T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

P VE Q ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer DEMİRER

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Temmuz 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

P VE Q ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer DEMİRER

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 27/07/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Metin BAŞARIR **Jüri Başkanı**	**Doç. Dr. Elman ALİYEV** **Üye**	**Yrd. Doç. Dr. Mustafa ERÖZ** **Üye**

TEŞEKKÜR

Bilgisini, deneyimini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sayın danışman hocam Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımdaki katkılarından ve desteğinden dolayı Araş. Gör. Mahpeyker ÖZTÜRK'e, Dr. Selma ALTUNDAĞ'a, çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı aileme, çalışmalarıma burs vererek maddi destekte bulunduğu için TÜBİTAK'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu tez Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2010-50-01-040 no ile desteklenmiştir.

Hacer DEMİRER

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

(X,d)	: Metrik uzay
$(X,+,.)$	: Lineer uzay (Vektör uzayı)
$(X,\Vert . \Vert)$	: Normlu uzay
(X,τ)	: Topolojik uzay
I	: Damga (İndis) kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
F	: Cisim ($F=\mathbb{R}$ veya $F=\mathbb{C}$)
E	: Reel Banach uzayı
S^o, $\operatorname{int} S$	: S kümesinin içi
$\overline{S}$	: S kümesinin kapanışı
$\delta(A)$	: A kümesinin çapı
$\partial(A)$	: A kümesinin sınırı
$B(x_0,\delta)$	: x_0 merkezli δ yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}(x_0,\delta)$	: x_0 merkezli δ yarıçaplı kapalı yuvar
$F(T)$	: T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$T(X)$	: X kümesinin T dönüşümü altındaki görüntü kümesi
T^n	: T dönüşümünün n inci iterasyonu
P özelliği	: $F(T)=F(T^n)$
Q özelliği	: $F(T)\cap F(S)=F(T^n)\cap F(S^n)$
K	: Koni

ÖZET

Anahtar kelimeler: Daralma Dönüşümü, Sabit nokta, Ortak sabit nokta, P özelliği, Q özelliği, Koni, Normal koni, Normal olmayan koni, Konik metrik uzay

"P ve Q özelliklerini sağlayan bazı sabit nokta teoremleri" isimli bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. İlk üç bölüm bu konu ile ilgili yapılan çalışmaların bir kısmının derlemesinden oluşmaktadır. Dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, metrik uzayda verilen bazı daralma dönüşümlerinin sabit noktasının varlığı ile P ve Q özelliklerinin sağlandığı teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, konik metrik uzay tanıtıldı ve bu uzayda bazı sabit nokta teoremleri verildi.

Dördüncü bölüm ise bu tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Konik metrik uzayda koninin normal veya normal olmama durumlarına göre verilen dönüşümler için sabit noktanın varlığı ve yine bu dönüşümler için P veya Q özelliğinin sağlandığını gösteren teorem ve sonuçlar diğer bölümlerden elde edilen sonuçlar doğrultusunda çalışıldı.

Son bölümde ise, elde edilen teorem ve sonuçlar verilmiştir.

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR MAPPINGS SATISFYING P AND Q PROPERTIES

SUMMARY

Key Words: Contractive mappings, Fixed point, Common fixed point, P property, Q property, Cone, Normal cone, Non-normal cone, Cone metric space

This study which is entitled " Some Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying P and Q Properties" contains five chapters. The first three chapters are composed of a compilation of some studies on this subject. The fourth chapter contains original results which related to some fixed point theorems in cone metric spaces for mappings satisfying P and Q properties.

In the first chapter, some basic definitions and theorems which are used in the following chapters, are given.

In the second chapter, some fixed point theorems on metric spaces are examined and the theorems which are related to P and Q properties are given.

In the third chapter, cone metric space is introduced and some fixed point theorems on these spaces are examined.

In the fourth, we introduce some fixed point theorems satisfying P or Q properties on cone metric spaces for normal and non-normal cone.

The last chapter gives some theorems and results which are obtained.

BÖLÜM1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. X boş olmayan bir küme ve bir

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

$(M1)$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$(M2)$ $d(x, y) = d(y, x)$
$(M3)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir. (X, d) ya da X ile gösterilir (Kızmaz, 1993).

Örnek 1.1.2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan d: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin mutlak değer (alışılmış, doğal, salt değer) metriği denir (Musayev, 2000).

Örnek 1.1.3. $X \neq \emptyset$ kümesi verilsin. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ için $x = y$ ise $d(x, y) = 0$ ve $x \neq y$ ise $d(x, y) = 1$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe diskret (trivial) metrik denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.4. $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Musayev, 2000).

Örnek 1.1.5. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği verilsin. $\mathbb{R}$ deki $\{x_n\} = 1/n$ dizisi $0 \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.6. $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi bir limite sahip ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (Musayev, 2000).

Örnek 1.1.7. $\mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine göre tamdır. $\mathbb{C}$ kümesi $\mathbb{C}$ üzerindeki mutlak değer metriğine göre tamdır (Musayev, 2000).

Örnek 1.1.8. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki $d(x, y) = |x - y|$ metriğine göre tam değildir (Musayev, 2000).

Tanım 1.1.9. $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 1.1.10. X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

i) $X, \emptyset \in \tau$ dur.
ii) τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi, τ ya aittir.
iii) τ ya ait herhangi sayıda kümenin birleşimi, τ ya aittir.

şartları sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.11. I herhangi bir küme ve her bir $i \in I$ için bir A_i kümesi var olsun. i, I kümesini taradığında A_i lerin birleşimi ve arakesitleri sırasıyla $\bigcup_{i \in I} A_i$ ve $\bigcap_{i \in I} A_i$ ile gösterilir. I kümesine de damga (indis) kümesi denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 1.1.12. (X, τ) bir topolojik uzay, I bir damga kümesi $A \subseteq X$ ve $\forall\, i \in I$ için $A_i \subseteq X$ açık olsun. Şayet $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ ise $(A_i)_{i \in I}$ ailesine A nın bir açık örtüsü denir (Kızmaz, 1993).

Bir örtünün herhangi bir alt kümesi de bir örtü ise buna çoğunlukla alt örtü adı verilir (Kızmaz, 1993).

Tanım 1.1.13. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. A nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse A ya bir kompakt küme denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 1.1.14. (X, τ) topolojik uzayında tanımlı her dizi bu uzayda yakınsak bir alt diziye sahipse, bu uzaya dizisel kompaktır denir (Musayev, 2000).

Teorem 1.1.15. Bir metrik uzayda dizisel kompaktlık ile kompaktlık denktir (Musayev 2000).

Tanım 1.1.16. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. S kümesinin tüm açık alt kümelerinin birleşimine S nin içi denir ve S^o veya $\operatorname{int} S$ ile gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.17. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. S kümesinin tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine S nin kapanışı denir ve $\bar{S}$ olarak gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.18. $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \rho)$ iki metrik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

veya denk bir ifade ile,

$f(B(x_0;\delta)) \subseteq B(f(x_0);\varepsilon)$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise, f ye X de süreklidir denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 1.1.19. X, Y topolojik uzaylar, $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. X uzayındaki yakınsak her x_n dizisi için,

$x_n \to x \;\Rightarrow f(x_n) \to f(x) \quad (n \to \infty)$

ise f ye dizisel süreklidir denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.20. $\{x_n\}, (X,d)$ metrik uzayında bir dizi olsun. $x \in X$ olmak üzere $\lim_n d(x_n, x) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır denir.

$\lim_n x_n = x$ veya $x_n \to x \ (n \to \infty)$

ile gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.21. X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in \mathbb{R}$ için, $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesi X de açık ise, f ye X üzerinde üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer $(-f)$ fonksiyonu üstten yarı sürekli ise, bu durumda f ye alttan yarı sürekli fonksiyon denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.22. Tanım bölgesindeki her x, y elemanı için

$x < y$ olduğunda $f(x) \geq f(y)$

şartını sağlayan f fonksiyonuna artmayan (nonincreasing),

$x < y$ olduğunda $f(x) \leq f(y)$

şartını sağlayan f fonksiyonuna ise azalmayan (nondecreasing) fonksiyon denir.

Teorem 1.1.23. (Ara Değer Teoremi) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli dönüşüm ve $f(a) \neq f(b)$ olsun. Bu durumda $f(a) < M < f(b)$ şartını sağlayan her M reel sayısı için $f(m) = M$ olacak şekilde en az bir $m \in [a, b]$ sayısı vardır.

Teorem 1.1.24. $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a, b]$ için, $Tx = x - f(x)$ olacak şekilde bir $T: [a, b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ olur. Benzer şekilde $f(b) \leq b$ ise $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından, $f(c) = c$ olacak şekilde $c \in [a, b]$ vardır.

Tanım 1.1.25. X boş olmayan bir küme, F bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad \cdot : F \times X \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \to \lambda . x$$

ikili işlemleri $\forall\, \alpha, \beta \in F$ ve $\forall\, x, y, z \in X$ için

1) $x + y = y + x$
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
3) $\forall\, x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır.
4) $\forall\, x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = e$ olacak şekilde $(-x) \in X$ vardır.
5) $1 \cdot x = x$
6) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir,
8) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ dir,

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir (Maddox, 1970).

$F = \mathbb{R}$ ise X e reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise X e kompleks lineer uzay adı verilir.

Tanım 1.1.26. X bir reel lineer uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$B = \{z \in X : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$

ise A kümesine konvekstir denir (Musayev, 2000).

Tanım 1.1.27. X, F cismi($F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|.\|: X \to \mathbb{R}$
$\quad x \to \|x\|$

dönüşümü $\forall\, x, y \in X$ ve $\forall\, \alpha \in F$ için,

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$fonksiyonuna X de (veya X üzerinde) norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.28. Bir normlu lineer uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir (Maddox, 1970).

X in reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.29. X bir Banach uzayı olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0,2]$ ve $x, y \in X$ için

$\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| > \varepsilon$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \delta$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa X uzayına düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Goebel and Kirk, 1990).

1.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 1.2.1. X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ e herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir (Granas and Dugundji, 2002).

Bu durumda $x \in X$ olmak üzere $Tx = x$ denkleminin çözümü, T nin bir sabit noktasıdır ve T nin tüm sabit noktalarının kümesi

$F(T) = \{x \in X: T(x) = x\}$

ile gösterilir (Granas and Dugundji, 2002).

Örneğin;

i) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = T(x) = x$ ise $F(T) = \mathbb{R}$

ii) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = \frac{x}{3}$ ise $F(T) = \{0\}$

iii) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x^2$ ise $F(T) = \{1,0\}$

iv) Eğer $X = [1, \infty)$ ve $Tx = 2x^4 - 1$ ise $F(T) = \{1\}$

v) Eğer $X = [0, \infty)$ ve $Tx = \sqrt{x}$ ise $F(T) = \{0,1\}$

Örneklerden de anlaşıldığı gibi bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, dönüşümün tanımlı olduğu kümeye ve nasıl tanımlandığına bağlıdır. Bu yüzden sabit nokta teorisinin çalışmaları dönüşümün hangi şartlar altında sabit noktasının var olduğunu ve hangi şartlar altında sabit noktanın tek olduğu sorusuna cevap aramaktadır.

X herhangi bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde $T^n(x)$ tanımlandığında $T^n(x)$, T altındaki x in n. iterasyonu olarak adlandırılır (Granas and Dugundji, 2002).

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

Keyfi $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subseteq F(T^n)$ dir. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek 1.2.2. $X = [0,1]$ için $Tx = 1 - x$ olarak tanımlanan T dönüşümü $1/2$ noktasında tek sabit noktaya sahiptir. Fakat $n > 1$ olacak şekildeki n çift sayıları için

$T(Tx) = T(1 - x) = 1 - (1 - x) = 1 - 1 - x = x$
$T(T^2x) = T(x) = 1 - x$, $T(T^3x) = T(1 - x) = x$ dir.

Yani, $T^n = I$ olacağından $n > 1$ şeklindeki n çift sayıları için [0,1] aralığındaki tüm noktalar T dönüşümünün sabit noktasıdır (Jeong and Rhoades, 2005).

Tanım 1.2.3. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (1.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine Lipschitz sabiti denir (Granas and Dugundji, 2002).

T Lipschitzian dönüşümü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k}$ ise $kd(x, y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx,Ty) \leq k\, d(x,y)$$
$$< k\,\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

olur. Bu nedenle T dönüşümü tanımlı olduğu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 1.2.4. $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 2x$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty) = |2x-2y| = 2\,|x-y| = 2\,d(x,y) \leq k\,d(x,y)$$

$k \geq 2$ için T dönüşümü Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 1.2.5. (X,d) bir metrik uzay ve $T\colon X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (1.1) eşitsizliği $k \in [0,1)$ olması durumunda sağlanıyorsa T ye daralma veya büzülme (contraction) dönüşümü denir (Granas and Dugundji, 2002).

Örnek 1.2.6. $X = (0,1]$ olsun. $T\colon X \to X$ ve $Tx = \dfrac{x}{3}$ dönüşümünü alalım. T dönüşümü bir daralma dönüşümüdür, fakat sabit noktası yoktur.

Örnek 1.2.7. $T\colon [0,1/3) \to [0,1/3)$, $Tx = x^2$ alışılmış metriğe göre daralma dönüşümüdür ve $x = 0$ noktası sabit noktadır.

Örnek 1.2.8. (X,d) herhangi bir metrik uzay ve $Tx = x$ (özdeşlik dönüşümü) olsun. $k \in [0,1)$ için $d(Tx,Ty) = d(x,y) \nleq k\,d(x,y)$ olduğundan T dönüşümü daralma dönüşümü olamaz.

Lipschitzian şartını sağlayan her dönüşüm, düzgün sürekli olduğundan daralma dönüşümleri de düzgün süreklidir. Bu nedenle T sürekli değilse, daralma dönüşümü olamaz. Ancak T daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir n için T^n bir daralma dönüşümü olabilir.

Tanım 1.2.9. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ye kesin daralma (contractive) dönüşümü denir (Granas and Dugundji, 2002).

Tanım 1.2.10. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir (Granas and Dugundji, 2002).

Örnek 1.2.11. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x + 1$ olarak alalım.

$$d(Tx, Ty) = |x + 1 - y - 1| = |x - y| = d(x, y)$$

olacağından her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Böylece T nin genişlemeyen bir dönüşüm olduğunu söyleyebiliriz. Fakat T dönüşümü daralma ve kesin daralma dönüşümü değildir.

Tanım 1.2.12. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\beta > 1$ için

$$d(Tx, Ty) \geq \beta\, d(x, y)$$

ise T ye genişleyen (expansive) dönüşüm denir (Granas and Dugunji, 2002).

Tanım 1.2.13. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu

i) Sürekli, azalmayan (nondecreasing),
ii) $\varphi(0) = 0$,
iii) $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$,

şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y))$$

şartı sağlanıyorsa, T ye zayıf kesin daralma (weakly contractive) dönüşümü denir (Rhoades and Sessa, 1986).

Yapılan dönüşüm tanımları göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yapılabilir,

T daralma ⇒ T kesin daralma ⇒ T genişlemeyen ⇒ T lipschitzian

Tanım 1.2.14. $T: (X, d) \to (X, d)$ ye tanımlı bir daralma dönüşümü olmak üzere her $n \in N$ için

$$F(T) = F(T^n)$$

şartı sağlanıyorsa bu dönüşüme P özelliğine sahip bir dönüşüm adı verilir (Jeong and Rhoades, 2005).

Tanım 1.2.15. $T, S : (X, d) \to (X, d)$ ye tanımlı daralma şartını sağlayan bir dönüşüm çifti olmak üzere her $n \in N$ için

$$F(S) \cap F(T) = F(S^n) \cap F(T^n)$$

şartı sağlanıyorsa T ve S dönüşümlerine Q özelliğine sahiptir denir (Jeong and Rhoades., 2005).

Tanım 1.2.16. (X,d) metrik uzay ve $S,T\colon (X,d)\rightarrow(X,d)$ ye tanımlanmış iki dönüşüm olsun.

$$Sx = Tx = w$$

olacak şekilde $x, w \in X$ varsa x noktasına S ve T dönüşümlerinin çakışma (coincidence) noktası denir (Jungck and Rhoades, 1998).

Tanım 1.2.17. (X,d) metrik uzay ve $S,T\colon (X,d)\rightarrow(X,d)$ ye tanımlanmış iki dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$d(STx, TSx) = 0$$

şartı sağlanıyorsa S,T dönüşümlerine değişmelidir (commuting) denir (Jungck, 1976).

Tanım 1.2.18. (X,d) metrik uzay ve $S,T\colon (X,d)\rightarrow(X,d)$ tanımlanmış iki dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$d(STx, TSx) \leq d(Sx, Tx)$$

şartı sağlanıyorsa S,T dönüşümlerine zayıf değişmeli (weakly commuting) dönüşümler denir (Sessa, 1982).

Tanım 1.2.19. (X,d) metrik uzay ve $S,T\colon (X,d)\rightarrow(X,d)$ ye tanımlanmış iki dönüşüm olsun. X de bir $\{x_n\}$ dizisi vardır öyle ki bazı $t \in X$ için

$$\lim_n Sx_n = \lim_n Tx_n = t$$

iken $\lim_n d(STx_n, TSx_n) = 0$ şartı sağlanıyorsa, S, T dönüşümlerine $\{x_n\}$ dizisi üzerinde uyumludur (compatible) denir (Jungck, 1988).

