matrisin izini ve özelliklerini belirlediler. B. Wang ve F. Zhang yaptıkları çalışmalarda $A, B \in M_n$ pozitif tanımlı hermit matrisler, α ve β da reel sayılar olmak üzere,

$$iz\left(AoB\right)^{\alpha} \ge iz\left(A^{\alpha} o B^{\alpha}\right) \ \left(0 \le \alpha \le 1\right) \text{ ve } iz\left(AoB\right)^{\alpha} \le iz\left(A^{\alpha} o B^{\alpha}\right) \ \alpha \le 0 \text{ veya } \alpha \ge 1$$

olduğunu gösterdiler [41].

P. J. Davis (1979), Toeplitz matrislerin özel bir hali olan $n \times n$ tipindeki circulant matrisi tanımlamıştır [7]. Bu matrisin her bir satırının elemanları aynıdır. Satırlar arasındaki tek fark ise, elemanlarının her satırda sağa doğru bir adım kaymasıdır. Bu nedenle, tüm circulant matrisler ilk satır (ya da sütun) tarafından tanımlanabilir.

S. Solak (2005), circulant matrisler için yeni bir tanım vermiştir, Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral normu için alt ve üst sınırlar bulmuştur [35].

A. Yalçıner ve N. Taşkara (2007), yaptıkları çalışmalarda Motzkin sayılarından oluşan Hankel matrislerinin Hadamard terslerini alarak bu matrislerin ℓ_p normları için Reiman-zeta fonksiyonunu kullanarak üst sınırlarını hesap etmiştirler [42].

M. Akbulak ve D. Bozkurt (2008), Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan Toeplitz ve Hankel matrislerin Frobenius normunu hesaplayarak spektral normunu için alt ve üst sınırlar elde etmiştirler [2, 3].

Bu çalışmada, ilk olarak matris normları incelenmiştir. Sonra matrislerin Hadamard çarpımı tanımlanarak bilinen matris çarpımı ile karşılaştırıldı. Ayrıca, Kronecker çarpımı ve Hadamard çarpımı ile ilgili özellikler incelendi. Hadamard çarpımının bazı uygulamaları ve Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayı dizilerinin bazı özellikleri verildi. Bu özellikler kullanılarak elemanları bu dizilerden oluşan Hankel matrislerinin normları hesaplanarak spektral norm için alt ve üst sınırlar bulundu. Ayrıca, Hadamard çarpımı kullanıllanılarak elde edilen üst sınırın bazı farklı metodlara göre ne kadar iyi sonuç verdiği incelenmiştir.

BÖLÜM 2. MATRİS NORMLARI

Bu bölümde, matris normları hakkında bilgiler yer almaktadır. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için vektör normlarının tanımı ile başlanmıştır. Normlar ile ilgili çalışmalar matematiğin en önemli araştırma konularından biridir. Sadece uygulamalarının öneminden değil, aynı zaman da teorik uygulamaları da oldukça ilginçtir. R de tanımlanan mutlak değer fonksiyonu ile büyüklükleri, dizilerin yakınsaklığı, fonksiyonların sürekliliği, limitleri ve verilen bir reel sayı için bu reel sayıya en yakın asal tamsayıyı bulma gibi yaklaşım problemleri çözülebilir. Bu problemler genellikle analiz, Lie teori, nümerik analiz, diferansiyel denklemler, ekonometri, fizik ve kimya da denge durumlarında karşımıza çıkar.

Norm işlemi $\|.\|$ ya da $\|.\|_a$ sembollerinden biri ile gösterilir. Burada bahsi geçen “a” ileride bahsedilecek olan özel tanımlı normların çeşidini gösteren bir semboldür.

Tanım 2.1. C kompleks ve R de reel sayılar kümesi olmak üzere, $\|.\|: C^n \to R$ fonksiyonu,

i) $\forall x \in C^n$ için $\|x\| \geq 0$ dır ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\forall x, y \in C^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

iii) $\forall \alpha \in C$ ve $x \in C^n$ için $\|\alpha x\| \leq |\alpha| \|x\|$

şartlarını sağlıyorsa, negatif olmayan $\|x\|$ sayısına x vektörünün vektör normu denir.

Vektör normu için bazı özel tanımlar yapılmıştır. Bu vektör normları aşagıdaki şekildedir:

i) $\|x\|_1 = |x|_1 + |x_2| + \cdots + |x_n|$;

ii) $\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; (Euclid ya da Frobenius Normu)

iii) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

Herhangi iki x, y vektörü için iç çarpım tanımı

$$\langle x, y\rangle = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \cdots + \overline{x_n}y_n$$

şeklindedir. O halde $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$ olur. Ayrıca $1 \le p \le \infty$ olmak üzere, Frobenius normu

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile genelleştirilebilir [32].

G bir cisim ve $a_{ij} \in G$ olmak üzere $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisinin normu, bazı aksiyomlara bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.2. $M_n(G)$ $n\times n$ matrislerinin kümesini göstermek üzere, $\|.\| : M_n(G) \to R^+$ şeklinde tanımlanan dönüşüm

N1) $A \in M_n(G)$ için $A \ne 0 \Rightarrow \|A\| > 0$ ve $A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0$ dır.

N2) $A \in M_n(G)$ ve $a \in G$ için $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ dır.

N3) $A, B \in M_n(G)$ için $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$ dir.

N4) $A, B \in M_n(G)$ için $\|A.B\| \le \|A\|.\|B\|$ dir.

şartlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme matris normu denir ve matris normu $A \in M_n(G)$ için $M_n(A) = \|A\|$ şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki şartlardan sadece ilk üç şart sağlanırsa, o zaman bu norma genelleştirilmiş matris normu denir. Bu tanıma göre bir matris normu daima genelleştirilmiş matris normudur. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 2.3. $J=[t_{ij}]$ bütün elemanları 1 olan $n\times n$ kare matrisi olarak tanımlasın. Bu takdirde $\|J\|=\max\limits_{1\le i,j\le n}|t_{ij}|$ şeklinde tanımlanan ifade genelleştirilmiş matris normu olmasına rağmen bir matris normu değildir. Gerçekten de $n=2$ için J matrisini ele alınırsa, J=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}_{2x2}$ olur. Diğer taraftan,

$$J\cdot J=J^2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

olup $\|J^2\|=2$, $\|J\|=1$ elde edilir ki 4. şart olan

$$\|J\cdot J\|=\|J^2\|=2\le\|J\|\cdot\|J\|=1\cdot1=1$$

eşitsizliğinin gerçekleşmeyeceği görülür. Ancak aynı J matrisi için $\|J\|=n.\max\limits_{1\le i,j\le n}|t_{ij}|$ şeklinde alınırsa o zaman bu şekildeki ifade bir matris normu olur. Yani dört aksiyom da sağlanır. Burada konunun girişinde bahsi geçen $\|.\|_a$ özel matris normlarından bahsedilecektir. Tanımda verilen aksiyomları sağlayan bu matris normları aşağıdaki gibi sıralanır;

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ bir matris olmak üzere,

1) $$\|A\|_F=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$=\sqrt{iz(A^*A)}=\sqrt{iz(AA^*)}$ (Frobenious ya da Euclidean Normu)

$=\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2(A)},\ \ (r\ \ rank)$

2) $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ (Sütun Normu)

3) $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ (Satır Normu)

4) $\|A\|_t = n.\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$ (Toplam Normu)

5) $\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{|\lambda|} : \lambda,\ A^H A \textit{ nın özdeğeri}\right\}$ (Spektral Norm)

6) $\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \le p \le \infty)$ (ℓ_p Normu)

7) $\|A\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{q}}$ $(1 \le p,\ q \le \infty)$ (ℓ_{pq} Karma Normu)

Yukarıdaki tanımlanan ℓ_p normunda $p=1$ olması durumunda bu norm sütun normu, $p=2$ olması durumunda ise, Euclidean (veya Frobenius veya Schur) normu ve $p=\infty$ olması durumunda da, norm satır normu olarak elde edilir.

Tanım 2.4. A bir n-kare matris olsun. A nın mutlak değerce en büyük öz değerine A nın spektral yarıçapı denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Yani

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{, A matrisinin öz değeridir}\}$$

olur. Ayrıca $A=(a_{ij})_{n\times n}$ kompleks matrisinin nümerik yarıçapı ,

$$\gamma(A) = \max\left\{|X^* A X| : X \in C^n, \quad XX^* = 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.5. A= $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

matrisinin spektral yarıçapını, $\|A\|_1, \|A\|_\infty$ ve $\|A\|_F$ yi hesaplayınız.

Çözüm: Burada ilk olarak A matrisinin öz değerleri bulunacaktır. O halde ilk olarak $K_A(\lambda)=0$ ın bulunması gerekir ve λ ların tespit edilmesi gerekir. O halde,

$$K_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-6 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-6)(\lambda-12)=0$$

elde edilir. λ_1=4, λ_2=6 ve λ_3=12 olup bu değerler A nın öz değerleridir. O halde, A matrisinin spektral yarıçapı ,

$$p(A)=\max_{1\le j\le 3}\{|\lambda_1|=4,\ |\lambda_2|=6,\ |\lambda_3|=12\}=12$$

olur. O halde $\|A\|_1, \|A\|_\infty$ ve $\|A\|_F$ ifadelerinin eşiti sırasıyla,

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\max\{10,10,14\}=14,$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\max\{10,10,14\}=14$$

ve

$$\|A\|_F=\left(\sum_{ij=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6^2+2^2+(-2)^2+2^2+6^2+(-2)^2+(-2)^2+10^2}=14$$

olur.

Tanım 2.6. A , $m\times n$ tipinde bir matris olsun. O halde bu matrisin i. satırının Frobenius uzunlukları

$$r_i(A)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2},\ i=1,2,...,m$$

ve j. sütunun Frobenius uzunlukları

$$c_j(A)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2},\ j=1,2,...,n$$

ile gösterilir.

Bu tanım da $i=1$ ve $j=1$ için elde edilen $r_1(A)$ ve $c_1(A)$ ya sırasıyla, A matrisinin maximum satır ve maksimum sütun uzunlukları denir ve burada,

$$r_1(A) \geq r_2(A) \geq \cdots \geq r_m(A) \quad \text{ve} \quad c_1(A) \geq c_2(A) \geq \cdots \geq c_n(A)$$

biçimindedir. Matris normlarında $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_F$ ve $\|A\|_\infty$ sembollerinin sıra ile sütun, spektral, Frobenius (Euclidean yada Schur) ve satır normlarını gösterdiğinden daha önce bahsedilmişti. Özel olarak,

$$\|A\|_\Delta = \max|a_{ij}|$$

olarak tanımlansın. A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin normları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

$$\begin{aligned}
&1.\quad \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2\,, \\
&2.\quad \|A\|_\Delta \leq \|A\|_2 \leq n\|A\|_\Delta\,, \\
&3.\quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}\,, \qquad\qquad (2.1)\\
&4.\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_\infty\,, \\
&5.\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1\,.
\end{aligned}$$

$\sigma_i(A)$ lar A nın tekil değerleri olmak üzere, $(\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq .... \geq \sigma_n(A))$ yukarıda verilen eşitsizlikler norm tanımlarından basit bir şekilde gösterilebilir. Burada örnek olarak birinci özellik gösterilecektir. O halde gerek Frobenius norm gerekse spektral norm olsun her ikisi de tekil değerlere bağlı olup,

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A)$$

ve

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu bilgiler dikkate alınırsa,

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) \le \sqrt{\sigma_1^2(A) + \sigma_2^2(A) + \sigma_3^2(A) + \ldots + \sigma_n^2(A)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A) = \|A\|_F \qquad (*)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A) \le \sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(A) + \ldots + \sigma_1^2(A) = n\sigma_1^2(A) = n\|A\|_2^2 \qquad (**)$$

elde edilir. (*) ve (**) den ispat açıktır.

