T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seda ÇELİK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR**

Ağustos 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seda ÇELİK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 05 / 08 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Elman Aliyev	**Yrd.Doç.Dr.Metin Yaman**	**Yrd.Doç.Dr.Şevket Gür**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında bana zaman ayırıp değerli bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, yol gösteren ve manevi desteğini esirgemeyip bana sabırla tahammül eden değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR'e her zaman bana destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

a_m	: Pochhammer sembolü
$F\ a,b;c;z$	: Hipergeometrik fonksiyon
${}_1F_1\ a;c;z$	: Konflüent hipergeometrik fonksiyon
$H_l^{1}\ \rho$	: Birinci çeşit Henkel fonksiyonu
$H_l^{2}\ \rho$	: İkinci çeşit Henkel fonksiyonu
$H_n\ x$	: Hermit polinomu
$J_\nu\ x$	: Bessel fonksiyonu
$B\ u,v$	: Beta fonksiyonu
$P_l\ x$	: Legendre polinomu
$\Gamma\ z$	: Gamma fonksiyonu
$\gamma\ z,b$	: Tamamlanmamış Gamma fonksiyonu

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hipergeometrik Diferensiyel Denklem, Hipergeometrik Fonksiyon, Birleşik Hipergeometrik Fonksiyon

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Hipergeometrik fonksiyonların kullanım alanlarından bahsedilerek teze giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde ikinci dereceden lineer diferensiyel denklem yardımıyla Hipergeometrik diferensiyel denklemi ve Hipergeometrik fonksiyon elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde Konflüent Hipergeometrik denklem elde edilmiş, bir boyutlu harmonik salıngaç diye bilinen problem ele alınmış ve çözümleri Hipergeometrik diferensiyel denklem yardımıyla elde edilmiştir.

Beşinci bölümde Bessel diferensiyel denkleminin çözümleri Konflüent Hipergeometrik denklem yardımıyla elde edilmiştir.

Altıncı bölümde tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

HYPERGEOMETRİC FUNCTİONS

SUMMARY

Key Words: Hypergeometric Differential Equation, Hypergeometric Function, The Confluent Hypergeometric Fonction.

This thesis is consists of seven chapters.

In the first chapter, it is mentioned about the using areas of the Hypergeometric functions and there is an introduction to the thesis.

In the second chapter, main definitions and concepts used in the thesis are given.

In the third chapter, Hypergeometric differential equation and Hypergeometric function are obtained with the help of second-order differential equation.

In the fourth chapter, Confluent Hypergeometric equation is obtained, the problem known as one-dimensional Harmonic Oscillator is approached and its solutions are obtained with the aid of hypergeometric differential equation.

In the fifth chapter, the solutions of Bessel's differential equation are obtained with the aid of Confluent Hypergeometric equation.

In the sixth chapter, the results obtained from the thesis are stated.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematiksel fizik problemleri çoğu zaman katsayıları değişkenlerine bağlı olan Adi Diferensiyel Denklemler veya Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler yardımıyla ifade edilmektedir. Bu tipteki denklemlerin özelliği araştırma yapılan bölgede veya bölgenin sınır çizgisinin üzerinde katsayıların tekil olmasıdır. Yani bölgenin bazı noktalarında katsayıların sıfır olması veya belirsizlik halinde bulunmasıdır. Böyle tipteki denklemlere dönüşen fiziksel problemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor olduğu gibi bazı durumlarda çözüme ulaşmakta mümkün değildir. Problemin zorluğu, denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde aranmasından kaynaklanmaktadır. Böyle durumlarda ise karşımıza yeni bir problem çıkmaktadır. Bu da denklemin tüm özel durumları için sonsuz serinin yakınsaklığının ispatlanması ve özdeğer fonksiyonlarının ortogonalliğinin gösterilmesidir. Ayrıca matematiksel fizik probleminin çözümünün kararlılığını ispatlamak ve korumakta gerekir.

Bu cins fiziksel problemlere uyan denklemler Bessel, Legendre, Hermit, Schrödinger tipindeki denklemlerdir. Bu tipteki denklemlere fiziksel problemlerin çözümlerinde sıkça rastlanmaktadır. Örneğin bu uygulama klasik mekanik problemlerinde başlamış, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziğinde kullanılmıştır.

Bu zorlukları aşmak için bilimde birçok önemli özel fonksiyonlar sınıfı oluşturulmuştur. Bunlardan en çok kullanılan silindirik fonksiyonlar (Bessel, Hankel, Neuman fonksiyonları) , küresel fonksiyonlar (Legendre polinomları) ve özel polinomların (Hermit polinomları) oluşturduğu sınıflardır. Bu tür denklemlerin yardımıyla ve özel fonksiyonların kullanılması ile çeşitli fiziksel olaylarda yaklaşık çözümler bulmakta ve problemlere açıklık getirebilmektedir.

Bu nedenlerle konunun önemi dikkate alınarak bu tezde, Birleşik Hipergeometrik denklemi, onun çözümü olan Birleşik Hipergeometrik fonksiyonlarının özellikleri incelenerek tek bir kaynakta toplanmıştır

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $a<b$ olacak şekilde a ve b iki reel sayıyı temsil etsin. x, a ve b arasında herhangi bir reel sayı olsun. $a\leq x\leq b$ aralığında bir x değişkeni tanımlandığında bu aralıktaki x in her bir değeri için ikinci bir y değişkeninin bir ya da birden çok değeri ortaya çıkıyorsa o zaman y bu aralıkta x in bir fonksiyonudur denir ve bu fonksiyonel bağıntı

$$y=f(x)$$

şeklinde gösterilir. Eğer x in her bir değeri için y nin yalnız bir değeri varsa, o zaman y, x in tek değişkenli bir fonksiyonudur denir.

Tanım 2.2. $\forall\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ vardır öyle ki

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{iken} \quad |f(x)-y_0|<\varepsilon$$

dır. Bir fonksiyonun limitinin gösterimi

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$$

dır.

Tanım 2.3. Eğer $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$ limiti x in x_0 a yaklaşımından bağımsız ise $f(x)$, x_0 da süreklidir denir. Ayrıca bu limit $a<x_0<b$ aralığındaki her x_0 noktası için sürekli ise $f(x)$, $a<x<b$ aralığında süreklidir.

Tanım 2.4. (Tek boyutlu esnek sınırlı parçacık) x konumlu, m kütleli parçacığın bir kuvvet etkisi altındaki hareketi t anında

$$x = b\sin(\omega t + \phi) \tag{2.1}$$

ile

$$F = -m\omega^2 x \tag{2.2}$$

şeklinde verilir. Burada b ve ϕ sabitlerdir.

Tanım 2.5. Özel fonksiyonlar kuvvet serileri ile gösterilebilir. Yani bu yolla özel fonksiyonları tanımlayabiliriz. Sinüs fonksiyonu $n! = 1.2.3.4...n$ faktöriyel fonksiyonunun tanımlı olduğu yerlerde

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{2.3}$$

dır. Benzer olarak cosinüs fonksiyonu

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.6. Bir boyutlu hareket eden m kütlesinin bir taneciğinin hareketi, Newton'un ikinci hareket kanunu olarak bilinen x (yer) ve t (zaman) ye bağlı ikinci dereceden türevlenebilir denklemi

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.5}$$

dır. F kuvveti x ve t ye bağlıdır. Taneciğin Hooke kanununa uyduğunu kabul edelim. Bu durumda kuvvet (2.2) denklemiyle verilebilir. Burada ω parametresi bir sabittir. O halde (2.5) ten

$$-m\omega^2 x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2.6}$$

elde edilir. x, t nin bir fonksiyonu iken denklemin çözümünün bulunmasıdır. Diferansiyel denklemin çözümü için kullanılan metotlardan biri de kuvvet serileri yöntemidir. Bu sayede a_n in sabit katsayılar olarak belirlenmesiyle

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{s+n}$$

formunda bir çözüm bulmak amaçlanır. (2.6) denkleminde x in yerine yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s+n)(s+n-1)\, t^{s+n-2} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{s+n} = 0$$

elde edilir.

Bu denklem içindeki ilk toplamda $n' = n-2$ ile toplamın indisini tekrar tanımlanırsa

$$a_0 s(s-1)\, t^{s-2} + a_1 (s+1)\, s t^{s-1} + \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'+2} (s+n'+2)(s+n'+1)\, t^{s+n'} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{s+n} = 0$$

elde edilir. n' yapay bir indis olduğundan, ilk sayı alınır ve iki toplam birleştirilirse

$$a_0 s(s-1)\, t^{s-2} + a_1 (s+1)\, s t^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(s+n+2)(s+n+1)\, a_{n+2} + \omega^2 a_n \right] t^{s+n} = 0$$

elde edilir. Bu denklem t nin bütün değerleri için sağlanır, bundan dolayı t nin farklı kuvvetlerinin katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlenmelidir. Bu,

$$s(s-1)a_n = 0 \tag{2.7a}$$

$$s(s+1)a_1 = 0 \tag{2.7b}$$

$$(s+n+2)(s+n+1)a_{n+2} + \omega^2 a_n = 0 \tag{2.7c}$$

şeklinde verilir.