Örnek 1.2.20. $X = R,\ d(x,y) = |x - y|$ ve $S, T: X \to X$ olsun. $x \in X$ için

$$Sx = x^2, \qquad Tx = 2x^2$$

olarak alalım. Buradan S, T dönüşümleri $d(STx, TSx) \neq 0$ olduğundan değişmeli değildir. Fakat $x \to 0$ için

$$|Tx - Sx| = x^2 \to 0 \text{ iken } |TSx - STx| = 2x^4 \to 0$$

olduğundan Tanım 1.2.19. gereğince S, T dönüşümleri uyumlu dönüşümlerdir (Jungck, 1988).

Dönüşüm tanımları göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Değişmeli dönüşüm ⇒ Zayıf değişmeli dönüşüm ⇒ Uyumlu dönüşüm

Örnek 1.2.21. $X = [0,1],\ d(x,y) = |x - y|,\ f, g: X \to X$ olsun. Her $x \in X$ için

$$gx = \frac{x}{2+x} \quad fx = \frac{x}{2}$$

olsun. Buradan $g(X) = [0, 1/3],\ f(X) = [0, 1/2]$ olduğu görülür. Her $x \in X$ için $x \neq 0$ olmak üzere

$$d(fgx, gfx) = \frac{x}{4+x} - \frac{x}{4+2x} = \frac{x}{(4+x)(4+2x)} \leq \frac{x^2}{4+2x} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2+x}$$
$$= d(fx, gx)$$

dir. Buradan

$$gfx = \frac{x}{4+x} > \frac{x}{4+2x} = fgx$$

olduğundan f ve g dönüşümleri zayıf değişmeli dönüşümlerdir fakat değişmeli dönüşüm değillerdir (Sessa, 1982).

Tanım 1.2.22. (X,d) metrik uzay ve $S,T:(X,d) \to (X,d)$ ye tanımlanmış iki dönüşüm olsun. Eğer S ve T dönüşümleri çakışma noktalarında değişmeli ise bu dönüşümlere zayıf uyumlu (weakly compatible) dönüşümlerdir denir (Jungck, 1988).

Örnek 1.2.23. $X = [0,3]$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T,S:[0,3] \to [0,3]$

$$Tx = \begin{cases} x\,, & x \in [0,1) \\ 3\,, & x \in [1,3] \end{cases} \quad \text{ve} \quad Sx = \begin{cases} 3-x\,, & x \in [0,1) \\ 3 & , x \in [1,3] \end{cases}$$

olsun. Buradan $x = 3 \in [1,3]$ aralığında $TSx = STx$ olduğundan S ve T dönüşümleri $X = [0,3]$ kümesi üzerinde zayıf uyumlu dönüşümlerdir (Chugh and Kumar, 2001).

Örnek 1.2.24. $X = \mathbb{R}$ ve $T,\ S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $Tx = x/3\,,\ Sx = x^2\ (x \in \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda 0 ve $1/3$ noktaları T ve S dönüşümlerinin iki çakışma (coincidence) noktasıdır.

$$TS(0) = ST(0) = 0, TS(1/3) = T(1/9) = 1/27 \text{ ve } ST(1/3) = S(1/9) = 1/81$$

bulunur. Buradan T,S dönüşümlerinin 0 noktasında değişmeli ancak $1/3$ noktasında değişmeli olmadığı görülür. Bu nedenle T ve S dönüşümleri zayıf uyumlu değildir (Chugh and Kumar, 2001).

Örnek 1.2.25. $X = [2,20]$, $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile birlikte

$$Tx = \begin{cases} 2, & x = 2 \\ 12+x, & 2 < x \leq 5 \\ x-3, & x > 5 \end{cases} \qquad Sx = \begin{cases} 2, & x \in 2 \cup (5,20] \\ 8, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

dönüşümleri verilmiş olsun. $x = 2$ noktası S ve T dönüşümleri için çakışma noktasıdır. Bu dönüşümler çakışma noktasında değişmelidirler, dolayısıyla

$ST(2) = 2$ ve $TS(2) = 2$

olduğundan zayıf uyumlu dönüşümlerdir (Popa, 2001).

Tanım 1.2.26. X bir Banach uzayı, K, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun. Eğer, her $T: K \to X$ genişlemeyen dönüşümünün en az bir tane sabit noktası varsa K kümesine sabit nokta özelliğine (fixed point property) sahiptir denir (Granas and Dugundji,2002).

Örnek 1.2.27. $X = \mathbb{R}$, $K = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ve $T: K \to X$ dönüşümünü $Tx = x$ olarak tanımlayalım. Bu durumda Tanım 1.2.26. gereğince K kümesinin en az bir tane sabit noktası olduğundan sabit nokta özelliğine sahiptir.

1.3. Daralma Dönüşümü Teoremi

Teorem 1.3.1. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü (1.1) eşitsizliğini sağlayan bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T tek sabit noktaya sahiptir (Banach Sabit Nokta Teoremi) (Musayev, 2000).

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots ,\ x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Önce bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\
&\leq k\, d(x_{n+p-1}, x_{n-1}) = k\, d(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\
&\leq k^2\, d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \\
&\leq \cdots \leq\ k^n\, d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n\, d(x_p, x_0) \\
&\leq k^n\, \big(d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq k^n\, \big(kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)\big) \\
&= k^n\, \big(d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + k\, d(x_{p-1}, x_{p-2})\big) \\
&= k^n\, \big(d(x_{p-2}, x_0) + k\, d(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2\, d(x_{p-2}, x_{p-3})\big) \\
&\qquad\qquad\qquad . \\
&\qquad\qquad\qquad . \\
&\qquad\qquad\qquad . \\
&\leq k^n\, (d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2 d(x_1, x_0) + \ \dots) \\
&= k^n\, d(x_1, x_0)\, (1 + k + k^2 + k^3 + \ \dots)
\end{aligned}
$$

$$
d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)
$$

elde edilir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$ olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam uzay olduğundan ve $x_n \to x$ dolayısıyla da $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü, sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminden $n \to \infty$ için $x = Tx$ elde edilir.

Şimdi ise bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. $y,\ T$ nin başka bir sabit noktası olsun. Yani $y = Ty$ dir. O halde

$$
d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y)
$$

olur. Bu da $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü

$$d(x,y) \leq k\, d(x,y) \Rightarrow d(x,y) - k\, d(x,y) \leq 0$$
$$\Rightarrow d(x,y)\,[1-k] \leq 0$$

olur. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. Dolayısıyla $1 - k > 0$ ve $d(x,y) \geq 0$ olduğundan $d(x,y)[1-k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x,y) = 0$ olmalıdır. Bu ise $x = y$ olması demektir.

Teorem 1.3.2. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere bir $m \in \mathbb{Z}$ için

$$T^m = ToTo...oT \ \ (\, m \text{ defa})$$

bir daralma dönüşümü ise T, X uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir (Musayev, 2000).

İspat: T^m daralma dönüşümü olduğundan, Banach sabit nokta teoremi gereğince tek bir $T^m x_0 = x_0$ sabit noktası vardır.

Buna göre;

$$Tx_0 = T(T^m x_0) = T^m(Tx_0) = Tx_0$$

olur. Fakat T^m nin tek bir sabit noktası var ve o nokta da x_0 olduğundan $Tx_0 = x_0$ olur.

Teorem 1.3.3. (X, d) tam metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere $T: B(x_0, r) \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Eğer

$$d(Tx_0, x_0) < (1-k)r$$

ise T dönüşümü $B(x_0, r)$ yuvarında bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal, Meehan, and O’Regan, 2001).

İspat: $d(Tx_0, x_0) < (1-k)r$ olmak üzere $0 \leq r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 vardır. Göstereceğiz ki $T: \bar{B}(x_0, r_0) \to \bar{B}(x_0, r_0)$ dır. Eğer $x \in \bar{B}(x_0, r_0)$ ise

$$d(Tx, x_0) \leq d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0) \leq k\, d(x, x_0) + (1-k)r_0 \leq r_0$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden T nin $\bar{B}(x_0, r_0) \subseteq B(x_0, r)$ da tek bir sabit noktası vardır.

BÖLÜM 2. METRİK UZAYDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde metrik uzayda verilen bazı dönüşümlerin sabit noktalarının varlık, teklik ve bu dönüşümlerin P veya Q özelliğini sağladığı teorem ve sonuçlar verilecektir.

2.1. Metrik Uzay Üzerinde Tanımlı Bir Dönüşüm İçin *P* Özelliğini Sağlayan Sabit Nokta Teoremleri

Bir dönüşümün P özelliğine sahip olabilmesi için öncelikle en az bir tane sabit noktaya sahip olduğu gösterilmelidir. Daha sonra $F(T) = F(T^n)$ olup olmadığı araştırılmalıdır. Bu bölümde (X, d) metrik uzayında P özelliğini sağlayan çeşitli dönüşümler verilecektir.

Teorem 2.1.1. (X, d) tam metrik uzay ve $T:(X,d) \to (X,d)$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve $0 < \lambda < 1$ için, T dönüşümü

$$d(Tx, T^2x) \leq \lambda\, d(x, Tx) \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek bir sabit noktaya sahiptir (Jeong and Rhoades, 2005).

Sonuç 2.1.2. (2.1) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.1.3. (X, d) tam metrik uzay ve $T:(X,d) \to (X,d)$ bir dönüşüm olsun. p negatif olmayan bir sayı, $b, c \geq 0$ ve $p < 1$ olmak üzere $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü,

$$\left(d(T^{p+1}x, T^{p+2}y)\right)^2 \leq b\, d(T^{p}x, T^{p+1}x)\, d(T^{p+1}y, T^{p+2}y) + c\, d(T^{p}x, T^{p+2}y)\, d(T^{p+1}y, T^{p+1}x) \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda eğer $p = 0$ veya T sürekli bir dönüşüm ise T dönüşümü sabit noktaya sahiptir. Eğer $c < 1$ ise bu sabit nokta tektir (Ray, 1979).

Sonuç 2.1.4. (2.2) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.1.5. (X, d) tam metrik uzay ve $T:(X,d) \to (X,d)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X,\ x \neq y$ olmak üzere $a, q \geq 0$ ve $q < 1$ için, T dönüşümü

$$\min\left\{d(Tx,Ty), d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Tx)[1+d(y,Ty)]}{1+d(x,y)}, \frac{d(y,Ty)[1+d(x,Tx)]}{1+d(x,y)}, \frac{\min\{d^2(Tx,Ty), d^2(x,Tx), d^2(y,Ty)\}}{d(x,y)}\right. - a\, min\{d(x,Ty), d(y,Tx)\} \leq q\, max\{d(x,y), d(x,Tx)\} \tag{2.3}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü sabit noktaya sahiptir (Ciric and Jotic, 1998).

Sonuç 2.1.6. (2.3) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.1.7. (X, d) tam metrik uzay ve $T:(X,d) \to (X,d)$ bir zayıf daralma dönüşümü olsun. Yani T dönüşümü her $x, y \in X$, φ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu sürekli, azalmayan, $\varphi(0) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$ için $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ şartlarını sağlayan fonksiyon olmak üzere,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| - \varphi(\|x - y\|) \tag{2.4}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir (Rhoades, 2001).

Sonuç 2.1.8. (2.4) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.1.9. X bir Banach uzayı ve A da X in boş kümeden farklı herhangi bir alt kümesi olsun. $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu,

a) Sağdan sürekli,
b) Azalmayan,
c) Her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$,
d) $\lim_{t\to\infty} \sup\big(t - \varphi(t)\big) = +\infty$

şartlarını sağlasın ve $\partial(A) \subseteq A$ olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in A$ için $T\colon A \to X$ dönüşümü

$$d(Tx,Ty) \leq \max\{\varphi\big(d(x,y)\big), \varphi\big(d(x,Tx)\big), \varphi\big(d(y,Ty)\big), \varphi(d(x,Ty)), \varphi(d(y,Tx))\} \tag{2.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir (Ciric, Ume, Khan and Pathak, 2003).

Sonuç 2.1.10. (2.5) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.1.11. (X,d) tam metrik uzay ve $T:(X,d)\to(X,d)$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$, $x \neq y$ olmak üzere $a \geq 0$, $b,c > 0$ ve $a + b + 2c = 1$ için, T dönüşümü

$$d(Tx,Ty) \leq a \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), \frac{[d(x,Ty)+d(y,Tx)]}{2}\right\}$$
$$+b\, max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\} + c\,\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\} \qquad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir (Ciric, 1993).

Sonuç 2.1.12. (2.6) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.1.13. (X,d) tam metrik uzay ve $T:(X,d)\rightarrow(X,d)$ örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X,\ x \neq y$ olmak üzere $a > 1$ için, T dönüşümü

$$d(Tx,Ty) \geq a \min\{d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,y)\} \qquad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir (Wang, Li, Gao and Iseki, 1984).

Sonuç 2.1.14. (2.7) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.1.15. (X,d) tam metrik uzay ve $T:(X,d)\rightarrow(X,d)$ örten bir dönüşüm olsun. $a,b,c \in \mathbb{R}$ için $2a+b+c>1$ ve $c>1$ olduğunu kabul edelim. Her $x,y \in X$ için T dönüşümü

$$d(Tx,Ty) \geq \{a\,[d(x,Tx)\,d(x,y)+d(y,Ty)\,d(x,y)] + b\,d(x,Tx)\,d(y,Ty)$$
$$+c\,d^2(x,y)\}/[d(x,Tx)+d(y,Ty)+d(x,y)] \qquad (2.8)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir (Popa, 1990).

Sonuç 2.1.16. (2.8) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

2.2. Metrik Uzay Üzerinde Tanımlı Dönüşüm Çiftleri İçin Q Özelliğini Sağlayan Sabit Nokta Teoremleri

T ve S dönüşümlerinin Q özelliğine sahip olabilmesi için öncelikle verilen bu dönüşüm çiftinin en az bir tane ortak sabit noktaya sahip oldukları gösterilmelidir. Daha sonra $F(T) \cap F(S) = F(T^n) \cap F(S^n)$ olup olmadığı araştırılmalıdır. Bu bölümde (X, d) metrik uzayında Q özelliğini sağlayan çeşitli dönüşümler verilecektir.

Teorem 2.2.1. (X, d) tam metrik uzay ve $S, T : (X, d) \to (X, d)$ bir dönüşüm çifti olsun. Her $x, y \in X$ ve $0 < k < 1$ için p ve q pozitif tamsayılar olmak üzere T ve S dönüşümleri,

$$d(T^p x, S^q y) \leq k \max \{d(x, y), d(x, T^p x), d(y, S^q y), \\ [d(x, S^q y) + d(y, T^p x)]/2\} \tag{2.9}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir (Rhoades, 1977).

Sonuç 2.2.2. (2.9) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.3. (X, d) tam metrik uzay ve $S, T : (X, d) \to (X, d)$ tanımlanmış birer dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $0 \leq c < 1$ için S ve T dönüşümleri,

$$d(S^2 x, T^2 y) \leq c \max \{d(Sx, Ty), d(x, y)\} \tag{2.10}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti tek ortak sabit noktaya sahiptir (Fisher, 1978).

Sonuç 2.2.4. (2.10) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.5. X bir düzgün konveks Banach uzayı ve A da X in boş kümeden farklı, kapalı bir konveks alt kümesi olsun. $\varphi: \mathbb{R}_5^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her koordinat değişkeni için üst yarı sürekli, azalmayan ve her $t > 0$ için,

i) $\alpha = 2$ ise $\beta = 1$ ve $\alpha < 2$ ise $\beta < 1$ değerleri için φ fonksiyonu

$\varphi(t, t, t, \alpha t, 0) \leq \beta t$ ve $\varphi(t, t, t, 0, \alpha t) \leq \beta t$ ve

ii) $\alpha < 2$ için $\varphi(t, 0, \alpha t, t, t) \leq t$

şartlarını sağlasın. Her $x, y \in A$ için $T, S: A \to A$ dönüşümleri

$$\|Tx - Sy\| \leq \varphi(\|x - y\|, \|x - Tx\|, \|y - Sy\|, \|y - Tx\|, \|x - Sy\|) \tag{2.11}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşüm çifti tek ortak sabit noktaya sahiptir (Bose, 1978).

Sonuç 2.2.6. (2.11) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.7. (X, d) metrik uzay, $S, T : (X, d) \to (X, d)$ dönüşüm çifti olsun. $\varphi: \mathbb{R}_5^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu her koordinat değişkeni için sürekli, azalmayan bir fonksiyon olarak alalım. Her $t > 0$ için $a_i \in \{0,1,2\}$ ve $a_1 + a_2 = 2$ olmak üzere $\varphi(t, t, a_1 t, a_2 t, t) < t$ olsun. Her $x, y \in X$ için T ve S dönüşümleri

$$d(Sx, Ty) \leq \varphi(d(x, Sx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Sx), d(x, y)) \tag{2.12}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri X uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir (Husain and Sehgal, 1975).

Sonuç 2.2.8. (2.12) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.9. (X, d) tam metrik uzay, $S, T : (X, d) \to (X, d)$ değişmeli birer dönüşüm ve kabul edelim ki $T(X) \subseteq S(X)$ olsun. Her $x, y \in X$ ve $0 < \alpha < 1$ için S ve T dönüşümleri,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \max\{d(Sx, Sy), d(Sx, Tx), d(Sy, Ty), d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\} \tag{2.13}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti tek ortak sabit noktaya sahiptir (Das and Naik, 1979).