Tanım 2.7. A bir kare matris, x bir vektör olmak üzere, $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ ise matris normu ile vektör normu uyuşuyor ya da vektör normu ile matris normu uygundur denir. Bu eşitsizliğin en az bir kez eşitlik durumunu sağlayan en az bir x vektörü her zaman vardır.

Gerçekten de, herhangi bir $\|A\|$ matris normu için bir uygun vektör normu her zaman vardır. Her x vektörü için ilk sütunu x vektörünün elemanlarını kapsayan, diğer elemanları sıfır olan bir K matrisi bulunabilir. Buna göre x vektörünün normu $\|x\| = \|K\|$ olarak tanımlanabilir. Böylece vektör normu, matris normu aksiyomlarını sağlayan bir fonksiyon yardımıyla tanımlanmış olur. Verilen bir matris normu ile bir vektör normunun uygunluğu

$$\|Ax\| = \|AK\| \le \|A\|\|K\| = \|A\|\|x\|$$

ifadesinin bir sonucudur.

BÖLÜM 3. MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMI

Bu bölümde, bilinen matris çarpımlarından farklı olan ve Hadamard çarpımı olarak bilinen iki matris arasında yeni bir çarpım işlemi üzerinde durulacaktır.

Tanım 3.1. $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin Hadamard çarpımı

$$AoB = [a_{ij} b_{ij}]$$

şeklinde tanımlanır.

Hadamard çarpımı için uygunluk şartı, bilinen matris toplamına benzer olarak her iki matriste aynı boyutta ve aynı indisli elemanların çarpımını çarpım matisinde de aynı indisli elemanı oluşturacak şekilde yazılması olarak belirtilebilir. Yani A ve B matrislerinin Hadamard çarpımının yapılabilmesi için, kare matris olması gerekmezler. Bu sonuç Hadamard çarpımı ile alışılmış matris çarpımı arasında ki önemli farklardan biridir.

Örnek 3.2. $F = [f_{ij}]$ ve $H = [h_{ij}]$ matrisleri, 3×3 tipinde birer matris olsunlar. O halde,

$$F = [f_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Filbert matrisinin ve

$$H=[h_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

Hilbert matrisinin Hadamard çarpımını bulunuz.

Çözüm:

$$FoH=[f_{ij}h_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5}\end{bmatrix} o \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.1 & 1.2 & \frac{1}{2}.3\\ 1.2 & \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{3}.4\\ \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{3}.4 & \frac{1}{5}.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{3}{2}\\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3}\\ \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & 1\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Hadamard çarpımı, Schur çarpımı olarakta bilinir. Bunun nedeni J. (Issai) Schur'un 1911 yılında yayınlanan makalesinde yaptığı çalışmadır [31]. Schur, bu çalışmasında Hadamard çarpım teoremi ile ilgili olarak bazı eşitsizlikleri ifade ve ispat etmiştir. Aynı çalışmada, $\|AoB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ eşitsizliğinin de ispatı vardır. Hadamard çarpımının birim elemanı, bütün elemanları 1 olan ve J ile gösterilen matristir. Bir A matrisinin Hadamard çarpımına göre tersinin olabilmesi bütün elemanlarının 0 dan farklı olması gerekir. Normal matris çarpımlarında olduğu gibi Hadamard çarpımının da birleşme ve toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Temel halka değişme özelliğine sahip ise, Hadamard çarpımı da değişme özelliğine sahiptir. Hadamard çarpımı ile normal matris çarpımı arasında ki en önemli farklardan birisi de budur. Hadamard çarpımı oldukça geniş bir kullanım alnına sahiptir. Periyodik fonksiyonların kıvrımlarının trigonometrik momentleri, integral denklemlerin çekirdeklerinin çarpımları (özellikle Mercer teoremiyle ilgili bağıntılar), kısmi diferansiyel denklemlerin zayıf minimum prensipleri ve olasılık teorisinde karakteristik fonksiyonlarında (Bochner teoremi) kullanımına verilebilecek birkaç örnektir.

Tanım 3.3. $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi verilsin. O halde A nın Hadamard tersi

$$A^{o^{-1}} = \left(\frac{1}{a_{ij}}\right)_{m\times n}$$

biçiminde tanımlanır. Burada verilen A matrisinin elemanları sıfırdan farklıdır.

Tanım 3.4. $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ve $p\times q$ tipinde olsun.

$$A\otimes B=[a_{ij}B]=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp\times nq}$$

şeklinde tanımlanan çarpıma da Kronecker çarpımı denir.

Lemma 3.5. $A=[a_{ij}],\ B=[b_{ij}]\in M_{m,n}$ olsun. O zaman,

$$AoB = A\otimes B(\alpha,\beta)$$

dir. Burada $\alpha=\{1,m+2,2m+3,...,m^2\}$ ve $\beta=\{1,n+2,2n+3,...,n^2\}$ dir. Özellikle $m=n$ ise; AoB, $A\otimes B$ nin ana alt matrisidir [16].

Kronecker çarpımı ile Hadamard çarpımı, matematikte birbiriyle yakından ilgilidir. Öyle ki, Hadamard çarpımı yapılan iki matrisin kare matris olması durumunda bu iki matrisin Hadamard çarpımı ile elde edilmiş olan matris, aynı matrislerin Kronecker çarpımı ile elde edilmiş matrisin ana alt matrisidir. Dahası bu çarpımların arasındaki en ilginç özelliklerden biride şudur: “ $A\otimes B$ nin tekil değeri, A ve B nin kendi tekil değerlerinin karşılıklı çarpımlarına eşittir. Yani $\|A\otimes B\|_2=\|A\|_2\|B\|_2$ dir. Ayrıca, $\|AoB\|_2\le\|A\otimes B\|_2=\|A\|_2\|B\|_2$ dir.

Kronecker çarpımın en önemli özelliklerinden birisi de mixed product (karma çarpım) kuralının var olmasıdır. Bu kural

$$(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2)$$

şeklindedir. Burada köşegen, simetrik, normal veya hermit üniter iki matrisin Kronecker çarpımının da sırayla bu kuralı sağlayacağı açıktır.

$A, B \in M_n$, $A = V_1 \sum_1 W_1^H$ ve $B = V_2 \sum_2 W_2^H$ (singular value decompositions) olsun. Böylece karma çarpım kuralı gereği

$$A \otimes B = (V_1 \otimes V_2)(\sum_1 \otimes \sum_2)(W_1 \otimes W_2)^H$$

yazılabilir[5].

Teorem 3. 6. J_n^T, $n \times n^2$ selection matrisi;

$$J_n^T = [E_{11}^{(n)}, E_{22}^{(n)}, \ldots, E_{nn}^{(n)}]$$

biçiminde tanımlansın. Burada E_{ii} matrisleri, $n \times n^2$ tipinde (i,i) bileşeni 1 diğer bileşenleri sıfır olan matrisler olsun. $J_n^T J = \mathrm{I}$ dır. A, B $n \times m$ matrisleri ise,

$$AoB = J_n^T (A \otimes B) J_m$$

dir [40].

İspat:

$$J_n^T (A \otimes B) J_m = \left[E_{11}^{(n)}, E_{22}^{(n)}, \ldots, E_{nn}^{(n)} \right] \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}^{(m)} \\ \vdots \\ E_{mm}^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} diag(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}) B E_{kk}^{(m)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{ij} \delta_{jk} = [a_{ij} b_{ij}]$$

$$= AoB$$

elde edilir [40].

$\overset{n}{\underset{i=1}{o}} A_i$ ile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ matrislerinin sırayla Hadamard çarpımının yapılması ifade edilecektir. Benzer şekilde $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} A_i$ ile de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ matrislerinin sırayla Kronecker çarpımının yapılması anlamına gelecektir.

Teorem 3.7. A_i, $i = 1,2,...,k$ için birer $n \times n$ matris olsun. J, $J^T J = \mathrm{I}$ şeklinde $n^k \times n$ selection matrisi olsun. O halde,

$$\overset{k}{\underset{i=1}{o}} A_i = J^T \left(\overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}} A_i \right) J$$

dir [27].

İspat: Üç tane matris için ispat yapılır. Bu şekilde devam edilerek m için de ifade doğrulanır.

$$\begin{aligned} AoBoC &= AoJ^T (B \otimes C) J \\ &= J^T (A \otimes (J^T (B \otimes C) J)) J \\ &= J^T \left((\mathrm{I} A \mathrm{I}) \otimes \left(J^T \left(B \otimes C \right) J \right) \right) J \end{aligned}$$

Karma çarpım kuralından,

$$\begin{aligned} AoBoC &= J^T \left(\mathrm{I} \otimes J^T \right) (A \otimes B \otimes C) \left(\mathrm{I} \otimes J \right) J \\ &= J^T \left(\mathrm{I} \otimes J \right)^T (A \otimes B \otimes C) \left(\mathrm{I} \otimes J \right) J \\ &= \hat{J}^T (A \otimes B \otimes C) \hat{J} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\hat{J} = (\mathrm{I} \otimes J)J$, $n^3 \times n$ matrisi olduğu açıktır ($\hat{J}^T J = \mathrm{I}$ dır) [27].

Örnek 3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad ve \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen iki matrisin Kronecker çarpımını ve Hadamard çarpımını bulunuz.

Çözüm:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \\ -1\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 12 & -6 \\ 12 & 0 & 18 & 0 \\ -4 & 2 & 16 & -8 \\ -6 & 0 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$AoB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.Yukarıdaki örnekte de görüleceği üzere $A \in M_{m,n}$ ve $B \in M_{p,q}$ verilmiş ise $A \otimes B \in M_{mp,nq}$ *dur*. Ayrıca Lemma 3.5. den de görüleceği üzere $A \otimes B$ matrisinin

$$1, n+2,\ 2n+3, 3n+4, \ldots, (n-1)n + n = n^2$$

sütunları ile

$$1, m+2, 2m+3, 3m+4, \ldots, (m-1)m + m = m^2$$

satırlarının kesişiminde ki bileşenlere bakılırsa AoB nin elemanlarını bulunur. Gerçekten de dikkat edelirse $A \otimes B$ matrisinin 1. ve 4. sütunları ile 1. ve 4. satırlarının kesişimin de ki elemanlar AoB nin elemanlarını oluşturmaktadır. Yani

AoB matrisi, $A \otimes B$ nin esas alt matrisidir. Burada özellikle şu belirtilmeli ki, $A \otimes B$ nin tekil değeri, A ve B nin kendi tekil değerlerinin karşılıklı çarpımlarına eşittir. Yani $\|A \otimes B\|_2 = \|A\|_2 \|B\|_2$ dir. Ayrıca, $\|AoB\|_2 \leq \|A \otimes B\|_2 = \|A\|_2 \|B\|_2$ dir.

Tanım 3.9. $A \in M_n$ olmak üzere $A^H A$ matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sayılarının mutlak değerlerinin kareköklerine A matrisinin tekil değerleri denir ve $\sigma_i(A)$ $(i = 1,2,...,k)$ şeklinde gösterilir.