İlk olarak bu denklemlerden ilk ikisinin yardımıyla a_0 ve a_1 keyfi durumları içinde $s=0$ alınır. s nin bu seçimi ile üçüncü denklemden

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}\omega^n}{n!}a_0, n = 0,2,4,... \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\omega^{n-1}}{n!}a_1, n = 1,3,5,.. \end{cases}$$

elde edilir. O halde (2.6) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\omega^n t^n}{n!} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\omega^{n-1} t^n}{n!} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu toplamın indisi yeniden tanımlandığında

$$x(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

çözümü elde edilir.

Eğer $\omega t = \theta$ şeklinde alınırsa (2.3) ve (2.4) denklemleriyle aynı serilerin elde edildiği görülebilir. O halde (2.6) denkleminin çözümü

$$x(t) = a_0 \cos\omega t + \frac{a_1}{\omega}\sin\omega t$$

şeklinde yazılabilir.

İkinci dereceden bir diferansiyel denklemin genel çözümü, iki lineer bağımsız çözümün toplamı olduğundan bu çözüm keyfi sabitler değiştirilerek

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (2.8)$$

şeklinde yeniden yazılır. Burada A ve B sabitleri başlangıçtaki koşulları sağlar. $t=0$ anında v_0 hızı ile parçacığın x_0 noktasında olduğunu kabul edelim. $t=0$ ile (2.8) denklemi

$$x(0) = A = x_0$$

haline gelir. $t=0$ da (2.8) denklemi diferansiyellenir ise

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \omega B = v_0$$

hız elde edilir. A ve B değerleri (2.8) de yerine yazılırsa

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \qquad (2.9)$$

elde edilir.

Tanım 2.7. $z>0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Gamma fonksiyonu için

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

yazılabilir. Gerçekten,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^z e^{-t}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-t^z e^{-t}\right)\Big|_0^b + z\int_0^b t^{z-1}e^{-t}\,dt\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[b^z e^{-b}\right] + z\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b t^{z-1}e^{-t}\,dt\right],\ z>0$$

$$= z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.11}$$

dir. Bu özellik yardımıyla gamma fonksiyonu için argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde, diğer aralıktaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanır.

Tanım 2.8. $z>0$ ise Gamma fonksiyonu $\Gamma(1) = 0! = 1$ olmak üzere

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2.12}$$

faktöriyel fonksiyonu ile özdeştir.

Tanım 2.9. (2.10) denkleminde t ile ax in ($a>0$)ve z ile $z+1$ in değiştirilmesiyle, a nın x ten bağımsız olduğu yerlerde,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty (ax)^{z+1-1} e^{-ax}\,dax$$

$$= a^{z+1}\int_0^\infty x^z e^{-ax}dx = \Gamma(z+1)$$

$$\int_0^\infty x^z e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(z+1)}{a^{z+1}} \tag{2.13}$$

elde edilir.

Tanım 2.10. (2.10) denkleminde $s = e^{-t}$ değişken değişikliği ile gamma fonksiyonunun diğer bir integral gösterimi

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\log s^{-1}\right)^{z-1} ds \tag{2.14}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.11. (2.10) denkleminde ki integral tanımından x ve y pozitif olmak üzere, iki Gamma fonksiyonunun çarpımı için bir formül

$$\Gamma(x+y) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x+y-1}dt$$

şeklinde elde edilir. $p > -1$ olmak üzere $s = \dfrac{t}{1+p}$ değişken değişikliği ile bu integral

$$\Gamma(x+y) = \int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(x+y) = \int_0^\infty \left[(1+p)s\right]^{x+y-1} e^{-(1+p)s}ds$$

$$\Gamma(x+y) = (1+p)^{x+y}\int_0^\infty s^{x+y-1}e^{-(1+p)s}ds$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafı $\dfrac{p^{x-1}}{(1+p)^{x+y}}$ ile çarpılır p ye göre integral alınırsa

$$\Gamma(x+y)\int_0^\infty p^{x-1}(1+p)^{-x-y}dp=\int_0^\infty e^{-s}s^{x+y-1}\left(\int_0^\infty e^{-ps}p^{x-1}dp\right)ds \tag{2.15}$$

elde edilir. Parantezin içindeki integral $s^{-x}\Gamma(x)$ olduğunda (2.13) yardımıyla (2.15) in sağ tarafı

$$\Gamma(x)\int_0^\infty e^{-s}s^{y-1}ds=\Gamma(x)\Gamma(y)$$

haline gelir. Buradan (2.15)

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)\int_0^\infty p^{x-1}(1+p)^{-x-y}dp \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir.

Özel bir durum olarak , $0<x<1$ aralığında $y=1-x$ alınırsa,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\Gamma(x+1-x)\int_0^\infty p^{x-1}(1-p)^{-x-1+x}dp$$

$$=\Gamma(1)\int_0^\infty p^{x-1}(1-p)^{-1}dp$$

$$=\Gamma(1)\int_0^\infty \frac{p^{x-1}}{1-p}dp$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int_0^\infty \frac{p^{x-1}}{1+p}dp \tag{2.17}$$

elde edilir.

$t=\dfrac{p}{1+p}$ değişken değişikliği ile (2.16) denklemindeki integral

$$\int_0^\infty p^{x-1}(1+p)^{-x-y}dp=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.18}$$

şekline dönüştürülür.

Tanım 2.12. (2.18) deki sonuç ile Gamma fonksiyonlarının çarpımı

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.19}$$

şeklindedir. $t=\cos^2\theta$ olmak üzere

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-2}(1-\cos^2\theta)^{y-1}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=2\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta \tag{2.20}$$

elde edilir.

$\mu=x-\dfrac{1}{2}$ ve $\nu=y-\dfrac{1}{2}$ olarak alınırsa (2.20)

$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=2\Gamma(\mu+\nu+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\mu}(\sin\theta)^{2\nu}d\theta \tag{2.21}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.13. (2.21) denkleminde $\mu=\nu=0$ olsun. O halde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\Gamma(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$= 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$= \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (2.22)$$

elde edilir.

Tanım 2.14. (2.19) da $x = y = z$ alınırsa

$$\Gamma(z)\Gamma(z) = \Gamma(2z)\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt$$

elde edilir. $u = 2t - 1$ değişken değiştirmesi ile de

$$\Gamma(z)\Gamma(z) = \Gamma(2z)\int_{-1}^{1}\left(\frac{u+1}{2}\right)^{z-1}\left(1-\left(\frac{u+1}{2}\right)\right)^{z-1}\frac{1}{2}du$$

$$= \Gamma(2z)\int_{-1}^{1}\left(\frac{u+1}{2}\right)^{z-1}\left(\frac{1-u}{2}\right)^{z-1}\frac{1}{2}du$$

$$= \Gamma(2z)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-u^2}{4}\right)^{z-1}\frac{1}{2}du$$

$$= 2^{1-2z}\Gamma(2z)\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{z-1}du$$

elde edilir.

O halde integral u nun bir çift fonksiyonu olduğundan

$$\Gamma(z)\Gamma(z) = 2^{2-2z}\Gamma(2z)\int_0^1 (1-u^2)^{z-1}du$$

elde edilir. $v = u^2$ değişken değiştirmesi ile de integral

$$\Gamma(z)\Gamma(z) = 2^{1-2z}\Gamma(2z)\int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{z-1}dv$$

şeklinde elde edilir. Buradan (2.19) denklemi yardımıyla

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2z}\Gamma(2z) \tag{2.23}$$

elde edilir. Bu gösterim Gamma fonksiyonu için çoğaltma formülü olarak adlandırılır.

Tanım 2.15.

$$\frac{1}{2}C\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt = 1 \tag{2.24}$$

denkleminden (2.11) ve (2.12) yardımıyla

$$\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{2.25}$$

integrali elde edilir. Bu sonuç ile (2.24) deki C sabiti

$$C = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}$$

değerini alır.