Sonuç 2.2.10. (2.13) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.11. (X, d) kompakt metrik uzay ve $S, T : (X, d) \to (X, d)$ birer dönüşüm olsun. p, q pozitif tamsayılar olmak üzere her $x, y \in X$ için S ve T dönüşüm çifti,

$$d(S^p x, T^q y) < \max\{\, d(S^r x, T^s y) : 0 \leq r \leq p,\ 0 \leq s \leq q \,\} \tag{2.14}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir (Fisher, 1980).

Sonuç 2.2.12. (2.14) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.13. (X, d) tam metrik uzay, $S, T : (X, d) \to (X, d)$ birer dönüşüm olsun. $A := \{d(x, y) : x, y \in X\}$ olmak üzere $k : A \to \mathbb{R}^+$ tanımlı üst yarı sürekli bir fonksiyon ve her $t \in A$ için $k(t) < 1$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için T, S dönüşümleri

$$d(Sx, TSy) \leq k(d(x, Sy)).$$

$$\max\left\{d(x, Sy), d(x, Sx), d(Sy, TSy) \frac{d(x, TSy) + d(Sy, Sx)}{2}\right\} \tag{2.15}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti tek ortak sabit noktaya sahiptir (Chung, 1978).

Sonuç 2.2.14. (2.15) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.15. X bir düzgün konveks Banach uzayı ve A da X in boş kümeden farklı, kapalı bir konveks alt kümesi olsun. $\varphi: \mathbb{R}_4^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her koordinat değişkeni için üst yarı sürekli, azalmayan ve her $t > 0$ için,

i) $\alpha = 2$ ise $\beta = 1$ ve $\alpha < 2$ ise $\beta < 1$ değerleri için φ fonksiyonu

$\varphi(t, 0, \alpha t, 0) < \beta t$ ve $\varphi(t, 0,0, \alpha t) < \beta t$

ii) $\alpha < 2$ için $\varphi(t, t, t, t) < t$

şartlarını sağlasın. Her $x, y \in A$ için $T, S: A \to A$ dönüşümleri

$$\begin{aligned} \|Tx - Sy\|^2 \leq \varphi(&\|x - Tx\|\|y - Sy\|, \|x - Sy\|\|y - Tx\|, \\ &\|x - Tx\|\|x - Sy\|, \|y - Tx\|\|y - Sy\|) \end{aligned} \tag{2.16}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşüm çifti tek ortak sabit noktaya sahiptir (Prasad, 1984).

Sonuç 2.2.16. (2.16) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.17. (X, d) tam metrik uzay, $S, T : (X, d) \to (X, d)$ birer dönüşüm olsun. $A := \{d(x, y): x, y \in X\}$ olmak üzere $k : A \to [0, \infty)$ tanımlı üst yarı sürekli bir fonksiyon ve her $t \in A$ için $k(t) < 1$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için T, S dönüşümleri,

$$d^2(Sx,TSy) \leq k\,\big(d(x,Sy)\big)\max\Big\{d(x,Sx)\;d(y,TSy), d(x,TSy)\;d(Sy,Sx),$$

$$\frac{d(x,Sx)\;d(Sy,Sx)}{2}, \frac{d(x,TSy)\;d(Sy,TSy)}{2}\Big\} \tag{2.17}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir (Pachpatte, 1983).

Sonuç 2.2.18. (2.17) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.19. (X,d) tam metrik uzay, $S,T:(X,d)\to(X,d)$ birer dönüşüm olsun. $\alpha,\beta \geq 0,\; \alpha+2\beta<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için T,S dönüşümleri

$$\begin{aligned} d^2(Sx,Ty) \leq{}& \alpha\,[d(x,Sx)\;d(y,Ty)+d(x,Ty)\;d(y,Sx)] \\ &+\beta\,[d(x,Sx)\;d(y,Sx)+d(x,Ty)\;d(y,Ty)] \end{aligned} \tag{2.18}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti tek ortak sabit noktaya sahiptir (Pachpatte, 1980).

Sonuç 2.2.20. (2.18) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.21. (X,d) tam metrik uzay, $S,T:(X,d)\to(X,d)$ birer dönüşüm olsun. $0<\alpha<1, 0<c<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için T,S dönüşümleri

$$\begin{aligned} d^2(Sx,Ty) \leq \alpha\max\{&d(x,Sx)\;d(y,Ty), d(x,y)\;d(x,Sx), d(x,y)\;d(y,Ty), \\ &c\,d(x,Ty)\;d(y,Sx)\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir (Jeong and Rhoades, 2005).

Sonuç 2.2.22. (2.19) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.23. (X, d) tam metrik uzay, $S,T:(X,d)\rightarrow(X,d)$ birer dönüşüm olsun. $0 \leq b, c$ ve $b + c < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T, S dönüşümleri,

eğer $d(x,Ty)+d(y,Sx)\neq 0$ ise

$$d(Sx, Ty) \leq \frac{b\, d^2(x, Tx) + c\, d^2(y, Sx)}{d(x, Ty) + d(y, Sx)}, \tag{2.20}$$

eğer $d(x,Ty)+d(y,Sx)=0$ ise

$$d(Sx,Ty)=0 \tag{2.21}$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti tek ortak sabit noktaya sahiptir (Fisher, 1979).

Sonuç 2.2.24. (2.20) ve (2.21) eşitsizliklerini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.25. (X, d) tam metrik uzay ve $S,T:(X,d)\rightarrow(X,d)$ dönüşümler olsun. T, S dönüşümleri her $x, y \in X$, $q \in (0,1)$ olmak üzere $a, b, c \geq 0$, $a + b + c > q$, $a + c > 0$ için,

$$\begin{aligned} a\, d(Tx, Sy) &+ b\, d(x, Tx) + c\, d(y, Sy) \\ &- \min\{d(x, Sy), d(y, Tx)\} \leq q\, d(x, y) \end{aligned} \tag{2.22}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T, S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir (Som, 1985).

Sonuç 2.2.26. (2.22) eşitsizliğini sağlayan T, S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.27. H bir Hilbert uzayı C de bu uzayın kapalı bir alt kümesi olsun. $T, S: \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ tanımlı birer dönüşüm olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in C$ ve $a, b, c \geq 0,\ a + 2b + c < 1,\ b, c < 1$ için, T ve S dönüşümleri,

$$\|Tx - Sy\|^2 \leq \frac{a\, \|x - Tx\|^2\, \|y - Sy\|^2}{\|x - y\|^2} + b\, (\|x - Tx\|^2 + \|y - Sy\|^2) + c\, \|x - y\|^2 \tag{2.23}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T, S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir (Pandhare and Wachmode, 1996).

Sonuç 2.2.28. (2.23) eşitsizliğini sağlayan T, S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.29. (X, d) tam metrik uzay, $S,T:(X,d) \to (X,d)$ birer sürekli ve örten dönüşümler olsun. $1 < \alpha$ ve $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T, S dönüşümleri

$$d(Sx, Ty) \geq \alpha \min\{d(x, Sx), d(y, Ty), d(x, y)\} \tag{2.24}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti ortak bir sabit noktaya sahiptir (Jeong and Rhoades, 2005).

Sonuç 2.2.30. (2.24) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.31. (X, d) tam metrik uzay, $S,T:(X,d) \to (X,d)$ tanımlanmış birer dönüşüm olsun. $g: \mathbb{R}_3^{+} \to \mathbb{R}^{+}$ tanımlanan g fonksiyonu her $u, v \in \mathbb{R}^{+}$ ve bazı $h > 1$ için $u \geq g(v, u, v)$ veya $u \geq g(v, v, u)$ ise $u \geq hv$ olduğunu kabul edelim. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için S, T dönüşümleri

$$d(Sx, Ty) \geq g(d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty)) \quad (2.25)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti ortak bir sabit noktaya sahiptir (Constantin, 1992).

Sonuç 2.2.32. (2.25) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.33. (X, d) tam metrik uzay, $S,T:(X,d)\rightarrow(X,d)$ dizisel sürekli ve örten dönüşümler olsun. $1 < k$ ve $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T, S dönüşümleri

$d(x,Sx)+d(y,Ty)\neq 0$ ise

$$d(Sx, Ty) \geq k\ \frac{d^2(x, Sx) + d^2(y, Ty) + d(x, Sx)\ d(y, Ty)}{d(x, Sx) + d(y, Ty)} \quad (2.26)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri ortak bir sabit noktaya sahiptir (Telci and Tas, 1994).

Sonuç 2.2.34. (2.26) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.35. (X, d) tam metrik uzay $S,T:(X,d)\rightarrow(X,d)$ ye tanımlı dönüşümler olsun. $a, b, c \geq 0$, $a + b + c > 2$ ve $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için T, S dönüşümleri

$d(x,Sx)+d(y,Ty)\neq 0$ ise

$$d(Sx, Ty) \geq \frac{[a\ d(x, Sx)\ d(x, y) + b\ d(y, Ty)\ d(x, y) + c\ d(x, Sx)\ d(y, Ty)]}{[d(x, Sx) + d(y, Ty)]} \quad (2.27)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti ortak bir sabit noktaya sahiptir (Telci and Tas, 1994).

Sonuç 2.2.36. (2.27) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

Teorem 2.2.37. (X, d) tam metrik uzay $S,T:(X,d)\rightarrow(X,d)$ birer örten dönüşüm olsun. $a, b, c \geq 0$, $a > 0$ veya $b > 0$ ve $a + b + c > 1$ olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in X$ için T, S dönüşümleri

$$d^2(Sx, Ty) \geq a\, d(x, Sx)\, d(x, y) + b\, d(y, Ty)\, d(x, y) + c\, d(x, Sx)\, d(y, Ty) \tag{2.28}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşüm çifti ortak bir sabit noktaya sahiptir (Telci and Tas, 1994).

Sonuç 2.2.38. (2.28) eşitsizliğini sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar (Jeong and Rhoades, 2005).

BÖLÜM 3. KONİK METRİK UZAY VE SABİT NOKTA KAVRAMI

3.1. Konik Metrik Uzay

Tanım 3.1.1. E bir reel Banach uzayı ve K da E nin alt kümesi olsun. Eğer K kümesi,

i) Kapalı, boştan farklı ve $K \neq \{0\}$;
ii) $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, x, y \in K \Rightarrow ax + by \in K$;
iii) $x \in K$ ve $-x \in K \Rightarrow x = 0$

şartlarını sağlıyorsa K kümesine E içinde bir koni denir (Huang and Zhang, 2007).

Bu durumda E üzerinde

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$$

olacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı ve

$$x \ll y \Rightarrow y - x \in intK$$

tanımlanabilir (Huang and Zhang, 2007).

Tanım 3.1.2. E bir reel Banach uzayı, $K \subseteq E$ bir koni olsun. $0 \leq x \leq y$ şartını sağlayan herhangi $x, y \in E$ için

$\|x\| \leq M \, \|y\|$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa K ya normal koni, en küçük M değerine de K konisinin normal sabiti denir (Huang and Zhang, 2007).

Örnek 3.1.3. $E = \mathbb{R}$ Banach uzayını alalım. $K = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ de bir konidir ve normaldir.

Örnek 3.1.4. $E = \mathbb{R}^2$ Banach uzayını alalım. $K = \{(x, y) \in E: x, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ de bir konidir (Rezapour and Hamlbarani, 2008).

Eğer K bir normal koni, $x \in K, a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $a \neq 1$ ve $x \leq ax$ ise $x = 0$ dır. Bu ifadenin doğruluğu normal koni tanımı kullanılarak,

$$x \leq ax \;\Rightarrow\; ax - x \in K \;\Rightarrow\; x - ax \leq 0 \;\Rightarrow\; |1 - a|\|x\| \leq M\|0\| \;\Rightarrow\; x = 0$$

gösterilebilir (Ilic and Rakocevic, 2008).

E bir reel Banach uzayı, $K \subseteq E$ bir koni ve $\{x_n\}, \{y_n\} \subset K$ olsun. Eğer

$$0 \leq x_n \leq x_n + y_n \quad \text{iken} \quad x_n + y_n \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{fakat} \quad x_n \nrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

ise K konisine normal olmayan (non-normal) koni denir (Radenovic and Rhoades, 2009).

Eğer K bir normal koni değil ise, $x \in K$, $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $a \neq 1$ ve $x \leq ax$ ise $x = 0$ dır. Bu ifadenin doğruluğunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$x \leq ax \Rightarrow ax - x \in K$ yani $-(1 - a)x \in K$ olur. $x \in K$ ve $(1 - a) > 0$ olduğundan $(1 - a)x \in K$ olur. Bu durumda $(1 - a)x \in K \cap (-K)$ olur. Tanım 3.1.1 den $x = 0$ dır (Ilic and Rakocevic, 2009).

Örnek 3.1.5. $E = C^2[0,1]$ reel Banach uzayı, $K = \{f \in E : f \geq 0\}$ ve

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

verilmiş olsun. Bu durumda K konisinin normal koni olmadığını gösterelim.

Çözüm: Kabul edelim ki her $p \geq 1$ için $f(x) = x$ ve $g(x) = x^{2p}$ olsun. Bu durumda $0 \leq g \leq f$ olduğu açıktır.

$$\|f\| = 2 \text{ ve } \|g\| = 2p + 1 \text{ ise } p\|f\| < \|g\|$$

olur. p, K nın normal sabiti değildir. Bu nedenle K normal koni değildir (Rezapour and Hamlbarani, 2008).

Tanım 3.1.6. E bir reel Banach uzayı, $K \subseteq E$ bir koni olsun. K da üstten sınırlı her artan dizi yakınsak ise K konisine regüler koni denir. Yani K regüler koni ise K da bazı $y \in E$ için

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi varsa, bu durumda bir $x \in E$ vardır öyle ki $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ sağlanır. Benzer şekilde alttan sınırlı her azalan dizi yakınsak ise de K konisine regüler koni denir (Huang and Zhang, 2007).

Teorem 3.1.7. Her regüler koni normal konidir (Rezapour and Hamlbarani, 2008).

Tanım 3.1.8. $X \neq \emptyset$ ve $d: X \times X \to E$ dönüşümü

d1) Her $x, y \in X$ için $0 < d(x, y)$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
d2) Her $x, y \in X$ için $d(y, x) = d(x, y)$;
d3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

şartlarını sağlıyorsa d ye X üzerinde konik metrik, (X, d) ikilisine de konik metrik uzay denir (Huang and Zhang, 2007).

Örnek 3.1.9. $E = \mathbb{R}^2$ Banach uzayını alalım. $K = \{(x, y) \in E : x \geq 0, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$ ve $d: X \times X \to E$ dönüşümü $\alpha \geq 0$ sabiti için

$$d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$$

olarak alalım. Bu durumda (X, d) konik metrik uzaydır (Rezapour and Hamlbarani, 2008).

Örnek 3.1.10. $E = l^1, K = \{\{x_n\} \subset E : \forall\, n \in \mathbb{N}\, için\; x_n \geq 0\}$ olsun. (X, ρ) metrik uzay ve $d: X \times X \to E$ dönüşümünü

$$d(x, y) = \left\{\frac{\rho(x, y)}{2^n}\right\}_{n \geq 1}$$

olarak alalım. Bu durumda (X, d) konik metrik uzaydır ve K nın normal sabiti $M = 1$ dir (Rezapour and Hamlbarani, 2008).

Örnek 3.1.10. dan da anlaşıldığı gibi konik metrik uzaylar metrik uzaylardan daha genel uzaylardır.

Tanım 3.1.11. (X, d) bir konik metrik uzay, $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $0 \ll c$ şartını sağlayan her $c \in E$ için N sayısı vardır öyle ki her $n > N$ için

$$d(x_n, x) \ll c$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır veya $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır veya x e $\{x_n\}$ dizisinin limitidir denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;\text{ veya }\; x_n \to x \;\; (n \to \infty)$$

ile gösterilir (Huang and Zhang, 2007).

Lemma 3.1.12. (X, d) bir konik metrik uzay, K normal M sabitine sahip normal koni ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin $x \in X$ e yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

olmasıdır (Huang and Zhang, 2007).

Lemma 3.1.13. (X, d) bir konik metrik uzay, K normal M sabitine sahip normal koni ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e yakınsak ve $\{x_n\}$ dizisi $y \in X$ e yakınsak ise $x = y$ dir. Yani $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir (Huang and Zhang, 2007).

Tanım 3.1.14. (X, d) bir konik metrik uzay, $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $0 \ll c$ şartını sağlayan her $c \in E$ için $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n, m > N$ için

$$d(x_n, x_m) \ll c$$

sağlanıyorsa $\{x_n\}$ dizisine X uzayında bir Cauchy dizisi adı verilir (Huang and Zhang, 2007).

Tanım 3.1.15. (X, d) bir konik metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam konik metrik uzay denir (Huang and Zhang, 2007).

Lemma 3.1.16. (X, d) bir konik metrik uzay olsun. X de bir $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e yakınsak ise $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir (Huang and Zhang, 2007).

Lemma 3.1.17. (X, d) bir konik metrik uzay, K normal M sabitine sahip normal koni ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart $d(x_n, x_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty)$ olmasıdır (Huang and Zhang, 2007).

Lemma 3.1.18. (X, d) bir konik metrik uzay, K normal M sabitine sahip normal koni olsun. $\{x_n\}, \{y_n\}$ X de iki dizi ve $x_n \to x,\ y_n \to y$ $(n \to \infty)$ ise

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \quad (n \to \infty)$$

olur (Huang and Zhang, 2007).