Hadamard çarpımı ve bu çarpımla oluşan keyfi bir matrisin tekil değeri ile ilgili olarak aşağıda ispatsız olarak verilen teoremin uygulamaları matris cebirinde büyük faydalar sağlar.

Teorem 3.10. Her $A \in M_{m,n}$ için,

$$\sigma_1(AoB) \leq r_1(A)c_1(B) \leq \left\{ \begin{matrix} r_1(A)\sigma_1(B) \\ \sigma_1(A)r_1(B) \end{matrix} \right\} \leq \sigma_1(A)\sigma_1(B)$$

dir [16].

BÖLÜM 4. HADAMARD ÇARPIMININ BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde Hadamard çarpımı ve onun bazı uygulamaları ile ilgilenilmiştir. İlk olarak bazı özel tanımlar ortaya konulduktan sonra bu tanımlar kullanılarak bazı önemli sonuçlar ve eşitsizlikler araştırılmıştır.

A. F. Horadam 1965 deki çalışmasında $(h_n)_{n\geq 0}$ ile gösterilen ve $h_0(1)=a$, $h_1(1)=b$ olmak üzere $n\geq 2$ için $h_{n-1}(1)=ph_{n-2}(1)+qh_{n-3}(1)$, ile tanımlanan önemli bir sayı dizisi tanımlamıştır[13]. Yeni tanımlanan bu diziye Horadam dizisi denir. Daha sonraları bu sayı dizisi daha da genelleştirilerek $h_n(x)$ ile gösterilen ve Horadam polinomu adı verilen yeni bir polinom dizisi elde edilmiştir.

Tanım 4.1. Horadam polinomu $h_n(x,a,b,p,q)$ ya da kısaca $h_n(x)$ şeklinde gösterilir ve $h_1(x)=a$ ve $h_2(x)=bx$ başlangıç şartları olmak üzere $n>2$ için,

$$h_n(x)=pxh_{n-1}(x)+qh_{n-2}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Horadam polinomu matematiksel özelliklerinden dolayı oldukça önemlidir. Bu polinom dizisi bazı özel polinom dizilerinin genelleştirilmesidir. Ayrıca $t^2-pxt-q=0$ karakteristik denkleminin kökleri olan

$$\alpha=\frac{px+\sqrt{p^2x^2+4q}}{2}$$

ve

$$\beta = \frac{px - \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2}$$

sayıları için, Horadam polinomları,

$$h_n(x) = A_1\alpha^{n-1} + A_2\beta^{n-1}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada, A_1 ve A_2 aşağıdaki gibidir:

$$A_1 = \frac{bx - a\beta}{\sqrt{p^2x^2 + 4q}}$$

ve

$$A_1 = \frac{a\alpha - bx}{\sqrt{p^2x^2 + 4q}}.$$

$h_n(x)$ Horadam polinomu kullanılarak a, b, p ve q nun özel değerlerine bağlı olarak aşağıdaki diziler elde edilebilir.

$a = b = p = q = 1$ için Fibonacci polinumu elde edilir:

$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$, $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = x$

$a = 2$, $b = p = q = 1$ için Lucas polinomu elde edilir:

$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$, $L_0(x) = 2$, $L_1(x) = x$

$a = q = 1$, $b = p = 2$ için Pell polinomu elde edilir:

$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 2x$

$a = b = p = 2$, $q = 1$ için Pell-Lucas polinomu elde edilir:

$Q_{n-1}(x) = 2xQ_{n-2}(x) + Q_{n-3}(x)$, $Q_0(x) = 2$, $Q_1(x) = 2x$

$a = b = q = 1$, $p = 2$ için Modified Pell polinomu elde edilir:

$q_{n-1}(x) = 2xq_{n-2}(x) + q_{n-3}(x)$, $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$

$a = b = p = x = 1$, $q = 2y$ için Jacobsthal polinomu elde edilir:

$J_n(y) = J_{n-1}(y) + 2yJ_{n-2}(y),\ \ J_1(y) = 1,\ J_2(y) = 1$

$a = 2,\ b = p = x = 1,\ \ q = 2y$ için Jacobsthal-Lucas polinomu elde edilir:

$j_n(y) = j_{n-1}(y) + 2yj_{n-2}(y),\ \ j_1(y) = 2,\ j_2(y) = 1$

$a = b = 1,\ p = 2,\ \ q = -1$ için birinci çeşit Chebyshev polinomu elde edilir:

$T_{n-1}(x) = 2xT_{n-2}(x) - T_{n-3}(x),\ \ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$

$a = 1,\ b = p = 2,\ q = -1$ için ikinci çesit Chebyshev polinomu elde edilir:

$U_{n-1}(x) = 2xU_{n-2}(x) - U_{n-3}(x),\ \ U_o(x) = 1,\ U_1(x) = 2x$

$x = 1$ için Horadam sayı dizisi elde edilir:

$h_{n-1}(1) = ph_{n-2}(1) + qh_{n-3}(1),\ h_0(1) = a,\ h_1(1) = b$

Yukarıda elde edilen Horadam sayı dizisi için a, b, p ve q nun özel değerlerine bağlı olarak özel tanımlı sayı dizileri elde edileceğinden bahsedilmişti. Örneğin Horadam sayı dizisinde $a = 2,\ b = p = 1\ ve\ q = 2$ alınırsa, Jacobsthal-Lucas sayıları elde edilir. Yani,

$$j_{n-1} = j_{n-2} + 2j_{n-3},\ j_0 = 2,\ j_1 = 1\ .$$

İnsanların ve gelişen teknolojinin artan ihtiyaçlarını karşılamak amacıyla matematikçiler farklı alanlarda araştırma yapmaya yogunlaşmıştır. Bu yüzden yukarıda detaylı bir biçimde anlatılan Horadam dizilerinden elde edilen özel tanımlı dizilerle bir çok araştırmacı uğraşmıştır. Özellikle matematik dünyası 1970 li yıllardan sonra artan bir ivmeyle bu sayı dizilerinin özelliklerini incelemişlerdir. Ancak bu sayı dizilerinin doğada, sanatta ve bilimsel alanlarda bazı kullanımlarının keşfedilmesiyle bu sayı dizilerinin önemi bir kat daha artmıştır. Özellikle Fibonacci sayıları oldukça ilğinç özelliklere ve uygulamalara sahiptir. Örneğin her Fibonacci sayısının kendisinden bir önceki Fibonacci sayısına oranı, “altın oran” adı verilen ve bir irrasyonel sayıya eşit olan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ye yada yaklaşık olarak 1,61803398...

sayısına yakınsar. Bu yakınsama 15. terimden sonra maksimum olmaktadır. 1991-1993 yılları arasında Rusya daki Ural dağlarının dogusunda bulunan ve küçük bir dere olan Narada da boyları 0,0003 mm. ile 3 cm. arasında değişen spiraller bulunmuştur. Büyük olanlar bakırdan küçük ve çok küçük olanlar ise çok ender rastlanan "tungsten" ve "molybdenum" maddelerinden yapılmıştır. Mikroskopla yapılan incelemeler sonucunda spirallerin kusursuz bir biçimde "altın oaran" tekniğiyle yapıldığı keşfedilmiştir. Daha da şaşırtıcı olan şey ise: bütün bilimsel incelemelerin gösterdiği gibi bu cisimlerin yaşlarının 20.000 ile 318.000 yıl arasında değiştiğidir. Bu yaş farkı cisimlerin bulundukları derinliğe göre değişmektedir. Daha ilginç olanı ise $k \in \mathrm{Z}$ olmak üzere, F_{3k} Fibonacci sayılarının 2 nin katı olmasıdır. Bu altın oran Mısırda ki piramitler başta olmak üzere bir çok yapının temelini oluşturmaktadır.

Fibonacci sayı dizilerine benzer olarak Jacobsthal sayı dizileride önemli özelliklere sahiptir. Bilgisayarlardaki bazı mikro işlemciler bir programın akışını değiştirmek için koşullu yönlendirmeler kullanırlar. Bu mikro işlemciler (dallı yönlendirenler) geçici olarak ilerideki yönlendirmeye atlatan komutlandırma yaparlar. Burada, 2 bitin 4 olasılığı için, 1 durumun; 3 bitin 8 olasılığı için 3 durumun; 4 bitin 16 olasılığı için 5 durumun; vb. durumları hariç bırakılarak diğerlerinin yararlı olduğu sonucuna varılmış ve hariç bırakılan bu durumların tam olarak Jacobsthal sayılarını verdiği görülmüştür (Horadam A. F.).

Bu çalışmada genel olarak Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları ile çalışılacaktır. Yukarıdaki sayı dizileri gibi gerek Pell sayıları olsun gerekse Pell-Lucas veya Modified Pell sayılar olsun doğada, sanatta ve bilimde önemli bir yere sahiptir.

Tüm bu sayı dizilerinin matematik dünyasına kattığı heyecan yadsınamaz büyüklüktedir. Ancak bu heyecan bu sayı dizilerinden oluşan matrislerin özelliklerinin incelenmesi ile bir kat daha artmıştır, çünkü sonuçlar şaşırtıcı derecede ilginçtir. Bu yüzden bilim dünyası bu konuyla daha yakından ilgilenmeye başlamıştır. Örneğin 1960 yılında Charles H. King master tezi çalışmasında $Q-matrisi$ adını verdiği

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini tanımladı ve

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterdi.

Buradan kolayca görülebilir ki,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir ki bu formül Cassini formülü olarak bilinir. Bazen bu $Q-$matrisine Fibonacci matrisi de denir. Daha sonraları, 1979 da ki çalışmasında Ercalano, tıpkı Fibonacci matrisine benzer olarak,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini tanımladı ve gösterdi ki

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir [9].

R. Mathias 1990 yılındaki çalışmasında spektral norm için daha iyi sonuç veren bir sınır elde etmiştir [22]. Mathias çalışmasında $C = AoB$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliğin var olduğunu ifade ve ispat etti:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|C\|_F \leq \|C\|_2 \leq r_1(A).c_1(B)$$

Bu ifadenin ispatı açıktır. 2. bölümde bir A matrisinin normları arasında $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ eşitsizliğinin olduğundan (2.1) deki özelliklerde bahsedilmişti. Ayrıca Teorem 3.10. dan $\sigma_1(AoB) = r_1(A)c_1(B)$ olduğu bilinmektedir.. Burada $\sigma_1(AoB) = \|AoB\|_2$ olduğu göz önüne alınırsa $C = AoB$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|C\|_F \leq \|C\|_2 \leq r_1(A).c_1(B) \qquad (4.1)$$

Bazı özel tanımlı matrisler, araştırmacılar tarafından oldukça önemli bulunmuştur. Örneğin S. Solak, 2005 yılındaki çalışmasında (4.1) deki eşitsizliği kullanarak Fibonacci sayılarından oluşan $n \times n$ mertebeli circulant matrislerin spektral normu için alt ve üst sınırlar elde etmiştirler [35]. Benzer olarak M. Akbulak ve D. Bozkurt 2008 yılında [2] ve [3] deki ortak çalışmalarında Fibonacci ve Lucas dizilerinden oluşan Toeplitz ve Hankel matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırları hesap etmiştirler. A. Yalçıner ve N. Taşkara yaptıkları bir çalışmada, Moztkin sayılarından oluşan Hankel matrislerinin normlarını incelediler. Dahası onlar üç yeni matris tanımladılar ve bu matrislerin farklı formlarda Hadamard çarpımını yapıp onların normlarını incelemişlerdir [42].