BÖLÜM 3. GAUSS DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

3.1. Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyon

α, β ve γ lar reel ya da kompleks sabitler olmak üzere,

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+... \quad (3.1)$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri, $1+x+x^2+x^3+...$ geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan "hipergeometrik seri" adını alır. (3.1) den görülmektedir ki γ değeri sıfır ya da negatif bir tam sayı olmamalıdır. (3.1) hipergeometrik serisi $|x|<1$ için yakınsak, $|x|>1$ için ise ıraksaktır. $|x|=1$ için eğer $\gamma>\alpha+\beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $x=-1$ iken $\gamma>\alpha+\beta-1$ ise seri yakınsaktır. Şimdi aşağıdaki gösterimi tanımlayalım:

α reel ya da kompleks bir sayı, r sıfır ya da pozitif bir tam sayı olmak üzere $(\alpha)_r$ ifadesi

$$(\alpha)_r=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+r-1) \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. "Pochhammar Sembolü" olarak bilinen bu ifade aşağıdaki özelliklere sahiptir. Diğer özellikler ise tablo 3.1 de verilmektedir.

$$(\alpha)_r=\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.3)$$

$$(\alpha)_{r+1} = \alpha(\alpha+1)_r \tag{3.4}$$

(3.3) ve (3.4) eşitlikleri aşağıdaki şekilde kolaylıkla açıklanabilirler. Gamma fonksiyonunun bilinen özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+r) &= (\alpha+r-1)\Gamma(\alpha+r-1) \\
&= (\alpha+r-1)(\alpha+r-2)\Gamma(\alpha+r-2) \\
&= (\alpha+r-1)(\alpha+r-2)(\alpha+r-3)\Gamma(\alpha+r-3) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots \\
&= (\alpha+r-1)(\alpha+r-2)(\alpha+r-3)\ldots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) \\
&= (\alpha)_r\,\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile bölünürse (3.3) ifadesi elde edilir. (3.4) ise,

$$\begin{aligned}
(\alpha)_{r+1} &= \frac{\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(\alpha+r+1)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\
&= \alpha\frac{\Gamma[(\alpha+1)+r]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \alpha(\alpha+1)_r
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmektedir. Özel olarak (3.3) de $r=0$ alınırsa $(\alpha)_0 = 1$ dir. (3.4) gösterimi dikkate alınarak (3.1) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{r!(\gamma)_r} x^r \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. (3.5) de görülen F nin her iki yanındaki 2 ve 1 alt indisleri yapısında biri α diğeri γ olmak üzere iki tip parametre olduğunu ifade eder. (3.5) in genelleştirilmiş ifadesi

$$ {}_pF_q\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_q;x\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r\ldots(\alpha_p)_r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r\ldots(\gamma_q)_r}\frac{x^r}{r!} \tag{3.6} $$

şeklindedir.

Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ sembolü yerine daha basit olması için sadece F kullanılır. Yani $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ ifadesi hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır. (3.5) den açıkça görülmektedir ki hipergeometrik fonksiyon α ve β ya göre simetriktir. Yani

$$ F(\alpha,\beta,\gamma;x)=F(\beta,\alpha,\gamma;x) \tag{3.7} $$

dir.

Hipergeometrik fonksiyonun türevi (3.5) den

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma;x) &= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(r-1)!(\gamma)_r}x^{r-1} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{r+1}(\beta)_{r+1}}{r!(\gamma)_{r+1}}x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)_r\,\beta(\beta+1)_r}{r!\gamma(\gamma+1)_r}x^r \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_r(\beta+1)_r}{r!(\gamma+1)_r}x^r \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x) \end{aligned} $$

şeklinde elde edilebilir. Yani

$$\frac{d}{dx}F\left(\alpha,\beta,\gamma;x\right)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F\left(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x\right) \tag{3.8}$$

olur.

(3.5) ve (3.8) den $x=0$ için F nin ve F nin türevinin değerlerinin

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma;x\right)=1 \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dx}F\left(\alpha,\beta,\gamma;x\right)=\frac{\alpha\beta}{\gamma} \tag{3.10}$$

olduğu görülmektedir. Tanıdığımız pek çok fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden elde etmek mümkündür.

Tablo 3.1. Pochhammer sembolleri ile ilgili özdeşlikler

1.	$n!= n-m\ !\ n-m+1\ _{m}$
2	$c-m+1\ _{m} = -1\ ^{m}\ -c\ _{m}$
3.	$n+m\ != n!\ n+1\ _{m}$
4.	$n!= m!\ m+1\ _{n-m}$
5.	$2n-2m\ != 2^{2n-2m}\ n-m\ !\left(\frac{1}{2}\right)_{n-m}$
6.	$c\ _{n+m} = c\ _{n}\ c+n\ _{m}$
7.	$c\ _{n} = -1\ ^{m}\ c\ _{n-m}\ -c-n+1\ _{m}$
8.	$c\ _{n} = -1\ ^{n-m}\ c\ _{m}\ -c-n+1\ _{n-m}$
9.	$-n\ _{m-k} = -n\ _{m-n}\ m-2n\ _{n-k}$

3.2. Gauss Diferansiyel Denklemi (Hipergeometrik Denklem)

İkinci basamaktan lineer diferansiyel denklemler içinde sadece üç tane düzgün aykırı noktaya sahip olan denklemler belirli değişken değiştirmelerden sonra

$$x(1-x)y''+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]y'-\alpha\beta y=0 \qquad (3.11)$$

şekline dönüştürülebilmektedir. Gauss diferansiyel denklemi ya da hipergeometrik denklem olarak bilinen (3.11) denkleminde α,β ve γ lar parametrelerdir. (3.11) denklemi $0,1$ ve ∞ olmak üzere üç tane düzgün aykırı noktaya sahiptir. Şimdi bu denklemi $x=0$ düzgün aykırı noktasında serilerle çözelim. (3.11) denkleminin bir Frobenius serisi çözümü

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{m+n}=x^m\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots\right)$$

şeklinde olmalıdır. Türevler alınıp denklemde yerlerine yazılırsa

$$m(m+\gamma-1)c_0x^{m-1}+\left\{(m+1)(m+\gamma)c_1-\left[m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta\right]c_0\right\}x^m+\ldots+$$
$$+\left\{(m+n)(m+n+\gamma-1)c_n-\left[(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta\right]c_{n-1}\right\}x^{m+n-1}+\ldots=0$$

olur. Buradan

$$c_n=\frac{(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta}{(m+n)(m+n+\gamma-1)}c_{n-1} \qquad (3.12)$$

indirgeme formülü elde edilir. Karşılık gelen

$$\bar{y}=c_0x^m\left[1+\frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)}x+\frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)}\frac{(m+1)(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+2)(m+\gamma+1)}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)}\frac{(m+1)(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+2)(m+\gamma+1)}\frac{(m+2)(m+\alpha+\beta+2)+\alpha\beta}{(m+3)(m+\gamma+2)}x^3+..\right]$$
(3.13)

fonksiyonu

$$x(1-x)\bar{y}''+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\bar{y}'-\alpha\beta\bar{y}=m(m+\gamma-1)c_0x^{m-1} \tag{3.14}$$

denklemini gerçekler. Yani (3.11) diferansiyel denklemine ait indisel denklem

$$m(m+\gamma-1)=0$$

olup kökleri

$$m_1=0 \text{ ve } m_2=1-\gamma$$

dır. $c_0=1$ alınarak $m_1=0$ köküne karşılık gelen çözüm (3.13) den

$$y_1=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots \tag{3.15}$$

olarak elde edilir.

$m_2=1-\gamma$ köküne karşılık gelen çözüm ise yine (3.13) de $c_0=1$ ve $m=1-\gamma$ yerine yazılarak

$$y_2=x^{1-\gamma}\left[1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{1\cdot(2-\gamma)}x+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{1\cdot2\cdot(2-\gamma)(3-\gamma)}x^2\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\alpha-\gamma+3)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)(\beta-\gamma+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot(2-\gamma)(3-\gamma)(4-\gamma)}x^3+\dots\right] \tag{3.16}$$

olarak bulunacaktır.

Önceden tanıdığımız hipergeometrik fonksiyon dikkate alınarak y_1 ve y_2 çözümlerini bu fonksiyon cinsinden

$$y_1=F(\alpha,\beta,\gamma;x) \tag{3.17}$$

$$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;x) \tag{3.18}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Böylece γ parametresi sıfır ya da herhangi bir pozitif tam sayı olmadığı sürece (3.11) Gauss diferansiyel denkleminin genel çözümü;

$$y = Ay_1 + By_2 = AF(\alpha, \beta, \gamma; x) + Bx^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x)$$

olarak bulunur. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. Bu genel çözüm $|x| < 1$ için geçerlidir

3.3. Hipergeometrik Fonksiyon İçin Bir İntegral Formülü

Hipergeometrik fonksiyonun sağladığı çok değişik bağıntılar bulunmaktadır. Bunlardan biri de bu fonksiyonun bir integral ifadesiyle gösterimidir.Beta fonksiyonunun

$$\mathrm{B}(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\, dx$$

tanımından ve Pochhammar sembolünün özelliklerinden dolayı

$$\frac{(\beta)_r}{(\gamma)_r} = \frac{\mathrm{B}(\beta + r, \gamma - \beta)}{\mathrm{B}(\beta, \gamma - \beta)} = \frac{1}{\mathrm{B}(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma - \beta - 1} t^{\beta + r - 1} dt$$

yazılabilir ki buradan

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\beta, \gamma - \beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!} x^r \int_0^1 (1-t)^{\gamma - \beta - 1} t^{\beta + r - 1} dt$$

olup bu ifadede toplam ile integrasyon işleminin sırası değiştirilirse

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma - \beta - 1} t^{\beta - 1} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!} (xt)^r \right\} dt$$

olur. Diğer taraftan $(1-xt)^{-\alpha}$ nın binom açılımından dolayı

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}(xt)^r=(1-xt)^{-\alpha}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1(1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt \tag{3.19}$$

ifadesini elde ederiz. Hipergeometrik fonksiyonun bir integral ifadesine göre (3.19) formülü $|x|<1$ ve $0<\beta<\alpha$ için geçerlidir.