Lemma 3.1.19. (X, d) bir normal olmayan koniye sahip bir konik metrik uzay ise aşağıdaki özellikler sağlanır (Kadelburg , 2009).

i) $u \leq v$ ve $v \ll w$ ise $u \ll w$.
ii) Her $c \in intK$ için $0 \leq u \ll c$ ise $u = 0$.
iii) Her $c \in intK$ için $a \leq b + c$ ise $a \leq b$.
iv) Eğer $0 \leq x \leq y$ ve $a \geq 0$ ise $0 \leq ax \leq ay$.
v) Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x_n \leq y_n$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ise $0 \leq x \leq y$.
vi) Eğer $0 \leq d(x_n, x) \leq b_n$ ve $b_n \to 0$ ise $x_n \to x$.
vii) E bir reel Banach uzayı, K da E uzayında bulunan bir koni olsun. $a \in K, 0 < \lambda < 1$ için $a \leq \lambda a$ ise $a = 0$.
viii) Eğer $c \in intK$, $0 \leq a_n$ ve $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ ise en az bir tane $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n > n_0$ için $a_n \ll c$ dir.
ix) $intK + intK \subseteq intK$ ve $\lambda > 0$ için $\lambda intK \subseteq intK$ dır.

Tanım 3.1.20. (X, d) bir konik metrik uzay, $f: X \to X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer X deki her $\{x_n\}$ dizisi için

$$x_n \to x_0 \quad \text{iken} \quad f(x_n) \to f(x_0) \quad (n \to \infty)$$

ise f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir (Ilic and Rakocevic, 2008).

Tanım 3.1.21. (X, d) bir konik metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak en az bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi varsa (X, d) uzayına dizisel kompakt konik metrik uzay denir (Huang and Zhang, 2007).

3.2. Konik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.2.1. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $k \in [0,1)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \le k\, d(x, y \qquad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir ve $\forall x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi de T dönüşümünün sahip olduğu sabit noktaya yakınsar (Huang and Zhang, 2007).

Sonuç 3.2.2. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $k \in [0,1)$ ve her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü Teorem 3.2.1. de verilen (3.1) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar (Abbas and Rhoades, 2000) .

Sonuç 3.2.3. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $0 \ll c$ olacak şekilde $c \in E$ ve $x_0 \in X$ olsun.

$$\bar{B}(x_0, c) = \{x \in X: d(x_0, x) \le c\}$$

kapalı yuvarını alalım. Her $x, y \in \bar{B}(x_0, c)$, k $\in [0,1)$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \le k\, d(x, y) \qquad (3.2)$$

eşitsizliğini ve $d(Tx_0, x_0) \le (1 - k)\, c$ şartını sağlasın. Bu durumda T dönüşümü $\bar{B}(x_0, c)$ de tek sabit noktaya sahiptir (Huang and Zhang, 2007).

Sonuç 3.2.4. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $k \in [0,1)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(T^n x, T^n y) \leq k\, d(x, y) \tag{3.3}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir (Huang and Zhang, 2007).

Teorem 3.2.5. (X, d) dizisel kompakt konik metrik uzay, K da regüler koni olsun. $\forall\, x, y \in X,\ x \neq y$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir (Huang and Zhang, 2007).

Teorem 3.2.6. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\beta \in [0,1/2)$ ve $\forall x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \beta\, (d(Tx, x) + d(Ty, y)) \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir ve $\forall x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi de T dönüşümünün sahip olduğu sabit noktaya yakınsar (Huang and Zhang, 2007).

Teorem 3.2.7. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\gamma \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \gamma\, (d(Tx, y) + d(Ty, x)) \tag{3.6}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir ve $\forall x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi de T dönüşümünün sahip olduğu sabit noktaya yakınsar (Huang and Zhang, 2007).

Teorem 3.2.8. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ olmak üzere $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşümleri

$$d(Tx, Sy) \leq \alpha\, d(x, y) + \beta\, [d(x, Tx) + d(y, Sy)] + \gamma\, [d(x, Sy) + d(y, Tx)] \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşümleri X de tek ortak sabit noktaya sahiptir. Üstelik T nin her sabit noktası S dönüşümünün de sabit noktasıdır ve tersi durumda söz konusudur (Abbas and Rhoades, 2000).

Sonuç 3.2.9. (X, d) tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $T, S: X \to X$ e tanımlı dönüşüm çifti Teorem 3.2.8. de verilen (3.7) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T, S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar (Abbas and Rhoades, 2000).

Sonuç 3.2.10. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. p, q pozitif tamsayılar, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ olmak üzere $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(T^p x, T^q y) \leq \alpha\, d(x, y) + \beta\, [d(x, T^p x) + d(y, T^q y)] + \gamma\, [d(x, T^q y) + d(y, T^p x)] \tag{3.8}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir (Abbas and Rhoades, 2000).

Sonuç 3.2.11. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ olmak üzere $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, y) + \beta\, [d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \gamma\, [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir (Abbas and Rhoades, 2000).

Sonuç 3.2.12. (X, d) tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $T: X \to X$ e tanımlı dönüşümü Sonuç 3.2.11. de verilen (3.9) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar (Abbas and Rhoades, 2000).

Sonuç 3.2.13. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. Her $i \in \{1,2,\dots,5\}$ için $a_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$ olmak üzere $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq a_1\, d(x, y) + a_2\, d(x, Tx) + a_3\, d(y, Ty) \\ + a_4\, d(x, Ty) + a_5\, d(y, Tx) \qquad (3.10)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir (Abbas and Rhoades, 2000).

Sonuç 3.2.14. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere $\alpha + 2\beta < 1$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, y) + \beta\, [d(Tx, x) + d(Ty, y)] \qquad (3.11)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir (Abbas and Rhoades, 2000).

Teorem 3.2.15. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in X$ için $d(x, y) \in intK$ olduğunu kabul edelim.

$\varphi: intK \cup \{0\} \to intK \cup \{0\}$ tanımlanan φ fonksiyonu monoton artan, sürekli ve

i) $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$
ii) $t \in intK$ için $\varphi(t) \ll t$
iii)$t \in intK \cup \{0\}$ ve $x, y \in X$ için ya $\varphi(t) \leq d(x, y)$ yada $d(x, y) \leq \varphi(t)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y)) \tag{3.12}$$

eşitsizliğini sağlarsa X de tek sabit noktaya sahiptir (Choudhury and Metiya, 2009).

Teorem 3.2.16. (X, d) bir konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $T, S : X \to X$ dönüşüm çifti $k \in [0,1)$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(Sx, Sy) \tag{3.13}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve $S(X)$, X in tam altkümesi ise T, S dönüşüm çifti X de tek çakışma noktasına sahiptir. Eğer T, S dönüşümleri zayıf uyumlu ise tek ortak sabit noktaya sahiptirler (Abbas and Jungck, 2008).

Teorem 3.2.17. (X, d) bir konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $T, S : X \to X$ dönüşümleri $k \in [0,1/2)$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k\, (d(Tx, Sx) + d(Ty, Sy)) \tag{3.14}$$

eşitsizliği sağlasın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve $S(X)$, X in tam altkümesi ise T, S dönüşüm çifti X de tek çakışma noktasına sahiptir. Eğer T, S dönüşümleri zayıf uyumlu ise tek ortak sabit noktaya sahiptirler (Abbas and Jungck, 2008).

Teorem 3.2.18. (X, d) bir konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $T, S : X \to X$ dönüşüm çifti $k \in [0,1/2)$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq k\, (d(Tx, Sy) + d(Ty, Sx)) \tag{3.15}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve $S(X)$, X in tam altkümesi ise T, S dönüşümleri X de tek çakışma noktasına sahiptir. Eğer T, S dönüşümleri zayıf uyumlu ise tek ortak sabit noktaya sahiptirler (Abbas and Jungck, 2008).

Teorem 3.2.19. (X, d) bir konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $T, S : X \to X$ değişmeli dönüşümleri $k \in [0,1)$ olmak üzere

$$\|d(Tx, Ty)\| \leq k\ \|d(Sx, Sy)\| \tag{3.16}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve S sürekli bir dönüşüm ise T, S dönüşüm çifti X de tek ortak sabit noktaya sahiptirler (Radenovic, 2009).

Teorem 3.2.20. (X, d) bir konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $T, S : X \to X$ dönüşümleri $k \in [0,1/2)$ olmak üzere

$$\|d(Tx, Ty)\| \leq k\ (\|d(Tx, Sx)\| + \|d(Ty, Sy)\|) \tag{3.17}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve $S(X)$, X in tam alt uzayı ise T, S dönüşüm çifti X de çakışma noktasına sahiptir. Eğer T ve S dönüşüm çifti bu çakışma noktasında değişmeli ise tek ortak sabit noktaya sahiptir (Radenovic, 2009).

Teorem 3.2.21. (X, d) bir konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $T, S : X \to X$ dönüşüm çifti $k \in [0,1/2)$ olmak üzere

$$\|d(Tx, Ty)\| \leq k\ (\|d(Tx, Sy)\| + \|d(Ty, Sx)\|) \tag{3.18}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve $S(X)$, X in tam alt uzayı ise T, S dönüşümleri X de çakışma noktasına sahiptir. Eğer T ve S dönüşüm çifti bu çakışma noktasında değişmeli ise tek ortak sabit noktaya sahiptir (Radenovic, 2009).

Tanım 3.2.22. (X, d) bir konik metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ tanımlı bir dönüşümü vardır öyle ki

$$u \in C(T; x, y) \equiv \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq k\, u \tag{3.19}$$

eşitsizliği bazı $k \in (0,1)$ için sağlanıyorsa bu daralma dönüşümüne Quasi daralma (Quasi-contraction) dönüşümü denir (Kadelburg, 2009).

Teorem 3.2.23. (X, d) bir tam konik metrik uzay, $T: X \to X$ e dönüşümü Tanım 3.2.22. deki şartı sağlayan Quasi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir. Her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi de T nin sahip olduğu sabit noktaya sahiptir (Kadelburg, 2009).

Sonuç 3.2.24. (X, d) konik metrik uzay, $T: X \to X$ e tanımlı dönüşümü $k \in (0,1)$ için Tanım 3.2.22. de verilen (3.19) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar (Kadelburg, 2009).

Tanım 3.2.25. (X, d) bir konik metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ tanımlı dönüşüm çifti vardır öyle ki

$$u \in C(T; x, y) \equiv \{d(Tx, Ty), d(Tx, Sx), d(Tx, Sy), d(Ty, Sy), d(Ty, Sx)\}$$

olmak üzere

$$d(Sx, Sy) \leq k\, u \tag{3.20}$$

eşitsizliği bazı $k \in (0,1)$ için sağlanıyorsa S dönüşümüne Quasi daralma (Quasi-contraction) dönüşümü denir (Ilic and Rakocevic, 2009).

Teorem 3.2.26. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $T, S: X \to X$ e tanımlı, T ve S değişmeli, T veya S sürekli birer dönüşüm ve bu dönüşüm çifti Tanım 3.2.25. de verilen (3.20) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri $u \in X$ olacak şekilde tek ortak sabit noktaya sahiptir. Eğer T dönüşümü sürekli ise $u = Ty = Sy$. Eğer S dönüşümü sürekli ise $u = y$ dir (Ilic and Rakocevic, 2009).

BÖLÜM 4. KONİK METRİK UZAYDA P VE Q ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde metrik uzayda sabit noktası var olan ve aynı zamanda P veya Q özelliğine sahip bazı dönüşümlerin, konik metrik uzayda sabit noktasının varlığı ve bu dönüşümlerin P veya Q özelliğine sahip oldukları bizim tarafımızdan incelenecektir. Bu inceleme koniğin normal ve normal olmayan durumlarına göre iki başlıkta yapılacaktır.

4.1. Normal Koniye Sahip Konik Metrik Uzaylarda P ve Q Özelliklerini Sağlayan Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.1.1. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da M normal sabitine sahip bir koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S\colon X \to X$ dönüşümleri

$$\|d(Tx, Sy)\| \leq k\,(\|d(x, Tx)\| + \|d(y, Sy)\|) \tag{4.1}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri (X, d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve $n \geq 1$ için

$$x_{2n+1} = Tx_{2n}, \quad x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Önce bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (4.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\| &= \|d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1})\| \\ &\leq k\ (\|d(x_{2n}, Tx_{2n})\| + \|d(x_{2n+1}, Sx_{2n+1})\|) \\ &= k\ (\|d(x_{2n}, x_{2n+1})\| + \|d(x_{2n+1}, x_{2n+2}\|) \\ &\leq \frac{k}{1-k}\ \|d(x_{2n}, x_{2n+1})\|\end{aligned}$$

olur. $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ alınır ve iterasyona devam edilirse (4.1) eşitsizliğinden

$$\|d(x_{2n+3}, x_{2n+2})\| \leq h\ \|d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\|$$

olur. Böylece her n için

$$\|d(x_{n+1}, x_{n+2})\| \leq h\ \|d(x_n, x_{n+1})\| \leq h^2\ \|d(x_{n-1}, x_n)\| \leq \cdots \leq h^{n+1}\ \|d(x_0, x_1)\|$$

elde edilir. Her $m > n$ için

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

ve K normal koni olduğundan

$$\begin{aligned}\|d(x_m, x_n)\| &\leq M\ (\|d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)\|) \\ &\leq M\ (\|d(x_n, x_{n+1})\| + \|d(x_{n+1}, x_{n+2})\| + \cdots + \|d(x_{m-1}, x_m)\|) \\ &\leq M\ (h^n + h^{n+1} + \cdots + h^{m-1})\ \|d(x_0, x_1)\| \\ &\leq M\ \frac{h^n}{1-h}\ \|d(x_0, x_1)\|\end{aligned}$$

olur. $h < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $\|d(x_n, x_m)\| \to 0$ olur. Lemma 3.1.17. den $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir, X uzayı tam olduğundan $x_n \to p$ olacak şekilde $p \in X$ sayısı vardır. Şimdi S dönüşümünün sabit noktasının p olduğunu gösterelim. (4.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|d(p,Sp)\| &\leq \|d(p,x_{2n+1}) + d(x_{2n+1},Sp)\| \\
&\leq \|d(p,x_{2n+1})\| + \|d(x_{2n+1},Sp)\| \\
&= \|d(p,x_{2n+1})\| + \|d(Tx_{2n},Sp)\| \\
&= \|d(p,x_{2n+1})\| + k\ (\|d(x_{2n},Tx_{2n})\| + \|d(p,Sp)\|) \\
&= \|d(p,x_{2n+1})\| + k\ \|d(x_{2n},x_{2n+1})\| + k\ \|d(p,Sp)\|
\end{aligned}
$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\{x_{2n}\} \to p$ ve $\{x_{2n}\}$ Cauchy dizisi olduğundan

$$\|d(p,Sp)\| \leq k\ \|d(p,Sp)\| \tag{4.2}$$

olur. (4.2) eşitsizliği düzenlenirse $(1-k)\|d(p,Sp)\| \leq 0$ olur. $k \in [0,1/2)$ ve $(1-k) > 0$ olduğundan ancak $\|d(p,Sp)\| = 0$ olduğunda sağlanır. Böylece $d(p,Sp) = 0$, $p = Sp$ olur. (4.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|d(Tp,p)\| &\leq \|d(Tp,x_{2n+2}) + d(x_{2n+2},p)\| \\
&\leq \|d(Tp,x_{2n+2})\| + \|d(x_{2n+2},p)\| \\
&= \|d(Tp,Sx_{2n+1})\| + \|d(x_{2n+2},p)\| \\
&\leq k\ (\|d(p,Tp)\| + \|d(x_{2n+1},Sx_{2n+1})\|) + \|d(x_{2n+2},p)\| \\
&= k\ (\|d(p,Tp)\| + \|d(x_{2n+1},x_{2n+2})\|) + \|d(x_{2n+2},p)\|
\end{aligned}
$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\{x_{2n}\} \to p$ ve $\{x_{2n}\}$ Cauchy dizisi olduğundan

$$\|d(Tp,p)\| \leq k\ \|d(Tp,p)\| \tag{4.3}$$

olur. Buradan $k \in [0,1/2)$ ve (4.3) eşitsizliği ancak $\|d(Tp,p)\| = 0$ olduğundan $d(Tp,p) = 0$ yani T$p = p$ dir.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $q \in X$ ve $q \neq p$ olmak üzere q noktası T,S dönüşümlerinin bir başka sabit noktası olsun. (4.1) eşitsizliğinden

$$\|d(p,q)\| = \|d(Tp,Sq)\| \leq k\ (\|d(p,Tp)\| + \|d(q,Sq)\|) \leq 0$$

olur. Bu eşitsizlik ancak $\|d(p,q)\| = 0$ olduğunda sağlanır. Bu ise $d(p,q) = 0$ yani $p = q$ olması anlamına gelir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1. deki şartları sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 4.1.1. den T ve S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir. Yani $F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$ dir. Kabul edelim ki $u \in F(T^n) \cap F(S^n)$ olsun. (4.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|d(u,Su)\| &= \|d(T^n u, S^{n+1}u)\| = \left\|d\big(T(T^{n-1}u), S(S^n u)\big)\right\| \\
&\leq k\ (\|d(T^{n-1}u, T^n u)\| + \|d(S^n u, S^{n+1}u)\|) \\
&= k\ \|d(T^{n-1}u, u)\| + k\ \|d(u, Su)\| \\
&\leq \frac{k}{1-k}\ \|d(T^{n-1}u, S^n u)\|
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$
\begin{aligned}
\|d(u,Su)\| &\leq h\ \|d(T^{n-1}u, S^n u)\| \\
&\leq h^2\ \|d(T^{n-2}u, S^{n-1}u)\| \\
&\leq \cdots \leq h^n\ \|d(u, Su)\|
\end{aligned}
$$

olur ve $n \to \infty$ için limit alınırsa $h < 1$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı 0 a yakınsar. Yani $\|d(u,Su)\| = 0$ olur. Buradan $d(u,Su) = 0$ ve $Su = u$ dur.