Tanım 4.2. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \in C$ bir sayı dizisi ve $H_n = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matris olsun. H_n matrisinin (i, j) elemanı $a_{ij} = \alpha_{i+j-1}$ ise H_n matrisine Hankel matrisi denir ve bu matrisin açık formu

$$H_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{2n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

dir.

Tanım 4.3. A^H, A nın komplex eşleğinin transpozesini göstermek üzere,

$$A^H A = AA^H$$

ise, A matrisine normal matris denir.

Teorem 4.4 A, $n\times n$ mertebeli matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olsun. O zaman A matrisinin normal olması için gerek ve yeter koşul AA^H matrisinin özdeğerleri $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2$ olmasıdır. Burada A^H, A nın komplex eşleğinin transpozesini göstermektedir[18].

Hankel matrislerinin önemli özellikleri vardır. Örneğin bu matris simetrik bir matristir. Ayrıca bu matrisin tanımında bahsi geçen diziyi reel sayı dizisi olarak seçilirse bu matris daha da önemli özelliklere sahip olacaktır. Bu önemli özelliklerden birini ortaya koyan aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 4.5 Reel simetrik matrisin öz değerleri reeldir [16].

Bu çalışmada Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell dizileri ile çalışılacağından ilk olarak bu sayı dizilerinin mevcut bazı özellikleri incelenecektir. Daha sonra bu çalışmada kullanacağımız bazı özelliklerin varlığı ortaya konulacaktır. Horadam polinomunda $a=q=x=1,\ b=p=2$ alınması ile elde edilen sayı dizisine $\{P_n\}$ Pell dizisi denir. Ayrıca Horadam polinomunda $a=b=p=2,\ q=x=1$ için elde edilen sayı dizisine $\{Q_n\}$ Pell-Lucas dizisi denir. Öte yandan Horadam polinomunda $a=b=q=x=1,\ p=2$ için elde edilen sayı dizisine $\{q_n\}$ Modified Pell dizisi denir. Böylece Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell dizilerinin rekürans bağıntıları sırasıyla

$$P_0=0\ ,\ P_1=1\ \ n\geq 2\ için\ P_n=2P_{n-1}+P_{n-2}$$

$$Q_0=2\ ,\ Q_1=2\ \ n\geq 2\ \ için\ Q_n=2Q_{n-1}+Q_{n-2}$$

$$q_0=1\ ,\ q_1=1\ \ n\geq 2\ \ için\ q_n=2q_{n-1}+q_{n-2}$$

şeklinde tanımlanır. *n=0* dan başlamak üzere bu dizilerin elemanları yazılırsa aşağıdaki tablo elde edilir:

Tablo 5.1. Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	$\cdots$
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	39202	$\cdots$
q_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1397	3363	8119	19601	$\cdots$

Melham, 1999 da Pell ve Pell-Lucas dizilerinin Binet formüllerinin sırasıyla,

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

olduğunu göstermiştir [23]. A. F. Horadam 1994 de yaptığı çalışmasında Pell-Lucas ve Modified Pell sayılarını tanımlayarak, bu sayı dizilerinin özelliklerini incelemiştir. Pozitif ve negatif tamsayıların Modified Pell sayılarının gösterimlerini incelemiştir [15]. Horadam, Pell ve Pell-Lucas sayısı ile yakından ilgili olan Modified Pell sayısının Binet formülünün

$$q_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Burada α *ve* β , $x^2 - 2x - 1 = 0$ şeklindeki denklemin kökleridir [15]. Ayrıca Horadam bu çalışmasında aşağıdaki önemli özellikleri ifade ve ispat etmiştir [15]:

$$4P_n = Q_n + Q_{n-1}$$

$$Q_n = 2q_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{2k+1} = \frac{Q_{2n+2} - 6}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^2 = \frac{Q_{2n+1} + 2(-1)^n - 4}{2}$$

$$P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{2n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{P_{n+1} + P_n - 1}{2}$$

E. Kılıç ve D. Taşçı 2005 yılında yaptıkları bir çalışmada Pell dizileri ilgili olarak

$$\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = \frac{P_n P_{n+1}}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{k+1} = \frac{P_{2n+1} - 2P_n P_{n+1} - 1}{4} = \frac{P_{2n-1} + 2P_n P_{n-1} - 1}{4}$$

eşitliklerini elde etmiştirler [17].

[12] nolu çalışmada yazarlar Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell dizileri arasındaki bazı bağıntıları buldular ve bu sayı dizilerini birbirleri cinsinden ifade ettiler.

Teorem 4.6. P_n ve q_n sırasıyla Pell ve Modified Pell dizilerinin terimlerini göstermek üzere,

$$P_n + P_{n-1} = q_n \ \ ve \ \ P_{n+1} - P_n = q_n$$

dir [12].

İspat: Birinci denklemin ispatı Binet formülü yardımıyla gösterilebilir. O halde

$$P_n + P_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha+1) - \beta^{n-1}(\beta+1)}{\alpha - \beta}$$

ve

$$\alpha+1=\sqrt{2}\alpha,\ \beta+1=-\sqrt{2}\beta,\ \alpha+\beta=2\ ve\ \alpha-\beta=2\sqrt{2}$$

oldugundan ispat açıktır.

İkinci denklemin varlığı tümevarım metodu ile gösterilebilir. O halde $n=1$ için Tablo 5.1. yardımıyla $P_2-P_1=2-1=1=q_1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu denklem n için doğru olsun, yani $P_{n+1}-P_n=q_n$ doğru olsun. O zaman bu denklemin $n+1$ için doğru olduğu gösterilmelidir. Buna göre,

$$P_{n+2}-P_{n+1}=2P_{n+1}+P_n-P_{n+1}=P_{n+1}+P_n=q_{n+1}$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanmış olur [12].

Teorem 4.7. P_n ve Q_m sırasıyla *n.* Pell ve *m.* Pell-Lucas sayılarını göstermek üzere

$$P_nQ_m=P_{n+m}+(-1)^m P_{n-m}$$

dir[12].

İspat: Pell ve Pell-Lucas sayılarının Binet formülleri dikkate alınırsa,

$$P_nQ_m=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^m+\beta^m\right)\quad=\frac{\left(\alpha^{n+m}-\beta^{n+m}\right)+\alpha^m\beta^m\left(\alpha^{n-m}-\beta^{n-m}\right)}{\alpha-\beta}$$

Basit hesaplamalar yardımıyla $\alpha\beta=-1$ olduğu gösterilebilir. Burada α *ve* β ifadeleri $x^2-2x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Burada elde edilenler dikkate alınırsa teoremin ispatı açıktır [12].

Teorem 4.7. nin özel durumları oldukça önemli avantajlar sağlar. Örneğin, sırasıyla $m=n$ ve $m=n+1$ alınırsa aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilir [12]:

$$P_{2n} = P_n Q_n$$

$$P_{2n+1} = P_n Q_{n+1} + (-1)^n$$

Teorem 4.8. P_n ve Q_n sırasıyla Pell ve Pell-Lucas sayıları olmak üzere

$$P_n P_{n+k} = \frac{1}{8}\left(Q_{2n+k} + (-1)^{n+1} Q_k\right)$$

dir [12].

İspat: Pell ve Pell-Lucas dizilerinin Binet formüllerinden,

$$P_n P_{n+k} = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta}\right) = \frac{\alpha^{2n+k} + \beta^{2n+k} - (\alpha\beta)^n \left(\alpha^k + \beta^k\right)}{8}$$

yazılabilir. Basit hesaplamalar yardımıyla ve $\alpha\beta = -1$ ve $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ oldukları dikkate alınırsa teoremin ispatı görülebilir [12].

Teorem 4.8. de özel olarak $k = 1$ alınırsa aşağıdaki özellikler elde edilir [12].

$$Q_{2n+1} = 8P_n P_{n+1} + 2(-1)^n$$

$$P_n^2 = \frac{1}{8}\left(Q_{2n} + 2(-1)^{n+1}\right)$$

$$P_n P_{n+1} = \frac{1}{4}\left(q_{2n+1} + (-1)^{n+1}\right)$$

Tüm bu özdeşliklere rağmen bu çalışmada gereksinim duyulacak bazı özellikler ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 4.9. P_n *ve* q_n sırasıyla Pell ve Modified Pell sayılarını göstermek üzere,

$$P_n q_{n+2} = \frac{1}{2} P_{2n+2} - (-1)^n$$

dir.

İspat: Pell ve Modified Pell sayı dizilerinin Binet formulü kullanılırsa,

$$P_n \cdot q_{n+2} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha^{2n+2} + \alpha^n \beta^{n+2} - \alpha^{n+2} \beta^n - \beta^{2n+2}}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar yardımıyla $\alpha\beta = -1$, $\alpha^4 - 1 = 4\sqrt{2}\alpha^2$, $\beta^4 - 1 = -4\sqrt{2}\beta^2$, $\alpha + \beta = 2$ ve $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ oldukları gösterilebilir. Burada α *ve* β ifadeleri $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Burada elde edilenler dikkate alınırsa teoremin ispatı açıktır.

Teorem 4.10. P_n *ve* q_n sırasıyla Pell ve Modified Pell sayılarını göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} q_{2i+2} = \frac{1}{4} P_{2n} P_{2n+4} - n$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı için $a_n = \left(\frac{1}{4} P_{2n} P_{2n+4} - n\right) - \left(\frac{1}{4} P_{2n-2} P_{2n+2} - (n-1)\right)$ şeklinde yeni bir dizi tanımlanırsa, o zaman

$$a_n = \left(\frac{1}{4} P_{2n} P_{2n+4} - n\right) - \left(\frac{1}{4} P_{2n-2} P_{2n+2} - (n-1)\right) = \frac{1}{4}\left(P_{2n} P_{2n+4} - P_{2n-2} P_{2n+2} - 4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} - 4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^{4n+4} - \beta^4 - \alpha^4 + \beta^{4n+4} - \alpha^{4n} + \alpha^4 + \beta^4 - \beta^{4n}}{(\alpha - \beta)^2} - 4\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^{4n}\left(\alpha^{4}-1\right)+\beta^{4n}\left(\beta^{4}-1\right)}{\left(\alpha-\beta\right)^{2}}-4\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^{4n}4\sqrt{2}\alpha^{2}-\beta^{4n}4\sqrt{2}\beta^{2}}{\left(\alpha-\beta\right)^{2}}-4\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^{4n+2}-\beta^{4n+2}}{\sqrt{2}}-4\right)$$

$$=\frac{1}{2}P_{4n+2}-1$$

$$=P_{2n}q_{2n+2}$$

elde edilir. O halde iç içe geçen toplamlar (creative telescoping) kuralı gereği

$$\sum_{i=1}^{n}P_{2i}q_{2i+2}=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{4}P_{2i}P_{2i+4}-i\right)-\left(\frac{1}{4}P_{2i-2}P_{2i+2}-\left(i-1\right)\right)\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{4}P_{2n}P_{2n+4}-n\right)-\left(\frac{1}{4}P_{2n-2}P_{2n+2}-\left(n-1\right)\right)\right]+$$

$$\left[\left(\frac{1}{4}P_{2n-2}P_{2n+2}-\left(n-1\right)\right)-\left(\frac{1}{4}P_{2n-4}P_{2n}-\left(n-2\right)\right)\right]+\cdots+\left[\left(\frac{1}{4}P_{2}P_{6}-1\right)-\left(\frac{1}{4}P_{0}P_{2}-0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}P_{2n}P_{2n+4}-n$$

elde edilir ki bu da istenilen sonuçtur.