3.4. Hipergeometrik Fonksiyonların Bazı Özellikleri

(3.19) ile elde ettiğimiz integral formülünde $x=1$ yazılırsa

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1)=\frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1(1-t)^{\gamma-\beta-1-\alpha}t^{\beta-1}dt=\frac{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\alpha-\beta)}{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)}$$

ifadesi elde edilir. $\gamma-\alpha-\beta>0$ ve $\beta>0$ için geçerli olan bu son ifade Gamma fonksiyonu cinsinden yazılırsa

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{3.20}$$

“Gauss Formülü” elde edilir. n pozitif bir tam sayı olmak üzere $\alpha=-n$ için

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}=(\gamma-\beta)_n \text{ ve } \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=(\gamma)_n$$

olduğu göz önünde tutularak (3.20) formülünde $\alpha=-n$ konulursa

$$F(-n,\beta,\gamma;1)=\frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \tag{3.21}$$

eşitliği elde edilir ki bu ifade elementer matematikte “Vandermande Formülü” olarak bilinir.

(3.19) integral formülünde $x=-1$ ve $\alpha=1+\beta-\gamma$ alınırsa

$$F(\alpha,\beta,\beta-\alpha+1;-1)=\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1(1-t)^{-\alpha}t^{\beta-1}dt$$

olup ikinci yandaki integral ifadesinde $\xi=t^2$ değişken değiştirmesi yapılırsa, integralin değeri $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\beta}{2},1-\alpha\right)$ olur ve eşitlikten

$$F(\alpha,\beta,\beta-\alpha+1;-1)=\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\beta}{2}\right)} \tag{3.22}$$

“Kummer Formülü” elde edilir.

(3.19) integral formülünde $\tau=1-t$ dönüşümü yapılarak x argümentli hipergeometrik fonksiyon $\frac{x}{x-1}$ argümentli hipergeometrik fonksiyon cinsinden elde etmek mümkündür.

$$\{1-x(1-\tau)\}^{-\alpha}=(1-x)^{-\alpha}\left\{1-\left(\frac{x}{x-1}\right)\tau\right\}^{-\alpha}d\tau$$

olduğundan (3.19) ifadesi

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{(1-x)^{-\alpha}}{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\gamma-\beta-1}\left\{1-\left(\frac{x}{x-1}\right)\tau\right\}d\tau$$

$$=\frac{(1-x)^{-\alpha}}{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)}\mathrm{B}(\gamma-\beta,\beta)F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{x}{x-1}\right)$$

$$=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{x}{x-1}\right)$$

şeklinde yazılabilecektir. Böylece

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{x}{x-1}\right) \tag{3.23}$$

elde edilir. F nin ilk iki parametreye göre simetrik olmasından dolayı (3.23) yerine

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=(1-x)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma;\frac{x}{x-1}\right) \tag{3.24}$$

bağıntısı da yazılabilir. Yine simetriden ve (3.23) ile (3.24) bağıntılarından

$$F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{x}{x-1}\right)=F\left(\gamma-\beta,\alpha,\gamma;\frac{x}{x-1}\right)=(1-x)^{\gamma-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma;x)$$

olup buradan

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x) \tag{3.25}$$

bağıntısı elde edilir. (3.23) formülünde $x=\frac{1}{2}$ konulduğunda

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{1}{2}\right)=2^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;-1)$$

bağıntısı elde edilir.

3.5. Gauss Diferansiyel Denklemine Dönüştürülebilen Denklemler

Gauss denklemi (3.11) ifadesinde görüldüğü gibi y'', y' ve y nin katsayıları sırasıyla ikinci, birinci ve sıfırıncı dereceden polinom olup y'' nün katsayısı daima farklı reel köklere sahiptir.

$$\left(Ax^2+Bx+C\right)y''+\left(Dx+E\right)y'+Fy=0 \tag{3.26}$$

denkleminde eğer $B^2-4AC>0$ ise y'' nün katsayısı birbirinden farklı iki reel köke sahip olacaktır. Bu kökler x_1 ve x_2 ile gösterilirse (3.26) diferansiyel denklemi

$$\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)y''+\left(mx+n\right)y'+\lambda y=0 \tag{3.27}$$

şeklinde yazılabilecektir. (3.27) durumuna getirilmiş denkleme aşağıdaki dönüşümlerden herhangi biri uygulanırsa dönüşüm sonucunda Gauss diferansiyel denklemi elde edilir.

Dönüşüm 1: $u=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ veya $x=x_1+\left(x_2-x_1\right)$ (3.28)

Dönüşüm 2**:** $u=\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}$ veya $x=x_2+\left(x_1-x_2\right)$ (3.29)

Bu dönüşümlerden birincisi uygulandığı zaman (3.26) diferansiyel denkleminin $x=x_1$ noktası komşuluğunda bir çözümü ikinci dönüşüm uygulandığı zaman ise $x=x_2$ noktası komşuluğundaki bir çözümü elde edilmiş olacaktır. Her iki dönüşüm sonucunda da (3.26) diferansiyel denkleminin u bağımsız değişkenine göre alacağı yeni şekil

$$u\left(u-1\right)\frac{d^2y}{du^2}+\left[\gamma-\left(\alpha+\beta+1\right)u\right]\frac{dy}{du}-\alpha\beta y=0$$

Gauss diferansiyel denklemidir.

BÖLÜM4. KONFLÜENT HİPERGEOMETRİK DENKLEM

4.1. Konflüent Hipergeometrik Denklem

$xy''+\ \gamma - x\ \ y' - \alpha y = 0$ diferansiyel denklemi hipergeometrik denklemden bir limit işlemi ile (sonlu bir tekil noktasının sonsuzdaki tekil nokta ile birleştirilmesi) elde edilebilir ve konflüent hipergeometrik denklem olarak isimlendirilir.(3.11) hipergeometrik denklemi $x = \dfrac{\xi}{\beta}$ dönüşümü ile

$$\xi\left(1-\frac{\xi}{\beta}\right)\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left\{\gamma-\left(1+\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\xi\right\}\frac{dy}{d\xi}-\alpha y=0 \qquad (4.1)$$

denklemine dönüşür ve bir çözümü ${}_2F_1\left(\alpha,\beta,\gamma;\dfrac{\xi}{\beta}\right)$ olur. O halde $\lim\limits_{\beta\to\infty} {}_2F_1\left(\alpha,\beta,\gamma;\dfrac{\xi}{\beta}\right)$ fonksiyonu $\beta \to \infty$ için (4.1) denkleminden elde edilen

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2}+\ \gamma-\xi\ \ \frac{dy}{d\xi}-\alpha y=0 \qquad (4.2)$$

denkleminin bir çözümü olur. $\beta\ _n$ Pochhammar sembolü tanımından

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{\beta\ _n}{\beta^n}=\lim_{\beta\to\infty}\frac{\beta\ \ \beta+1\ \ldots\ \ \beta+n-1}{\beta^n}=1$$

limiti kullanılarak

$$\lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{\xi}{\beta}\right)=\lim_{\beta\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{\beta^n n!\,(\gamma)_n}\xi^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\,\xi^n}{n!\,(\gamma)_n}$$

yazılabilir. Bu çözüm ${}_1F_1(\alpha,\gamma;\xi)$ ile gösterilir ve konflüent (birlikte akan) hipergeometrik fonksiyon denir. (4.2) denklemi de konflüent hipergeometrik denklem olarak adlandırılır.
(4.1) denkleminin $\xi=0,\xi=\beta$ ve $\xi=\infty$ olmak üzere üç tane düzenli tekil noktası vardır. $\beta\to\infty$ limit alınırsa $\xi=\beta$ noktasındaki tekil nokta sonsuzdaki tekil nokta ile birleşir, fakat artık sonsuzdaki bu nokta düzenli olmaz. Böylece, iki düzenli tekil noktanın sonsuzda birleşmesinin düzensiz tekil bir nokta ürettiğini görmüş olduk.

$$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0 \qquad (4.3)$$

denkleminin indis denklemi $m(m+\gamma+1)=0$ dır ve γ sıfır veya negatif bir tam sayı değilse

$${}_1F_1(\alpha,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\,x^n}{(\gamma)_n\,n!}$$

çözümü $m=0$ köküne karşılık gelir. Bu seri x in bütün reel değerleri için analitik bir fonksiyondur. Yine

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{n+\alpha}{(n+1)(n+\beta)}\,,\ n\geq 0$$

rekürans bağıntısına oran testi uygulanarak $|x|<\infty$ için yakınsaklığı kolayca görülebilir.
Eğer γ pozitif bir tam sayı değilse ikinci $m=1-\gamma$ köküne karşılık gelen çözüm

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty} (a)_n x^n$$

biçiminde olacaktır.