Benzer şekilde (4.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|d(Tu,u)\| &= \|d(T^{n+1}u, S^n u)\| = \left\|d\big(T(T^n u), S(S^{n-1}u)\big)\right\| \\
&\leq k\ (\|d(T^n u, T^{n+1}u)\| + \|d(S^{n-1}u, S^n u)\|) \\
&= k\ (\|d(Tu, u)\| + \|d(u, S^{n-1}u)\|) \\
&\leq \frac{k}{1-k}\ \|d(T^n u, S^{n-1}u)\|
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$
\begin{aligned}
\|d(Tu,u)\| &\leq h\,\|d(T^n u, S^{n-1}u)\| \\
&\leq h^2\,\|d(T^{n-1}u, S^{n-2}u)\| \\
&\leq \cdots \leq h^n\,\|d(Tu,u)\|
\end{aligned}
$$

olur ve $n \to \infty$ için limit alınırsa $h < 1$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı 0 a yakınsar. Yani $\|d(Tu,u)\| = 0$, $Tu = u$ dur. Dolayısıyla $u \in F(T) \cap F(S)$ dir. Yani T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar.

Sonuç 4.1.3. (X,d) bir tam konik metrik uzay, K da M normal sabitine sahip bir koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x,y \in X$ için $T\colon X \to X$ dönüşümü

$$\|d(Tx,Ty)\| \leq k\,(\|d(x,Tx)\| + \|d(y,Ty)\|) \tag{4.4}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü (X,d) uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.1.1. deki (4.1) eşitsizliğinde $S \equiv T$ alınırsa (4.4) eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.1.1. deki aynı yöntem kullanılarak T dönüşümünün tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir.

Sonuç 4.1.4. Sonuç 4.1.3. deki şartları sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

İspat: Sonuç 4.1.3. den T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. Yani $F(T) \neq \emptyset$ dir. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (4.4) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|d(Tu,u)\| = \|d(T^{n+1}u, T^n u)\| &= \left\|d\big(T(T^n u), T(T^{n-1}u)\big)\right\| \\
&\leq k\,(\|d(T^n u, T^{n+1}u)\| + \|d(T^{n-1}u, T^n u)\|) \\
&= k\,(\|d(Tu,u)\| + \|d(T^n u, T^{n-1}u)\|) \\
&\leq \frac{k}{1-k}\,\|d(T^n u, T^{n-1}u)\|
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ alınırsa

$$\|d(Tu,u)\| \leq h\ \|d(T^n u, T^{n-1}u)\|$$
$$\leq h^2\ \|d(T^{n-1}u, T^{n-2}u)\| \leq \cdots \leq h^n\ \|d(Tu,u)\|$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $h < 1$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı 0 a yakınsar. Yani $\|d(Tu,u)\| = 0$ olur. Buradan $Tu = u$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in F(T)$ dir. Yani T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 4.1.5. (X,d) bir tam konik metrik uzay, K da normal M sabitine sahip bir koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x,y \in X$ için $T,S: X \to X$ dönüşümü

$$\|d(Tx,Sy)\| \leq k\ (\|d(y,Tx)\| + \|d(x,Sy)\|) \tag{4.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri (X,d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve $n \geq 1$ için

$$x_{2n+1} = Tx_{2n},\ \ x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$$

olacak şekilde X uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Önce bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (4.5) eşitsizliğinden

$$\|d(x_{2n+1},x_{2n+2})\| = \|d(Tx_{2n},Sx_{2n+1})\|$$
$$\leq k\ (\|d(x_{2n+1},Tx_{2n})\| + \|d(x_{2n},Sx_{2n+1})\|)$$
$$= k\ (\|d(x_{2n+1},x_{2n+1})\| + \|d(x_{2n},x_{2n+2}\|)$$
$$= k\ \|d(x_{2n},x_{2n+2})\|$$
$$\leq k\ (\|d(x_{2n},x_{2n+1})\| + \|d(x_{2n+1},x_{2n+2})\|)$$
$$\leq \frac{k}{1-k}\ \|d(x_{2n},x_{2n+1})\|$$

olur. $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse ve iterasyona devam edilirse (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|d(x_{2n+3}, x_{2n+2})\| &= \|d(Tx_{2n+2}, Sx_{2n+1})\| \\ &\leq h\, \|d(x_{2n+2}, x_{2n+1})\|\end{aligned}$$

olur. Böylece her n için

$$\|d(x_{n+1}, x_{n+2})\| \leq h\, \|d(x_n, x_{n+1})\| \leq h^2\, \|d(x_{n-1}, x_n)\| \leq \cdots \leq h^{n+1}\, \|d(x_0, x_1)\|$$

elde edilir. Her $m > n$ için

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

ve K normal koni olduğundan

$$\begin{aligned}\|d(x_m, x_n)\| &\leq M\, (\|d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)\|) \\ &\leq M\, (\|d(x_n, x_{n+1})\| + \|d(x_{n+1}, x_{n+2})\| + \cdots + \|d(x_{m-1}, x_m)\|) \\ &\leq M\, (h^n + h^{n+1} + \cdots + h^{m-1})\, \|d(x_0, x_1)\| \\ &\leq M\, \frac{h^n}{1-h}\, \|d(x_0, x_1)\|\end{aligned}$$

olur. $h < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $\|d(x_n, x_m)\| \to 0$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir, X uzayı tam olduğundan $x_n \to p$ olacak şekilde $p \in X$ sayısı vardır. Şimdi S dönüşümünün sabit noktasının p olduğunu gösterelim. (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|d(p, Sp)\| &\leq \|d(p, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, Sp)\| \\ &\leq \|d(p, x_{2n+1})\| + \|d(x_{2n+1}, Sp)\| \\ &= \|d(p, x_{2n+1})\| + \|d(Tx_{2n}, Sp)\| \\ &= \|d(p, x_{2n+1})\| + k\, (\|d(p, Tx_{2n})\| + \|d(x_{2n}, Sp)\|) \\ &= \|d(p, x_{2n+1})\| + k\, \|d(p, x_{2n+1})\| + k\, \|d(x_{2n}, Sp)\| \\ &\leq \|d(p, x_{2n+1})\| + k\, \|d(p, x_{2n+1})\| + k\, (\|d(x_{2n}, p)\| + \|d(p, Sp)\|)\end{aligned}$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $x_{2n} \to p$ olduğundan

$$\|d(p,Sp)\| \leq k\ \|d(p,Sp)\| \tag{4.6}$$

olur. (4.6) eşitsizliği düzenlenirse $(1-k)\ \|d(p,Sp)\| \leq 0$ olur. $k \in [0,1/2)$ ve $(1-k) > 0$ olduğundan ancak $\|d(p,Sp)\| = 0$ olduğunda sağlanır. Böylece $d(p,Sp) = 0$, $p = Sp$ olur. (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|d(Tp,p)\| &\leq \|d(Tp,x_{2n+2}) + d(x_{2n+2},p)\| \\
&\leq \|d(Tp,x_{2n+2})\| + \|d(x_{2n+2},p)\| \\
&= \|d(Tp,Sx_{2n+1})\| + \|d(x_{2n+2},p)\| \\
&= k\ (\|d(x_{2n+1},Tp)\| + \|d(p,Sx_{2n+1})\|) + \|d(x_{2n+2},p)\| \\
&= k\ \|d(x_{2n+1},Tp)\| + k\ \|d(p,x_{2n+2})\| + \|d(x_{2n+2},p)\| \\
&\leq k\ (\|d(x_{2n+1},p)\| + \|d(p,Tp)\|) + k\ \|d(p,x_{2n+2})\|) + \|d(x_{2n+2},p)\|
\end{aligned}$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\{x_{2n}\} \to p$ olduğundan

$$\|d(Tp,p)\| \leq k\ \|d(Tp,p)\| \tag{4.7}$$

olur. Buradan $k \in [0,1/2)$ olduğundan (4.7) eşitsizliği ancak $\|d(Tp,p)\| = 0$ olduğunda sağlanır. Böylece $d(Tp,p) = 0$ ve T$p = p$ olur.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $q \in X$ ve $q \neq p$ olmak üzere q noktası T,S dönüşümlerinin bir başka sabit noktası olsun. (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|d(p,q)\| &= \|d(Tp,Sq)\ \| \\
&\leq k\ (\|d(q,Tp)\| + \|d(p,Sq)\|) \\
&= 2k\ \|d(p,q)\|
\end{aligned}$$

olur. Eşitsizlik düzenlenirse $(1-2k)\ \|d(p,q)\| \leq 0$ olur. $k \in [0,1/2)$ olduğundan $(1-2k) > 0$ dır. Böylece $\|d(p,q)\| = 0$ olmak zorundadır. Buradan $p = q$ elde dilir.

Sonuç 4.1.6. Teorem 4.1.5. deki şartları sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 4.1.5. den T ve S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir. Yani $F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$ dir. Kabul edelim ki $u \in F(T^n) \cap F(S^n)$ olsun. (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|d(u,Su)\| = \|d(T^n u, S^{n+1}u)\| &= \left\|d\big(T(T^{n-1}u), S(S^n u)\big)\right\| \\
&\leq k\ (\|d(S^n u, T^n u)\| + \|d(T^{n-1}u, S^{n+1}u)\|) \\
&= k\ \|d(T^{n-1}u, S^{n+1}u)\| \\
&\leq k\ (\|d(T^{n-1}u, S^n u)\| + \|d(S^n u, S^{n+1}u)\|) \\
&= k\ \|d(T^{n-1}u, S^n u)\| + k\ \|d(u,Su)\| \\
&\leq \frac{k}{1-k}\ \|d(T^{n-1}u, S^n u)\|
\end{aligned}$$

olur. Buradan $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$\|d(u,Su)\| \leq h\|d(T^{n-1}u, S^n u)\| \leq h^2\|d(T^{n-2}u, S^{n-1}u)\| \leq \cdots \leq h^n\|d(u,Su)\|$$

olur ve $n \to \infty$ için limit alınırsa $h < 1$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı 0 a yakınsar. Yani $\|d(u,Su)\| = 0$ olur. Buradan $d(u,Su) = 0$ ve dolayısıyla $Su = u$ bulunur.

Benzer şekilde (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|d(Tu,u)\| &= \|d(T^{n+1}u,S^nu)\| = \left\|d\big(T(T^nu),S(S^{n-1}u)\big)\right\| \\ &\leq k\ (\|d(S^{n-1}u,T^{n+1}u)\| + \|d(T^nu,S^nu)\|) \\ &= k\ \|d(S^{n-1}u,T^{n+1}u)\| \\ &\leq k\ (\|d(S^{n-1}u,T^nu)\| + \|d(T^nu,T^{n+1}u)\|) \\ &= k\ (\|d(Tu,u)\| + \|d(T^nu,S^{n-1}u)\|) \\ &\leq \frac{k}{1-k}\ \|d(T^nu,S^{n-1}u)\|\end{aligned}$$

olur. Buradan $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$\|d(Tu,u)\| \leq h\ \|d(T^nu,S^{n-1}u)\| \leq h^2\ \|d(T^{n-1}u,S^{n-2}u)\| \leq \cdots \leq h^n\ \|d(Tu,u)\|$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $h < 1$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı 0 a yakınsar. Yani $\|d(Tu,u)\| = 0$ olur. Buradan $Tu = u$ dur. $u \in F(T) \cap F(S)$ dir. Yani T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar.

Sonuç 4.1.7. (X,d) bir tam konik metrik uzay, K da M normal sabitine sahip bir koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x,y \in X$ için $T\colon X \to X$ dönüşümü

$$\|d(Tx,Ty)\| \leq k\ (\|d(x,Tx)\| + \|d(y,Ty)\|) \tag{4.8}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü (X,d) uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.1.5. deki (4.5) eşitsizliğinde $S \equiv T$ alınırsa (4.8) eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.1.5. deki aynı yöntem kullanılarak T dönüşümünün tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir.

Sonuç 4.1.8. Sonuç 4.1.7. deki şartları sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

İspat: Sonuç 4.1.7. den T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. Yani $F(T) \neq \emptyset$ dir. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (4.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|d(Tu,u)\| = \|d(T^{n+1}u,T^{n}u)\| &= \left\|d\big(T(T^{n}u),T(T^{n-1}u)\big)\right\| \\
&\leq k\,(\|d(T^{n-1}u,T^{n+1}u)\| + \|d(T^{n}u,T^{n}u)\|) \\
&= k\,\|d(T^{n-1}u,T^{n+1}u)\| \\
&\leq k\,(\|d(T^{n-1}u,T^{n}u)\| + \|d(T^{n}u,T^{n+1}u)\|) \\
&= k\,\|d(T^{n}u,T^{n-1}u)\| + k\,\|d(Tu,u)\|) \\
&\leq \frac{k}{1-k}\,\|d(T^{n}u,T^{n-1}u)\|
\end{aligned}$$

olur. Buradan $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$\begin{aligned}
\|d(Tu,u)\| &\leq h\,\|d(T^{n}u,T^{n-1}u)\| \\
&\leq h^{2}\,\|d(T^{n-1}u,T^{n-2}u)\| \leq \cdots \leq h^{n}\,\|d(Tu,u)\|
\end{aligned}$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $h < 1$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı 0 a yakınsar. Yani $\|d(Tu,u)\| = 0$ olur. Buradan $Tu = u$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in F(T)$ dir. Yani T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 4.1.9. (X,d) bir tam konik metrik uzay, K da M normal sabitine sahip bir koni olsun. $a,b,c,e \geq 0$, $a+b+c+2e < 1$ ve $\forall\, x,y \in X$ için $T\colon X \to X$ dönüşümü

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) \leq{}& a\,d(x,y) + b\,d(x,Tx) + c\,d(y,Ty) \\
&+e\,[d(x,Ty) + d(y,Tx)] \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü (X,d) de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$x_{n+1} = Tx_n$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Önce bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (4.9) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\
&\leq \alpha\, d(x_n, x_{n+1}) + b\, d(x_n, Tx_n) + c\, d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \\
&\quad +e\, [d(x_n, Tx_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)] \\
&\leq \alpha\, d(x_n, x_{n+1}) + b\, d(x_n, x_{n+1}) + c\, d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad +e\, [d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})] \\
&\leq \alpha\, d(x_n, x_{n+1}) + b\, d(x_n, x_{n+1}) + c\, d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad +e\, [d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})] \\
&= (\alpha + b + e)\, d(x_n, x_{n+1}) + (c + e)\, d(x_{n+1}, x_{n+2})
\end{aligned}
$$

olur. $\delta = \dfrac{a+b+e}{1-c-e} < 1$ olsun. Buradan her n için

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \delta\, d(x_n, x_{n+1}) \leq \cdots \leq \delta^{n+1}\, d(x_0, x_1)$$

olur. Buradan $m > n$ için

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq (\delta^n + \delta^{n+1} + \ldots + \delta^{m-1})\, d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\, d(x_1, x_0)
\end{aligned}
$$

elde edilir. K, M normal sabitine sahip koni olduğundan,

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq M\, \frac{\delta^n}{1-\delta}\, \|d(x_1, x_0)\| \tag{4.10}$$

olur. $m, n \to \infty$ için limit alındığında $\delta < 1$ olduğundan (4.10) eşitsizliğinin sağ tarafı 0 a yakınsar. Dolayısıyla $m, n \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ dır. $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir, X uzayı konik tam metrik uzay olduğundan X de bir p elemanı vardır öyle ki $n \to \infty$ için $x_n \to p$ olur.