Teorem 4.11. P_n, n. Pell sayısını göstermek üzere,

$$\left(P_{n+1}-P_n\right)^2=2P_n^2+\left(-1\right)^n$$

dir.

İspat: P_n dizisinin Binet formülü dikkate alınırsa,

$$\left(P_{n+1}-P_n\right)^2=\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2=\left(\frac{\alpha^n\left(\alpha-1\right)-\beta^n\left(\beta-1\right)}{\alpha-\beta}\right)^2$$

elde edilir. Öte yandan $\alpha-1=\sqrt{2}$ ve $\beta-1=-\sqrt{2}$ olduğundan bu son eşitlik,

$$\left(P_{n+1}-P_n\right)^2=\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2$$

olur. Ayrıca,

$$2P_n^2+\left(-1\right)^n=2\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2+\left(-1\right)^n=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2\left(\alpha\beta\right)^n}{4}+\left(-1\right)^n$$

$$=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2\left(-1\right)^n+4\left(-1\right)^n}{4}=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2\left(-1\right)^n}{4}=\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2$$

dir. O halde ispat açıktır.

Teorem 4.12 P_n, Q_n *ve* q_n sırasıyla Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayılarını göstermek üzere,

$$P_{2n}q_{2n+2}-P_{2n-2}q_{2n}=Q_{4n}$$

dir.

İspat: Pell ve Modified Pell sayı dizilerinin Binet formulü ve $\alpha\beta=-1$ özdeşliği kullanılırsa,

$$P_{2n}\cdot q_{2n+2}-P_{2n-2}\cdot q_{2n}=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{\alpha+\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n}\beta^{2n+2}-\alpha^{2n+2}\beta^{2n}-\beta^{4n+2}-\alpha^{4n-2}-\alpha^{2n-2}\beta^{2n}+\alpha^{2n}\beta^{2n-2}+\beta^{4n-2}}{\alpha^{2}-\beta^{2}}$$

$$=\frac{\alpha^{4n+2}-\beta^{4n+2}-\alpha^{4n-2}+\beta^{4n-2}}{\alpha^{2}-\beta^{2}}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar yardımıyla $\alpha^4-1=4\sqrt{2}\alpha^2$, $\beta^4-1=-4\sqrt{2}\beta^2$ ve $\alpha^2-\beta^2=4\sqrt{2}$ oldukları gösterilebilir. Burada α *ve* β ifadeleri $x^2-2x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Elde edilenler dikkate alınırsa, teoremin ispatı açıktır.

Teorem 4.13. P_n, Q_n *ve* q_n sırasıyla Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayılarını göstermek üzere,

$$\sum_{k=1}^{n}Q_{4k}=P_{2n}q_{2n+2}$$

dir.

İspat: Teorem 4.12. dikkate alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}Q_{4k}=\sum_{k=1}^{n}\left(P_{2k}q_{2k+2}-P_{2k-2}q_{2k}\right)$$

$$=\left(P_{2n}q_{2n+2}-P_{2n-2}q_{2n}\right)+\left(P_{2n-2}q_{2n}-P_{2n-4}q_{2n-2}\right)+\cdots+\left(P_{2}q_{4}-P_{0}q_{2}\right)$$

elde edilir ki buradan ispat kolaylıkla görülebilir.

Teorem 4.14. P_n *ve* q_n sırasıyla Pell ve Modified Pell sayılarını göstermek üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} P_{2k}^2 = \frac{1}{8}\left(P_{2n}q_{2n+2} - 2n\right)$$

dir.

İspat: [12] de yazarlar ; Pell ve Pell-Lucas dizileri arasında

$$P_n^2 = \frac{1}{8}\left(Q_{2n} + 2\left(-1\right)^{n+1}\right)$$

şeklindeki bir bağıntıyı ortaya koydular. Bu denklemde n yerine $2n$ yazılırsa,

$$P_{2n}^2 = \frac{1}{8}\left(Q_{4n} - 2\right)$$

ifadesi elde edilir. O halde ,

$$\sum_{k=1}^{n} P_{2k}^2 = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(Q_{4k} - 2\right) = \frac{1}{8}\left(P_{2n}q_{2n+2} - 2n\right)$$

elde edilir ki buda istenilendir.

Bu çalışmada, genel olarak Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell dizilerinden oluşan Hankel matrislerinin Hadamard çarpımları ve bunlar arasındaki ilişkiler üzerinde durulacaktır. Bu yüzden, ilk olarak dört yeni matris tanımlanacaktır. Bu matrisler sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$A_n = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_{n-1} & P_n \\ P_2 & P_3 & P_4 & \cdots & P_n & P_{n+1} \\ P_3 & P_4 & P_5 & \cdots & P_{n+1} & P_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} & \cdots & P_{2n-3} & P_{2n-2} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} & \cdots & P_{2n-2} & P_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_{n-1} & Q_n \\ Q_2 & Q_3 & Q_4 & \cdots & Q_n & Q_{n+1} \\ Q_3 & Q_4 & Q_5 & \cdots & Q_{n+1} & Q_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{n-1} & Q_n & Q_{n+1} & \cdots & Q_{2n-3} & Q_{2n-2} \\ Q_n & Q_{n+1} & Q_{n+2} & \cdots & Q_{2n-2} & Q_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_{n-1} & q_n \\ q_2 & q_3 & q_4 & \cdots & q_n & q_{n+1} \\ q_3 & q_4 & q_5 & \cdots & q_{n+1} & q_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{n-1} & q_n & q_{n+1} & \cdots & q_{2n-3} & q_{2n-2} \\ q_n & q_{n+1} & q_{n+2} & \cdots & q_{2n-2} & q_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$D_n = \begin{bmatrix} P_2 & P_4 & P_6 & \cdots & P_{2n-2} & P_{2n} \\ P_4 & P_6 & P_8 & \cdots & P_{2n} & P_{2n+2} \\ P_6 & P_8 & P_{10} & \cdots & P_{2n+2} & P_{2n+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{2n-2} & P_{2n} & P_{2n+2} & \cdots & P_{4n-6} & P_{4n-4} \\ P_{2n} & P_{2n+2} & P_{2n+4} & \cdots & P_{4n-4} & P_{4n-2} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Teorem 4.15. $A_n = [a_{ij}]$, $n \times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.2) deki gibi tanımlansın. O halde,

$$\left\| A_n \right\|_F = \frac{1}{2}\sqrt{P_{2n}^2 - 2P_n^2 + \xi}$$

ya da

$$\left\| A_n \right\|_F = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{q_{2n}^2 - 2q_n^2 + 1}$$

dir. Burada $\left\| . \right\|_F$ Frobenius normu göstermektedir ve

$$\xi = \begin{cases} 2\ , & n \ tek \ ise \\ 0\ , & n \ çift \ ise \end{cases}$$

dir.

İspat: Frobenius norm tanımından,

$$\left\| A \right\|_F = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} == \left[\sum_{k=1}^{n} P_k^2 + \sum_{k=2}^{n+1} P_k^2 + \sum_{k=3}^{n+2} P_k^2 + \cdots + \sum_{k=n}^{2n-1} P_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} P_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n+1} P_k^2 - P_1^2 \right) + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{2n-1} P_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} P_k^2 + \sum_{k=1}^{n+1} P_k^2 + \cdots + \sum_{k=1}^{2n-1} P_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} P_i^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(P_n P_{n+1} + P_{n+1}P_{n+2} + P_{n+2}P_{n+3} + \cdots + P_{2n-1}P_{2n} \right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{k+1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}P_kP_{k+1}-2\sum_{k=1}^{n-1}P_kP_{k+1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{P_{2n}^2+P_{2n+1}^2-2P_{2n}P_{2n+1}-2(P_n^2+P_{n+1}^2-2P_nP_{n+1})+1}{8}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{(P_{2n+1}-P_{2n})^2-2(P_{n+1}-P_n)^2+1}{8}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{2P_{2n}^2+(-1)^{2n}-2(2P_n^2+(-1)^n)+1}{8}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{P_{2n}^2-2P_n^2+1-(-1)^n}$$

elde edilir. Burada ,

$$\xi=\begin{cases}2\ , & n\ tek\ ise\\ 0\ , & n\ çift\ ise\end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa istenilen elde edilir. Öte yandan $P_{n+1}-P_n=q_n$ eşitliği ve Teorem 4.11. göz önüne alınırsa, ikinci eşitlikte kolaylıkla görülebilir.

Teorem 4.16. $A_n=[a_{ij}]$, $n\times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.2) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda,

$$\|A_n\|_1=\|A_n\|_\infty=\frac{q_{2n}-q_n}{2}$$

dir. Burada $\|.\|_1$ ve $\|.\|_\infty$ sırasıyla sütun ve satır normu göstermektedir.

İspat: A_n matrisi reel ve simetrik olduğundan satır ve sütun normunun eşit olması sürpriz değildir. Çünkü her satırdan bir tanede sütun mevcuttur. O halde sütun normunun tanımından,

$$\|A_n\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \max_{1\le j\le n}\{|a_{1j}|+|a_{2j}|+\cdots+|a_{nj}|\}$$

$$= P_n + P_{n+1} + \cdots + P_{2n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-1} P_i - \sum_{i=1}^{n-1} P_i$$

$$= \frac{(P_{2n}+P_{2n-1}-1)-(P_n+P_{n-1}-1)}{2}$$

$$= \frac{q_{2n}-q_n}{2} = \|A_n\|_\infty$$

elde edilir ki bu da istenilen sonuçtur.

Teorem 4.17. $A_n = [a_{ij}]$, $n\times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.2) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. O halde,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\sqrt{P_{2n}^2 - 2P_n^2 + \xi} \le \|A_n\|_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{(P_{2n}P_{2n-1} - P_nP_{n-1})(P_{2n-2}P_{2n-1} - P_nP_{n-1} + 2)}$$

ya da

$$\frac{1}{2\sqrt{2n}}\sqrt{q_{2n}^2 - 2q_n^2 + 1} \le \|A_n\|_2 \le \frac{1}{8}\sqrt{(q_{4n-1} - q_{2n-1} + \xi)(q_{4n-3} - q_{2n-1} + \xi + 6)}$$

dir. Burada $\|.\|_2$ spektral normu göstermektedir ve

$$\xi = \begin{cases} 2\,, & n\ tek\ ise \\ 0\,, & n\ çift\ ise \end{cases}$$

biçimindedir.