$y_2(x) = x^{1-\gamma}u(x)$ yazar ve (4.3) denkleminde yerine koyarsak u fonksiyonu

$$xu'' + (2-\gamma-x)u' - (\alpha-\gamma+1)u = 0$$

denklemini sağlar. Bu denklem $\alpha \to \alpha-\gamma+1$ ve $\gamma \to 2-\gamma$ dönüşümleri ile (4.3) denklemine denk olur. O halde $u = {}_1F_1(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; x)$ yazılabilir ve

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\,{}_1F_1(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; x)$$

olur. Böylece $\gamma \neq 0, \mp 1, \ldots$ iken (4.3) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1\,{}_1F_1(\alpha, \gamma; x) + c_2\,{}_1F_1(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; x)$$

şeklindedir. Yine $\gamma = 1$ için ikinci çözüm değiştirilmelidir. (4.3)denkleminde $y = e^x u(x)$ dönüşümü yapılırsa

$$xu'' + (\gamma+x)u' - (\gamma-\alpha)u = 0$$

bulunur. Ayrıca, $x = -t$ dönüşümü ile bu denklemden

$${}_1F_1(\alpha-\gamma, \gamma; -x) = e^{-x}\,{}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$$

"Kummer bağıntısı" elde edilir.

Örnek 4.1. $\dfrac{d^2}{dx^2}F(a,b,c;x) = \dfrac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}F(a+2, b+2, c+2; x)$ eşitliğinin varlığını gösterelim.

$$F(a,b,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n$$

x ’e göre iki kez türev alalım.

$$\frac{d^2}{dx^2}F(a,b,c;x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}n(n-1)x^{n-2}$$

$$n\to n+2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+2}(b)_{n+2}}{(c)_{n+2}(n+2)!}(n+2)(n+1)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+2}(b)_{n+2}}{(c)_{n+2}n!}x^n$$

$$(a)_{n+2}=a(a+1)(a+2)_n=a(a+1)(a+2)\ldots(a+n+2-1)$$
$$(b)_{n+2}=b(b+1)(b+2)_n$$
$$(c)_{n+2}=c(c+1)(c+2)_n$$

bilinenler kullanılırsa

$$\frac{d^2}{dx^2}F(a,b,c;x)=\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2)_n(b+2)_n}{(c+2)_n n!}x^n$$
$$=\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}F(a+2,b+2,c+2;x)$$

elde edilir.

Örnek 4.2. Legendre diferansiyel denkleminde $x=1-2u$ değişken değiştirmesi yaparak $P_k(k)$ Legendre polinomunu hipergeometrik fonksiyon cinsinden elde edelim. Legendre diferansiyel denklemi

$$(1-x^2)y''-2xy'+k(k+1)y=0 \qquad (4.4)$$

olup $1-x^2=0$ ın kökleri $x_1=1$ ve $x_2=-1$ dir.

$$u=\frac{x-1}{-1-1}=\frac{x-1}{-2}=\frac{1-x}{2}\Rightarrow x=1-2u$$

dönüşümü uygulanırsa

$$1-x^2=1-\;1-2u\;^2=1-1+4u-4u^2=4u\;1-4u$$

elde edilir. Türevler ise

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{dy}{du}$$
$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{du^2}$$

şeklinde değişeceğinden bu sonuçların Legendre diferansiyel denkleminde yerlerine yazılmasıyla

$$4u\;1-u\;\frac{1}{4}\frac{d^2y}{du^2}-2\;1-2u\;\left(-\frac{1}{2}\frac{dy}{du}\right)4k\;\;k+1\;\;y=0$$

ya da

$$u\;\;u-1\;\frac{d^2y}{du^2}+\;1-2u\;\frac{dy}{du}+k\;\;k+1\;\;y=0$$

Gauss diferansiyel denklemi elde edilmiş olacaktır. Parametreler arasında

$$\gamma=1\;,\;\alpha+\beta+1=2,\;-\alpha\beta=k\;\;k+1$$

α ve β için $\alpha+\beta=1\;,\;\alpha\beta=-k\;\;k+1$

bağıntıları vardır. Bu eşitliklerden (İkinci dereceden bir denklem $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ dır.) $t^2 - t - k(k+1) = 0$ ise

$$t_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1+4k(k+1)}}{2} = \frac{1 \mp (2k+1)}{2} = \begin{cases} k+1 \\ -k \end{cases}$$

$t_1 = \alpha = k+1$, $t_2 = \beta = -k$ yani $\alpha = k+1$, $\beta = -k$, $\gamma = 1$ bulunur. Buradan (4.4) denklemine karşılık gelen genel çözüm

$$y = c_1 F\left(k+1, -k, 1; \frac{1-x}{2}\right) + c_2 F\left(k+1, -k, 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

şeklinde olmalıdır. Ancak burada bir tek lineer bağımsız çözüm görülmektedir. k nın sıfır ya da pozitif bir tam sayı olması halinde bu çözüm

$$F\left(k+1, -k, 1; \frac{1-x}{2}\right) = P_k(x) \tag{4.5}$$

Legendre polinomlarıdır. İkinci lineer bağımsız çözüm olan $Q_k(x)$ buradan elde edilememiştir. Çünkü Gauss denkleminin çözümünün geçerli olması için gerekli koşullar sağlanmamaktadır.

Örnek 4.3. $(2x^2 - 3mx + m^2)y'' + (3x - 5m)y' + 4y = 0$, $m \neq 0$ diferansiyel denkleminin $x = m$ noktası komşuluğundaki genel çözümünü hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden elde edelim.

y'' nün katsayısı daima farklı reel köklere sahiptir. $2x^2 - 3mx + m^2 = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

$$x_{1,2} = \frac{3m \mp \sqrt{9m^2 - 8m^2}}{4}$$

olup $x_1 = m$ ve $x_2 = \dfrac{m}{2}$ bulunur.

$$u=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Rightarrow u=-\frac{2\;\;x-m}{m}$$

$$u=2-\frac{2}{m}x\Rightarrow du=-\frac{2}{m}dx\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{2}{m}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}-\frac{2}{m}\frac{dy}{du}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{m^2}\frac{d^2y}{du^2}$$

bulduğumuz bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$u\;\;u-1\;\frac{d^2y}{du^2}+\left(-2-\frac{3}{2}\right)u\frac{dy}{du}-2y=0$$

hipergeometrik denklemi elde edilir.

$$x\;\;1-x\;\;y''\left[\gamma-\;\;\alpha+\beta+1\;\;x\right]y'-\alpha\beta y=0$$

$\gamma=-2$, $\alpha+\beta+1=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=2$ denklemlerinden α ve β değerlerini elde edelim.

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}\;,\;\alpha\beta=2$$

$$x^2-\;\;x_1+x_2\;\;x+x_1x_2=0$$

$$x^2-\frac{1}{2}x+2=0$$

$\Delta<0$ ise reel kök yoktur. O halde kompleks kökler

$$x_{1.2}=\frac{\frac{1}{2}\mp i\sqrt{\frac{31}{4}}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\mp\frac{i}{2}\sqrt{31}}{2}$$

$$\alpha=\frac{1+i\sqrt{31}}{4}\;,\;\beta=\frac{1-i\sqrt{31}}{4}\;,\;\gamma=-2$$

olarak bulunur. Hipergeometrik denklemin genel çözümü ise

$$y = AF\left(\alpha,\beta,\gamma;x\right) + Bx^{1-\gamma}F\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;x\right)$$

şeklinde idi.

$$y = y(u) = AF\left(\frac{1+i\sqrt{31}}{4},\frac{1-i\sqrt{31}}{4},-2;u\right) + Bu^3F\left(\frac{13+i\sqrt{31}}{4},\frac{13-i\sqrt{31}}{4},4;u\right)$$

$u = 2 - \dfrac{2}{m}x$ idi. O halde

$$y = y(x) = AF\left(\frac{1+i\sqrt{31}}{4},\frac{1-i\sqrt{31}}{4},-2;2-\frac{2}{m}x\right)$$
$$+B\left(2-\frac{2}{m}x\right)^3 F\left(\frac{13+i\sqrt{31}}{4},\frac{13-i\sqrt{31}}{4},4;2-\frac{2}{m}x\right)$$

istenen çözümdür.

Örnek 4.4. $9\left(1-z^2\right)w''-2w=0$ denkleminde $z^2 = x$ dönüşümünü kullanarak hipergeometrik denkleme dönüştürünüz ve $z=0$ noktası komşuluğundaki genel çözümü elde edelim.

$$z^2 = x \Rightarrow z = \sqrt{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow \frac{dx}{dz} = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dz} = 2\sqrt{x}\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d^2w}{dx^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \frac{dw}{dx}\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{d^2w}{dx^2}4x + 2\frac{dw}{dx}$$

türevlerini denklemde yerlerine yazarsak

$$9\ 1-x^2\ \left[\frac{d^2w}{dx^2}4x+2\frac{dw}{dx}\right]-2w=0$$

$$x\ 1-x\ \ y''+\left[\gamma-\ \ \alpha+\beta+1\ \ x\right]y'-\alpha\beta y=0$$

şeklinde bir denklem

$$36x\ \ 1-x\ \ w''+18\ \ 1-x\ \ w'-2w=0$$

$$x\ \ 1-x\ \ w''+\frac{1}{2}\ \ 1-x\ \ w'-\frac{1}{18}w=0$$

olarak elde edilir.

$$\gamma=\frac{1}{2}\ ,\ \alpha+\beta+1=\frac{1}{2}\ ,\ \alpha\beta=\frac{1}{18}$$

denklemlerinden $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{1}{6}$, $\gamma=\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Genel çözüm

$$w=AF\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{2};x\right)+Bx^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{3}{2};x\right)$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.5. $1-x^2\ \ y''+\left[\ b-a\ -\ a+b+2\ \ x\right]y'+n\ \ a+b+n+1\ \ y=0$

Jacobi diferansiyel denkleminin $x=1$ noktası komşuluğundaki genel çözümünü hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazalım.

Denklem -1 ile çarpılırsa $x^2-1=\ \ x-1\ \ \ x+1\ \Rightarrow x_1=1$ ve $x_2=-1$ olarak bulunur. Buradan

$$u=\frac{x-1}{-1-1}\Rightarrow x=1-2u$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{du^2}$$

bulunur.

$$(x^2-1)y''-\left[(b-a)-(a+b+2)x\right]y'-n(a+b+n+1)y=0$$

olur. Denklem düzenlenirse

$$u(1-u)y''+\left[a+1-(a+b+2)x\right]y'-n(a+b+n+1)y=0$$

olup

$$\gamma=a+1$$
$$\alpha+\beta+1=a+b+2$$
$$\alpha+\beta=a+b+1$$
$$\alpha\beta=-n(a+b+n+1)$$
$$t^2-(a+b+1)t-n(a+b+n+1)=0$$
$$\Delta=\left[(a+b+1)+2n\right]^2$$
$$t_1=-n\ ,\ t_2=a+b+n+1$$

$$y(u)=AF(-n,a+b+n+1,a+1;u)+Bu^{-a}F(-n-a,b+n+1,1-a;u)$$

bulunur. O halde genel çözüm

$$y=y\left(\frac{1-x}{2}\right)=AF\left(-n,a+b+n+1,a+1;\frac{1-x}{2}\right)+B\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-a}F\left(-n,a+b+n+1,a+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.6. $\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$ eşitliğini gösterelim.

$$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(r-1)!(\gamma)_r}x^{r-1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{r+1}(\beta)_{r+1}}{r!(\gamma)_{r+1}}x^{r}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)_r\beta(\beta+1)_r}{r!\gamma(\gamma+1)_r}x^{r}$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_r(\beta+1)_r}{r!(\gamma+1)_r}x^{r}$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$$

bulunur ki bu da istenen sonuçtur.

Örnek 4.7.

a) $\alpha=1$, $\beta=\gamma$

b) $\alpha=-k$, $\beta=\gamma$

durumların her birinde hipergeometrik serinin durumlarını gösterelim.

a) $$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n$$

$$F(1,\beta,\beta;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(\beta)_n}{(\beta)_n n!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

$$=\frac{1}{1-x}$$

elde edilir.

b) $$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n$$

$$F(-k,\gamma,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)_n(\gamma)_n}{(\gamma)_n n!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-k_{\;n}}{n!}x^n$$

$$=-\frac{1}{x}\ln\ 1-x$$

olarak bulunur.

Örnek 4.8. $1-x^2\ \ y''-\ 5a+1\ \ xy'-4a^2y=0$ (a sabit) denkleminin $x=1$ noktası komşuluğundaki genel çözümünü hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden elde edelim.

Verilen denklemde $\alpha+\beta+1=5a+1$, $\alpha\beta=4a^2$ ve $\gamma=0$ dır. Buradan ise

$$\alpha=4a,\beta=a,\gamma=0$$

bulunur. Hipergeometrik denklemin genel çözümü ise

$$y=AF\ \ \alpha,\beta,\gamma;x\ \ +Bx^{1-\gamma}F\ \ \alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;x$$

şeklinde idi. O halde bilinenleri yerlerine yazarsak genel çözüm

$$y=AF\ \ 4a,a,0;x\ \ +BxF\ \ 4a+1,a+1,2;x$$

olarak bulunur.

Örnek 4.9. $x^2-mx\ \ y''+\ ax+b\ \ y'+cy=0$ $x=mu$ dönüşümü ile bir Gauss hipergeometrik denklemi elde edilebileceğini gösterelim.

Verilen $x=mu$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du}=\frac{dy}{dx}m$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{du^2}$$

eşitliğinden

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2y}{dx^2}m^2$$

olur. Buradan ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m}\frac{dy}{du} \text{ ve } \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{m}\right)^2 \frac{d^2y}{du^2}$$

olarak elde edilir. O halde bilinen değerleri yerlerine yazarsak

$$mu\ ^2 - m\ \ mu\ \ \frac{1}{m^2}\frac{d^2y}{du^2} + \ a\ \ mu\ \ + b\ \ \frac{1}{m}\frac{dy}{du} + cy = 0$$

$$m^2u^2 - m^2u\ \ \frac{1}{m^2}\frac{d^2y}{du^2} + \left(au + \frac{1}{m}b\right)\frac{dy}{du} + cy = 0$$

$$m^2\ \ u^2 - u\ \ \frac{1}{m^2}\frac{d^2y}{du^2} + \left(au + \frac{1}{m}b\right)\frac{dy}{du} + cy = 0$$

$$u^2 - u\ \ \frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{1}{m}b + au\right)\frac{dy}{du} + cy = 0$$

Gauss denklemi elde edilir.

4.2. Bir Boyutlu Harmonik Osilatör (salıngaç)

Bir boyutlu kuantum harmonik salıngaç olarak bilinen problemi ele alalım. İlk olarak, $V(x)$ potansiyel enerjisi ile m kütlesinin bir taneciği için zamana bağlı

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \tag{4.6}$$

Schrödiger denklemini (dalga fonksiyonu) dikkate alalım. $\psi(x,t)$ dalga fonksiyonu x konumuna ve t zamanına bağlı bir fonksiyondur. Bu denklem x ve t

değişkenlerinden bağımsız bir kısmi diferansiyel denklemdir. Denklemi çözmek için değişkenlerine ayırma metodundan yararlanılır. Bu tekniği kullanılır kılan (4.6) denkleminin sol tarafındaki operatörün sadece x e bağlı iken sağ taraftaki operatörün sadece t ye bağlı olmasıdır. Dalga fonksiyonu

$$\psi(x,t) = u(x).f(t)$$

şeklinde bir çarpımın çözümü ile ifade edilir.. (4.6) denklemi $\psi(x,t)$ için bu değiştirme ile

$$\frac{1}{u(x)}\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x)\right] = \frac{i\hbar}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t) \tag{4.7}$$

haline gelir. (4.7) denkleminin sol tarafının sadece x e bağlı iken sağ tarafının t ye bağlı olduğu görülür. Burada x ve t birbirinden bağımsız olarak değişebilir ve bütün x ve t değerleri (4.7) denklemini sağlar.

(4.7) denkleminin her iki tarafı da bütün x ve t için aynı sabite eşit olsun. Bu sabiti E ile ifade edelim. O halde

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t) = E$$

çözümünü elde etmek için

$$f(t) = f_0 e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

integre edilir. E sabiti sistemin toplam enerjisini temsil eder. O halde (4.7)

$$\frac{1}{u(x)}\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x)\right] = E$$

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x)\right] = E.u(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = \left[E - V(x)\right]u(x)\left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]u(x) = 0 \qquad (4.8)$$

elde edilir. Buradan (4.6) denkleminin çözümü

$$\psi(x,t) = u(x).e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

şeklinde olur ve $u(x)$ fonksiyonu (4.8) denklemini gerçekler. Harmonik oskülatör (salıngaç) için

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

potansiyel enerjisi ile (4.8) denklemi

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right]u(x) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem bağımlı değişken değiştirmesi ile konflüent hipergeometrik denkleme dönüştürülebilir.

$b = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$ ve $\mu = \frac{2E}{\mu\hbar}$ olmak üzere $\rho = \frac{x}{b}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{d^2}{d\rho^2}u(\rho) + (\mu - \rho^2)u(\rho) = 0 \qquad (4.9)$$

elde edilir. $|\rho| \to \infty$ olduğunda $u(\rho)$ sonlu kalmalıdır.

Eğer n çift sayı ise, ${}_1F_1\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\rho^2\right)$ ρ nun çift kuvvetlerinin bir polinomudur. n tek olduğunda ise $\rho\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}(n-1);\frac{3}{2};\rho^2\right)$ fonksiyonu ρ nun tek kuvvetlerinin bir polinomudur.

4.3. Hermit Polinomları ve Konflüent Hipergeometrik Fonksiyon

n çift olmak üzere Konflüent hipergeometrik fonksiyondaki toplam indisi değiştirilirse

$$ {}_1F_1\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\rho^2\right)=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)_{\frac{1}{2}n-k}}{\left(\frac{1}{2}n-k\right)!\left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{1}{2}n-k}}\rho^{n-2k} $$

elde edilir. Eğer

$$ (n-2k)!=2^{n-2k}\left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{1}{2}n-k}\left(\frac{1}{2}n-k\right)! $$

ve

$$ \left(-\frac{n}{2}\right)_{\frac{1}{2}n-k}=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n-k}\left(\frac{n}{2}\right)!}{k!} $$

özdeşlikleri kullanılırsa

$$ {}_1F_1\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\rho^2\right)=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)!}{n!}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-2k)!}(2\rho)^{n-2k} \qquad (4.10a) $$

şeklinde elde edilir. n tek sayı olduğunda benzer olarak

$$\rho\,{}_1F_1\left(-\frac{n-1}{2};\frac{3}{2};\rho^2\right)=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-2k)!}(2\rho)^{n-2k} \qquad (4.10b)$$

elde edilir. $H_n(\rho)$ fonksiyonu

$$H_n(\rho)=\begin{cases}\dfrac{n!\,(-1)^{-\frac{1}{2}n}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\,{}_1F_1\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\rho^2\right), n=0,2,.. & (4.11)\\[2ex] \dfrac{2n!\,(-1)^{\frac{1}{2}(1-n)}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\,\rho\,{}_1F_1\left(-\frac{n-1}{2};\frac{3}{2};\rho^2\right), n=1,3,.. & (4.12)\end{cases}$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyonlar Hermit polinomları olarak adlandırılır. (4.11) ve (4.12) Hermit denklemi olarak bilinen

$$H_n''(\rho)-2\rho H_n'(\rho)+2nH_n(\rho)=0 \qquad (4.13)$$

diferansiyel denkleminin çözümleridir. (4.10) denklemlerinden görülür ki herhangi bir n tamsayısı için

$$H_n(\rho)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-2k)!}(2\rho)^{n-2k} \qquad (4.14)$$

elde edilir.

Harmonik salıngacın öz fonksiyonlarıyla birlikte

$$u_n(\rho)=N_nH_n(\rho)\,e^{-\frac{1}{2}\rho^2}, \qquad (4.15)$$

çözümü elde edilir. Burada N_n normalleştirme sabitidir.

BÖLÜM 5. İKİ BOYUTLU PROBLEMLER

5.1. Silindirik Dalga Kanalları

Elektro manyetik enerji transferi dalga kanalları olarak bilinen içi boş silindirler yoluyla yapılabilir. Elektro manyetik dalgalar metal silindirlerle kaplı yalıtkan bölgede yayılırlar. Bu bölgedeki alanlar için Maxwell denklemleri

$$\nabla . E = 0 \tag{5.1a}$$

$$\nabla \times E + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{5.1b}$$

$$\nabla . H = 0 \tag{5.1c}$$

$$\nabla \times H - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \tag{5.1d}$$

şeklinde ifade edilir.

E ve H vektörleri sırasıyla elektrik ve manyetik bölgelerdir. Yalıtkan ortamlar lineer, homojen, eş yönlü, soğurmayan ve serbest olmayan enerji yüklerini içeren bir ortam olarak kabul edilir.

Konum vektörü r, kartezyen koordinatları x, y, z ve silindirin koordinatları da ρ, θ, z ile gösterilir.

(5.1b) denkleminde dalganın kıvrımları ve

$$\nabla \times \nabla \times F = -\nabla^2 F + \nabla \ \nabla . F$$

özdeşliği kullanılırsa, F herhangi bir vektör olmak üzere,

$$\nabla^2 E - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{5.2a}$$

Maxwell denklemi elde edilir. (5.1d) de benzer bir işlemlerle

$$\nabla^2 H - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \tag{5.2b}$$

denklemi elde edilir.

Uzay ve zaman operatörü (sırasıyla ∇^2 ve $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$) tamamen ayrılabilir olduğu için (5.2a) (ya da 5.2b) denklemlerinin her bir çözümü zamana ve uzaya bağlı kısımların bir çarpımıdır.

E ve H nin ters bileşenleri E_z ve H_z in boylamsal bileşenlerinin türevleri yoluyla bulunabilir. Bu yüzden , E ve H nin bütün bileşenleri E_z ve H_z nin diferansiyel denklemlerinin çözümlerinden elde edilebilir.

Maxwell denklemlerinin çözümleri dalga kanallarının duvarlarında belli sınır koşullarını sağlamalıdır. Bunlar ters manyetik (TM) ve ters elektrik (TE) olmak üzere ikiye ayrılır. Duvar mükemmel bir iletken ise ters manyetik dalgalar için sınır koşulları

TM dalgalar: $H_z\ r\ = 0$ dalga kanallarının her yerinde

$E_z\ r\ = 0$ dalga kanallarının iç duvarlarında

şeklindedir.

∇^2 diferansiyel operatörü silindirik koordinatlarda

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.4}$$

dır.

$$E\ r,t\ = E\ \rho,\theta\ e^{i\ kz-\omega t} \tag{5.3a}$$

denklemiyle verilen çözüm ile (5.2a) denkleminde ki bu operatörü kullanarak diferansiyel denklem ile tanımlanan silindirik dalga kanalındaki TM dalgalar

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\gamma^2\right]E_z \;\; \rho,\theta \;\; =0 \tag{5.5}$$

şeklinde bulunur. γ^2 sabiti

$$\gamma^2=\mu\varepsilon\omega^2-k^2 \tag{5.6}$$

olsun. ρ^2 ile (5,5) denklemi çarpılırsa

$$\left[\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\gamma^2\rho^2+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]E_z \;\; \rho,\theta \;\; =0 \tag{5.7}$$

elde edilir. Bu operatör ρ ve θ olmak üzere iki kısma ayrılabilir. Öyle ise $E_z \;\; \rho,\theta$ kısmi diferansiyel denkleminin çözümü için değişkenlerine ayırma metodu kullanılabilir. Buradan

$$E_z \;\; \rho,\theta \;\; =u \;\; \rho \;\; v \;\; \theta \tag{5.8}$$

çarpımı elde edilir.

(5.7) de $E_z \;\; \rho,\theta$ yerine (5,8) yazılırsa

$$\frac{1}{u}\left[\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\lambda^2\rho^2u\right]=-\frac{1}{v}\frac{d^2v}{d\theta^2} \tag{5.9}$$

elde edilir. Sağa taraf θ ya, sol taraf sadece ρ ya bağlı olduğundan, ρ ve θ birbirinden bağımsızdır. Her iki taraf β^2 sabitine eşit olsun. (5.9) denkleminin sağ tarafı

$$\frac{d^2 v(\theta)}{d\theta^2} + \beta^2 v(\theta) = 0$$

dır ve

$$v(\theta) = Ae^{i\beta\theta} + Be^{-i\beta\theta}$$

çözümüne sahiptir.

Cisim uzayda her bir noktada tanımlı bir değere sahip olduğundan $E_z(\rho,\theta)$, θ nın tek değişkenli fonksiyonu olmalıdır. θ nın 2π lik artışı bizi aynı noktaya geri getireceği için,

$$v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$$

$$A = Ae^{i2\pi\beta} \text{ ve } B = Be^{-i2\pi\beta}$$

olması gerekir. Bu β sadece bir tamsayı olduğunda elde edilir.

n bir tamsayı olduğunda (5.9) nin sol tarafından

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} + (\lambda^2\rho^2 - n^2)u = 0 \qquad (5.10)$$

elde edilir. Bu denklemde $x = \gamma\rho$ olacak şekilde bağımsız değişken tanımlandığında n bir reel sayı olmak üzere

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - n^2)u = 0 \qquad (5.11)$$

n yinci basamaktan Bessel Diferensiyel denklemi elde edilir.

$x = 0$ bu denklemin bir düzgün aykırı noktasıdır. (5.11) denklemini konflüent hipergeometrik denklem formu içine yerleştirerek değişkenlerini değiştirmeye çalışalım.

5.2. Bessel Denklemi ve Birleşik Hipergeometrik Denklemi

$$u(x)=x^{s}e^{g(x)}f(x) \tag{5.12}$$

çözümüne göre bağımlı değişken değiştirilip (5.11) de (5.12) nin yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} x^{s}e^{g}\Big[& x^{2}f''(x)+\left(2sx+2g'x^{2}+x\right)f'(x) \\ & +\left(g'^{2}x^{2}+2sg'x+s(s-1)+g''x^{2}+xg'+s+x^{2}-n^{2}\right)f(x)\Big]=0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. Konflüent hipergeometrik denklemi ile bu denklemin karşılaştırılmasıyla , a bir sabit olmak üzere,

$$g'^{2}x^{2}+2g'sx+s^{2}+xg'+x^{2}-n^{2}+g''x^{2}=-ax$$

olmalıdır. Bu ise

$$s^{2}-n^{2}=0$$
$$g''+g'^{2}+1=0$$
$$(2s+1)g'=-a$$

olduğunda sağlanır. Bu denklemlerin birincisinden $s=\pm n$ olduğu görülür. İkincisinden $g'=\pm i$ elde edilir. Konflüent hipergeometrik denklemini elde etmek için $s=n$ ve $g'=-i$ olsun. Buradan (5.13) denklemi

$$xf''(x)+(2n+1-2ix)f'(x)-i(2n+1)f(x)=0 \tag{5.14}$$

şeklinde elde edilir.

$z=\alpha x$ bağımsız değişken değişimi ile

$$z\frac{d^2 f}{dz^2}+\left(2n+1-\frac{2iz}{\alpha}\right)\frac{df}{dz}-\frac{2i}{\alpha}\left(n+\frac{1}{2}\right)f=0$$

elde edilir.

Son olarak (5.15) denklemini elde etmek için $\alpha=2i$ sabiti alınırsa

$$zf''(z)+(2n+1-z)f(z)-\left(n+\frac{1}{2}\right)f(z)=0 \qquad (5.15)$$

elde edilir ki bu konflüent hipergeometrik denklemin formundadır. O halde

$$f(x)=A\,{}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};2n+1;2ix\right)+B(2ix)^{-2n}\,{}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2};-2n+1;2ix\right)$$

dir. Buradan (5.11) denkleminin genel çözümü ise

$$u(x)=e^{-ix}\left[A_n x^n\,{}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};2n+1;2ix\right)+B_n x^{-n}\,{}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2};-2n+1;2ix\right)\right] \qquad (5.16)$$

dır. A_n ve B_n keyfi sabitlerdir.

(5.11) denkleminden (5.15) denklemine kadar ki dönüşümlerde n yi bir tamsayı olarak aldık. Aslında n nin bir tamsayı olmasına gerek yoktur, fakat dalga kanallarında tamsayı olmalıdır.

5.3. Keyfi Mertebelerin Bessel Fonksiyonları

ν nin tamsayı olmasının gerekmediği $n=\nu$ durumu için daha genel bir durumu düşünelim. (5.16) da verilen genel çözümde

$$a_\nu=2^\nu\Gamma(\nu+1)A_\nu \text{ ve } b_\nu=2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)B_\nu$$

ile integrasyonun yeni sabitlerini tanımlayalım.

(5.16) deki ilk terimden

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2ix\right) = a_\nu J_\nu(x) \qquad (5.17)$$

eşitliği ile

$$a_\nu \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2ix\right) = a_\nu J_\nu(x)$$

elde edilir. (5.16) denklemindeki ikinci terimden

$$b_\nu \frac{e^{-ix}}{\Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} {}_1F_1\left(-\nu+\frac{1}{2};-2\nu+1;2ix\right) = b_\nu J_{-\nu}(x)$$

elde edilir.

Buradan (5.11) denkleminin genel çözümü daha kısa olarak

$$u(x) = a_\nu J_\nu(x) + b_\nu J_{-\nu}(x) \qquad (5.18)$$

şeklinde elde edilir.

(5.17) denkleminde tanımlanan $J_\nu(x)$ fonksiyonu ν. basamaktan birinci tür Bessel fonksiyonu olarak adlandırılır.

5.4. Bessel Fonksiyonlarını İçeren Formüller

ν yinci basamaktan birinci tür Bessel fonksiyonu

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} {}_0F_1\left(\nu+1;\frac{-x^2}{4}\right) \tag{5.19}$$

ile gösterilir. (5.19) serisi x in her sonlu değeri için yakınsaktır. $J_\nu(x)$ fonksiyonunun seri açılımından uygulamalarda karşımıza çıkan formüller elde edilir. (5.19) denkleminden

$$J_{\nu-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)+\nu+1}$$

$$+\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

$$=-J_{\nu+1}(x)+\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

şeklinde elde dilir.

O halde

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \tag{5.21}$$

dır.

Eğer (5.19) diferensiyellenirse

$$\frac{d}{dx}J_\nu(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)+\nu+1}$$

$$+\frac{\nu}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

$$=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$$

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) \tag{5.22}$$

elde edilir. (5.21) ve (5.22) denklemlerinden

$$J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) \tag{5.23}$$

elde edilir.

Ayrıca (5.22) ve (5.23) denklemlerinden

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \tag{5.24}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $\nu > 0$ (ν tamsayı olmasın) olsun. (5.19) dan $|x| << 1$ olacak şekilde

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \mathrm{O}(x^2)\right] \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{5.25a}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left[\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} + \mathrm{O}(x^2)\right] \xrightarrow[x\to 0]{} \infty \tag{5.25b}$$

dir.

Yani (5.11) denkleminin $J_\nu(x)$ çözümü $x = 0$ da düzenli iken $J_{-\nu}(x)$ çözümü bu noktada düzensizdir.

Şimdi n tamsayı iken $\nu = n$ durumu için $J_{-\nu}(x)$ fonksiyonunu inceleyelim. (5.19) dan

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

elde edilir.

Bu toplamın ilk $n.$ terimine kadar k, n den daha az bir tamsayıdır. Burada, gamma fonksiyonu tekildir, değişkenleri negatif tamsayı veya sıfır olduğundan

$$\Gamma(k-n+1)=\infty \qquad , k \leq n-1 \text{için}$$

dur. O hande toplamın ilk n teriminden sonra

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

elde edilir.

$m=k-n$ ile yeni bir toplam indisi tamınlanır ise

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

$$=(-1)^n J_n(x)$$

elde edilir. Eğer ν bir tamsayı olsaydı $J_\nu(x)$ ve $J_{-\nu}(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olmadığını görülür. O halde (5.18) , (5.11) denkleminin bir genel çözümü olmazdı.

5.5. Bessel Denkleminin Lineer Bağımsız Çözümleri

ν bir tamsayı olduğunda Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümünün doğrudan doğruya elde edilemeyeceği görülür. Böyle bir durumda $J_\nu(x)$ den başka yeni bir fonksiyon tanımlanır. Bu fonksiyon

$$Y_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{5.26}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon (5.11) in v yinci basamaktan ikinci tür Bessel fonksiyonu adını alır.

Eğer v bir tamsayı ise $Y_k(x) = \frac{0}{0}$ şeklinde olur. Bu taktirde $Y_v(x)$ fonksiyonu

$$Y_v(x) = \lim_{l \to v} \frac{\cos l\pi J_l(x) - J_{-l}(x)}{\sin l\pi}$$

olarak tanımlanır. Sonuç olarak herhangi bir v için Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u(x) = AJ_v(x) + BY_v(x)$$

şeklinde olur.

Bessel denkleminin kompleks çözümleri olan ve 3. tür Bessel fonksiyonları olarak tanımlanan

$$H_v^{(1)} = J_v(x) + iY_v(x)$$
$$H_v^{(2)} = J_v(x) - iY_v(x)$$

fonksiyonları sırasıyla birinci ve ikinci tür Hankel fonksiyonları olarak bilinmektedir.

5.6. $J_n(x)$ Fonksiyonunun Bir temsili Tamsayısı

$J_n(x)$ fonksiyonu için temsili bir tamsayı (5.19) denkleminden doğrudan elde edilebilir. İlk olarak (5.19) de $m!$ için

$$(2m)! = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2m} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) m!$$

özdeşliğinden yararlanılır. Sonra (5.19) denkleminin her iki tarafı $\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)$ ile çarpılırsa

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+m+1)}x^{2m}$$

elde edilir.

(2.21) denkleminden

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_\nu(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\nu}(\sin\theta)^{2m}d\theta$$

elde edilir.

İntegral ve toplamın yeri değiştirilirse

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_\nu(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(x\sin\theta)^{2m}d\theta$$

elde edilir. Buradan $(x\sin\theta)$ için kosinüs serisinin toplamı olduğu görülür. O halde

$$J_\nu(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)(\cos\theta)^{2\nu}d\theta \qquad (5.29)$$

Poisson integrali elde edilir.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Hipergeometrik diferensiyel denklemi ikinci dereceden diferensiyel denklem ve tekil noktaları dikkate alınarak uygun değişken değiştirilerek elde edilmiştir. Hipergeometrik serilerin yardımıyla da Birleşik Hipergeometrik denklem ve çözümleri elde edilmiştir. Gauss Hipergeometrik denklemin çözümleri olan Hipergeometrik fonksiyonları elde edilmiş ve onların özelliklerinden bahsedilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] ANDREWS, G.E. , ASKEY, R. ,RAY, R. , Special Function, 1999.

[2] ANDREWS, L.C. , Special Functions of Mathematics, 1995.

[3] ARFKEN, G. , Mathematical Methods for Physicisth, Newyork 1970.

[4] BALCI, M. , Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Eylül 1999.

[5] ÇAKAR, Ö. , Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara 1996.

[6] DEMİRTAŞ, A. , Ansiklopedik Matematik Sözlüğü, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara 1986.

[7] GÜNGÖR, F. , Diferansiyel Denklemler, 2005.

[8] JACKSON, J.D. , Classical Electrodynamics, Newyork 1962.

[9] JEFFREYS, H. , JEFFREYS, B.S. , Methods of Mathematical Physics, Cambridge 1956.

[10] KAPLAN, W. , Advanced Calculus, Addison-Wesley, M.A. 1953.

[11] LEBEDEV, N.N. , Special Functions and Their Applications, Newyork 1972.

[12] MUSAYEV, B. , ALP, M. , Fonksiyonel Analiz, Kütahya 2000.

[13] RAINVILLE, E.D. , Special Function, 1960.

[14] REİF, F. , Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, Newyork 1965.

[15] SEABORN, J.B. , Hypergeometric Functions and Their Applications, Newyork 1991.

[16] UZEL, E. , Hermite Polinomları, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Seda Çelik, 08.03.1984 de Bartın' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Bartın'da tamamladı. 2001–2002 eğitim yılında Bartın Davut Fırıncıoğlu Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2003–2004 eğitim yılında başladığı Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki Lisans eğitimini 2006–2007 yılında bitirdi.2007 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek lisans eğitimine başladı.