Şimdi $p \in X$ in T nin sabit noktası olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliği ve (4.9) eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
d(p,Tp) &\le d(p,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tp)\\
&= d(p,x_{n+1}) + d(Tx_n,Tp)\\
&\le d(p,x_{n+1}) + \alpha\, d(x_n,p) + b\, d(x_n,Tx_n) + c\, d(p,Tp)\\
&\quad + e\,[d(x_n,Tp) + d(p,Tx_n)]\\
&\le d(p,x_{n+1}) + \alpha\, d(x_n,p) + b\, d(x_n,x_{n+1}) + c\, d(p,Tp)\\
&\quad + e\,[d(x_n,p) + d(p,Tp) + d(p,x_{n+1})]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan eşitsizlik düzenlenirse

$$d(p,Tp) \le \frac{1}{1-c-e}\,[(1+e)\,d(p,x_{n+1}) + (\alpha+e)\,d(x_n,p) + b\,d(x_n,x_{n+1})]$$

olur. K, M normal sabitine sahip koni olduğundan,

$$\|d(p,Tp)\| \le M\frac{1}{1-c-e}\,\{(1+e)\,\|d(p,x_{n+1})\| + (\alpha+e)\,\|d(x_n,p)\| + b\,\|d(x_n,x_{n+1})\|\} \tag{4.11}$$

elde edilir. $n\to\infty$ için limit alındığında $x_n \to p$ olduğundan $x_{n+1}\to p$ olacaktır. Bu nedenle (4.11) eşitsizliğinin sağ tarafı 0 a yakınsar. Yani $\|d(p,Tp)\| = 0$ olur. Bu ise $Tp = p$ olduğunu gösterir.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki sabit nokta tek olmasın, yani T dönüşümünün $q \in X$ şeklinde bir başka sabit noktası olsun. (4.9) eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
d(p,q) &= d(Tp,Tq)\\
&\le \alpha\, d(p,q) + b\, d(p,Tp) + c\, d(q,Tq) + e[d(p,Tq) + d(q,Tp)]\\
d(p,q) &\le (a+2e)\, d(p,q)
\end{aligned}
$$

Yani

$$(1-\alpha-2e)\, d(p,q) \le 0$$

olur. $(1-\alpha-2e)>0$ olduğundan yukarıda ki eşitsizlik ancak $d(p,q)=0$ yani $p=q$ durumunda sağlanır. Böylece T dönüşümü X uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.1.10. Teorem 4.1.9. daki şartları sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 4.1.9. dan $F(T)\neq\emptyset$ dir. Yani T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. P özelliği tanımından $F(T)=F(T^n)$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $u\in F(T^n)$ olsun. (4.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(u,Tu) &= d(T^n u,T^{n+1}u)\\
&= d\big(T(T^{n-1}u),T(T^n u)\big)\\
&\leq a\, d(T^{n-1}u,T^n u)+b\, d(T^{n-1}u,T^n u)\\
&\quad +c\, d(T^n u,T^{n+1}u)+e\,[d(T^{n-1}u,T^{n+1}u)+d(T^n u,T^n u)]\\
&\leq a\, d(T^{n-1}u,T^n u)+b\, d(T^{n-1}u,T^n u)\\
&\quad +c\, d(T^n u,T^{n+1}u)+e\,[d(T^{n-1}u,T^n u)+d(T^n u,T^{n+1}u)]\\
&= (a+b+e)\, d(T^{n-1}u,T^n u)+(c+e)\, d(T^n u,T^{n+1}u)\\
&\leq \frac{a+b+e}{1-c-e}\, d(T^{n-1}u,T^n u)
\end{aligned}$$

olur. $\delta=\dfrac{a+b+e}{1-c-e}<1$ denirse

$$\begin{aligned}
d(u,Tu)=d(T^n u,T^{n+1}u) &\leq \delta\, d(T^{n-1}u,T^n u)\\
&\leq \delta^2\, d(T^{n-2}u,T^{n-1}u)\\
&\leq \ldots \leq \delta^n\, d(u,Tu)
\end{aligned}$$

olur. K, M normal sabitine sahip bir koni olduğundan,

$$\|d(u,Tu)\|\leq M\,\delta^n\,\|d(u,Tu)\|$$

olur. Dolayısıyla $n\to\infty$ için $\|d(u,Tu)\|=0$ olur. Buradan $d(u,Tu)=0$ yani $u=Tu$ dur. Böylece T dönüşümünün P özelliğini sağladığı görülür.

Şimdi üçüncü bölümde verilen bazı dönüşümlerin P özelliğine sahip olduklarını gösterelim.

Teorem 4.1.11. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da M normal sabitine sahip bir koni olsun. $\beta \in [0, 1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü (3.5) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 3.2.6. dan $F(T) \neq \emptyset$ dir. Yani T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. P özelliği tanımından $F(T) = F(T^n)$ olduğunu göstereceğiz. $u \in F(T)$ ise $u \in F(T^n)$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (3.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(Tu, u) = d(T^{n+1}u, T^n u) &= d\big(T(T^n u), T(T^{n-1}u)\big) \\ &\leq \beta\, [d(T^{n+1}u, T^n u) + d(T^n u, T^{n-1}u)] \\ &\leq \frac{\beta}{1-\beta}\, d(T^n u, T^{n-1}u) \end{aligned}$$

olur. $\alpha = \dfrac{\beta}{1-\beta} < 1$ denirse

$$\begin{aligned} d(Tu, u) = d(T^{n+1}u, T^n u) &\leq \alpha\, d(T^n u, T^{n-1}u) \\ &\leq \alpha^2\, d(T^{n-1}u, T^{n-2}u) \\ &\leq \cdots \ \leq \alpha^n\, d(Tu, u) \end{aligned}$$

olur. K, M normal sabitine sahip bir koni olduğundan,

$$\|d(Tu, u)\| \leq M\, \alpha^n\, \|d(Tu, u)\|$$

olur. Dolayısıyla $n \to \infty$ için $\|d(Tu, u)\| = 0$ olur. Buradan $d(Tu, u) = 0$ ve dolayısıyla $Tu = u$ dur. Yani T dönüşümünün P özelliğini sağladığı görülür.

Teorem 4.1.12. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da M normal sabitine sahip bir koni olsun. $\gamma \in [0, 1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü (3.6) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 3.2.7. den $F(T) \neq \emptyset$ dir. Yani T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (3.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(Tu,u) = d(T^{n+1}u, T^n u) &= d\big(T(T^n u), T(T^{n-1}u)\big) \\ &\leq \gamma\, [d(T^{n+1}u, T^{n-1}u) + d(T^n u, T^n u)] \\ &= \gamma\, d(T^{n+1}u, T^{n-1}u) \\ &\leq \gamma\, [d(T^{n+1}u, T^n u) + d(T^n u, T^{n-1}u)] \\ &\leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\, d(T^n u, T^{n-1}u) \end{aligned}$$

olur. $\alpha = \dfrac{\gamma}{1-\gamma} < 1$ denirse

$$\begin{aligned} d(Tu,u) = d(T^{n+1}u, T^n u) &\leq \alpha\, d(T^n u, T^{n-1}u) \\ &\leq \alpha^2\, d(T^{n-1}u, T^{n-2}u) \\ &\leq \ldots \leq \alpha^n\, d(Tu,u) \end{aligned}$$

olur. K, M normal sabitine sahip bir koni olduğundan,

$$\|d(Tu,u)\| \leq M\, \alpha^n\, \|d(Tu,u)\|$$

olur. Dolayısıyla $n \to \infty$ için $\|d(Tu,u)\| = 0$ olur. Buradan $d(Tu,u) = 0$ yani $Tu = u$ dur. Buradan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 4.1.13. (X,d) bir tam konik metrik uzay, K da M normal sabitine sahip bir koni olsun. $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + 2\beta < 1$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü Sonuç 3.2.14. de verilen (3.11) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

İspat: Sonuç 3.2.14. den $F(T) \neq \emptyset$ dir. Yani T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. P özelliği tanımından $F(T) = F(T^n)$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (3.11) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(Tu,u) = \; d(T^{n+1}u, T^n u) \; &= d\big(T(T^n u), T(T^{n-1}u)\big) \\
&\leq \alpha \; (T^n u, T^{n-1}u) \\
&\quad + \beta \; [d(T^{n+1}u, T^n u) + d(T^n u, T^{n-1}u)] \\
&= \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} \; d(T^n u, T^{n-1}u)
\end{aligned}
$$

olur. $k = \dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta} < 1$ denirse

$$
\begin{aligned}
d(Tu,u) = d(T^{n+1}u, T^n u) \; &\leq k \; d(T^n u, T^{n-1}u) \\
&\leq k^2 \; d(T^{n-1}u, T^{n-2}u) \\
&\leq \; \dots \; \leq \; k^n \; d(Tu,u)
\end{aligned}
$$

olur. K , M normal sabitine sahip bir koni olduğundan,

$$\|d(Tu,u)\| \leq M \; k^n \; \|d(Tu,u)\|$$

olur. Dolayısıyla $n \to \infty$ için $\|d(Tu,u)\| = 0$ olur. Buradan $d(Tu,u) = 0$ yani $Tu = u$ dur. Buradan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 4.1.14. (X,d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in X$ için $d(x,y) \in intK$ olduğunu kabul edelim.

$\varphi: intK \cup \{0\} \to intK \cup \{0\}$ tanımlanan φ fonksiyonu monoton artan, sürekli ve

i) $\varphi(t) = 0 \;\Leftrightarrow t = 0$
ii) $t \in intK$ için $\varphi(t) \ll t$
iii) $t \in intK \cup \{0\}$ ve $x, y \in X$ için ya $\varphi(t) \leq d(x,y)$ ya da $d(x,y) \leq \varphi(t)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $T: X \to X$ dönüşümü Teorem 3.2.15. de verilen (3.12) eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat: Teorem 3.2.15. den $F(T) \neq \emptyset$ dir. Yani T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (3.12) den

$$\begin{aligned} d(Tu,u) = d(T^{n+1}u,T^nu) &= d\big(T(T^nu),T(T^{n-1}u)\big) \\ &\leq d(T^nu,T^{n-1}u) - \varphi(d(T^nu,T^{n-1}u)) \\ &= d(T(T^{n-1}u),T(T^{n-2}u)) - \varphi(d(T^nu,T^{n-1}u)) \\ &\leq d(T^{n-1}u,T^{n-2}u) - \varphi\big(d(T^{n-1}u,T^{n-2}u)\big) \\ &\quad\; - \varphi(d(T^nu,T^{n-1}u)) \\ &\leq \cdots \leq d(Tu,u) - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(d(T^ku,T^{k-1}u)) \\ d(Tu,u) &\leq d(Tu,u) - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(d(T^ku,T^{k-1}u)) \end{aligned}$$

olur. Buradan eşitsizlik düzenlenirse

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(d(T^ku,T^{k-1}u)) \leq 0$$

olur. Ve buradan

$$\varphi(d(Tu,u)) + \varphi(d(T^2u,Tu)) + \ \ldots + \varphi(d(T^{n+1}u,T^nu)) \leq 0$$

olmalıdır. φ fonksiyonunun özelliğinden bu ancak $\varphi\big(d(Tu,u)\big) = 0$ durumunda sağlanır. $\varphi\big(d(Tu,u)\big) = 0$ ise (i) den $d(Tu,u) = 0$ olur. Buradan da $Tu = u$ olur. Yani T dönüşümü P özelliğini sağlar.

4.2. Normal Olmayan Koniye Sahip Konik Metrik Uzaylarda *P* ve *Q* Özelliklerini Sağlayan Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.2.1. (X,d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1)$ ve $\forall x,y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü Teorem 3.2.1. de verilen (3.1) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat: (Rezapour and Hamlbarani, 2008) den (3.1) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümünün normal olmayan konide tek sabit noktasının var olduğunu biliyoruz.

Şimdi tek sabit noktası var olan T dönüşümünün P özelliğini sağladığını gösterelim. $u \in F(T^n)$ ise $u \in F(T)$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (3.1) den

$$\begin{aligned} d(u,Tu) &= d(T^n u, T^{n+1}u) \\ &\leq k\, d(T^{n-1}u, T^n u) \\ &\leq k^2\, d(T^{n-2}u, T^{n-1}u) \\ &\leq \cdots \leq k^n\, d(u,Tu) \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. Lemma 3.1.19. daki (viii) özelliğini kullanarak, $c \in intK$ için

$$a_n = k^n d(u,Tu)$$

alırsak $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ olacağından $a_n = k^n d(u,Tu) \ll c$ alalım.

Yine Lemma 3.1.19. daki verilen (i) özelliğinden $d(u,Tu) \leq k^n d(u,Tu)$ ve $k^n d(u,Tu) \ll c$ ise $d(u,Tu) \ll c$ olduğu görülür. Buradan her $m \geq 1$ için

$$d(u,Tu) \leq \frac{c}{m}$$

olur. Böylece her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(u,Tu) \in K$ olur. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-d(u,Tu) \in K$ dır. $d(u,Tu) \in K$ olduğundan Tanım 3.1.1. den $d(u,Tu) = 0$ dır. Buradan $Tu = u$ bulunur. Yani T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Sonuç 4.2.2. (X,d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $0 \ll c$ olacak şekilde $c \in E$ ve $x_0 \in X$ olsun. $\bar{B}(x_0,c) = \{x \in X : d(x_0,x) \leq c\}$ kapalı yuvarını alalım. Her $x,y \in \bar{B}(x_0,c)$, $k \in [0,1)$ için $T: X \to X$ dönüşümü Sonuç 3.2.3. de verilen (3.2) eşitsizliğini ve $d(Tx_0,x_0) \leq (1-k)\, c$ şartını sağlasın. Bu durumda T dönüşüm P özelliğini sağlar.

İspat: (Rezapour and Hamlbarani, 2008) den (3.2) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümünün normal olmayan koni için $\bar{B}(x_0, c)$ da tek sabit noktasının var olduğunu biliyoruz. Teorem 4.2.1. den T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.2.3. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1)$ ve $\forall x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü n pozitif tamsayıları için Sonuç 3.2.4. de verilen (3.3) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

İspat: (Rezapour and Hamlbarani, 2008) den (3.3) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümünün tek sabit noktasının var olduğunu biliyoruz. Şimdi bu dönüşümün P özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (3.3) eşitsizliğinden

$$d(u, Tu) = d(T^n u, T^{n+1} u) \leq k\, d(u, Tu)$$

olur. Buradan K konisinin özelliğinden

$$(1 - k)\, d(u, Tu) \leq 0 \tag{4.13}$$

dır. $k \in [0,1)$ için $(1 - k) > 0$ olduğundan (4.13) eşitsizliği $d(u, Tu) \leq 0$ olduğunda sağlanır. Buradan $d(u, Tu) = 0$ yani $Tu = u$ olur. $u \in F(T^n)$ iken $u \in F(T)$ bulunduğundan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 4.2.4. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in (0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşüm çifti

$$d(Tx, Sy) \leq k\, (d(Tx, x) + d(Sy, y)) \tag{4.14}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşümleri (X, d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve $n \geq 1$ için

$$x_{2n+2} = Sx_{2n+1}, \quad x_{2n+1} = Tx_{2n}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Önce bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (4.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \\ &\leq k\,(d(Tx_{2n}, x_{2n}) + d(Sx_{2n+1}, x_{2n+1})) \\ &= k\,(d(x_{2n+1}, x_{2n}) + d(x_{2n+2}, x_{2n+1})) \end{aligned}$$

her n için $\lambda = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \lambda\, d(x_{2n}, x_{2n+1}) \tag{4.15}$$

olur. Benzer şekilde (4.15) eşitsizliğinden iterasyon devam ettirilirse

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq \lambda\, d(x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

olur. Buradan her n için

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \lambda^2\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \cdots \leq \lambda^n\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Her $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda^m)\, d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Kabul edelim ki $0 \ll c$ verilmiş olsun. $N_\delta(0) = \{y \in E: \|y\| < \delta\}$ kümesi üzerinde $c + N_\delta(0) \subseteq K$ olacak şekilde $\delta > 0$ alalım. Ayrıca her $m \geq N_1$ için

$$\frac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \in N_\delta(0)$$

olacak şekilde N_1 doğal sayısı seçelim. Buradan her $m \geq N_1$ için

$$\frac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \ll c$$

olur. Böylece her $n > m$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \text{ ve } \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \ll c$$

olur. Eğer Teorem 4.2.1. deki gibi $a_m = \dfrac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0)$ alırsak $m \to \infty$ için $a_m \to 0$ olacağından $d(x_m, x_n) \ll c$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi (X, d) konik metrik uzayında bir Cauchy dizisi olarak elde edilir. (X, d) tam konik metrik uzay olduğundan $p \in X$ vardır öyle ki $n \to \infty$ için $x_n \to p$ olur.