İspat: (4.1) deki eşitsizlik yardımıyla A_n matrisinin spektral normu için sınırlar belirlenebilir. O halde,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|A_n\right\|_F \le \left\|A_n\right\|_2$$

olduğundan,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\sqrt{P_{2n}^2 - 2P_n^2 + \xi} \le \left\|A_n\right\|_2 \text{ ya da } \frac{1}{2\sqrt{2n}}\sqrt{q_{2n}^2 - 2q_n^2 + 1} \le \left\|A_n\right\|_2$$

olduğu açıktır. Öte yandan $U_n = [u_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$u_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i \le j \\ P_{i+j-1}\,, & i > j \end{cases}$$

şeklinde ve $V_n = [v_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$v_{ij} = \begin{cases} P_{i+j-1}\,, & i \le j\ ise \\ 1\,, & i > j\ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu matrislerin açık formu sırasıyla,

$$U_n = [u_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ P_2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ P_3 & P_4 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$V_n = [v_{ij}] = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_n \\ 1 & P_3 & P_4 & \cdots & P_{n+1} \\ 1 & 1 & P_5 & \cdots & P_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & P_{2n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada açıktır ki $A_n = U_n o V_n$ biçimindedir. Dolayısıyla ,

$$\|A_n\|_2 \leq r_1(U_n)c_1(V_n)$$

dir. O halde,

$$r_1(U_n) = \max_i \sqrt{\sum_j |u_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |u_{nj}|^2}$$

$$= \sqrt{1 + \sum_{i=n}^{2n-2} P_i^2} = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2n-2} P_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{P_{2n-2}P_{2n-1} - P_{n-1}P_n}{2}}$$

ve

$$c_1(V_n) = \max_j \sqrt{\sum_i |v_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_{in}|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=n}^{2n-1} P_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n-1} P_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2} = \sqrt{\frac{P_{2n-1}P_{2n} - P_{n-1}P_n}{2}}$$

elde edilir. $\|A_n\|_2 \leq r_1(U_n)c_1(V_n)$ olduğundan,

$$\|A_n\|_2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left(P_{2n}P_{2n-1} - P_nP_{n-1}\right)\left(P_{2n-2}P_{2n-1} - P_nP_{n-1} + 2\right)}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte, $P_nP_{n+1} = \frac{1}{4}\left(q_{2n+1} + (-1)^{n+1}\right)$ ifadesi göz önüne alınarak yeni bir düzenleme yapılırsa istenilen ikinci eşitsizlikte elde edilebilir.

Teorem 4.18. $B_n = [b_{ij}]$, $n \times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.3) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. O halde ,

$$\|B_n\|_F = \frac{1}{2}\sqrt{Q_{4n} - 2Q_{2n} - 2 + 4(-1)^n}$$

ya da

$$\|B_n\|_F = \sqrt{2(P_{2n}^2 - 2P_n^2)}$$

dir. Burada $\|.\|_F$ Frobenius normu göstermektedir.

İspat: Frobenius norm tanımından,

$$\|B_n\|_F = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} Q_k^2 + \sum_{k=2}^{n+1} Q_k^2 + \sum_{k=3}^{n+2} Q_k^2 + \cdots + \sum_{k=n}^{2n-1} Q_k^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}Q_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n+1}Q_k^2-Q_1^2\right)+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{2n-1}Q_k^2-\sum_{k=1}^{n-1}Q_k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}Q_k^2+\sum_{k=1}^{n+1}Q_k^2+\cdots+\sum_{k=1}^{2n-1}Q_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}Q_i^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{k=n}^{2n-1}Q_{2k+1}+2\sum_{k=n}^{2n-1}(-1)^k-4n-\sum_{k=1}^{n-1}Q_{2k+1}-2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k+4(n-1)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}Q_{2k+1}-2\sum_{k=1}^{n-1}Q_{2k+1}+2\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k-4\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k-4\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{4n}-6}{2}+2\frac{-1-(-1)^{2n}}{2}+4\frac{1+(-1)^n}{2}-Q_{2n}+6-4\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{Q_{4n}-2Q_{2n}-2+4(-1)^n}$$

Öte yandan, $P_n^2=\frac{1}{8}\left(Q_{2n}-2(-1)^n\right)$ eşitliği göz önüne alınırsa, teoremdeki ikinci eşitlikte kolaylıkla görülebilir.

Teorem 4.19. $B_n=[b_{ij}]$, $n\times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.3) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. O halde,

$$\left\|B_n\right\|_1=\left\|B_n\right\|_\infty=\frac{1}{2}\left(Q_{2n}+Q_{2n-1}-Q_n-Q_{n-1}\right)=2\left(P_{2n}-P_n\right)$$

dir. Burada $\|.\|_1$ ve $\|.\|_\infty$ sırasıyla sütun ve satır normu göstermektedir.

İspat: Teorem 4.16. ya benzer olarak,

$$\|B_n\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}| = \max_{1\le j\le n}\{|b_{1j}|+|b_{2j}|+\cdots+|b_{nj}|\}$$

$$= Q_n + Q_{n+1} + \cdots + Q_{2n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-1} Q_i - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i$$

$$= \frac{(Q_{2n-1}+Q_{2n}-4)-(Q_n+Q_{n-1}-4)}{2}$$

$$= \frac{Q_{2n-1}+Q_{2n}-Q_n-Q_{n-1}}{2} = \|B_n\|_\infty$$

elde edilir. $4P_n = Q_n + Q_{n-1}$ eşitliği göz önüne alınarak teoremin ikinci tarafı da gösterilebilir.

Teorem 4.20. $B_n = [b_{ij}]$, $n\times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.3) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. O halde,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\sqrt{Q_{4n}-2Q_{2n}-2+4(-1)^n} \le \|B_n\|_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{4n}-Q_{2n})(Q_{4n-2}-Q_{2n}+2)}$$

ya da

$$\sqrt{\frac{2}{n}(P_{2n}^2-2P_n^2)} \le \|B_n\|_2 \le \sqrt{\left(4(P_{2n}^2-P_n^2)+\xi\right)\left(4(P_{2n-1}^2-P_n^2)+(-1)^{n+1}\right)}$$

dir. Burada $\|.\|_2$ spektral normu göstermektedir ve

$$\xi = \begin{cases} 2\,, & n \text{ tek ise} \\ 0\,, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: (4.1) deki eşitsizlik yardımıyla B_n matrisinin spektral normu için sınırları hesaplanabilir. O halde, $\frac{1}{\sqrt{n}}\|B_n\|_F \le \|B_n\|_2$ olduğundan

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\sqrt{Q_{4n}-2Q_{2n}-2+4(-1)^{n}} \leq \left\|B_{n}\right\|_{2}$$

olduğu açıktır. Öte yandan $R_n = [r_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$r_{ij} = \begin{cases} Q_{i+j-1}\ , & i > j \ ise \\ 1\ , & i \leq j \ ise \end{cases}$$

şeklinde ve $S_n = [s_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$s_{ij} = \begin{cases} 1\ , & i > j \, ise \\ Q_{i+j-1}, & i \leq j \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu matrislerin açık formu sırasıyla

$$R_n = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Q_2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Q_3 & Q_4 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n & Q_{n+1} & Q_{n+2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$S_n = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_n \\ 1 & Q_3 & Q_4 & \cdots & Q_{n+1} \\ 1 & 1 & Q_5 & \cdots & Q_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & Q_{2n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada açıktır ki $B_n = R_n o S_n$ şeklindedir. Dolayısıyla,

$$\|B_n\|_2 \le r_1(R_n)c_1(S_n)$$

dir. O halde,

$$r_1(R_n) = \max_i \sqrt{\sum_j |r_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |r_{nj}|^2}$$

$$= \sqrt{1 + \sum_{i=n}^{2n-2} Q_i^2} = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2n-2} Q_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i^2} = \sqrt{\frac{Q_{4n-2} - Q_{2n} + 2}{2}}$$

ve

$$c_1(S_n) = \max_j \sqrt{\sum_i |r_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |r_{in}|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=n}^{2n-1} Q_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n-1} Q_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i^2} = \sqrt{\frac{Q_{4n} - Q_{2n}}{2}}$$

elde edilir. $\|B_n\|_2 \le r_1(R_n)c_1(S_n)$ olduğundan,

$$\|B_n\|_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{4n} - Q_{2n})(Q_{4n-2} - Q_{2n} + 2)}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $P_n^2 = \frac{1}{8}\left(Q_{2n} - 2(-1)^n\right)$ eşitliği göz önüne alınarak yeni bir düzenleme yapılırsa, istenilen ikinci eşitsizlikte kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 4.21. $C_n = [c_{ij}]$, $n \times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.4) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. O halde,

i) $\left\|C_n\right\|_F=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{q_{4n}-2q_{2n}-1+2(-1)^n}$ *ya da* $\left\|C_n\right\|_F=\sqrt{\frac{1}{2}(P_{2n}^2-2P_n^2)}$

dir. Burada $\|.\|_F$ Frobenius normu göstermektedir.

ii) $\left\|C_n\right\|_1=\left\|C_n\right\|_\infty=\frac{1}{2}\left(q_{2n}+q_{2n-1}-q_n-q_{n-1}\right)=P_{2n}-P_n$

dir. Burada $\|.\|_1$ ve $\|.\|_\infty$ sırasıyla sütun ve satır normu göstermektedir.

iii) $\frac{1}{2\sqrt{2n}}\sqrt{q_{4n}-2q_{2n}-1+2(-1)^n}\le\left\|C_n\right\|_2\le\frac{1}{2}\sqrt{\left(q_{4n}-q_{2n}\right)\left(q_{4n-2}-q_{2n}+1\right)}$

ya da

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{(P_{2n}^2-2P_n^2)}\le\left\|B_n\right\|_2\le\frac{1}{2}\sqrt{\left(4(P_{2n}^2-P_n^2)+\xi\right)\left(4(P_{2n-1}^2-P_n^2)+(-1)^{n+1}\right)}$$

dir. Burada $\|.\|_2$ spektral normu göstermektedir ve

$$\xi=\begin{cases}2\,, & n\ tek\ ise\\ 0\,, & n\ çift\ ise\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu ifadelerin ispatı, norm aksiyomlarından olan $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$, N2 aksiyomu kullanılarak ve $Q_n=2q_n$ özelliğinden kolaylıkla görülebilir. Burada tüm bu işlemlerden sonra akla şu soru gelir: “Acaba keyfi bir A matrisi için yukarıda kullanılan metodla elde edilen üst sınır ne kadar iyi bir sonuçtur?” Bunun için burada farklı bir uygulama yapılacaktır. D_n matrisi (4.5) deki gibi bir matris olsun. Dikkat edilirse D_n matrisinin elemanları $k=1,2,\ldots,2n-1$ olmak üzere P_{2k} elemanlarından oluşmaktadır. Burada P_n, Pell dizisinin n. terimini göstermektedir. Ayrıca P_n ve Q_n sırasıyla n. Pell ve Pell-Lucas sayılarını göstermek üzere

$P_{2n} = P_n Q_n$ özdeşliğinin varlığı bilinmektedir [12]. O halde bu özdeşlikten açıktır ki $D_n = A_n o B_n$ dir. Böylece (4.1) deki $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ eşitsizliğini kullanarak D_n matrisinin spektral normu için bir üst sınır, (4.1) deki $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$ eşitsizliğini kullanarak aynı D_n matrisin spektral normu için farklı bir üst sınır ve (4.1) deki

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|C\|_F \leq \|C\|_2 \leq r_1(A).c_1(B)$$

eşitsizliği kullanılarak başka bir üst sınır elde edilebilir. Burada $C = AoB$ şeklinde olmalıdır. Bu bilgiler göz önüne alınarak üç farklı metodla elde edilen üst sınırlardan hangisinin daha iyi sonuç verdiği araştırılacaktır.

Teorem 4.22. $D_n = [d_{ij}]$, $n \times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.1) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. O halde,

i) $\|D_n\|_F = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{P_{4n}^2 - 2P_{2n}^2 - 8n^2}$ yada $\|D_n\|_F = \frac{1}{16}\sqrt{Q_{8n} - 2Q_{4n} - 64n^2 + 2}$

dir. Burada $\|.\|_F$ Frobenius normu göstermektedir.

ii) $\|D_n\|_1 = \|D_n\|_\infty = \frac{1}{2}\left(P_{4n-1} - P_{2n-1}\right)$

dir. Burada $\|.\|_1$ ve $\|.\|_\infty$ sırasıyla sütun ve satır normu göstermektedir.

İspat:

i) Frobenius norm tanımından,

$$\|D_n\|_F = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} P_{2k}^2 + \sum_{k=2}^{n+1} P_{2k}^2 + \sum_{k=3}^{n+2} P_{2k}^2 + \cdots + \sum_{k=n}^{2n-1} P_{2k}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}P_{2k}^{2}+\left(\sum_{k=1}^{n+1}P_{2k}^{2}-P_{2}^{2}\right)+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{2n-1}P_{2k}^{2}-\sum_{k=1}^{n-1}P_{2k}^{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}P_{2k}^{2}+\sum_{k=1}^{n+1}P_{2k}^{2}+\cdots+\sum_{k=1}^{2n-1}P_{2k}^{2}\right)}_{X}-\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}P_{2i}^{2}\right)}_{Y}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{X-Y}$$

yazılabilir. Burada sırasıyla X ve Y hesaplanmalıdır. X i ve Y yi hesaplamak için,

$$\sum_{k=1}^{n}P_{2k}^{2}=\frac{1}{8}\left(P_{2n}q_{2n+2}-2n\right)$$

özelliği kulanılacaktır.

$$X=\frac{1}{8}\left[P_{2n}q_{2n+2}-2n+P_{2n+2}q_{2n+4}-2(n+1)+\cdots+P_{4n-2}q_{4n+2}-2(2n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}P_{2k}q_{2k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}P_{2k}q_{2k+2}-2[n+(n+1)+\cdots(2n-1)]\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}P_{4n-2}P_{4n+2}-2n+1-\frac{1}{4}P_{2n-2}P_{2n+2}+n-1-2\frac{(2n-1+n)(2n-1-n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{32}\left(P_{4n-2}P_{4n+2}-P_{2n-2}P_{2n+2}-12n^{2}\right)$$

ve

$$Y=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}P_{2k}^{2}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n-1}\left(P_{2i}q_{2i+2}-2i\right)=\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{n-1}P_{2i}q_{2i+2}-2\sum_{i=1}^{n-1}i\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}P_{2n-2}P_{2n+2}-n+1-2\frac{(n-1+1)(n-1-1+1)}{2}\right)=\frac{1}{32}\left(P_{2n-2}P_{2n+2}-4(n^2-1)\right)$$

elde edilir. O halde,

$$\|D_n\|_F=\sqrt{X-Y}$$

$$=\left[\frac{1}{32}\left(P_{4n-2}P_{4n+2}-P_{2n-2}P_{2n+2}-12n^2\right)-\frac{1}{32}\left(P_{2n-2}P_{2n+2}-4(n^2-1)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{32}\left(P_{4n-2}P_{4n+2}-2P_{2n-2}P_{2n+2}-4(2n^2+1)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. $P_nP_{n+k}=\frac{1}{8}(Q_{2n+k}+(-1)^{n+1}Q_k)$ özelliğinden ve $Q_4=34$ olduğundan ,

$$P_{4n-2}P_{4n+2}=\frac{1}{8}(Q_{8n}-34)$$

ve

$$P_{2n-2}P_{2n+2}=\frac{1}{8}(Q_{4n}-34)$$

elde edilir. Böylece,

$$\|D_n\|_F=\frac{1}{16}\sqrt{Q_{8n}-Q_{4n}-64n^2+2}$$

olur. Öte yandan $Q_{4n}=8P_{2n}^2+2$ özdeşliğinden,

$$Q_{8n}=8P_{4n}^2+2$$

elde edilir ki bu son ifadelerden D_n matrisinin Frobenius normu yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\|D_n\|_F &= \frac{1}{16}\sqrt{8P_{4n}^2+2-2(8P_{2n}^2+2)-64n^2+2} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{8P_{4n}^2+2-16P_{2n}^2-4-64n^2+2} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{8(P_{4n}^2-2P_{2n}^2-8n^2)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{P_{4n}^2-2P_{2n}^2-8n^2}\end{aligned}$$

elde edilir ki buda istenilendir.

ii) D_n matrisi simetrik olduğundan satır ve sütun normları birbirine eşit olacaktır. Bu yüzden sadece sütun normunun hesaplanması yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}\|D_n\|_1 &= \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|d_{ij}| = \max_{1\le j\le n}\left\{|d_{1j}|+|d_{2j}|+\cdots+|d_{nj}|\right\} \\ &= P_{2n}+P_{2n+2}+\cdots+P_{4n-2} \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1}P_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1}P_{2k} \\ &= \frac{1}{2}(P_{4n-1}-1-P_{2n-1}+1)\end{aligned}$$

elde edilir ki buda istenilendir.

Artık D_n matrisinin spektral normu için üç farklı sınır elde edilebilir. Bulunacak olan bu farklı sınırların hepside D_n matrisi için doğrudur. Ancak bu sınırlar birbirleri ile mukayese edileceğinden ayrı ayrı verilecektir.

Teorem 4.23. $D_n = [d_{ij}]$, $n \times n$ mertebeli bir matris ve elemanları (4.5) deki gibi olacak şekilde tanımlansın. O halde,

i) $$\frac{1}{2\sqrt{2n}}\sqrt{P_{4n}^2 - 2P_{2n}^2 - 8n^2} \le \|D_n\|_2 \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{P_{4n}^2 - 2P_{2n}^2 - 8n^2}$$

ii) $$\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(P_{4n-1} - P_{2n-1}\right) \le \|D_n\|_2 \le \frac{\sqrt{n}}{2}\left(P_{4n-1} - P_{2n-1}\right)$$

iii) $$\frac{1}{2\sqrt{2n}}\sqrt{P_{4n}^2 - 2P_{2n}^2 - 8n^2} \le \|D_n\|_2 \le \sqrt{2}\left(P_{2n-1}P_{2n} - P_{n-1}P_n\right)$$

İspat:

i) Bu eşitsizliğin ispatı (2.1) deki özelliklerden olan,

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$$

eşitsizliği ve Teorem 4.22.i. den kolaylıkla elde edilebilir.

ii) Bu eşitsizliğin ispatı (2.1) deki özelliklerden olan

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

eşitsizliği ve Teorem 4.22.ii. den kolaylıkla elde edilebilir.

iii) Daha önce $D_n = A_n o B_n$ olarak ifade edilebileceğinden bahsedilmişti. O halde (4.1) deki eşitsizlik kullanılarak elde edilebilir. O halde A_n ve B_n sırasıyla (4.2) ve (4.3) deki gibi iki matris olsun. O zaman alt sınırın varlığı D_n matrisinin Frobenius normundan ve (2.1) deki $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$ eşitsizliğinden açıktır. Öte yandan,

$$r_1(A_n) = \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=n}^{2n-1} P_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n-1} P_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2} = \sqrt{\frac{P_{2n-1}P_{2n} - P_{n-1}P_n}{2}}$$

ve

$$c_1(B_n) = \max_j \sqrt{\sum_i |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_{in}|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=n}^{2n-1} Q_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n-1} Q_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i^2} = \sqrt{\frac{Q_{4n-1} - Q_{2n-1} + 2(1-(-1)^{n-1})}{2}}$$

elde edilir. $Q_{4n-1} = 8P_{2n}P_{2n-1} - 2$ ve $Q_{2n-1} = 8P_nP_{n-1} - 2(-1)^{n-1}$ özdeşliklerinden

$$c_1(B_n) = \sqrt{4(P_{2n}P_{2n-1} - P_nP_{n-1})}$$

elde edilir. $\|D_n\|_2 \leq r_1(A_n)c_1(B_n)$ olduğundan istenilen üst sınır edilebilir ki buda istenilendir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu kısımda 4. bölümde elde edilen sonuçlar tablo şeklinde karşılaştırılmıştır. Bu tabloda; birinci sütun rastgele artan n değerleri, ikinci sütun da o satırda bulunan n değerine karşılık gelen ve Teorem 4.23 i de varlığı ispatlanan üst sınır [i] sembolü ile, üçüncü sütunda o satırda bulunan n değerine karşılık gelen ve Teorem 4.23.ii de varlığı ispatlanan üst sınır değeri [ii] sembolü ile ve son olarak dördüncü sütunda ise o satırda bulunan n değerine karşılık gelen ve varlığı Teorem 4.23.iii de özel olarak ispatlanan üst sınır değerleri [iii] sembolü ile yer alacaktır. Böylece 4. bölümde bahsedilen ve Teorem 4.23. de D_n matrisinin spektral normu için üç farklı metod ile bulunan üç farklı üst sınır arasında kıyaslama yapılabilir. Bunun için bu üst sınırlar bir tablo halinde yazılacaktır.

Burada özel olarak belirtilmelidir ki oluşacak tablonun sadeliği açısından virgül de dahil olmak üzere üst sınır değerler 14 basamak olacak şekilde $a,\ldots\times10^k$ şeklinde yazılacaktır ve 14. basamaktaki sayı yukarı yuvarlanacaktır. Buradaki a sayısı ya tek basamaklıdır ya da iki basamaklıdır.

Tablo 5.2. $\|D_n\|_2$ nin üst sınır değerleri tablosu

n	[i]	[ii]	[iii]
1	4	2	4
2	$1,441110682772\times10^{2}$	$1,16\times10^{2}$	$1,16\times10^{2}$
4	$1,664641249519\times10^{5}$	$1,94856\times10^{5}$	$1,37784\times10^{5}$
6	$1,92099600125\times10^{8}$	$2,75632435\times10^{8}$	$1,59136460\times10^{8}$
8	$2,216827722242\times10^{11}$	$3,67295767392\times10^{11}$	$1,83647883696\times10^{11}$
10	$2,558217270472\times10^{14}$	$4,7388911078099\times10^{14}$	$2,1192965310065\times10^{14}$
12	$2,952180513297\times10^{17}$	$5,9906347923513\times10^{17}$	$2,4456664127708\times10^{17}$
14	$3,40681375412\times10^{20}$	$7,4670957837734\times10^{20}$	$0,6073901965834\times10^{20}$
16	$7,53068852410\times10^{23}$	$9,211984073656\times10^{23}$	$3,2569282033323\times10^{23}$
18	$4,53690157176\times10^{26}$	$11,275476973052\times10^{26}$	$3,7584923243506\times10^{26}$
21	$1,778556153005\times10^{31}$	$4,774375152566\times10^{31}$	$1,041854072988\times10^{31}$
24	$6,97229582647\times10^{35}$	$20,00878597498\times10^{35}$	$4,0842763342696\times10^{35}$
27	$2,73327940811\times10^{40}$	$8,319653213807\times10^{40}$	$1,6011180075185\times10^{40}$
30	$1,07150019287\times10^{45}$	$3,437891715239\times10^{45}$	$0,627670280899\times10^{45}$
35	$4,84736765163\times10^{52}$	$16,79884004981\times10^{52}$	$2,839522228519\times10^{52}$
40	$2,19290423897\times10^{60}$	$8,124356557215\times10^{60}$	$1,2845735622062\times10^{60}$
45	$9,92049571419\times10^{67}$	$38,9833308003\times10^{67}$	$5,8112918439088\times10^{67}$
60	$9,18490130659\times10^{90}$	$41,6763265064\times10^{90}$	$5,3803906163459\times10^{90}$
75	$8,50385045692\times10^{113}$	$43,14053817156\times10^{113}$	$4,981440265267\times10^{113}$
100	$1,61132872079\times10^{152}$	$9,438945111942\times10^{152}$	$0,943894511195\times10^{152}$

Tablo 5.2. dikkatlice incelenirse ikinci sütunda yer alan ve Frobenius normuyla elde edilen üst sınır değerler, satır normu yada buna denk olarak sütun normu kullanılarak elde edilen üst sınır değelerini içeren üçüncü sütundaki değerlerden daha küçüktür. Dolayısıyla bir üst sınır için Frobenius norm kullanılarak elde edilen üst sınır, satır ya da sütun norm kullanarak üst sınırdan daha iyi bir sonuçtur. Öte yandan matrislerin Hadamard çarpımı kullanılarak elde edilen üst sınırları içeren dördüncü sütundaki değerler ile ikinci sütunda yer alan ve Frobenius normuyla elde edilen değerler karşılaştırılırsa dördüncü sütundaki üst sınır değerlerin ikinci sütundaki üst sınır değerlerden daha küçük olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece Mathias ın varlığını ispatladığı yani matrislerin Hadamard çarpımı kullanılarak elde edilen üst sınır bulma metodu Frobenius norm kullanılarak üst sınır bulma metodundan daha iyi sonuç vermiştir.

Mathematica 5.0 programında $n=6$ alınıp D_n Hankel matrisinin özdeğerleri hesaplattırılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0,960498000625\times 10^8\\
\lambda_2 &= -0,0624999552965\\
\lambda_3 &= 0\\
\lambda_4 &= 0\\
\lambda_5 &= 0\\
\lambda_6 &= 0
\end{aligned}$$

değerleri elde edilmektedir. Burada D_n matrisi reel ve simetrik olduğundan köşegenleştirilebilirdir ve $D_n = \mathrm{D}_{\mathrm{n}}^* = D_n^H$ özelliği mevcuttur. O halde D_n matrisi Tanım 4.3. gereği normal matristir. $\|D_n\|_2 = \max\left\{\sqrt{|\lambda|} : \lambda,\ D_n^H D_n \ \textit{nın özdeğeri}\right\}$ tanımı göz önüne alınırsa, $\|D_n\|_2$ normunun hesaplanması için D_n matrisinin özdeğerlerinin hesaplanması yeterli olacağı kolaylıkla görülebilir. Yani $\|D_n\|_2 =\{$ $\lambda : \lambda$, D_n matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğeridir$\}$ şeklinde bir tanım elde edilir. O zaman,

$$\|D_6\|_2 = 0,960498000625 \times 10^8$$

elde edilir ki Tablo-1 deki dördüncü satırdan bu değerin olması gereken aralıkta olduğu görülür. Böylece daha genel bir yorum yapılacak olursa Hadamard çarpımı kullanarak üst sınır bulma metodu diğer metodlara göre daha iyi sonuç vermiştir.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada matris normları, matrislerin Hadamard çarpımı ve özel tanımlı sayı dizileri olan Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları incelenmiş ve elemanları $a_{ij} = \alpha_{i+j-1}$ şeklinde tanımlanan $H_n = [a_{ij}]_{n\times n}$ Hankel matrisleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca, Hankel matrislerinin elemanları Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayılarından oluşacak şekilde tanımlanarak onların Frobenius, satır ve sütun normları hesaplandı ve spektral normu için alt ve üst sınır değerleri bulunmuştur.

A_n, B_n, C_n *ve* D_n matrislerinin ℓ_p *ve* ℓ_{pq} normları için sınırlar birer araştırma konusudur. Aynı zamanda bu matrislerin Hadamard terslerinin spektral normu için alt ve üst sınırlar da birer araştırma konusudur. A_n ve C_n matrislerinin Hadamard çarpımın da Frobenius, satır ve sütun normları hesaplanabilir ve bu elde edilen yeni matrisin spektral normunun alt ve üst sınırları belirlenebilir. Dahası bu çalışmada üzerinde çalışılan Hankel matrislerinin spektral normunu hesaplanmasında kullanılabilecek bazı formüller geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] ALPTEKİN, G., Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell Sayıları ile Tanımlı Circulant ve Semicirculant Matrisler, Dokatara tezi, Selçuk Üni., 2005.

[2] AKBULAK, M., BOZKURT, D., On the Norms of Hankel Matrices Involving Fibonacci and Lucas Numbers, Selçuk Journal of Applied Mathematics, Vol. 9. No. 2.,45-52, 2008.

[3] AKBULAK, M., BOZKURT, D., On the Norms of Toeplitz Matrices Involving Fibonacci and Lucas Numbers , Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 37 , 89 – 95, 2008.

[4] ANDO, T., HORN, R. A., JOHNSON, C. R., Singular Values of a Hadamard Product. A Basic Inequality, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 21, 345-365, 1987.

[5] BRONSON, R., Matris işlemleri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara 1999.

[6] CHEN, W. W. L., Linear Algebra, University of London, 1982-2008.

[7] DAVIS, P. J., Circulant Matrices , John Wiley&Sons, New York, 1979.

[8] DJOKOVIC, D. Z., On the Hadamard Product of Matrices, Math. Zeitschr. 86, 395,1965.

[9] ERCOLANO, J., Matrix Generator of Pell Sequence, Fibonacci Quart., 17, 71-77, 1979.

[10] FIEDLER, M., A Note On the Hadamard Product of Matrices, Elsevier Science Inc.,1983.

[11] FIEDLER, M., MARKHAM, T. L., An inequality for the Hadamard Product of *M*-matrix and an Inverse *M*-matrix, Linear Algebra Appl., Vol. 102, 1–8, 1998.

[12] HALICI, S., DAŞDEMİR, A., On Some Properties of the Pell, Pell-

Lucas and Modified Pell Sequences (sunuldu).

[13] HORADAM, A. F., Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, Fibonacci Quart., Vol. 3, 161-176, 1965.

[14] HORADAM, A. F., SHANNON, A.G., Generalizations of identities of Catalan and others, Portugaliae Math., Vol. 44, 137-148, 1987.

[15] HORADAM, A. F., Applications of Modified Pell Numbers to Representations, Fibonacci Quart., Vol. 3, 34-53, 1994.

[16] HORN, R.A., JOHNSON, C. R., Matrix Analysis, Cambrigde University Press, 1996.

[17] KILIÇ, E., TAŞÇI, D., The Linear Algebra of the Pell Matrix, Bull. Soc. Mat. Mexicana, Vol. 11, 2005.

[18] KOÇER, E. G., Circulant, Negacylic and Semicirculant Matrices with the Modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 36 (2), 133-142, 2007.

[19] KÖKEN, F., BOZKURT, D., On the Jacobsthal-Lucas Numbers by Matrix Method , Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, 605-614, 2008.

[20] KÖKEN, F., BOZKURT, D., On the Jacobsthal-Lucas Numbers by Matrix Method , Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, no. 33, 1629-1633, 2008.

[21] LIU, S., Inequalitities Involving Hadamard Products of Positive Semidefinite Matrices, Journal of Mathematical Analysis and Applicatons, 243, 458-463, 1999.

[22] MATHIAS, R., The Spectral Norm of a Nonnegative Matrix, Linear Algebra and Appl.,vol. 131, 269 – 284, 1990.

[23] MELHAM, R., Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers, Portugaliae Mathematica, Vol: 56, 309-317, 1999.

[24] MEYER, C. D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, 2000.

[25] MOND, B., PECARIC J. E, On Matrix Convexity of the Moore-Penrose Inverse, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Vol. 19, 707–710, 1996.

[26] MOND, B., PECARIC, J., Inequalities for the Hadamard Product of Matrices, SIAM J. , Matrix Anal. Appl., 19, 66-70, 1998.

[27] MOND, B., PECARIC, J., On Inequalitities Involving the Hadamard Product of Matrices, A Publication of the International Linear Algebra Society, Vol.6, 56-61, 2000.

[28] NEWMAN, M., TODD, J., The Evaluation of Matrix Inversion Programs, J. Soc. Industrial and Appl. Math., Vol., 6, 466-476, 1958.

[29] PRASOLOV, V., Problems and Theorems In Linear Algebra, pp.158.

[30] SARIPINAR, E., Filbert Matrislerinin Normları, Yüksek lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 2004.

[31] SCHUR, J., Bemerkungen zur Theorie der Bescrankten Bilinearformen mit Unendlich Vielen Veranderlichen, J. Reine Angew. Math., Vol. 140, 1-28, 1911.

[32] SOLAK, S., Cauchy-Toeplitz ve Cauchy Hankel Matrislerinin Spektral Normları İçin Sınırlar ve Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Interval Matrislerinin Normları, Doktora tezi, Selçuk Üniversitesi, 2001.

[33] SOLAK, S., BOZKURT, B., On the Spectral Norms of Cauchy–Toeplitz and Cauchy–Hankel Matrices, App. Math. and Comp., Vol., 140, 231–238, 2003 .

[34] SOLAK, S., TÜRKMEN, R., BOZKURT, D., On GCD, LCM and Hilbert Matrices and Their Applications, App. Math. and Comp., Vol. 146, 595–600, 2003.

[35] SOLAK, S., On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Numbers, App. Mathematics and Comp., In Press. Appl. Math. and Computation, Vol., 160, 125–132, 2005.

[36] TAŞÇI, D., ℓ_p Matrix Norms and Numerical Radii, Jour. Inst. Math. Comp. Sci. Vol. 6, 237 – 240, 1993.

[37] TAŞÇI, D., Relations Between Norms and Determinants, S.Ü.Fen-Edebiyat Fak. Fen Dergisi, Vol. 12, 109 – 115, 1994.

[38] TAŞÇI, D., The p Operator Norms of Some Special Matrices, S.Ü.Fen-Edebiyat Fak. Fen Dergisi; Vol. 12, 116 – 122, 1994.

[39] TAŞÇI, D., On The Relations Between ℓ_p Norms For Matrices, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A, Vol. 13, 43 – 47, 1994.

[40] VISICK G., A Quantitative Version of the Observation That the Hadamard Product is a Principal Submatrix of the Kronecker Product, Linear Algebra and its Applications, Vol. 304, 45-68, 2005.

[41] WANG, B., ZHANG, F., Trace and Eigenvalue Inequalities for Ordinary and Hadamard Products of Positive Semidefinite Hermitian Matrices, Siam J. Matrix Anal. Appl. Vol. 16, No.4, 1173-1183, 1996.

[42] YALÇINER, A., TAŞKARA, N., On the Norms of Hankel Matrices with Moztkin Numbers, Selçuk Journal of Applied Mathematics, Vol 8, No. 1. 9-14, 2007.

[43] ZHAN, X., Inequalitities for the Singular Values of Hadamard Products, Siam J. Matrix Anal. Appl., Vol. 18, No.4, 1093-1095, 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Daşdemir, 05.08.1986 da Kastamonu Tosya da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Tosya da tamamladı. 2003 yılında Tosya Lisesi, Sayısal Bölümden mezun oldu. 2003 yılında başladığı Cumhuriyet Üniversitesinden 2004 yılında yatay geçiş yaptığı Atatürk Üniversitesinin Matematik bölümünü 2007 yılında bitirdi. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi, Matemetik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.