Şimdi bir N_2 doğal sayısı seçelim öyle ki her $n \geq N_2$ için

$$d(x_{2n+1}, x_{2n}) \ll \frac{c\,(1-k)}{2k}\ ,\ \ d(p, x_{2n+1}) \ll \frac{c\,(1-k)}{2}$$

olsun. (4.14) eşitsizliğinden her $n \geq N_2$ için

$$
\begin{aligned}
d(p,Sp) &\leq d(p,x_{2n+1}) + d(x_{2n+1},Sp) \\
&= d(p,x_{2n+1}) + d(Tx_{2n},Sp) \\
&\leq d(p,x_{2n+1}) + k\ (d(Tx_{2n},x_{2n}) + d(Sp,p)) \\
&= \frac{1}{1-k}\ d(p,x_{2n+1}) + \frac{k}{1-k}\ d(x_{2n+1},x_{2n}) \\
&\ll \frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan her $m \geq 1$ için $d(p,Sp) \leq \frac{c}{m}$ olur. Böylece her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(p,Sp) \in K$ olur. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-d(p,Sp) \in K$ dır. $d(p,Sp) \in K$ olduğundan Tanım 3.1.1. den $d(p,Sp) = 0$ dır. Yani $Sp = p$ bulunur. (4.14) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(Tp,p) &= d(Tp,Sp) \\
&\leq k\ (d(Tp,p) + d(Sp,p)) \\
&= k\ d(Tp,p)
\end{aligned}
$$

olur. K konisinin özelliğinden eşitsizlik düzenlenirse $(1-k)\ d(Tp,p) \leq 0$ elde edilir. $k \in (0,1/2)$ olduğundan $(1-k) > 0$ dır. Bu nedenle $d(Tp,p) = 0$ olur. Yani $Tp = p$ dir.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $q \in X$ ve $q \neq p$ olmak üzere q noktası T,S dönüşümlerinin bir başka sabit noktası olsun. (4.14) eşitsizliğinden

$$
d(p,q) = d(Tp,Sq)\ \leq k\ (d(Tp,p) + d(Sq,q))
$$

yazılır. $Sp = p$ ve $Tq = q$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı 0 dır. Böylece $d(p,q) \leq 0$ olur. Bu eşitsizlik ancak $d(p,q) = 0$ olması durumunda sağlanır. Buradan $p = q$ olur. Yani T ve S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.2.5. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in (0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşümleri Teorem 4.2.4. de verilen (4.14) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 4.2.4. den T, S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasının var olduğunu biliyoruz. Şimdi T, S dönüşümlerinin Q özelliğini sağladığını gösterelim. Kabul edelim ki $u \in F(T^n) \cap F(S^n)$ olsun. (4.14) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(u, Su) &= d(T^n u, S^{n+1} u) = d(T(T^{n-1}u), S(S^n u)) \\
&\leq k\,(d(T^n u, T^{n-1}u) + d(S^{n+1}u, S^n u)) \\
&\leq k\,(d(T^n u, T^{n-1}u) + d(Su, u)) \\
&\leq \frac{k}{1-k}\; d(T^n u, T^{n-1}u) \\
&\leq \frac{k}{1-k}\; (d(T^n u, S^n u) + d(S^n u, T^{n-1}u))
\end{aligned}
$$

her n için $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$
\begin{aligned}
d(u, Su) &= d(T^n u, S^{n+1} u) \\
&\leq h\, d(T^{n-1}u, S^n u) \\
&\leq \cdots \leq h^n\, d(u, Su)
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 3.1.19. da verilen (viii) özelliğini kullanarak $c \in intK$ için

$$a_n = h^n\, d(u, Su)$$

alırsak $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ olacağından $a_n = h^n\, d(u, Su) \ll c$ alalım. Lemma 3.1.19. da verilen (i) özelliğinden $d(u, Su) \leq h^n\, d(u, Su)$ ve $h^n\, d(u, Su) \ll c$ olduğundan $d(u, Su) \ll c$ dir. Her $m \geq 1$ için $d(u, Su) \leq \dfrac{c}{m}$ olur. Böylece her $m \geq 1$ için $\dfrac{c}{m} - d(u, Su) \in K$ olur. $m \to \infty$ için $\dfrac{c}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-d(u,Su) \in K$ dır. $d(u,Su) \in K$ olduğundan $d(u,Su) = 0$ dır. Yani $Su = u$ olur. Benzer işlemlerle $Tu = u$ olduğu gösterilir. Böylece T,S dönüşüm çifti Q özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.2.6. (X,d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x,y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü Teorem 3.2.6. da verilen (3.5) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat: (4.14) eşitsizliğinde $T = S$ alırsak (3.5) eşitsizliği elde edilir. (Rezapour and Hamlbarani, 2008) de (3.5) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümünün normal olmayan koniler için tek sabit noktasının var olduğunu biliyoruz. Şimdi tek sabit noktası var olan T dönüşümünün P özelliğini sağladığını gösterelim. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (3.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(u,Tu) &= d(T^n u, T^{n+1}u) \\ &\leq k\,(d(T^n u, T^{n-1}u) + d(T^{n+1}u, T^n u)) \\ &\leq \frac{k}{1-k}\; d(T^{n-1}u, T^n u) \end{aligned}$$

ve her n için $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$d(u,Tu) \leq h\, d(T^{n-1}u, T^n u)$$

olur. Buradan benzer şekilde iterasyona devam edilirse

$$\begin{aligned} d(u,Tu) &= d(T^n u, T^{n+1}u) \\ &\leq h\, d(T^{n-1}u, T^n u) \\ &\leq \cdots \leq h^n\, d(u,Tu) \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.1.19. da verilen (viii) özelliğinden $c \in intK$ için

$$a_n = h^n d(u,Tu)$$

alınırsa $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ olacağından $a_n = h^n d(u, Tu) \ll c$ olur. Yine Lemma 3.1.19. de verilen (i) özelliğinden $d(u, Tu) \leq h^n d(u, Tu)$ ve $h^n d(u, Tu) \ll c$ olduğundan $d(u, Tu) \ll c$ olur. Buradan her $m \geq 1$ için $d(u,Tu) \leq \dfrac{c}{m}$ bulunur. Böylece her $m \geq 1$ için $\dfrac{c}{m} - d(u,Tu) \in K$ olur. $m \to \infty$ için $\dfrac{c}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-d(u,Tu) \in K$ dır. $(u,Tu) \in K$ olduğundan $d(u,Tu) = 0$ dır. Buradan $Tu = u$ dur. Yani T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Sonuç 4.2.7. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in (0,1/2)$ ve p, q pozitif tamsayılar olmak üzere $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(T^p x, T^q y) \leq k\, (d(T^p x, x) + d(T^q y, y)) \tag{4.16}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümünün tek sabit noktası vardır ve P özelliğine sahiptir.

İspat: Teorem 4.2.4. de verilen (4.14) eşitsizliğinde $T \equiv T^p$ ve $S \equiv T^q$ alınırsa (4.16) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.8. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşüm çifti

$$d(Tx, Sy) \leq k\, (d(Tx, y) + d(x, Sy)) \tag{4.17}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşümleri (X, d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve $n \geq 1$ için

$$x_{2n+2} = Sx_{2n+1}, \;\; x_{2n+1} = Tx_{2n}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Önce bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \\ &\leq k\ (d(Tx_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, Sx_{2n+1})) \\ &= k\ (d(x_{2n+1}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, x_{2n+2})) \\ &\leq k\ (d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \end{aligned}$$

her n için $\lambda = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq \lambda\, d(x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

olur. Buradan her n için

$$d(x_{n+1}, x_n) = \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \tag{4.18}$$

olur. Benzer şekilde (4.18) eşitsizliğinden iterasyon devam ettirilirse

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \lambda^2\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \cdots \leq \lambda^n\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Her $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda^m)\, d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Kabul edelim ki $0 \ll c$ verilmiş olsun. $N_\delta(0) = \{y \in E: \|y\| < \delta\}$ kümesi üzerinde $c + N_\delta(0) \subseteq K$ olacak şekilde $\delta > 0$ alalım.

Her $m \geq N_1$ için $\frac{\lambda^m}{1-\lambda}$ $d(x_1, x_0) \in N_\delta(0)$ olacak şekilde bir N_1 doğal sayısı alalım. Buradan her $m \geq N_1$ için $\frac{\lambda^m}{1-\lambda}$ $d(x_1, x_0) \ll c$ olur. Böylece her $n > m$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \text{ ve } \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \ll c$$

olur. Eğer $a_m = \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$ alırsak $m \to \infty$ için $a_m \to 0$ olacağından Lemma 3.1.19. daki (viii) den $d(x_m, x_n) \ll c$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi (X, d) konik metrik uzayında bir Cauchy dizisidir, (X, d) tam konik metrik uzay olduğundan $p \in X$ vardır öyle ki $n \to \infty$ için $x_n \to p$ olur. Şimdi bir N_2 doğal sayısı seçelim öyle ki her $n \geq N_2$ için (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(p, Sp) &\leq d(p, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, Sp) \\
&= d(p, x_{2n+1}) + d(Tx_{2n}, Sp) \\
&\leq d(p, x_{2n+1}) + k\,(d(Tx_{2n}, p) + d(x_{2n}, Sp)) \\
&\leq (1+k)\, d(p, x_{2n+1}) + k\,((d(x_{2n}, p) + d(p, Sp)) \\
&= \frac{1+k}{1-k}\, d(p, x_{2n+1}) + \frac{k}{1-k}\, d(x_{2n}, p) \\
&\leq \frac{1+k}{1-k}\, d(p, x_{2n+1}) + \frac{1+k}{1-k}\, d(x_{2n}, p) \\
&\ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $m \geq 1$ için $d(p, Sp) \leq \frac{c}{m}$ elde edilir. Böylece her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(p, Sp) \in K$ olur. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-d(p, Sp) \in K$ dır. $(p, Sp) \in K$ olduğundan $Sp = p$ bulunur. (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(Tp, p) &= d(Tp, Sp) \\
&\leq k\,(d(Tp, p) + d(p, Sp)) \\
&= k\, d(Tp, p)
\end{aligned}$$

olur. K konisinin özelliğinden yukarıdaki eşitsizlik düzenlenirse

$$(1-k)d(Tp,p) \leq 0$$

elde edilir. $k \in [0,1/2)$ olduğundan $(1-k) > 0$ dır. Bu nedenle $d(Tp,p) = 0$ olur. Yani $Tp = p$ dir.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $q \in X$ ve $q \neq p$ olmak üzere q noktası T, S dönüşümlerinin bir başka sabit noktası olsun. (4.17) eşitsizliğinden

$$d(p,q) = d(Tp,Sq) \leq k\,(d(Tp,q) + d(p,Sq))$$

yazılır. $Sp = p$ ve $Tq = q$ olduğundan $d(p,q) \leq 2k\, d(p,q)$ olur. Buradan koninin özelliğinden $(1-2k)\, d(p,q) \leq 0$ dersek, $k \in [0,1/2)$ için $1-2k > 0$ olacağından bu eşitsizlik ancak $d(p,q) = 0$ olması durumunda sağlanır. Buradan $p = q$ bulunur. Yani T ve S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.2.9. (X,d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x,y \in X$ için $T,S: X \to X$ dönüşümleri Teorem 4.2.8. de verilen (4.17) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar.

İspat: Teorem 4.2.8. den T, S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasının var olduğunu biliyoruz. Şimdi T, S dönüşümlerinin Q özelliğini sağladığını gösterelim. Kabul edelim ki $u \in F(T^n) \cap F(S^n)$ olsun. (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(u,Su) = d(T^n u, S^{n+1}u) &= d(T(T^{n-1}u), S(S^n u)) \\
&\leq k\,(d(T^n u, S^n u) + d(T^{n-1}u, S^{n+1}u)) \\
&= k\, d(T^{n-1}u, S^{n+1}u) \\
&\leq k\,(d(T^{n-1}u, S^n u) + d(S^n u, S^{n+1}u)) \\
&\leq \frac{k}{1-k}\, d(T^{n-1}u, S^n u)
\end{aligned}$$

olur ve her n için $h = \dfrac{k}{1-k} < 1$ denirse

$$d(u, Su) = d(T^n u, S^{n+1} u) \le h\, d(T^{n-1} u, S^n u)$$

olur. Buradan iterasyona devam edilirse

$$\begin{aligned} d(u, Su) &= d(T^n u, S^{n+1} u) \\ &\le h\, d(T^{n-1} u, S^n u) \\ &\le \cdots \le h^n\, d(u, Su) \end{aligned}$$

olur. $c \in intK$ için $a_n = h^n d(u, Su)$ alırsak $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ olacağından $a_n = h^n d(u, Su) \ll c$ bulunur.

Buradan $d(u, Su) \le h^n\, d(u, Su)$ ve $h^n\, d(u, Su) \ll c$ olduğundan Lemma 3.1.19. da verilen (i) özelliğinden $d(u, Su) \ll c$ dir. Buradan her $m \ge 1$ için $d(u, Su) \le \dfrac{c}{m}$ dir. Böylece her $m \ge 1$ için $\dfrac{c}{m} - d(u, Su) \in K$ olur. $m \to \infty$ için $\dfrac{c}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-d(u, Su) \in K$ dır. $(u, Su) \in K$ olduğundan $d(u, Su) = 0$ dır. Buradan $Su = u$ bulunur. Benzer işlemlerle $Tu = u$ olduğu gösterilebilir. Böylece T, S dönüşüm çifti Q özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.2.10. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü Teorem 3.2.7. de verilen (3.6) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat: (4.17) eşitsizliğinde $T = S$ alırsak (3.6) eşitsizliği elde edilir. (Rezapour and Hamlbarani, 2008) de (3.6) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümünün normal olmayan koniler için tek sabit noktasının var olduğunu biliyoruz. Buradan tek sabit noktası var olan T dönüşümünün P özelliğini sağladığı Sonuç 4.2.6. da verilen aynı teknik ile gösterilebilir.

Sonuç 4.2.11. (X,d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve p,q pozitif tamsayılar olmak üzere $\forall x,y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(T^p x, T^q y) \leq k\ (d(T^p x, y) + d(x, T^q y) \tag{4.19}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat: Teorem 4.2.8. de verilen (4.17) eşitsizliğinde $T \equiv T^p$ ve $S \equiv T^q$ alınırsa (4.19) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.12. (X,d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k,l \in [0,1)$ ve $\forall\, x,y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx,Ty) \leq k\ d(x,y) + l\ d(y,Tx) \tag{4.20}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat: (Rezapour and Hamlbarani, 2008) den (4.20) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümünün tek sabit noktasının var olduğunu biliyoruz. Şimdi tek sabit noktası var olan T dönüşümünün P özelliğini sağladığını gösterelim. Kabul edelim ki $u \in F(T^n)$ olsun. (4.20) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(u,Tu) &= d(T^n u, T^{n+1} u)\\
&\leq k\ d(T^{n-1}u, T^n u) + l\ d(T^n u, T^n u)\\
&= k\ d(T^{n-1}u, T^n u)\\
&\leq k\ (kd(T^{n-2}u, T^{n-1}u) + l\ d(T^{n-1}u, T^{n-1}u))\\
&= k^2\ d(T^{n-2}u, T^{n-1}u)\\
&\leq \cdots \leq k^n\ d(u,Tu)
\end{aligned}$$

olur. $c \in intK$ için $a_n = k^n d(u,Tu)$ alırsak $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ olacağından $a_n = k^n d(u,Tu) \ll c$ denilirse

$d(u,Tu) \leq k^n\, d(u,Tu)$ ve $k^n\, d(u,Tu) \ll c$ olduğundan $d(u,Tu) \ll c$ olur. Buradan her $m \geq 1$ için $d(u,Tu) \leq \frac{c}{m}$ dır. Böylece her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(u,Tu) \in K$ olur. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-d(u,Tu) \in K$ dır. $(u,Tu) \in K$ olduğundan $d(u,Tu) = 0$ dır. Buradan $Tu = u$ bulunur. Yani T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Tanım 4.2.13. (X,d) bir konik metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ için $T\colon X \to X$ tanımlı bir dönüşüm vardır öyle ki

$$u \in C(T;x,y) \equiv \left\{d(x,y), \frac{1}{2}\,[d(x,Tx) + d(y,Ty)], \frac{1}{2}\,[d(x,Ty) + d(y,Tx)]\right\}$$

olmak üzere

$$d(Tx,Ty) \leq k\,u \tag{4.21}$$

eşitsizliği bazı $k \in (0,1/2)$ için sağlansın. Bu durumda bu daralma dönüşümüne Quasi daralma (Quasi-contraction) dönüşümü denir.

Teorem 4.2.14. (X,d) normal olmayan koniye sahip bir tam konik metrik uzay, $T\colon X \to X$ e dönüşümü Tanım 4.2.13. de verilen şartı sağlayan Quasi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x noktası X uzayında alınan keyfi bir nokta olsun. T dönüşümünün sabit noktaya sahip olduğunu gösterebilmek için önce $\{T^n x\}$ dönüşüm dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (4.21) eşitsizliğinden

$$d(T^n x, T^{n-1} x) = d(T(T^{n-1} x), T(T^{n-2} x)) \leq k\, u_n(x)$$

$$u_n(x) \in \{d(T^{n-1}x, T^{n-2}x), \frac{1}{2}\,[d(T^{n-1}x, T^n x) + d(T^{n-2}x, T^{n-1}x)],$$
$$\frac{1}{2}\,[d(T^{n-1}x, T^{n-1}x) + d(T^{n-2}x, T^n x)]\} \tag{4.22}$$

olur. Burada her $n \in N$ için üç durum söz konusudur. Bunları inceleyecek olursak

a) $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq k\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x)$

b) $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq \frac{k}{2}\,[d(T^{n-1}x, T^n x) + d(T^{n-2}x, T^{n-1}x)]$

$$\leq \frac{k}{2-k}\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \leq k\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x)$$

c) $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq \frac{k}{2}\, d(T^{n-2}u, T^n u)$

$$\leq \frac{k}{2}\,[d(T^{n-2}u, T^{n-1}u) + d(T^{n-1}u, T^n u)]$$

$$\leq \frac{k}{2-k}\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \leq k\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x)$$

olur. a), b) ve c) den

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n-1}x) &\leq k\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \\ &\leq k^2\, d(T^{n-2}x, T^{n-3}x) \\ &\leq \cdots \leq k^{n-1}\, d(Tx, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden $n > m$ ler için

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^m x) &\leq d(T^n x, T^{n-1}x) + d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) + \cdots + d(T^{m+1}x, T^m x) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^m)\, d(x, Tx) \\ &= k^m \frac{1-k^{n-m-1}}{1-k}\, d(x, Tx) \leq \frac{k^m}{1-k}\, d(x, Tx) \end{aligned}$$

olur. $k \in (0,1/2)$ olduğundan $m, n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\frac{k^m}{1-k}\, d(x,Tx) \to 0$$

olduğundan $\frac{k^m}{1-k}\, d(x,Tx) \ll c$ olur. Lemma 3.1.19. (i) den

$$d(T^n x, T^m x) \le \frac{k^m}{1-k}\, d(x,Tx) \text{ ve } \frac{k^m}{1-k}\, d(x,Tx) \ll c$$

olduğundan her $c \in intK$ için $d(T^n x, T^m x) \ll c$ olur. Bu nedenle $\{T^n x\}$ dönüşüm dizisi (X,d) tam konik metrik uzayında Cauchy dizisidir, (X,d) uzayı tam olduğundan $p \in X$ vardır öyle ki $n \to \infty$ için $T^n x \to p$ dir.

Şimdi p noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliği ve (4.21) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}(p,Tp) &\le d(p,T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x,Tp)\\ &\le d(p,T^{n+1}x) + d(T(T^n x),Tp)\\ &\le d(p,T^{n+1}x) + k\, u_n(x,p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_n(x,p) \in \{&d(T^n x,p), \frac{1}{2}\, [d(T^n x,T^{n+1}x) + d(p,Tp)],\\ &\frac{1}{2}\, [d(T^n x,Tp) + d(p,T^{n+1}x)]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $0 \ll c$ ve her $n \in N$ için üç durum söz konusudur.

$$\begin{aligned}a)\ d(p,Tp) &\le d(p,T^{n+1}x) + k\, d(T^n x,p)\\ &\ll \frac{c}{2} + k\frac{c}{2k} = c\end{aligned}$$

$$b)\ d(p,Tp) \leq d(p,T^{n+1}x) + \frac{k}{2}\ [d(T^n x, T^{n+1}x) + d(p,Tp)]$$

$$\leq d(p,T^{n+1}x) + \frac{k}{2}\ d(T^n x, T^{n+1}x) + \frac{k}{2}\ d(p,Tp)$$

$$\leq \frac{2}{2-k}\ d(p,T^{n+1}x) + \frac{k}{2-k}\ d(T^n x, T^{n+1}x)$$

$$\ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

$$c)\ d(p,Tp) \leq d(p,T^{n+1}x) + \frac{k}{2}\ [d(T^n x, Tp) + d(p,T^{n+1}x)]$$

$$\leq \frac{2+k}{2}\ d(p,T^{n+1}x) + \frac{k}{2}\ d(T^n x, p) + \frac{k}{2}\ d(p,Tp)$$

$$\leq \frac{2+k}{2-k}\ d(p,T^{n+1}x) + \frac{k}{2-k}\ d(T^n x, p) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

a), b) ve c) den her $c \in intK$ için $d(p,Tp) \ll c$ elde edilir. Lemma 3.1.19. da verilen (ii) özelliğinden $d(p,Tp) = 0$ yani $Tp = p$ bulunur.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki T dönüşümünün $q \in X$ olacak şekilde bir başka sabit noktası olsun. (4.21) eşitsizliğinden $k \in (0, 1/2)$ için

$$d(p,q) = d(Tp,Tq) \leq k\ u(p,q)$$

ve

$$u(p,q) \in \{d(p,q), \frac{1}{2}\ [d(p,Tp) + d(q,Tq)], \frac{1}{2}\ [d(p,Tq) + d(q,Tp)]\}$$

$$= \{d(p,q), 0, d(p,q)\}$$

olur. Tek durum söz konusudur.

$$d(p,q) \leq k\ d(p,q)$$

bulunur. Eşitsizlik düzenlenirse $(1-k)\,d(p,q) \leq 0$ elde edilir. $k \in (0,1/2)$ olduğundan $(1-k) > 0$ dır. Bu nedenle $d(p,q) = 0$, yani $p = q$ bulunur. Yani T dönüşümünün (X,d) tam konik metrik uzayında sabit noktası vardır ve tektir.

Teorem 4.2.15. (X,d) normal olmayan koniye sahip bir tam konik metrik uzay, $T: X \to X$ e dönüşümü Tanım 4.2.13. de verilen şartı sağlayan Quasi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat: Bir dönüşümün P özelliğine sahip olabilmesi için tanımlı olduğu uzayda tek sabit noktaya sahip olması gerekir. Teorem 4.2.14. den T dönüşümü (X,d) tam konik metrik uzayında tek sabit noktaya sahiptir. Şimdi T dönüşümünün P özelliğini, yani $F(T) = F(T^n)$ eşitliğini sağladığını gösterelim. $p \in F(T)$ iken $p \in F(T^n)$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki $p \in F(T^n)$ olsun. (4.21) eşitsizliğinden

$$d(p,Tp) = d(T^n p, T^{n+1} p) = d\big(T(T^{n-1}p), T(T^n p)\big) \leq k\, u(T,p)$$

ve

$$u(T,p) \in \{d(T^{n-1}p, T^n p), \frac{1}{2}\,[d(T^{n-1}p, T^n p) + d(T^n p, T^{n+1} p)],$$
$$\frac{1}{2}\,[d(T^{n-1}p, T^{n+1} p) + d(T^n p, T^n p)]\}$$

olur. Üç durum söz konusudur.

a) $d(p,Tp) \leq k\, d(T^{n-1}p, T^n p)$

b) $$d(p,Tp) \leq \frac{k}{2}\,[d(T^{n-1}p, T^n p) + d(T^n p, T^{n+1} p)]$$
$$\leq \frac{k}{2}\, d(T^{n-1}p, T^n p) + \frac{k}{2}\, d(p,Tp)$$
$$\leq k\, d(T^{n-1}p, T^n p) + k\, d(p,Tp)$$

$$\leq \frac{k}{1-k}\, d(T^{n-1}p, T^n p)$$
$$\leq k\, d(T^{n-1}p, T^n p)$$

c) $d(p, Tp) \leq \frac{k}{2}\, [d(T^{n-1}p, T^{n+1}p) + d(T^n p, T^n p)]$

$$\leq \frac{k}{2}\, [d(T^{n-1}p, T^n p) + d(T^n p, T^{n+1}p)]$$
$$\leq k\, d(T^{n-1}p, T^n p) + k\, d(p, Tp)$$
$$\leq \frac{k}{1-k}\, d(T^{n-1}p, T^n p)$$
$$\leq k\, d(T^{n-1}p, T^n p)$$

olur. (a), (b) ve (c) den

$$\begin{aligned} d(p, Tp) = d(T^n p, T^{n+1}p) &\leq k\, d(T^{n-1}p, T^n p) \\ &\leq k^2\, d(T^{n-2}p, T^{n-1}p) \\ &\leq \cdots \leq k^n\, d(p, Tp) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \in (0,1/2)$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa

$k^n\, d(p, Tp) \to 0$

olduğundan $c \in intK$ için $k^n\, d(p, Tp) \ll c$ olur. Lemma 3.1.19. da verilen (i) den

$d(p, Tp) \leq k^n d(p, Tp)$ ve $k^n d(p, Tp) \ll c$ olduğundan $d(p, Tp) \ll c$ olur. Lemma 3.1.19. (ii) den $Tp = p$ bulunur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde; metrik ve konik metrik uzaylarda sabit noktası var olan ve P veya Q özelliğine sahip olan bazı daralma dönüşümleri verildi. Tezin orijinal kısmı olan dördüncü bölümünde ise konik metrik uzaylarda ki bazı daralma dönüşümleri için sabit noktanın var olduğu, aynı zamanda bu dönüşümlerin P veya Q özelliğine sahip olduğunu veren teorem ve sonuçlar verilmiştir. Bu son bölüm ise elde edilen bu teorem ve sonuçların özetlenmesinden oluşmaktadır.

Teorem 5.1. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşümü

$$\|d(Tx, Sy)\| \leq k\,(\|d(x, Tx)\| + \|d(y, Sy)\|)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri (X, d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.2. Teorem 5.1. deki şartları sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar.

Sonuç 5.3. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$\|d(Tx, Ty)\| \leq k\,(\|d(x, Tx)\| + \|d(y, Ty)\|)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü (X, d) uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.4. Sonuç 5.3. deki şartları sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.5. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşümü

$$\|d(Tx, Sy)\| \leq k\,(\|d(y, Tx)\| + \|d(x, Sy)\|)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümleri (X, d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.6. Teorem 5.5. deki şartları sağlayan T ve S dönüşümleri Q özelliğini sağlar.

Sonuç 5.7. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$\|d(Tx, Ty)\| \leq k\,(\|d(x, Tx)\| + \|d(y, Ty)\|)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü (X, d) uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.8. Sonuç 5.7. deki şartları sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.9. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $a, b, c, e \geq 0$, $a + b + c + 2e < 1$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) \leq{} & a\, d(x, y) + b\, d(x, Tx) + c\, d(y, Ty) \\ & + e\,[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü (X, d) de tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.10. Teorem 5.9. daki şartları sağlayan T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.11. (X, d) tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $\beta \in [0, 1/2)$ ve $\forall x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \beta\ (d(Tx, x) + d(Ty, y))$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.12. (X, d) tam konik metrik uzay, K da normal koni olsun. $\gamma \in [0, 1/2)$ ve $\forall\ x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \gamma\ (d(Tx, y) + d(Ty, x)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.13. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + 2\beta < 1$ ve $\forall\ x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\ d(x, y) + \beta\ [d(Tx, x) + d(Ty, y)]$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.14. (X, d) bir tam konik metrik uzay, K da normal bir koni olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in X$ için $d(x, y) \in intK$ olduğunu kabul edelim.

$\varphi: intK \cup \{0\} \to intK \cup \{0\}$ tanımlanan φ fonksiyonu monoton artan, sürekli ve
i) $\varphi(t) = 0 \ \Leftrightarrow t = 0$
ii) $t \in intK$ için $\varphi(t) \ll t$
iii) $t \in intK \cup \{0\}$ ve $x, y \in X$ için ya $\varphi(t) \leq d(x, y)$ yada $d(x, y) \leq \varphi(t)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y))$$

eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.15. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Sonuç 5.16. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $0 \ll c$ olacak şekilde $c \in E$ ve $x_0 \in X$olsun. $\bar{B}(x_0, c) = \{x \in X: d(x_0, x) \leq c\}$ kapalı yuvarını alalım. Her $x, y \in \bar{B}(x_0, c)$, k $\in [0,1)$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y)$$

eşitsizliğini ve $d(Tx_0, x_0) \leq (1 - k)\, c$ şartını sağlasın. Bu durumda T dönüşüm P özelliğini sağlar.

Sonuç 5.17. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü n pozitif tamsayıları için

$$d(T^n x, T^n y) \leq k\, d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğini sağlar.

Teorem 5.18. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in (0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşüm çifti

$$d(Tx, Sy) \leq k\, (d(Tx, x) + d(Sy, y))$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşümleri (X, d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.19. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in (0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşümleri Teorem 5.18. de verilen şartları sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar.

Sonuç 5.20. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \beta\ (d(Tx, x) + d(Ty, y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Sonuç 5.21. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve p, q pozitif tamsayılar olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(T^p x, T^q y) \leq k\ (d(T^p x, x) + d(T^q y, y))$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Teorem 5.22. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşüm çifti

$$d(Tx, Sy) \leq k\ (d(Tx, y) + d(x, Sy))$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşümleri (X, d) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.23. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T, S: X \to X$ dönüşümleri Teorem 5.22. de verilen şartları sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşüm çifti Q özelliğini sağlar.

Sonuç 5.24. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \gamma(d(Tx, y) + d(Ty, x)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Sonuç 5.25. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip konik tam metrik uzay olsun. $k \in [0,1/2)$, p, q pozitif tamsayılar olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(T^p x, T^q y) \leq k\ (d(T^p x, y) + d(x, T^q y))$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Teorem 5.26. (X, d) normal olmayan bir koniye sahip tam konik metrik uzay olsun. $k, l \in [0,1)$ ve $\forall\, x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq k\ d(x, y) + l\ d(y, Tx)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Teorem 5.27. (X, d) normal olmayan koniye sahip bir tam konik metrik uzay, $T: X \to X$ e dönüşümü Tanım 4.2.13. de verilen şartı sağlayan Quasi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X de tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 5.28. (X, d) normal olmayan koniye sahip bir tam konik metrik uzay, $T: X \to X$ e dönüşümü Tanım 4.2.13. de verilen şartı sağlayan Quasi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir

KAYNAKLAR

ABBAS, M., JUNGCK, G., Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 341: 416-420, 2008.

ABBAS, M., RHOADES, B. E., Fixed and periodic point results in cone metric spaces, Appl. Math. Lett., 22: 511-515,2009.

AGARWAL, R. P., MEEHAN, M., DONAL, O'REGAN., Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press., 2001.

BAYRAKTAR, M., Fonksiyonel Analiz, ISBN: 975-442-035-1, 2000.

BOSE, S.C., Common fixed points of mappings in a uniformly convex space, J. London Math. Soc., 18: 151-156,1978.

CHOUDHURY, B. S., METIYA, N., Fixed points of weak contractions in cone metric spaces, Nonlinear Analysis, 72: 1589-1593, 2010.

CHUNG, K.-J., Some common fixed point theorems, Math Japonica, 23: 401-409,1978.

CHUGH, R., KUMAR, S., Common fixed points for weakly compatible maps, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), 111(2): 241-247, 2001.

CIRIC, LJ. B., On some nonexpansive type mappings and fixed points, Indian J. Pure Appl. Math., 24: 145-149, 1993.

CIRIC, LB. J., JOTIC, N., A further extension of maps with nonunique fixed points, Math. Vesnik, 50: 1-4,1998.

CIRIC, LB. J., UME, J. S., KHAN, M. S., PATHAK, H. K., On some nonself mappings, Math. Nachr., 251: 28-33, 2003.

CONSTANTIN, A., On fixed points in noncomplete metric spaces, Publ. Math. Debrecen, 40: 297-301, 1992.

DAS, K. M., NAIK, K., Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Proc. Amer. Math. Soc., 77: 369-373,1979.

FISHER, B., Common fixed points on complete and compact metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math., 9: 175-181, 1978.

FISHER, B., Mappings satisfying rational inequalities, Nanta Math., 12: 29-35, 1979.

FISHER, B., Results on common fixed points for compact metric spaces, Math. Student, 48: 392-395, 1980.

GOEBEL, K., KIRK, W. A., Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press., 1990.

GRANAS, A., DUGUNDJI, J., Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, 2002.

HUANG, L. G., ZHANG, X., Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 332: 1468-1476, 2007.

HUSAIN, S. A., SEHGAL, V. M., On common fixed points for a family of mappings, Bull. Australian Math. Soc., 13: 261-267,1975.

ILIC, D., RAKOCEVIC, V., Common fixed points for maps on cone metric space, J. Math. Anal. Appl., 341: 876-882, 2008.

ILIC, D., RAKOCEVIC, V., Quasi- contraction on cone metric space, Applied Mathematics Letters, 22: 728-731, 2009.

JEONG, G. S., RHOADES, B. E., Maps for which $F(T) = F(T^n)$, Fixed Point Theory and Appl., 6: 87-131, 2005.

JUNGCK, G., Commuting mapping and fixed points, Amer. Math. Monthly, 83: 261-263, 1976.

JUNGCK, G., Compatible mappings and common fixed points, Internat. J. Math. & Math. Sci., 11(2): 285-288, 1988.

JUNGCK, G., RHOADES, B. E., Fixed point for set valued functions without continuity, Indian J. Pure Appl. Math., 29(3): 227-238, 1998.

KADELBURG, Z., et al., Remarks on Quasi-contraction on a cone metric space, Appl. Math. Lett., 22: 1674-1679, 2009.

KIZMAZ, H., Fonksiyonel Analize Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi, Trabzon, 1993.

MADDOX, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press., 1970.

MUSAYEV, B., ALP, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

PACHPATTE, B. G., Some common fixed point theorems for mappings in metric spaces, Chung Yuan J., 9: 14-16, 1980.

PACHPATTE, B. G., Common fixed points of two mappings satisfying a new contractive type condition, Indian J. Pure Appl. Math., 14: 497-501, 1983.

PANDHARE, D. M., WACHMODE, B. B., Fixed point theorem for single and pair of mapping in Hilbert space, Acta Ciencia Indica, 22: 39-44, 1996.

POPA, V., Theorems of unique fixed point for expansion mappings, Demonstratio Math., 23: 213-218, 1990.

POPA, V., A general fixed point theorems for weakly compatible mappings in compact metric spaces, Turk J. Math., 25: 465-474, 2001.

PRASAD, D., Common fixed point of mappings in a uniformly convex Banach space with a new functional inequality, Indian J. Pure Appl. Math., 15: 115-120, 1984.

RADENOVIC, S., Common fixed points under contractive conditions in cone metric spaces, Computers and Mathematics with Applications, 58: 1273-1278, 2009.

RADENOVIC, S., RHOADES, B., Fixed point theorem for two non-self mappings in cone metric spaces, Computers and Mathematics with Applications, 57: 1701-1707, 2009.

RAY, B. K., On a theorem of Brian Fisher, Indian J. Pure Appl. Math., 10: 629-632, 1979.

REZAPOUR, Sh., HAMLBARANI, R., Some notes on the paper “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”, J. Math. Anal. Appl., 345: 719-724, 2008.

RHOADES, B. E., A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226: 257-290, 1977.

RHOADES, B. E., Some theorems on weakly contractive maps, Nonlinear Analysis, 47: 2683-2693, 2001.

RHOADES, B. E., SESSA, S., Common fixed point theorems for three mappings under a weak commutativity condition, Indian J. Pure Appl. Math., 17: 47-57, 1986.

SESSA, S., On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math., 32: 149-153, 1982.

SOM, T., Some fixed point theorems on metric and Banach spaces, Indian J. Pure Appl. Math., 16: 575-585, 1985.

TELCI, M., TAS, K., Some fixed point theorems for pairs of expansive type mappings, Demonstratio Math., 27: 401-405, 1994.

WANG, S., Z., LI, B. Y., GAO, Z. M., ISEKI, K., Some fixed point theorems on expansion mappings, Math. Japonica, 29: 631-639, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Hacer Demirer, 06 Şubat 1986 tarihinde Bolu'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Bolu'da tamamladı. 2004 yılında Gerede Anadolu Meslek Lisesinden mezun oldu. 2004-2005 Eğitim-Öğretim yılında başladığı Atatürk Üniversitesi, Erzincan Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki Lisans eğitimini 2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında bitirdi. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı.