T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEMPOTENT VE İNVOLUTİF MATRİSLERİN BAZI KOMBİNASYONLARININ SPEKTRUMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba PETİK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

Haziran 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEMPOTENT VE İNVOLUTİF MATRİSLERİN BAZI KOMBİNASYONLARININ SPEKTRUMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba PETİK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 29/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR	**Prof. Dr. Refik KESKİN**	**Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Danışmanlığımı üstlenip, çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren ve hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Prof. Dr. Halim Özdemir'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan, varlıklarıyla övündüğüm sevgili aileme minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$U\setminus V$	: U fark V kümesi
$U\cup V$	: U bileşim V kümesi
$\subset$	: Alt kümesidir
I	: Birim matris
0	: Sıfır matrisi
M^{-1}	: M matrisinin tersi
M^T	: M matrisinin transpozesi
$\sigma(M)$	: M matrisinin spektrumu
$rk(M)$	: M matrisinin rankı
$iz(M)$	: M matrisinin izi
$M_1\oplus M_2$	: M_1 ile M_2 matrislerinin direkt toplamı
$p(M)$	: M matrisinin p polinomu altındaki resmi
$=:$	: Tanım olarak eşittir
Bkz.	: Bakınız

ÖZET

Anahtar Kelimeler: İdempotent matris, involutif matris, spektrum, lineer kombinasyon, köşegenleştirme.

İlk bölümde idempotent ve involutif matrislerle ilgili kısa bir literatür bilgisi sunulmakta ve spektrum kavramının önemine vurgu yapılmaktadır. Bazı temel kavram ve özellikler ikinci bölümde verilmekte ve çalışmanın geri kalan kısmına yol gösterecek olan literatürdeki bir çalışma üçüncü bölümde incelenmektedir.

P, Q matrisleri $n \times n$ boyutlu kompleks matrisler ve a, b sıfır olmayan kompleks sayılar olmak üzere, $aP + bQ$ lineer kombinasyon matrisi köşegenleştirilebilir olsun. $P^2 = P$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olmak üzere, lineer kombinasyon matrisinin spektrumu ile P ve Q matrislerinden türetilen bazı matrislerin spektrumları arasındaki bazı ilişkiler dördüncü bölümde ortaya koyulmaktadır. $P^2 = \mathrm{I}$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olması durumunda ise aynı lineer kombinasyon matrisinin spektrumu ile, yine P ve Q matrislerinden türetilen bazı matrislerin spektrumları arasındaki ilişkiler de, beşinci bölümde verilmektedir. Son bölüm ise tartışma ve önerilerden oluşmaktadır.

THE SPECTRA OF SOME COMBINATIONS OF IDEMPOTENT AND INVOLUTIVE MATRICES

SUMMARY

Key Words: Idempotent matrix, involutive matrix, spectrum, linear combination, diagonalization.

It has been pointed out the concept of the spectrum and presented a short literature information related to idempotent and involutive matrices in the first chapter. Some fundamental concepts and properties have been given in the second chapter, and a study avaliable from the literature, which will guide for the rest of this study, has been examined in the third chapter.

Let the linear combination matrix $aP + bQ$ be diagonalizable, where P, Q are $n \times n$ complex matrices and a, b are nonzero complex numbers. It has been established some relations between the spectrum of the linear combination matrix and the spectra of some matrices derived from the matrices P and Q with $P^2 = P$ and $Q^2 = \mathrm{I}$ in the fourth chapter. In case $P^2 = \mathrm{I}$ and $Q^2 = \mathrm{I}$, some relations between the spectrum of the same linear combination matrix and again the spectra of some matrices produced from the matrices P and Q have been given in the fifth chapter. The last chapter consists of discussion and proposals.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matris teorisinin temel yapıtaşlarından olan idempotent ve involutif matrisler, birçok alanda çok kullanışlı olup, literatürde yaygın bir şekilde tartışılmaktadır [2, 3, 4, 5, 24, 25, 28].

İdempotent matrisli kuadratik formlarla özellikle istatistik teorisinde sık sık karşılaşılır. Örneğin, K bir $n \times n$ boyutlu reel simetrik matris, x çok değişkenli normal dağılıma sahip $n \times 1$ boyutlu bir reel vektör ise, bu durumda $x^T Kx$ kuadratik formunun bir ki-kare dağılımına sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu, K matrisinin idempotent bir matris olmasıdır [10].

İdempotent matrisler, regresyon analizinde de sık sık ortaya çıkarlar. Örneğin, klasik en küçük kareler yönteminde, regresyon problemi, e_i rezidülerinin (kalanlarının) kareler toplamını minimumlaştıracak olan bir β katsayı tahminler vektörü seçmektir. Yani, y bir bağımlı değişken gözlemler vektörü ve X her bir sütununda bir bağımsız değişkene ait gözlemlerin bulunduğu bir matris olmak üzere,

$$(y - X\beta)^T (y - X\beta)$$

ifadesini minimum yapacak olan β' yı seçmektir. Bu minimumlaştırmayı yapacak olan tahmin edici vektör

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

dir. Burada rezidü vektörü,

$$e = y - X\beta = y - X(X^T X)^{-1} X^T y = [\mathrm{I} - X(X^T X)^{-1} X^T] y = My$$

dir. Buradaki M ve $X(X^T X)^{-1} X^T$ matrislerinin her ikisi de idempotenttir. Bu gerçek, rezidü kareler toplamının hesaplanmasında kısaltma yapma fırsatını sağlar:

$$e^T e = (My)^T (My) = y^T M^T My = y^T MMy = y^T My\,.$$

M matrisinin idempotent olması, β tahmin edicisinin varyansını belirleme gibi hesaplamalarda da rol oynamaktadır [11].

Bir involutif matris köşegenleştirilebilirdir [29]. Dolayısıyla, köşegenleştirilebilir matrisler için spektral ayrışım teoremi (bkz., örneğin, [22]) dikkate alındığında, eğer A bir involutif matris ise, $A = P_1 - P_2$, $\mathrm{I} = P_1 + P_2$ ve $P_1 P_2 = 0$ olacak şekilde P_1 ve P_2 idempotent matrislerinin varlığından söz edilebilir. Böylece $x^T Ax$ kuadratik formunun involutifliği, " iki bağımsız kuadratik formun farkının serbestlik derecelerinin toplamı, istatistiksel teori çerçevesinde ana kuadratik form matrisinin boyutuna eşit olmak zorundadır " kısıtlamasına götürür.

Buraya kadar verilen istatistiksel yorumlar, ele alınan matrislerin reel ve simetrik olması durumunda verilmiştir. Ancak bu kısıtlama olmaksızın da, bu tip matrisler uygulamalı bilimlerin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin, $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, Pauli spin matrisi olarak bilinen matrisler sınıfının bir üyesidir. Bu matris ve bu matrisi kapsayan Dirac spin matrisleri ne reeldir ne de simetrik, ancak involutiftir. Bu matrisler kuantum teorisinde geniş bir şekilde kullanılır [1,7]. Bunlardan başka, istatistiksel teorinin yanında uygulamalı bilimlerde involutif matrislerin önemli uygulamaları vardır [12, 21, 23].

Çalışmanın temelini oluşturan olan spektrum kavramına değinilecek olursa, yine bu kavramın da literatürde yaygın bir şekilde çalışıldığı (bkz., örneğin, [6,9]) ve uygulamalı bilimlerde ilgi çekici rol oynadığı söylenebilir. Örneğin, spektrumu oluşturan özdeğerler, diferansiyel denklemleri ve sürekli dinamik sistemleri çalışmak için kullanılır. Onlar, mühendislik tasarımlarında kritik bilgi sağlarlar ve doğal olarak fizik ve kimya gibi alanlarda ortaya çıkarlar (bkz,, örneğin [18]), köşegenleştirme teorisinde, fark denklemlerinde, Fibonacci sayılarında ve Markov süreçlerinde kullanımları yaygındır [27]. Fonksiyonel analizde, bir f operatörünün tüm özdeğerlerinin kümesine, bu operatörün spektrumu denir. Işık-dalga frekanslarının bir örüntüsü nasıl bir kimyasal bileşimi karakterize ediyorsa, lineer operatötün spektrumu da operatörü karakterize eder [20].

Herhangi bir Q involutif matrisi için $\frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q)$ ve $\frac{1}{2}(\mathrm{I}-Q)$ matrisleri idempotenttir. Öte yandan, herhangi bir P idempotent matrisi için $\mathrm{I}-2P$ ve $-(\mathrm{I}-2P)$ matrisleri involutiftir [14]. Bu nedenle idempotent matrisler üzerindeki sonuçlar, involutif matrisler için de tartışılabilir. Bu çalışma, [19]’ da iki idempotent matrise bağlı çeşitli matrislerin spektrumu ile ilgili ortaya koyulan sonuçların, sırasıyla, matrislerden birinin idempotent diğerinin involutif olması ve ikisinin de involutif olması durumunda nasıl şekilleneceği veya nasıl sonuçlar ortaya çıkacağı düşüncesiyle ele alınmıştır.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde araç niteliği taşıyan bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilecektir.

2.1. Bir Matrisin Tersi, İzi ve Rankı

Tanım 2.1.1. $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. Eğer $MM^{-1} = M^{-1}M = \mathrm{I}$ olacak şekilde bir $M^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi varsa, M matrisine tersinir matris ve M^{-1} matrisine de M matrisinin tersi denir [10].

Tanım 2.1.2. $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun M matrisinin izi, M matrisinin köşegen elemanlarının toplamı olarak tanımlanır ve $iz(M)$ ile gösterilir. Yani,

$$iz(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

dir [10].

Tanım 2.1.3. $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olsun. M matrisinin sütun rankı (veya kısaca M matrisinin rankı), M 'nin içerdiği lineer bağımsız sütunların maksimum sayısıdır. M matrisinin rankı, $rk(M)$ ile gösterilir. M matrisinin satır rankı, M ' nin içerdiği lineer bağımsız satırların maksimum sayısıdır. Bir matrisin satır rankı ile sütun rankı aynıdır [13].

2.2. Tersinir Matrisler için Rank Özellikleri

Teorem 2.2.1. M_1 ve M_2 tersinir matrisler ise, bu durumda uygun boyutlu herhangi bir M_3 matrisi için, M_3, M_1M_3, M_3M_2 ve $M_1M_3M_2$ matrisleri aynı ranka sahiptir [10].

Teorem 2.2.2. Tersinir bir matrisin rankı, o matrisin boyutuna eşittir [13].

2.3. Özdeğer, Özvektör, Spektrum, Köşegenleştirme, Eşanlı Köşegenleştirme ve Spektral Dönüşüm Teoremi

Tanım 2.3.1. $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. Eğer $Mx = \lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ vektörü varsa, $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine M matrisinin bir özdeğeri ve x vektörüne M matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir özvektörü denir. M matrisinin bütün özdeğerlerinin kümesine M matrisinin spektrumu denir ve $\sigma(M)$ ile gösterilir [22].

Tanım 2.3.2. M_1, $M_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri verilsin. Eğer $M_2 = S\ M_1\ S^{-1}$ olacak şekilde bir S tersinir matrisi varsa, M_2 matrisi M_1 matrisine benzerdir denir [13].

Tanım 2.3.3. Bir $D = [d_{ij}]$ kare matrisine, $i \neq j$ için $d_{ij} = 0$ ise, köşegen matris denir [10].

Tanım 2.3.4. Bir $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisine, bir köşegen matrise benzer ise, köşegenleştirilebilir matris denir [13].

Tanım 2.3.5. M_1, $M_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ köşegenleştirilebilir matrisler olsun. Eğer $S^{-1}M_1S$ ve $S^{-1}M_2S$ matrisleri köşegen matris olacak şekilde bir S tersinir matrisi varsa, M_1 ve M_2 matrislerine eşanlı (birlikte) köşegenleştirilebilir matrisler denir [13].

Teorem 2.3.6. $M_1, M_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ köşegenleştirilebilir matrisler olsun. M_1 ve M_2 matrislerinin eşanlı köşegenleştirilebilir olmasının gerekli ve yeterli bir koşulu M_1 ve M_2 matrislerinin değişmeli olmasıdır [13].

Teorem 2.3.7. Her M matrisi ve her p polinomu için $\sigma(p(M)) = p(\sigma(M))$' dir [26].

2.4. İdempotent, involutif, tripotent matrisler ve özellikleri

Tanım 2.4.1. $M^2 = M$ özelliğine sahip bir $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisine idempotent matris denir [10].

Tanım 2.4.2. $M^2 = \mathrm{I}$ özelliğine sahip bir $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisine involutif matris denir [15].

Tanım 2.4.3. $M^3 = M$ özelliğine sahip bir $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisine tripotent matris denir [10].

Teorem 2.4.4. Her idempotent, involutif ve tripotent matris köşegenleştirilebilirdir [8, 29].

Teorem 2.4.5. M idempotent bir matris ise bu matrisin tüm özdeğerleri 0 veya 1 sayılarından oluşur [10].

Teorem 2.4.6. M, $n\times n$ boyutlu m ranklı $(m < n)$ herhangi bir matris olsun. Eğer M idempotent matris ise, M matrisinin m tane sıfırdan farklı özdeğeri vardır ve bunların hepsi 1'e eşittir [10].

Teorem 2.4.7. İdempotent bir M matrisi için $rk(M) = iz(M)$ dir [10].

Teorem 2.4.8. M_1 ve M_2 matrisleri $n \times n$ boyutlu idempotent matrisler olsun. Eğer $M_1 M_2 = M_2 M_1$ ise $M_1 M_2$ ve $M_2 M_1$ matrisleri de idempotenttir [10].

Teorem 2.4.9. M bir involutif matris ise, bu matrisin tüm özdeğerleri 1 veya -1 sayılarından oluşur [29].

Lemma 2.4.10. $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin involutif bir matris olmasının gerekli ve yeterli bir koşulu $\frac{1}{2}(M + \mathrm{I})$ matrisinin idempotent olmasıdır [14].

Teorem 2.4.11. M herhangi $n \times n$ boyutlu bir tripotent matris olsun. Bu durumda, M matrisinin özdeğerleri $-1,\ 0$ veya 1 sayılarından oluşur [10].

Teorem 2.4.12. M herhangi $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. M matrisinin tripotent bir matris olmasının gerekli ve yeterli koşulu $M = A - B$ olacak şekilde iki ayrık idempotent $n \times n$ boyutlu A ve B matrislerinin var olmasıdır. Ayrıca, bu matrisler $A = \frac{1}{2}(M^2 + M)$ ve $B = \frac{1}{2}(M^2 - M)$ şeklinde tek türlü olarak belirlidir [10].

Teorem 2.4.13. M $n \times n$ boyutlu tripotent bir matris olmak üzere M ’ nin n_1 tane özdeğeri 1’e, n_2 tane özdeğeri -1’e, n_3 tane özdeğeri 0 ’a eşit olsun. Bu durumda,

a) $\frac{1}{2} iz(M^2 + M) = n_1,$

b) $\frac{1}{2} iz(M^2 - M) = n_2,$

c) $iz(\mathrm{I} - M^2) = n_3,$

d) $iz(M) = n_1 - n_2$

dir [10].

Uyarı: İnvolutif matrisler tersinir tripotent matrislerdir. Dolayısıyla involutif matrisler için de Teorem 2.4.13 geçerlidir. Yani, M bir involutif matris ise, M matrisinin $\frac{1}{2}iz(\mathrm{I}+M)$ tane özdeğeri 1'e, $\frac{1}{2}iz(\mathrm{I}-M)$ tane özdeğeri -1'e eşittir.

2.5. Matrislerin Direkt Toplamı

Tanım 2.5.1. $m_i \times m_i$ boyutlu M_{ii}, $i=1,\dots,k$ matrislerinin direkt toplamı $M = M_{11} \oplus M_{22} \oplus \dots \oplus M_{kk}$ ile belirtilip, bu matris,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{kk} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada "$\mathbf{0}$" ile işaret edilen tüm blok matrisler uygun boyutlu sıfır matrislerini göstermektedir [10].

BÖLÜM 3. İKİ İDEMPOTENT MATRİSE BAĞLI BAZI MATRİSLERİN SPEKTRUMLARI

P ve Q, $P^2 = P$ ve $Q^2 = Q$ eşitliklerini sağlayan kompleks matrisler, a ve b sayıları $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olacak şekilde sıfırdan farklı kompleks sayılar olsun. Bu şartlar altında $aP + bQ$ matrisinin spektrumu ile $P - Q$, PQ, PQP ve $PQ - QP$ matrislerinin spektrumları arasında ilişki kurma problemi Xiaoji Liu ve Julio Benítez tarafından [19] çalışmasında ele alınmıştır.

Bu bölümde [19] çalışmasında ele alınan iki idempotent matrisin bazı kombinasyonlarının spektrumlarıdan bahsedilecektir.

$P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ idempotent matrisleri değişmeli olduğunda, iyi bilinen aşağıdaki iki özellik kullanılarak, $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $aP + bQ$ matrisinin spektrumu hakkında yorum yapılabilir.

- Her idempotent P matrisi köşenleştirilebilirdir ve $\sigma(P) \subset \{0,1\}$ ’ dir.
- Köşegenleştirilebilir iki matrisin değişmeli olmasının gerekli ve yeterli koşulu onların eşanlı köşegenleştirilebilmesidir.

Liu ve Benítez bu iki özelliği kullanarak, öncelikle lineer birleşimi oluşturan idempotent matrislerin değişmeli olması durumunda aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmişlerdir:

Teorem 3.1. $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $PQ = QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a, b \in \mathbb{C}^*$ olsun. Bu durumda $\sigma(aP + bQ) \subset \{0, a, b, a + b\}$ dir.

İspat. $x = rk(PQ)$, $y = rk(P)$ ve $z = rk(Q)$ olsun. P ve Q matrisleri idempotent olduğundan köşegenleştirilebilirler ve P matrisinin y tane özdeğeri 1, geri kalan özdeğerleri 0; Q matrisinin z tane özdeğeri 1, geri kalan özdeğerleri 0' dır. Ayrıca $PQ = QP$ olduğundan P ve Q matrisleri eşanlı köşegenleştirilebilirdir. O halde

$$P = S(\mathrm{I}_x \oplus \mathrm{I}_{y-x} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})S^{-1} \text{ ve } Q = S(\mathrm{I}_x \oplus \mathbf{0} \oplus \mathrm{I}_{z-x} \oplus \mathbf{0})S^{-1}$$

olacak şekilde bir tersinir S matrisi vardır. Açıktır ki,

$$aP + bQ = S((a+b)\mathrm{I}_x \oplus a\,\mathrm{I}_{y-x} \oplus b\,\mathrm{I}_{z-x} \oplus \mathbf{0})S^{-1}$$

dir. Bu da ispatı sonuçlandırır. ■

[19] çalışmasının geri kalan kısmında $PQ \neq QP$ olmak üzere, $aP + bQ$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması varsayımı altında $\sigma(aP + bQ)$ kümesi ile $\sigma(P - Q)$, $\sigma(PQ)$, $\sigma(PQP)$ ve $\sigma(PQ - QP)$ kümeleri arasında bazı ilişkiler kurulmuştur. Bu spektrumları çalışmak için, ortaya koydukları aşağıdaki teknik lemmadan faydalanmışlardır.

Lemma 3.2. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $i = 0,\dots,k$ için P_i, $Q_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ olmak üzere,

$$P = S((\oplus_{i=1}^{k} P_i) \oplus P_0)S^{-1},\ Q = S((\oplus_{i=1}^{k} Q_i) \oplus Q_0)S^{-1}, \qquad (3.1)$$

$P_0 Q_0 = Q_0 P_0$ ve $i = 1,\dots,k$ için $P_i Q_i \neq Q_i P_i$ olacak şekilde bir tersinir $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$

matrisi ve $P_0,...,P_k,Q_0,...,Q_k$ idempotent matrisleri vardır,

(ii) $i=1,...,k$ için

$$a+b=\mu_i+\nu_i\,,\ \sigma(aP_i+bQ_i)=\{\mu_i,\nu_i\}\,,\ ab(P_i-Q_i)^2=\mu_i\nu_i\,\mathrm{I}_{m_i} \tag{3.2}$$

olacak şekilde $\mu_1,\nu_1;...;\mu_k,\nu_k$ farklı kompleks sayıları vardır,

(iii) $i=1,...,k$ için $x_i=rk(P_i)$, $A_i\in\mathbb{C}^{x_i\times x_i}$, $D_i\in\mathbb{C}^{(m_i-x_i)\times(m_i-x_i)}$ ve

$$A_i=(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{x_i}\,, \tag{3.3}$$

$$B_iC_i=\frac{\mu_i\nu_i}{ab}(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{x_i}\,, \tag{3.4}$$

$$C_iB_i=\frac{\mu_i\nu_i}{ab}(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{m_i-x_i} \tag{3.5}$$

ve

$$D_i=(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{m_i-x_i} \tag{3.6}$$

olmak üzere,

$$P_i=S_i\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1},\ \ Q_i=S_i\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{3.7}$$

olacak şekilde tersinir $S_i\in\mathbb{C}^{m_i\times m_i}$ matrisleri vardır.

İspat.

$$X=aP+bQ \tag{3.8}$$

olsun.

$$XP - PX = (aP + bQ)P - P(aP + bQ) = aP^2 + bQP - aP^2 - bPQ = b(QP - PQ)$$

olup, hipotezden $b \neq 0$ ve $PQ \neq QP$ olduğundan $XP \neq PX$ olduğu görülür. $X = aP + bQ$ ifadesinde Q matrisi yalnız bırakılıp, $\alpha = -\dfrac{a}{b}$ ve $\beta = \dfrac{1}{b}$ olarak alınırsa, $Q = \alpha P + \beta X$ olarak bulunur. Q matrisi idempotent olduğundan $(\alpha P + \beta X)^2 = (\alpha P + \beta X)$ dir. $P^2 = P$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$\alpha P + \beta X = \alpha^2 P^2 + \alpha\beta PX + \alpha\beta XP + \beta^2 X^2 = \alpha^2 P + \alpha\beta(PX + XP) + \beta^2 X^2,$$

yani

$$(\alpha^2 - \alpha)P + \beta^2 X^2 + \alpha\beta(PX + XP) = \beta X \tag{3.9}$$

elde edilir. X matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan, $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ ve $p_1 + \cdots + p_m = n$ olmak üzere,

$$X = S(\lambda_1 \mathrm{I}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_m \mathrm{I}_{p_m})S^{-1} \tag{3.10}$$

olacak şekilde bir tersinir $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi vardır. $i = 1, \ldots, m$ için $P_{ii} \in \mathbb{C}^{p_i \times p_i}$ olmak üzere P matrisi,

$$P = S\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix} S^{-1} \tag{3.11}$$

şeklinde olsun. Bu durumda,

$$XP = S\begin{bmatrix} \lambda_1 P_{1\;1} & \cdots & \lambda_1 P_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m P_{m1} & \cdots & \lambda_m P_{mm} \end{bmatrix} S^{-1} \quad \text{ve} \quad PX = S\begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \cdots & \lambda_m P_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{1m} & \cdots & \lambda_m P_{mm} \end{bmatrix} S^{-1} \qquad (3.12)$$

olur. Ayrıca (3.10) eşitliğinden,

$$X^2 = S(\lambda_1^2\, \mathrm{I}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_m^{\,2}\, \mathrm{I}_{p_m})S^{-1} \qquad (3.13)$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde, (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.13) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\beta(S(\lambda_1 \mathrm{I}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_m \mathrm{I}_{p_m})S^{-1}) = (\alpha^2 - \alpha)S\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix} S^{-1} + \beta^2(S(\lambda_1^2\, \mathrm{I}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_m^{\,2}\, \mathrm{I}_{p_m})S^{-1})$$

$$+\alpha\beta\left\{ S\begin{bmatrix} 2\lambda_1 P_{11} & \cdots & (\lambda_1 + \lambda_m)P_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_m + \lambda_1)P_{m1} & \cdots & 2\lambda_m P_{mm} \end{bmatrix} S^{-1} \right\}$$

olur. Gerekli işlemler yapılır, eşitliğin her iki tarafı soldan S^{-1} matrisi ile ve sağdan S matrisi ile çarpılırsa,

$$\begin{bmatrix} (\alpha^2 - \alpha + 2\alpha\beta\lambda_1)P_{11} & \cdots & (\alpha^2 - \alpha + \alpha\beta(\lambda_1 + \lambda_m))P_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha^2 - \alpha + \alpha\beta(\lambda_m + \lambda_1))P_{m1} & \cdots & (\alpha^2 - \alpha + 2\alpha\beta\lambda_m)P_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda_1\beta + \lambda_1^2\beta^2)\,\mathrm{I}_{p_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\lambda_m\beta + \lambda_m^{\,2}\beta^2)\,\mathrm{I}_{p_m} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Matrislerin eşitliği tanımından, $r \neq s$ olacak şekildeki her $r, s \in \{1,...,m\}$ için, $(\alpha^2 - \alpha + \alpha\beta(\lambda_r + \lambda_s))P_{rs} = \mathbf{0}$ dır. Hipotezden $\alpha = -\dfrac{a}{b} \neq 0$ olduğundan

$$(\alpha - 1 + \beta(\lambda_r + \lambda_s))P_{rs} = \mathbf{0} \tag{3.14}$$

olarak bulunur. (3.12) eşitlikleri ve $PX \neq XP$ olduğu göz önüne alınırsa, $i \neq j$ ve $\lambda_i P_{ij} \neq \lambda_j P_{ij}$ olacak şekilde $i, j \in \{1,...,m\}$ vardır ve böylece $i \neq j$ için $P_{ij} \neq \mathbf{0}$ dır. O halde (3.14)' ten $i \neq j$ için $\alpha + \beta(\lambda_i + \lambda_j) = 1$ bağıntısı bulunur. $\alpha = -\dfrac{a}{b}$ ve $\beta = \dfrac{1}{b}$ olduğu kullanılırsa, bu son bağıntıdan $i \neq j$ için

$$\lambda_i + \lambda_j = a + b$$

elde edilir.

Alt indisler, genelliği bozmaksızın $i = 1$ ve $j = 2$ olacak şekilde yeniden düzenlenirse $\lambda_1 + \lambda_2 = a + b$ olur. Şimdi, $\lambda_1 + \lambda_r = a + b$ olacak şekilde $r \in \{3,...,m\}$ var olsun. O halde $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_r$ dir ve buradan $\lambda_2 = \lambda_r$ elde edilir. Bu, $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ olması ile çelişir. Böylece her $r \in \{3,...,m\}$ için $\lambda_1 + \lambda_r \neq a + b$ dir. (3.14) eşitliği, $\alpha = -\dfrac{a}{b}$, $\beta = \dfrac{1}{b}$ ifadeleri ve $\lambda_1 + \lambda_r \neq a + b$ olduğu kullanılırsa her $r \in \{3,...,m\}$ için $P_{1r} = \mathbf{0}$ sonucuna ulaşılır. Simetriklikten her $r \in \{3,...,m\}$ için $P_{r1} = \mathbf{0}$ olur. Yine $\lambda_2 + \lambda_r = a + b$ olacak şekilde $r \in \{3,...,m\}$ var olsun. O halde $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_r$ dir ve buradan da $\lambda_1 = \lambda_r$ olur. Bu da bir çelişkidir. Böylece her $r \in \{3,...,m\}$ için $\lambda_2 + \lambda_r \neq a + b$ elde edilir. (3.14) eşitliği, $\alpha = -\dfrac{a}{b}$, $\beta = \dfrac{1}{b}$ ifadeleri ve $\lambda_2 + \lambda_r \neq a + b$ olduğu kullanılırsa, her $r \in \{3,...,m\}$ için $P_{2r} = \mathbf{0}$ ve simetriklikten de her $r \in \{3,...,m\}$ için $P_{r2} = \mathbf{0}$ olur. O halde $P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ ve $\tilde{P}_1$ uygun boyutlu bir kare matris olmak üzere

$$P = S(P_1 \oplus \tilde{P}_1)S^{-1} \tag{3.15}$$

yazılabilir. P matrisi idempotent olduğundan P_1 ve $\tilde{P}_1$ matrisleri de idempotenttir. Şimdi $\mu_1 = \lambda_1$, $\nu_1 = \lambda_2$, $r_1 = p_1$ ve $s_1 = p_2$ olsun. O halde (3.10)' dan $X = S(\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1} \oplus \Lambda_2)S^{-1}$ yazılabilir. Burada Λ_2 bir köşegen matristir. $Q = \alpha P + \beta X$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Q &= \alpha(S(P_1 \oplus \tilde{P}_1)S^{-1}) + \beta(S(\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1} \oplus \Lambda_2)S^{-1}) \\ &= S(\underbrace{(\alpha P_1 + (\beta\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \beta\nu_1 \mathrm{I}_{s_1}))}_{=:Q_1} \oplus \underbrace{(\alpha\tilde{P}_1 + \beta\Lambda_2)}_{=:\tilde{Q}_1})S^{-1} \\ &= S(Q_1 \oplus \tilde{Q}_1)S^{-1} \end{aligned}$$

yani,

$$Q = S(Q_1 \oplus \tilde{Q}_1)S^{-1} \tag{3.16}$$

olur. Burada, $Q_1 \in \mathbb{C}^{(r_1+s_1)\times(r_1+s_1)}$ ve $\tilde{Q}_1$ uygun boyutlu kare matristir. Ayrıca $Q_1 = \alpha P_1 + (\beta\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \beta\nu_1 \mathrm{I}_{s_1})$, $\alpha = -\dfrac{a}{b}$ ve $\beta = \dfrac{1}{b}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} aP_1 + bQ_1 &= aP_1 + b(\alpha P_1 + \beta(\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1})) \\ &= aP_1 + b(-\frac{a}{b})P_1 + (b\frac{1}{b}\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus b\frac{1}{b}\nu_1 \mathrm{I}_{s_1})) \\ &= \mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $\tilde{P}_1\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1\tilde{P}_1$ ise, $P_0 = \tilde{P}_1$, $Q_0 = \tilde{Q}_1$ alınırsa, (3.15) ile (3.16) eşitliklerinden, (i) de istenen elde edilir. $a+b = \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \nu_1$ ve $aP_1 + bQ_1 = \mu_1 I_{r_1} \oplus \nu_1 I_{s_1}$ (yani, $\sigma(aP_1 + bQ_1) = \{\mu_1, \nu_1\}$) olduğundan, (3.2)' nin ilk iki bağıntısı da sağlanmış olur.

$\tilde{P}_1\tilde{Q}_1 \neq \tilde{Q}_1\tilde{P}_1$ olsun.

$S(\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1} \oplus \Lambda_2)S^{-1} = X = aP + bQ = S((aP_1 + bQ_1) \oplus (a\tilde{P}_1 + b\tilde{Q}_1))S^{-1}$,

$aP_1 + bQ_1 = \mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1}$ olduğundan, $\Lambda_2 = a\tilde{P}_1 + b\tilde{Q}_1$ olarak bulunur. $b \neq 0$ ve $\tilde{P}_1\tilde{Q}_1 \neq \tilde{Q}_1\tilde{P}_1$ olduğundan $\Lambda_2\tilde{P}_1 - \tilde{P}_1\Lambda_2 = b(\tilde{Q}_1\tilde{P}_1 - \tilde{P}_1\tilde{Q}_1) \neq \mathbf{0}$ yani, $\Lambda_2\tilde{P}_1 \neq \tilde{P}_1\Lambda_2$ olur. (3.9) eşitliğinde, P ve Q matrislerinin yerine (3.15) ve (3.16)' daki karşılıkları yazılırsa,

$$(\alpha^2 - \alpha)\tilde{P}_1 + \alpha\beta(\tilde{P}_1\Lambda_2 + \Lambda_2\tilde{P}_1) = \beta \begin{bmatrix} \lambda_3 \mathrm{I}_{p_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_m \mathrm{I}_{p_m} \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} \lambda_3^{\,2} \mathrm{I}_{p_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_m^{\,2} \mathrm{I}_{p_m} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\tilde{P}_1 = \begin{bmatrix} P_{33} & \cdots & P_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m3} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(\alpha^2 - \alpha)\begin{bmatrix} P_{33} & \cdots & P_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m3} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix} + \alpha\beta \begin{bmatrix} (\lambda_3 + \lambda_3)P_{33} & \cdots & (\lambda_3 + \lambda_m)P_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_m + \lambda_3)P_{m3} & \cdots & (\lambda_m + \lambda_m)P_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta\lambda_3 - \beta^2\lambda_3^{\,2})I_{p_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\beta\lambda_m - \beta^2\lambda_m^{\,2})\mathrm{I}_{p_m} \end{bmatrix}$$

bulunur ve buradan,

$$\begin{bmatrix} ((\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha\beta\lambda_3)P_{33} & \cdots & ((\alpha^2 - \alpha) + \alpha\beta(\lambda_3 + \lambda_m))P_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\alpha^2 - \alpha) + \alpha\beta(\lambda_m + \lambda_3))P_{m3} & \cdots & ((\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha\beta\lambda_m)P_{mm} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (\beta\lambda_3-\beta^2\lambda_3{}^2)\mathrm{I}_{p_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\beta\lambda_m-\beta^2\lambda_m{}^2)\mathrm{I}_{p_m} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Matrislerin eşitliği tanımından, $r \neq s$ olacak şekildeki her $r, s \in \{3,...,m\}$ için $(\alpha^2-\alpha+\alpha\beta(\lambda_r+\lambda_s))P_{rs}=\mathbf{0}$ dır. $\alpha \neq 0$ olduğundan,

$$(\alpha-1+\beta(\lambda_r+\lambda_s))P_{rs}=\mathbf{0} \tag{3.17}$$

olur.

$$\Lambda_2\tilde{P}_1=\begin{bmatrix} \lambda_3\mathrm{I}_{p_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_m\mathrm{I}_{p_m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{33} & \cdots & P_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m3} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_3P_{33} & \cdots & \lambda_3P_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_mP_{m3} & \cdots & \lambda_mP_{mm} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}_1\Lambda_2=\begin{bmatrix} P_{33} & \cdots & P_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m3} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_3\mathrm{I}_{p_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_m\mathrm{I}_{p_m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_3P_{33} & \cdots & \lambda_mP_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_3P_{m3} & \cdots & \lambda_mP_{mm} \end{bmatrix}$$

ve $\Lambda_2\tilde{P} \neq \tilde{P}\Lambda_2$ olduğundan $i \neq j$ ve $\lambda_iP_{ij} \neq \lambda_jP_{ij}$ olacak şekilde $i, j \in \{3,...,m\}$ vardır. O halde bu i ve j için $P_{ij} \neq \mathbf{0}$ dır. Dolayısıyla (3.17)' den $i \neq j$ için $\alpha+\beta(\lambda_i+\lambda_j)=1$ bağıntısı elde edilir. $\alpha=-\frac{a}{b}$ ve $\beta=\frac{1}{b}$ olduğu kullanılırsa, bu son bağıntıdan $i \neq j$ için

$$\lambda_i+\lambda_j=a+b$$

elde edilir.

Genelliği bozmaksızın, indisler $i=3$ ve $j=4$ olarak yeniden düzenlenirse $\lambda_3+\lambda_4=a+b$ olur. Şimdi $\lambda_3+\lambda_r=a+b$ olacak şekilde $r \in \{5,...,m\}$ var olsun. O halde $\lambda_3+\lambda_4=\lambda_3+\lambda_r$ olur. Buradan $\lambda_4=\lambda_r$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece her $r\in\{5,...,m\}$ için $\lambda_3+\lambda_r\neq a+b$ dir. $\alpha=-\frac{a}{b}$ ve $\beta=\frac{1}{b}$ eşitlikleri hatırlanarak, bu son ifade ile (3.17) eşitliği kullanılırsa, her $r\in\{5,...,m\}$ için $P_{3r}=\mathbf{0}$ elde edilir. Simetriklikten, her $r\in\{5,...,m\}$ için $P_{r3}=\mathbf{0}$ olur. Yine, $\lambda_4+\lambda_r=a+b$ olacak şekilde $r\in\{5,...,m\}$ var olsun. Bu durumda $\lambda_3+\lambda_4=\lambda_4+\lambda_r$ olur ve buradan $\lambda_3=\lambda_r$ elde edilir. Bu da bir çelişkidir. O halde her $r\in\{5,...,m\}$ için $\lambda_4+\lambda_r\neq a+b$ dir. Dolayısıyla (3.17)' den, her $r\in\{5,...,m\}$ için $P_{4r}=\mathbf{0}$ dır. Simetriklikten her $r\in\{5,...,m\}$ için $P_{r4}=\mathbf{0}$ olur. O halde, $P_2=\begin{bmatrix}P_{33} & P_{34}\\ P_{43} & P_{44}\end{bmatrix}$ ve $\tilde{P}_2$ uygun boyutlu kare matris olmak üzere,

$$P=S(P_1\oplus P_2\oplus\tilde{P}_2)S^{-1}$$

olarak yazılabilir. $\tilde{P}_1=P_2\oplus\tilde{P}_2$ ve $\tilde{P}_1$ matrisi idempotent olduğundan P_2 ile $\tilde{P}_2$ matrisleri de idempotenttir.

$\mu_2=\lambda_3$, $\nu_2=\lambda_4$, $r_2=p_3$ ve $s_2=p_4$ olsun. Bu durumda (3.10)' dan, Λ_3 bir köşegen matris olmak üzere,

$$X=S(\mu_1\,\mathrm{I}_{r_1}\oplus\nu_1\,\mathrm{I}_{s_1}\oplus\mu_2\,\mathrm{I}_{r_2}\oplus\nu_2\,\mathrm{I}_{s_2}\oplus\Lambda_3)S^{-1}$$

yazılabilir. $Q=\alpha P+\beta X$ olduğundan,

$$\begin{aligned}Q&=\alpha(S(P_1\oplus P_2\oplus\tilde{P}_2)S^{-1})+\beta(S(\mu_1\,\mathrm{I}_{r_1}\oplus\nu_1\,\mathrm{I}_{s_1}\oplus\mu_2\,\mathrm{I}_{r_2}\oplus\nu_2\,\mathrm{I}_{s_2}\oplus\Lambda_3)S^{-1})\\&=S((\alpha P_1\oplus\alpha P_2\oplus\alpha\tilde{P}_2)+(\beta\mu_1\,\mathrm{I}_{r_1}\oplus\beta\nu_1\,\mathrm{I}_{s_1}\oplus\beta\mu_2\,\mathrm{I}_{r_2}\oplus\beta\nu_2\,\mathrm{I}_{s_2}\oplus\beta\Lambda_3))S^{-1}\\&=S(\underbrace{(\alpha P_1+(\beta\mu_1\,\mathrm{I}_{r_1}\oplus\beta\nu_1\,\mathrm{I}_{s_1}))}_{=Q_1}\oplus\underbrace{(\alpha P_2+(\beta\mu_2\,\mathrm{I}_{r_2}\oplus\beta\nu_2\,\mathrm{I}_{s_2}))}_{=:Q_2}\oplus\underbrace{(\alpha\tilde{P}_2+\beta\Lambda_3)}_{=:\tilde{Q}_2})S^{-1}\\&=S(Q_1\oplus Q_2\oplus\tilde{Q}_2)S^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Q_2 \in \mathbb{C}^{(r_2+s_2)\times(r_2\times s_2)}$ ve $\tilde{Q}_2$ uygun boyutlu kare matristir. Ayrıca, $\alpha = -\frac{a}{b}$ ve $\beta = \frac{1}{b}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
aP_2 + bQ_2 &= aP_2 + b(\alpha P_2 + (\beta\mu_2 \mathrm{I}_{r_2} \oplus \beta\nu_2 \mathrm{I}_{s_2})) \\
&= aP_2 + b(-\frac{a}{b}P_2 + (\frac{1}{b}\mu_2 \mathrm{I}_{r_2} \oplus \frac{1}{b}\nu_2 \mathrm{I}_{s_2})) \\
&= \mu_2 \mathrm{I}_{r_2} \oplus \nu_2 \mathrm{I}_{s_2}
\end{aligned}
$$

olur.

$\tilde{Q}_2\tilde{P}_2 = \tilde{P}_2\tilde{Q}_2$ ise, (i)' yi ve (3.2)' nin ilk iki eşitliğini elde etmek için $P_0 = \tilde{P}_2$ ve $Q_0 = \tilde{Q}_2$ almak yeterlidir. $\tilde{Q}_2\tilde{P}_2 \neq \tilde{P}_2\tilde{Q}_2$ ise yine aynı yönteme devam edilir. Bu şekilde devam edilerek, $2k \leq m$ $(m \geq 2)$ olmak üzere, k. adımda; $\tilde{Q}_{k-1}\tilde{P}_{k-1} \neq \tilde{P}_{k-1}\tilde{Q}_{k-1}$ ise $\Lambda_k \tilde{P}_{k-1} \neq \tilde{P}_{k-1}\Lambda_k$ olacağından $i \neq j$ ve $\lambda_i P_{ij} \neq \lambda_j P_{ij}$ olacak şekilde $i, j \in \{2k-1, ..., m\}$ vardır. Bu nedenle, bu i ve j için $P_{ij} \neq \mathbf{0}$ dır. ($m = 1$ olsaydı, $P = SP_{11}S^{-1}$ ve $X = S(\lambda_1 \mathrm{I}_{p_1})S^{-1}$ olacağından, $PX = XP = S(\lambda_1 P_{11})S^{-1}$ olurdu. Bu da $PX \neq XP$ olmasıyla çelişirdi.) O halde, $i \neq j$ için $\alpha + \beta(\lambda_i + \lambda_j) = 1$ bağıntısı elde edilir. $\alpha = -\frac{a}{b}$ ve $\beta = \frac{1}{b}$ olduğu kullanılırsa, bu son bağıntıdan $i \neq j$ için

$$\lambda_i + \lambda_j = a + b$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, genelliği bozmaksızın, indisler $i = 2k-1$ ve $j = 2k$ olarak yeniden düzenlenirse, $P_{2k-1,2k-1} \in \mathbb{C}^{p_{2k-1,2k-1}}$, $P_{2k,2k} \in \mathbb{C}^{p_{2k,2k}}$, $P_k = \begin{bmatrix} P_{2k-1,2k-1} & P_{2k-1,2k} \\ P_{2k,2k-1} & P_{2k,2k} \end{bmatrix}$ ve P_0 uygun boyutlu kare matris olmak üzere,

$$P = S(P_1 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus P_0)S^{-1} \tag{3.18}$$

yazılabilir. P matrisi idempotent matris olduğundan, P_k ve P_0 matrisleri de idempotenttir.

$\mu_k = \lambda_{2k-1}$, $\nu_k = \lambda_{2k}$, $r_k = p_{2k-1}$ ve $s_k = p_{2k}$ olsun. $rk(X) = r_1 + s_1 + r_2 + s_2 + \cdots + r_k + s_k$ olmak üzere (3.10)' dan,

$$X = S(\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1} \oplus \cdots \oplus \mu_k \mathrm{I}_{r_k} \oplus \nu_k \mathrm{I}_{s_k} \oplus \mathbf{0})S^{-1}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{0}$, $(n - rk(X)) \times (n - rk(X))$ boyutlu sıfır matrisidir. $Q = \alpha P + \beta X$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
Q &= \alpha(S(P_1 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus P_0)S^{-1}) + \beta(S(\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \nu_1 \mathrm{I}_{s_1} \oplus \cdots \oplus \mu_k \mathrm{I}_{r_k} \oplus \nu_k \mathrm{I}_{s_k} \oplus \mathbf{0})S^{-1}) \\
&= S((\alpha P_1 \oplus \cdots \oplus \alpha P_k \oplus \alpha P_0) + (\beta\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \beta\nu_1 \mathrm{I}_{s_1} \oplus \cdots \oplus \beta\mu_k \mathrm{I}_{r_k} \oplus \beta\nu_k \mathrm{I}_{s_k} \oplus \mathbf{0}))S^{-1} \\
&= S(\underbrace{(\alpha P_1 + (\beta\mu_1 \mathrm{I}_{r_1} \oplus \beta\nu_1 \mathrm{I}_{s_1}))}_{=Q_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{(\alpha P_k + (\beta\mu_k \mathrm{I}_{r_k} \oplus \beta\nu_k \mathrm{I}_{s_k}))}_{=:Q_k} \oplus \underbrace{\alpha P_0}_{=:Q_0})S^{-1}
\end{aligned}$$

yani,

$$Q = S(Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_k \oplus Q_0)S^{-1} \tag{3.19}$$

elde edilir. Q matrisi idempotent olduğundan Q_k ve Q_0 matrisleri de idempotenttir. Ayrıca, $\alpha = -\dfrac{a}{b}$ ve $\beta = \dfrac{1}{b}$ olduğundan,

$$aP_k + bQ_k = aP_k + b(\alpha P_k + (\beta\mu_k \mathrm{I}_{r_k} \oplus \beta\nu_k \mathrm{I}_{s_k})) = \mu_k \mathrm{I}_{r_k} \oplus \nu_k \mathrm{I}_{s_k}$$

olur. (3.18) ve (3.19) eşitliklerinden,

$$P = S((\oplus_{i=1}^{k} P_i) \oplus P_0)S^{-1} \quad \text{ve} \quad Q = S((\oplus_{i=1}^{k} Q_i) \oplus Q_0)S^{-1}$$

elde edilir. $Q_0 = \alpha P_0$ olduğundan,

$$P_0 Q_0 = P_0(\alpha P_0) = (P_0 \alpha) P_0 = (\alpha P_0) P_0 = Q_0 P_0$$

olarak bulunur. Böylece lemmanın (i) maddesi ispatlanmış olur. Burada dikkat edilmesi gereken bir durum söz konusudur. Şöyle ki;

X matrisinin özdeğerlerinin hiçbiri sıfır değil ise, $\det(X) \neq 0$ olacağından X matrisi tersinir, yani tam ranklı olur. X matrisinin boyutu n olduğundan, $n = rk(X) = r_1 + s_1 + r_2 + s_2 + \cdots + r_k + s_k$ dır. $p_1 + ... + p_m = n$ ve $p_1 = r_1$, $p_2 = s_1$, $p_3 = r_2$, $p_4 = s_2, \ldots, p_{2k-1} = r_k$, $p_{2k} = s_k$ olduğundan, $p_{2k} = p_m$ bulunur. O halde P_k matrisinin son bloğu olan $P_{2k,2k}$ matrisi, $S^{-1}PS$ matrisinin son bloğu olan P_{mm} matrisinden başkası değildir. Bu da P matrisinin $P = S(P_1 \oplus \cdots \oplus P_k)S^{-1}$ şeklinde ifade edilebileceği anlamına gelir. Görüldüğü üzere P_0 matrisi yok oldu. Buna bağlı olarak Q_0 matrisi de yok olur. Yani P ve Q matrisleri, birbirleri ile değişmeli olmayan P_i ve Q_i matrislerinin direkt toplamı olarak da yazılabilir.

Buraya kadar yapılan ispatta, $\mu_i + \nu_i = a + b$ olacak şekildeki $\mu_1, \nu_1; ...; \mu_k, \nu_k$ farklı kompleks sayı ikilileri, $\mu_1 = \lambda_1$, $\nu_1 = \lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_3$, $\nu_2 = \lambda_4, \ldots$, $\mu_k = \lambda_{2k-1}$, $\nu_k = \lambda_{2k}$ olarak ifade edilmişti. Bu da lemmanın (ii) maddesinin ilk bağıntısını ispatlar.

$X_i = aP_i + bQ_i$, $i = 1, ..., k$, olsun. $Q_i = \alpha P_i + (\beta \mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \beta \nu_i \mathrm{I}_{s_i})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} X_i &= aP_i + bQ_i \\ &= aP_i + b(\alpha P_i + (\beta \mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \beta \nu_i \mathrm{I}_{s_i})) \\ &= aP_i + \alpha b P_i + \beta b(\mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \nu_i \mathrm{I}_{s_i}) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\alpha = -\dfrac{a}{b}$ ve $\beta = \dfrac{1}{b}$ olduğundan $\alpha b = -a$ ve $b\beta = 1$ olur ve son eşitlikten,

$$X_i = aP_i - aP_i + 1(\mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \nu_i \mathrm{I}_{s_i}) = \mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \nu_i \mathrm{I}_{s_i}$$

elde edilir. Yani $\sigma(X) = \sigma(aP_i + bQ_i) = \{\mu_i, \nu_i\}$ dir. Bu da lemmanın (ii) maddesinin ikinci bağıntısıdır.

$i = 1,...,k$ için $X_i = aP_i + bQ_i$ ve P_i ile Q_i matrisleri $m_i \times m_i$ boyutlu matrisler olduğundan, $X_i = \mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \nu_i \mathrm{I}_{s_i}$ ve $r_i + s_i = m_i$ olacak şekilde $r_i, s_i \in \{1,...,m_i\}$ vardır. Bu durumda

$$X_i - \mu_i \mathrm{I}_{m_i} = (\mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \nu_i \mathrm{I}_{s_i}) - (\mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \mu_i \mathrm{I}_{s_i}) = \mathbf{0}_{r_i} \oplus (\nu_i - \mu_i)\mathrm{I}_{s_i}$$

ve

$$X_i - \nu_i \mathrm{I}_{m_i} = (\mu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \nu_i \mathrm{I}_{s_i}) - (\nu_i \mathrm{I}_{r_i} \oplus \nu_i \mathrm{I}_{s_i}) = (\mu_i - \nu_i)\mathrm{I}_{r_i} \oplus \mathbf{0}_{s_i}$$

elde edilir ve buradan $(X_i - \mu_i \mathrm{I}_{m_i})(X_i - \nu_i \mathrm{I}_{m_i}) = X_i^{\,2} - (\mu_i + \nu_i)X_i + \mu_i\nu_i \mathrm{I}_{m_i} = \mathbf{0}$ olur. P_i ve Q_i matrisleri idempotent, $X_i = aP_i + bQ_i$ ve $\mu_i + \nu_i = a + b$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = (aP_i + bQ_i)^2 - (a+b)(aP_i + bQ_i) + \mu_i\nu_i \mathrm{I}_{m_i} &= ab(P_iQ_i + Q_iP_i - P_i - Q_i) + \mu_i\nu_i \mathrm{I}_{m_i} \\ &= -ab(P_i - Q_i)^2 + \mu_i\nu_i \mathrm{I}_{m_i}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.2)' nin son bağıntısı elde edilir.

$i \in \{1,...,m\}$ alınsın. P ve Q matrisleri idempotent olduğundan P_i ve Q_i matrisleri de idempotenttir. Her idempotent matris köşegenleştirilebilir olduğundan, $x_i = rk(P_i)$ olmak üzere,

$$P_i = S_i(\mathrm{I}_{x_i} \oplus \mathbf{0})S_i^{-1}$$

olacak şekilde bir tersinir $S_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ matrisi vardır. $A_i \in \mathbb{C}^{x_i \times x_i}$ ve $D_i \in \mathbb{C}^{(m_i - x_i)\times(m_i - x_i)}$ olmak üzere,

$$Q_i = S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

olsun. Bu, P_i ve Q_i matrislerinin (3.7)' deki gibi yazılabileceğini ifade eder. P_i ve Q_i matrislerinin idempotent olduğu göz önüne alınırsa (3.2)' nin son eşitliğinden

$$ab(P_i + Q_i - P_iQ_i - Q_iP_i) = \mu_i\nu_i\,\mathrm{I}_{m_i} \qquad (3.20)$$

olur. P_i ve Q_i matrislerinin (3.7)' deki ifadeleri (3.20)' de yerine yazılır ve I matrisinin yerine $S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1}$ matrisi alınırsa,

$$\mu_i\nu_i S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1} = ab \left\{ \begin{array}{l} S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} + S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1} - S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1} - \\ S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1} S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} \end{array} \right\}$$

elde edilir. Hipotezden $a, b \in \mathbb{C}^*$ olduğundan,

$$S_i \left\{ \begin{bmatrix} I_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_i & \mathbf{0} \\ C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} S_i^{-1} = \frac{\mu_i\nu_i}{ab} S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

olur.

Eşitliğin her iki tarafı soldan S_i^{-1} matrisi ile sağdan S_i matrisi ile çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} I_{x_i} - A_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_i v_i}{ab} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mu_i v_i}{ab} \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix}$$

bulunur. Matrislerin eşitliği tanımından,

$$A_i = (1 - \frac{\mu_i v_i}{ab}) \mathrm{I}_{x_i} \text{ ve } D_i = \frac{\mu_i v_i}{ab} \mathrm{I}_{m_i - x_i}$$

elde edilir.

$\rho_i = \frac{1}{ab} \mu_i v_i$ olarak tanımlanırsa, $Q_i^2 = Q_i$ eşitliğinden,

$$S_i \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ C_i & \rho_i \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1} S_i \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ C_i & \rho_i \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1} = S_i \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ C_i & \rho_i \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

olur. Eşitliğin sol tarafı S_i^{-1} matrisi ile sağ tarafı da S_i matrisi ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} (1-\rho_i)^2 \mathrm{I}_{x_i} + B_i C_i & (1-\rho_i) B_i + \rho_i B_i \\ (1-\rho_i) C_i + \rho_i C_i & C_i B_i + \rho_i^2 \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ C_i & \rho_i \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan,

$$(1-\rho_i)^2 \mathrm{I}_{x_i} + B_i C_i = (1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i}, \; C_i B_i + \rho_i^2 \mathrm{I}_{m_i - x_i} = \rho_i \mathrm{I}_{m_i - x_i},$$

yani

$$B_iC_i = \rho_i(1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i}, \quad C_iB_i = \rho_i(1-\rho_i)\mathrm{I}_{m_i-x_i}$$

elde edilir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır. ■

Aşağıdaki sonuç bu lemmanın basit bir sonucudur.

Sonuç 3.3. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Eğer $\lambda \in \sigma(aP+bQ)\setminus \{0,a,b,a+b\}$ ise, bu durumda $a+b=\lambda+\mu$ eşitliğini sağlayan bir $\mu \in \sigma(aP+bQ)$ vardır.

İspat. $\lambda \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ ise, $\lambda \notin \{0,a,b,a+b\}$ dir. $P_0Q_0 = Q_0P_0$ eşitliği dikkate alınırsa, Teorem 3.1' e göre, $\lambda \notin \sigma(aP_0+bQ_0)$ dir. O halde, Lemma 3.2' ye göre, $\lambda \in \sigma(aP_i+bQ_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,...,k\}$ vardır. Lemma 3.2 (ii)' ye göre, $\lambda \in \sigma(aP_i+bQ_i)$ ise, $\lambda+\mu=a+b$ olacak şekilde $\mu \in \sigma(aP_i+bQ_i)$ vardır. $\sigma(aP_i+bQ_i) \subset \sigma(aP+bQ)$ olduğundan $\mu \in \sigma(aP+bQ)$ olur. Böylece istenen μ değeri bulunmuş olur. ■

Aşağıdaki teoremde iki idempotent matrisin farkının spektrumu ile bu idempotent matrislerin bir lineer kombinasyonunun spektrumu arasında ilişki kurulmaktadır.

Teorem 3.4. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\mu \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ ise $\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} = \lambda^2$ olacak şekilde bir $\lambda \in \sigma(P-Q)$ vardır,

(ii) $\lambda \in \sigma(P-Q)\setminus\{0,1,-1\}$ ise $x^2-(a+b)x+\lambda^2 ab$ polinomunun kökleri $aP+bQ$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. P ve Q matrisleri (3.1)' deki gibi olsun. $\mu \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ ise, Lemma 3.2' ye göre $\sigma(aP_i+bQ_i)=\{\mu, a+b-\mu\}$ olacak şekilde $i \in \{1,...,k\}$ vardır. $ab \neq 0$ olduğundan (3.2)' nin son bağıntısına göre, $(P_i-Q_i)^2 = \dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab}\mathrm{I}_{m_i}$ olur. O halde $\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} \in \sigma[(P_i-Q_i)^2]$ yazılabilir. $\sigma[(P_i-Q_i)^2] \subset \sigma[(P-Q)^2]$ olduğundan $\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} \in \sigma[(P-Q)^2]$ dir. Buradan spektral dönüşüm teoremine göre, $\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} = \lambda^2$ olacak şekilde bir $\lambda \in \sigma(P-Q)$ var olduğu görülür. Böylece (i)' deki iddianın doğruluğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $\lambda \in \sigma(P-Q)\setminus\{0,1,-1\}$ olsun. $\lambda \notin \{0,1,-1\}$ ve $P_0Q_0 = Q_0P_0$ olduğundan Teorem 3.1' e göre $\lambda \notin \sigma(P_0-Q_0)$ dır. Böylece $\lambda \in \sigma(P_i-Q_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,...,k\}$ vardır. Bu son ifadeye spektral dönüşüm teoremi uygulanırsa, $\lambda^2 \in \sigma[(P_i-Q_i)^2]$ elde edilir. (3.2) bağıntılarına göre, $\mu+\nu = a+b$ ve $\lambda^2 = \dfrac{\mu\nu}{ab}$ olacak şekilde $\mu,\nu \in \sigma(aP_i+bQ_i)$ vardır. Böylece μ ve ν, $x^2-(a+b)x+\lambda^2 ab$ polinomunun kökleridir. $\sigma(aP_i+bQ_i) \subset \sigma(aP+bQ)$ olduğu hatırlanırsa (ii)' de istenen elde edilir. ■

Teorem 3.5. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,b,a',b' \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ ve $a'P+b'Q$ matrisleri köşegenleştirilebilir olsun. Eğer $\mu \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ ise, bu durumda $x^2-(a+b)x+\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab}a'b'$ polinomunun kökleri $a'P+b'Q$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. $\mu \in \sigma(aP+bQ) \setminus \{0,a,b,a+b\}$ olsun. Teorem 3.4 (i)' ye göre, $\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} = \lambda^2$ olacak şekilde $\lambda \in \sigma(P-Q)$ vardır. $\mu \notin \{0,a,b,a+b\}$ olduğundan $\lambda \notin \{0,1,-1\}$ dir. $\lambda \in \sigma(P-Q)$ ve $\lambda \notin \{0,1,-1\}$ olduğundan Teorem 3.4 (ii)' ye göre, $x^2-(a'+b')x+\lambda^2 a'b' = x^2-(a'+b')x+\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab}a'b'$ polinomunun kökleri $a'P+b'Q$ matrisinin özdeğerleridir. ■

Teorem 3.6. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma(PQ) \setminus \{0,1\}$ ise $x^2-(a+b)x+ab(1-\lambda)$ polinomunun kökleri $aP+bQ$ matrisinin özdeğerleridir,

(ii) $\mu \in \sigma(aP+bQ) \setminus \{0,a,b,a+b\}$ ise $1-\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} \in \sigma(PQ)$ dur.

İspat. P ve Q matrisleri (3.1)' deki gibi olsun. O halde,

$$PQ = S((\oplus_{i=1}^{k}(P_iQ_i)) \oplus P_0Q_0)S^{-1}$$

yazılabilir. (3.3) ve (3.7)' den her $i=1,\ldots,k$ için

$$P_iQ_i = S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1} = S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

$$= S_i \begin{bmatrix} (1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

dir. $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i}{ab}$ olarak alınırsa,

$$P_iQ_i = S_i \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} \tag{3.21}$$

elde edilir. Öte yandan, P_0 ve Q_0 iki değişmeli idempotent matris olduğundan, Teorem 2.4.8' e göre, P_0Q_0 matrisi de idempotenttir ve dolayısıyla $\sigma(P_0Q_0) \subset \{0,1\}$ dir.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(PQ) \setminus \{0,1\}$ olsun. (3.21)' den, $\lambda = 1-\rho_i$ olacak şekilde $i \in \{1,...,k\}$ vardır. Lemma 3 2 (ii)' ye göre, $aP_i + bQ_i$ matrisinin $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i}{ab}$ ve $\mu_i + \nu_i = a+b$ olacak şekilde μ_i ve ν_i özdeğerleri mevcuttur. $\sigma(aP_i + bQ_i) \subset \sigma(aP+bQ)$ olduğundan, $\mu_i, \nu_i \in \sigma(aP+bQ)$ olur. $\mu_i = \mu$ ve $\nu_i = \nu$ olarak tanımlanırsa, $\mu + \nu = a+b$ ve $\mu\nu = ab(1-\lambda)$ olarak bulunur. Böylece μ ve ν sayıları, $x^2 - (a+b)x + ab(1-\lambda)$ polinomunun kökleridir. Bu da (i)' de istenendir.

Şimdi de $\mu \in \sigma(aP+bQ) \setminus \{0,a,b,a+b\}$ olsun. $\mu \notin \{0,a,b,a+b\}$ ve P_0 ile Q_0 matrisleri değişmeli idempotent matrisler olduğundan, Teorem 3.1' e göre $\mu \notin \sigma(aP_0 + bQ_0)$ dir ve Lemma 3.2' ye göre, μ ve $a+b-\mu$ nicelikleri $aP_i + bQ_i$ matrisinin özdeğerleri olacak şekilde bir $i \in \{1,...,k\}$ vardır. Böylece (3.21)' den $1 - \dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} \in \sigma(P_iQ_i)$ yazılabilir. $\sigma(P_iQ_i) \subset \sigma(PQ)$ olduğundan (ii)' de istenen elde edilir. ∎

Koliha ve Rakočević [17] çalışmasında, bir $\mathbb{C}^*$ cebirinde aşikar olmayan p ve q projeksiyonları ve $\lambda \notin \mathbb{C} \setminus \{0,1,-1\}$ için, $\lambda \in \sigma(p-q)$ olmasının gerekli ve yeterli koşulunun $1-\lambda^2 \in \sigma(PQ)$ olması gerektiğini ispatladılar. (Bir $\mathbb{C}^*$ cebirinde bir f projeksiyonu $f^2 = f = f^*$ eşitliklerini sağlar.) Teorem 3.6' da $a=1$ ve $b=-1$ alınırsa aynı bağıntılar elde edilir.

Teorem 3.7. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma(PQP)\setminus\{0,1\}$ ise $x^2-(a+b)x+ab(1-\lambda)$ polinomunun kökleri $aP+bQ$ matrisinin özdeğerleridir,

(ii) $\mu \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ ise $1-\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} \in \sigma(PQP)$ dir.

İspat. P ve Q matrisleri (3.1)' deki gibi olsun. Bu durumda,

$$PQP = S((\oplus_{i=1}^{k}(P_iQ_iP_i)) \oplus P_0Q_0P_0)$$

olur. (3.7) ve (3.21)' e göre $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i}{ab}$, $i=1,\ldots,k$, olmak üzere

$$P_iQ_iP_i = S_i\begin{bmatrix}(1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} = S_i\begin{bmatrix}(1-\rho_i)\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{3.22}$$

dir. P_0 ile Q_0 matrisleri değişmeli idempotent matrisler olduğundan,

$$(P_0Q_0P_0)^2 = P_0Q_0\underbrace{P_0P_0}_{P_0}Q_0P_0 = P_0Q_0\underbrace{P_0Q_0}_{Q_0P_0}P_0 = P_0Q_0P_0$$

dır. Yani $P_0Q_0P_0$ matrisi de idempotenttir ve dolayısıyla $\sigma(P_0Q_0P_0)\subset\{0,1\}$ dir. Şimdi, $\lambda \in \sigma(PQP)\setminus\{0,1\}$ olsun. $\lambda \notin \{0,1\}$ olduğundan $\lambda \notin \sigma(P_0Q_0P_0)$ dır. O halde $\lambda \in \sigma(P_iQ_iP_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\ldots,k\}$ vardır. (3.22)' den $\lambda = 1-\rho_i$ yazılabilir. (3.2)' ye göre $aP+bQ$ matrisinin $\rho_i = \dfrac{\mu\nu}{ab}$ ve $\mu+\nu=a+b$ olacak şekilde μ ve ν özdeğerleri mevcuttur. Böylece $\mu+\nu=a+b$ ve $\mu\nu = ab(1-\lambda)$ olur. Bu, μ ile ν nin, $x^2-(a+b)x+ab(1-\lambda)$ polinomunun kökleri olduğunu gösterir.

Şimdi de $\mu \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ olsun. Lemma 3.2 ve Teorem 3.1' e göre, μ ve $a+b-\mu$, aP_i+bQ_i matrisinin özdeğerleri olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. (3.22)' den $1-\rho_i = 1-\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab} \in \sigma(P_iQ_iP_i) \subset \sigma(PQP)$ olur. Böylece (ii) maddesindeki iddianın doğruluğu gösterilmiş olur. ∎

Teorem 3.8. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma(PQ-QP)\setminus\{0\}$ ise $\lambda^2 = -\dfrac{\mu\nu}{ab}(1-\dfrac{\mu\nu}{ab})$ ve $\mu+\nu = a+b$ olacak şekilde $\mu,\nu \in \sigma(aP+bQ)$ vardır,

(ii) $\mu \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ ise $-\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab}(1-\dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab}) = \lambda^2$ olacak şekilde $\lambda \in \sigma(PQ-QP)$ vardır.

İspat. P ve Q matrisleri (3.1)' deki gibi olsun. O halde,

$$\begin{aligned} PQ-QP &= S((\oplus_{i=1}^k P_i)\oplus P_0)S^{-1}S((\oplus_{i=1}^k Q_i)\oplus Q_0)S^{-1} - S((\oplus_{i=1}^k Q_i)\oplus Q_0)S^{-1}S((\oplus_{i=1}^k P_i)\oplus P_0)S^{-1} \\ &= S((\oplus_{i=1}^k (P_iQ_i))\oplus P_0Q_0)S^{-1} - S((\oplus_{i=1}^k (Q_iP_i))\oplus Q_0P_0)S^{-1} \end{aligned}$$

dir. $P_0Q_0 = Q_0P_0$ olduğundan,

$$PQ-QP = S((\oplus_{i=1}^k (P_iQ_i - Q_iP_i))\oplus \mathbf{0})S^{-1}$$

olur. (3.3) ve (3.7)' ye göre $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i}{ab}$, $i=1,\dots,k$, olmak üzere,

$$P_iQ_i - Q_iP_i = S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}S_i^{-1} - S_i\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1}$$

$$= S_i \begin{bmatrix} I_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\,\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1} - S_i \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\,\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

$$= S_i \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\,\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} - S_i \begin{bmatrix} (1-\rho_i)\,\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

$$= S_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_i \\ -C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$(P_iQ_i - Q_iP_i)^2 = S_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_i \\ -C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} S_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_i \\ -C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} = S_i \begin{bmatrix} -B_iC_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C_iB_i \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerine göre $B_iC_i = \frac{\mu_i\nu_i}{ab}(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{x_i}$ ve $C_iB_i = \frac{\mu_i\nu_i}{ab}(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{m_i-x_i}$ olduğundan,

$$(P_iQ_i - Q_iP_i)^2 = S_i \begin{bmatrix} -\frac{\mu_i\nu_i}{ab}(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mu_i\nu_i}{ab}(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{m_i-x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

$$= S_i\,(-\frac{\mu_i\nu_i}{ab}(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab})\,\mathrm{I}_{m_i})S_i^{-1} = -\rho_i(1-\rho_i)\,\mathrm{I}_{m_i} \qquad (3.23)$$

olur. $\lambda \in \sigma(PQ-QP)\setminus\{0\}$ olsun. Bu durumda $\lambda^2 \in \sigma[(PQ-QP)^2]\setminus\{0\}$ dir ve böylece (3.23)' den teoremin (i) maddesini sağlayan $\mu,\nu \in \sigma(aP+bQ)$ vardır.

Şimdi de $\mu \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{0,a,b,a+b\}$ olsun. Buradan $\mu \in \sigma(aP_i+bQ_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,...,k\}$ vardır. $\rho = \dfrac{\mu(a+b-\mu)}{ab}$ olarak tanımlanırsa (3.23) ve

Lemma 3.2’ den $-\rho(1-\rho)\in\sigma[(PQ-QP)^2]$ bulunur. Spektral dönüşüm teoremi uygulanırsa, $-\rho(1-\rho)=\lambda^2$ olacak şekilde bir $\lambda\in(PQ-QP)$ vardır. Böylece (ii)’ yi sağlayan λ değeri bulunmuş olur. ■

BÖLÜM 4. BİR İDEMPOTENT VE BİR İNVOLUTİF MATRİSE BAĞLI BAZI MATRİSLERİN SPEKTRUMLARI

P, Q kompleks matrisleri sırasıyla idempotent ve involutif matrisler ve a, b sayıları $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olacak şekilde sıfırdan farklı kompleks sayılar olsun. Bu bölümde, $aP + bQ$ matrisinin spektrumu ile PQ, PQP, $PQ - QP$ ve $PQ + QP - Q$ matrislerinin spektrumları arasında ilişki kurulacaktır.

$P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisleri değişmeli olduğunda, $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere,

- Her idempotent P matrisi köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(P) \subset \{0,1\}$ ' dir.
- Her involutif Q matrisi köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(Q) \subset \{1,-1\}$ ' dir.
- Köşegenleştirilebilir iki matrisin değişmeli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, onların eşanlı köşegenleştirilebilir olmasıdır.

sonuçları kullanılarak $aP + bQ$ matrisinin spektrumu hakkında aşağıdaki yorum yapılabilir:

Teorem 4.1. $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisleri $PQ = QP$, $P^2 = P$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a, b \in \mathbb{C}^*$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(aP + bQ) \subset \{a+b, a-b, b, -b\}$$

dir.

İspat. $P=\mathbf{0}$ ise, $aP+bQ=bQ$ olur. Q matrisi involutif olduğundan köşegenleştirilebilirdir ve özdeğerleri $\{1,-1\}$ kümesindedir. $Q=\mp \mathrm{I}$ olması durumunda ispat açıktır. $Q\neq \mp \mathrm{I}$ olsun. Bu durumda, r_1, $r_2>0$ olmak üzere,

$$Q=T(\mathrm{I}_{r_1}\oplus -\mathrm{I}_{r_2})T^{-1}$$

yazılabilir. O halde,

$$aP+bQ=bQ=T(b\,\mathrm{I}_{r_1}\oplus -b\,\mathrm{I}_{r_2})T^{-1},$$

yani

$$\sigma(aP+bQ)\subset\{b,-b\}\subset\{a+b,a-b,b,-b\}$$

olur. Böylece $P=\mathbf{0}$ durumu için ispat tamamlanır.

$P\neq \mathbf{0}$ ve $rk(P)=r$ olsun. (Rank tanımına ve hipoteze göre $r>0$ ve $r\leq n$ dir.) Q matrisi involutif olduğundan tersinirdir. Herhangi bir matrisi sağdan veya soldan tersinir bir matrisle çarpmak suretiyle elde edilen matrisin rankı önceki matrisin rankına eşittir. O halde $rk(PQ)=r$ dir. Q matrisi tersinir olduğundan, bu matris tam ranklıdır. Yani, $rk(Q)=n$ dir. $n=rk(Q)=r+s$ $(r>0\,,s\geq 0)$ olsun. P ve Q matrisleri değişmeli olan iki köşegenleştirilebilir matris olduğundan, bu matrisler eşanlı köşegenleştirilebilir. O halde, $x<r$ ve $y<s$ ve $x,y>0$ olmak üzere,

$$P=S(\mathrm{I}_x\oplus \mathrm{I}_{r-x}\oplus \mathbf{0}\oplus \mathbf{0})S^{-1} \text{ ve } Q=S(\mathrm{I}_x\oplus -\mathrm{I}_{r-x}\oplus \mathrm{I}_y\oplus -\mathrm{I}_{s-y})S^{-1}$$

yazılabilir. Buradan,

$$aP+bQ=S((a+b)\,\mathrm{I}_x\oplus (a-b)\,\mathrm{I}_{r-x}\oplus b\,\mathrm{I}_y\oplus -b\,\mathrm{I}_{s-y})S^{-1}$$

olur. Bu da ispatı sonuçlandırır. Dikkat edilirse, $PQ = S(\mathrm{I}_x \oplus -\mathrm{I}_{r-x} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})S^{-1}$ olduğundan, bu matrisin rankı ispatın başında da belirtildiği gibi r' ye eşittir. ■

Bu bölümün geri kalan kısmında $PQ \neq QP$ olmak üzere, $aP + bQ$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması koşulu ile $\sigma(aP + bQ)$ kümesi ile $\sigma(PQ)$, $\sigma(PQP)$, $\sigma(PQ - QP)$ ve $\sigma(PQ + QP - Q)$ kümeleri arasındaki bazı ilişkileri ortaya koyacak olan teoremler ve ispatları verilecektir.

Aşağıdaki lemma, bahsedilen bu spektrumları çalışabilmek için bir araç niteliğindedir.

Lemma 4.2. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri, $PQ \neq QP$, $P^2 = P$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $i = 0,1,\ldots,k$ için $P_i, Q_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ olmak üzere,

$$P = S((\oplus_{i=1}^{k} P_i) \oplus P_0)S^{-1}, \; Q = S((\oplus_{i=1}^{k} Q_i) \oplus Q_0)S^{-1}, \tag{4.1}$$

$P_0 Q_0 = Q_0 P_0$ ve $i = 1,\ldots,k$ için $P_i Q_i \neq Q_i P_i$ olacak şekilde tersinir bir $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi ve $P_0,\ldots,P_k$ idempotent matrisleri ile $Q_0,\ldots,Q_k$ involutif matrisleri vardır,

(ii) $i = 1,\ldots,k$ için

$$\mu_i + \nu_i = a, \; \sigma(aP_i + bQ_i) = \{\mu_i, \nu_i\}, \; ab(P_i Q_i + Q_i P_i - Q_i) = -(\mu_i \nu_i + b^2)\mathrm{I}_{m_i} \tag{4.2}$$

olacak şekilde $\mu_1, \nu_1; \ldots; \mu_k, \nu_k$ farklı kompleks sayıları vardır,

(iii) $i=1,\dots,k$ için $x_i = rk(P_i)$, $A_i \in \mathbb{C}^{x_i \times x_i}$, $D_i \in \mathbb{C}^{(m_i - x_i)\times(m_i - x_i)}$ ve

$$A_i = -\frac{\mu_i \nu_i + b^2}{ab}\mathrm{I}_{x_i}, \tag{4.3}$$

$$B_i C_i = \left(1 - \left(\frac{\mu_i \nu_i + b^2}{ab}\right)^2\right)\mathrm{I}_{x_i}, \tag{4.4}$$

$$C_i B_i = \left(1 - \left(\frac{\mu_i \nu_i + b^2}{ab}\right)^2\right)\mathrm{I}_{m_i - x_i} \tag{4.5}$$

ve

$$D_i = \frac{\mu_i \nu_i + b^2}{ab}\mathrm{I}_{m_i - x_i} \tag{4.6}$$

olmak üzere

$$P_i = S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}, \quad Q_i = S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1} \tag{4.7}$$

olacak şekilde tersinir $S_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ matrisleri vardır.

İspat. Lemma 2.4.10' da bahsedildiği üzere, Q bir involutif matris ise, bu durumda

$$R = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q) \tag{4.8}$$

matrisi idempotenttir. Hipoteze göre $PQ \neq QP$ olduğundan,

$$PR - RP = P\left[\frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q)\right] - \left[\frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q)\right]P = \frac{1}{2}(PQ - QP) \neq 0,$$

yani $PR \neq RP$ olur. Hipotezden $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan,

$$aP + bQ = T\Lambda T^{-1} \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir tersinir T matrisi ve köşegen bir Λ matrisi vardır. Şimdi, $aP + 2bR$ lineer kombinasyon matrisini göz önüne alalım. (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden,

$$aP + 2bR = aP + 2b\left[\frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q)\right] = aP + bQ + b\,\mathrm{I} = T\Lambda T^{-1} + b\,\mathrm{I}$$

olup, buradan

$$aP + 2bR = T(\Lambda + b\,\mathrm{I})T^{-1}$$

elde edilir. Yani $aP + 2bR$ matrisi de köşegenleştirilebilirdir. Bu son ifade ile birlikte, $PR \neq RP$ olduğu hatırlanırsa, Lemma 3.2' nin koşullarının sağlandığı görülür. O halde P ve R idempotent matrisleri için Lemma 3.2 uygulanabilir.

Lemma 3.2 (i)' den, $P_0R_0 = R_0P_0$ ve $i = 1,...,k$ için $P_iR_i \neq R_iP_i$ olmak üzere,

$$P = S((\oplus_{i=1}^{k} P_i) \oplus P_0)S^{-1} \text{ ve } R = S((\oplus_{i=1}^{k} R_i) \oplus R_0)S^{-1} \tag{4.10}$$

olacak şekilde $P_0,...,P_k,R_0,...,R_k$ idempotent matrisleri ve bir tersinir S matrisi vardır.

Lemma 3.2 (ii)' den,

$$a+2b=\xi_i+\eta_i\,,\quad \sigma(aP_i+bR_i)=\{\xi_i,\eta_i\}\,,\ 2ab(P_i-R_i)^2=\xi_i\eta_i\,\mathrm{I}_{m_i} \tag{4.11}$$

olacak şekilde $\xi_1,\eta_1;...;\xi_k,\eta_k$ farklı kompleks sayıları vardır.

Lemma 3.2 (iii)' den, $i=1,...,k$ için $x_i=rk(P_i)$, $K_i\in\mathbb{C}^{x_i\times x_i}$, $N_i\in\mathbb{C}^{(m_i-x_i)\times(m_i-x_i)}$ ve $\vartheta_i=\dfrac{\xi_i\eta_i}{2ab}$ olmak üzere,

$$P_i=S_i\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1}\ ,\ R_i=S_i\begin{bmatrix}K_i & L_i\\ M_i & N_i\end{bmatrix}S_i^{-1},$$

$K_i=(1-\vartheta_i)\,\mathrm{I}_{x_i}$, $L_iM_i=\vartheta_i(1-\vartheta_i)\,\mathrm{I}_{x_i}$, $M_iL_i=\vartheta_i(1-\vartheta_i)\,\mathrm{I}_{m_i-x_i}$ ve $N_i=\vartheta_i\,\mathrm{I}_{m_i-x_i}$ olacak şekilde S_i tersinir matrisleri mevcuttur. $R=\frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q)$ olduğundan, $Q=2R-\mathrm{I}$ dır. Burada R matrisi yerine (4.10)' daki karşılığı yazılırsa,

$$Q=S((\oplus_{i=1}^{k}(2R_i-\mathrm{I}))\oplus(2R_0-\mathrm{I}))S^{-1}$$

olur. $i=0,...,k$ için

$$Q_i = 2R_i - \mathrm{I} \tag{4.12}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$Q = S((\oplus_{i=1}^{k} Q_i) \oplus Q_0)S^{-1}$$

yazılabilir. Tüm Q_i matrislerinin involutif olduğu açıktır. $P_0R_0 = R_0P_0$ ve $i = 1,...,k$ için $P_iR_i \neq R_iP_i$ olduğu dikkate alınırsa,

$$P_0Q_0 = P_0(2R_0 - \mathrm{I}) = 2P_0R_0 - P_0 = 2R_0P_0 - P_0 = (2R_0 - \mathrm{I})P_0 = Q_0P_0$$

ve

$$P_iQ_i = P_i(2R_i - \mathrm{I}) = 2P_iR_i - P_i \neq 2R_iP_i - P_i = (2R_i - \mathrm{I})P_i = Q_iP_i,$$

yani $P_iQ_i \neq Q_iP_i$ olur. Böylece lemmanın (i) maddesi ispatlanmış olur.

(4.11)' in ikinci eşitliği ve (4.12)' den,

$$\sigma(aP_i + bQ_i) = \sigma(aP_i + b(2R_i - \mathrm{I})) = \sigma(aP_i + 2bR_i - b\mathrm{I}) = \{\xi_i - b, \eta_i - b\}$$

dir. $\mu_i = \xi_i - b$ ve $\nu_i = \eta_i - b$ olarak alınırsa, $\sigma(aP_i + bQ_i) = \{\mu_i, \nu_i\}$ olur.

(4.11)' in ilk eşitliğinden de

$$\mu_i + \nu_i = (\xi_i - b) + (\eta_i - b) = \xi_i + \eta_i - 2b = a + 2b - 2b = a$$

elde edilir.

Şimdi, (4.11)' in son eşitliğini, P_i ve Q_i matrislerine göre ifade edelim:

$$(P_i - R_i)^2 = P_i + R_i - P_i R_i - R_i P_i = P_i + \left[\frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q_i)\right] - P_i\left[\frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q_i)\right] - \left[\frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q_i)\right]P_i$$

$$= \frac{1}{2}[Q_i + \mathrm{I} - P_i Q_i - Q_i P_i]$$

ve $\xi_i = \mu_i + b$, $\eta_i = \nu_i + b$ olduğundan (4.11)' in son eşitliği,

$$ab(Q_i + \mathrm{I} - P_i Q_i - Q_i P_i) = (\mu_i + b)(\nu_i + b)\,\mathrm{I}_{m_i}$$

eşitliğine denktir. Bu ifade düzenlenirse,

$$ab(P_i Q_i + Q_i P_i - Q_i) = [ab - (\mu_i + b)(\nu_i + b)]\,\mathrm{I}_{m_i} \tag{4.13}$$

bulunur. $\mu_i + \nu_i = a$ olduğu kullanılırsa,

$$ab-(\mu_i+b)(\nu_i+b)=ab-(\mu_i\nu_i+\mu_i b+b\nu_i+b^2)$$

$$=ab-((\mu_i+\nu_i)b+\mu_i\nu_i+b^2)$$

$$=ab-ab-\mu_i\nu_i-b^2$$

$$=-(\mu_i\nu_i+b^2)$$

olur ve (4.13) eşitliğinden

$$ab(P_iQ_i+Q_iP_i-Q_i)=-(\mu_i\nu_i+b^2)\,\mathrm{I}_{m_i}$$

elde edilir. O halde Lemma 4.2 (ii)' deki iddialar doğrudur.

$i=1,...,k$ için $Q_i=2R_i-\mathrm{I}$ ve $R_i=S_i\begin{bmatrix} K_i & L_i \\ M_i & N_i \end{bmatrix}S_i^{-1}$ olduğundan, I matrisinin yerine $S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_{m_i-x_i} \end{bmatrix}S_i^{-1}$ matrisini almak suretiyle,

$$Q_i=2S_i\begin{bmatrix} K_i & L_i \\ M_i & N_i \end{bmatrix}S_i^{-1}-S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_{m_i-x_i} \end{bmatrix}S_i^{-1}=S_i\begin{bmatrix} 2K_i-\mathrm{I}_{x_i} & 2L_i \\ 2M_i & 2N_i-\mathrm{I}_{m_i-x_i} \end{bmatrix}S_i^{-1}$$

yazılabilir. $i=1,...,k$ için,

$$A_i=2K_i-\mathrm{I}_{x_i},\ B_i=2L_i,\ C_i=2M_i,\ D_i=2N_i-\mathrm{I}_{m_i-x_i} \qquad (4.14)$$

olarak tanımlanırsa,

$$Q_i = S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

olur. $K_i = (1-\vartheta_i)\,\mathrm{I}_{x_i}$ olduğundan, $A_i = 2K_i - \mathrm{I}_{x_i} = 2(1-\vartheta_i)\,\mathrm{I}_{x_i} - \mathrm{I}_{x_i} = (1-2\vartheta_i)\,\mathrm{I}_{x_i}$; $N_i = \vartheta_i\,\mathrm{I}_{m_i-x_i}$ olduğundan, $D_i = 2N_i - \mathrm{I}_{m_i-x_i} = 2\vartheta_i\,\mathrm{I}_{m_i-x_i} - \mathrm{I}_{m_i-x_i} = (2\vartheta_i - 1)\,\mathrm{I}_{m_i-x_i}$ yazılabilir. $\vartheta_i = \dfrac{\xi_i\eta_i}{2ab} = \dfrac{(\mu_i+b)(\nu_i+b)}{2ab}$ ve $\mu_i + \nu_i = a$ eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$1-2\vartheta_i = 1 - \frac{(\mu_i+b)(\nu_i+b)}{ab} = \frac{ab-(\mu_i\nu_i+(\mu_i+\nu_i)b+b^2)}{ab} = -\frac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}$$

ve dolayısıyla,

$$A_i = -\frac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}\,\mathrm{I}_{x_i} \quad \text{ve} \quad D_i = \frac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}\,\mathrm{I}_{m_i-x_i}$$

elde edilir. Ayrıca $1-2\vartheta_i = -\dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}$ olduğundan, $ab - \xi_i\eta_i = -(\mu_i\nu_i + b^2)$ dir. $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}$ olarak alınırsa, $ab-\xi_i\eta_i = -ab\rho_i$, yani $\xi_i\eta_i = ab + ab\rho_i$ olur. Buradan,

$$\vartheta_i(1-\vartheta_i) = \frac{\xi_i\nu_i}{2ab}\left(1-\frac{\xi_i\nu_i}{2ab}\right) = \frac{ab+ab\rho_i}{2ab}\left(1-\frac{ab+ab\rho_i}{2ab}\right) = \frac{ab(1+\rho_i)}{2ab}\left(1-\frac{ab(1+\rho_i)}{2ab}\right)$$

$$= \frac{1+\rho_i}{2}\left(1-\frac{1+\rho_i}{2}\right) = \frac{1+\rho_i}{2}.\frac{1-\rho_i}{2} = \frac{1-\rho_i^2}{4}$$

elde edilir.

$L_iM_i = \vartheta_i(1-\vartheta_i)\mathrm{I}_{x_i}$ eşitliği ile birlikte (4.14)' ün ikinci ve üçüncü eşitlikleri dikkate alınır ve $\vartheta_i(1-\vartheta_i) = \dfrac{1-\rho_i^2}{4}$ olduğu kullanılırsa,

$$B_iC_i = (2L_i)(2M_i) = 4L_iM_i = 4\vartheta_i(1-\vartheta_i)\mathrm{I}_{x_i} = (1-\rho_i^2)\mathrm{I}_{x_i};$$

ve benzer şekilde $M_iL_i = \vartheta_i(1-\vartheta_i)\mathrm{I}_{m_i-x_i}$ eşitliğinden de,

$$C_iB_i = (2M_i)(2L_i) = 4M_iL_i = 4\vartheta_i(1-\vartheta_i)\mathrm{I}_{m_i-x_i} = (1-\rho_i^2)\mathrm{I}_{m_i-x_i}$$

bulunur. Böylece $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i + b^2}{ab}$ olduğundan lemmanın ispatı tamamlanır. ■

Lemma 3.2' ye göre P_0 ve R_0 idempotent bloklarının yok olabilmesi olası olup, $Q_0 = 2R_0 - \mathrm{I}$ olduğundan, bu lemmada da P_0 ve Q_0 bloklarının yok olabileceğine dikkat etmek gerekir.

Bu lemmanın basit bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir:

Sonuç 4.3. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri $PQ \neq QP$, $P^2 = P$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a,b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Eğer $\lambda \in \sigma(aP+bQ)\setminus\{a+b, a-b, b, -b\}$ ise, bu durumda $\lambda + \mu = a$ eşitliğini sağlayan bir $\mu \in \sigma(aP+bQ)$ vardır.

Teorem 4.4. $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri $PQ \neq QP$, $P^2 = P$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a,b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\mu \in \sigma(aP+bQ) \setminus \{a+b, a-b, b, -b\}$ ise $-\frac{1}{ab}(\mu(a-\mu)+b^2)$ niceliği $PQ+QP-Q$ matrisinin bir özdeğeridir,

(ii) $\lambda \in \sigma(PQ+QP-Q) \setminus \{1,-1\}$ ise $x^2-ax-\lambda ab-b^2$ polinomunun kökleri $aP+bQ$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. P ve Q matrisleri Lemma 4.2' deki gibi olsun. $\mu \in \sigma(aP+bQ) \setminus \{a+b, a-b, b, -b\}$ alınsın. $\mu \notin \{a+b, a-b, b, -b\}$ ve Lemma 4.2' ye göre $P_0Q_0 = Q_0P_0$ olduğundan, Teorem 4.1' den, $\mu \notin \sigma(aP_0+bQ_0)$ dır. O halde $\sigma(aP_i+bQ_i) = \{\mu, a-\mu\}$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\ldots,k\}$ vardır. $a,b \in \mathbb{C}^*$ olduğundan, (4.2)' nin son bağıntısına göre, $i=1,\ldots,k$ için $P_iQ_i+Q_iP_i-Q_i = -\frac{1}{ab}(\mu_i\nu_i+b^2)\mathrm{I}_{m_i}$ olur. $\sigma(aP_i+bQ_i) = \{\mu, a-\mu\}$ olduğundan $P_iQ_i+Q_iP_i-Q_i = -\frac{1}{ab}(\mu(a-\mu)+b^2)\mathrm{I}_{m_i}$ elde edilir. Buradan,

$$-\frac{1}{ab}(\mu(a-\mu)+b^2) \in \sigma(P_iQ_i+Q_iP_i-Q_i)$$

olur. $\sigma(P_iQ_i+Q_iP_i-Q_i) \subset \sigma(PQ+QP-Q)$ olduğu dikkate alınırsa,

$$-\frac{1}{ab}(\mu(a-\mu)+b^2) \in \sigma(PQ+QP-Q)$$

sonucuna varılır. Böylece (i)' de istenen elde edilir.

P ve Q matrislerinin (4.1)' deki karşılıklarına göre,

$$PQ+QP-Q = S(\oplus_{i=1}^{k}(P_iQ_i+Q_iP_i-Q_i) \oplus (P_0Q_0+Q_0P_0-Q_0))S^{-1}$$

yazılabilir. $P_0Q_0 = Q_0P_0$ olduğundan $P_0Q_0 + Q_0P_0 - Q_0 = 2P_0Q_0 - Q_0$ dır. P_0 matrisi idempotent ve Q_0 matrisi involutif olduğundan,

$$(2P_0Q_0 - Q_0)^2 = 4P_0\underbrace{Q_0P_0}_{P_0Q_0}Q_0 - 2P_0\underbrace{Q_0Q_0}_{\mathrm{I}} - \underbrace{Q_0\,2\underbrace{P_0Q_0}_{Q_0P_0}}_{2Q_0{}^2P_0=2P_0} + Q_0{}^2 = 4P_0 - 2P_0 - 2P_0 + \mathrm{I} = \mathrm{I}$$

dır. Yani $2P_0Q_0 - Q_0$ matrisi involutiftir. Dolayısıyla bu matrisin özdeğerleri $\{1,-1\}$ kümesindedir.

Şimdi de $\lambda \in \sigma(PQ + QP - Q)\setminus\{1,-1\}$ olsun. $\lambda \notin \{1,-1\}$ ve $P_0Q_0 + Q_0P_0 - Q_0 = 2P_0Q_0 - Q_0$ matrisinin özdeğerleri $\{1,-1\}$ kümesinde olduğundan $\lambda \notin \sigma(P_0Q_0 + Q_0P_0 - Q_0)$ dır. O halde, $\lambda \in \sigma(P_iQ_i + Q_iP_i - Q_i)$ olacak şekilde $i \in \{1,\ldots,k\}$ vardır. Dolayısıyla, (4.2)' ye göre $\mu + \nu = a$ ve $\lambda = -\dfrac{1}{ab}(\mu\nu + b^2)$ olacak şekilde $\mu, \nu \in \sigma(aP_i + bQ_i)$ vardır. Böylece μ ve ν, $x^2 - ax - \lambda ab - b^2$ polinomunun kökleridir. $\sigma(aP_i + bQ_i) \subset \sigma(aP + bQ)$ olduğundan $\mu, \nu \in \sigma(aP + bQ)$ olur. Bu da (ii)' de isteneni ispatlar. ■

Teorem 4.5. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisleri $PQ \neq QP$, $P^2 = P$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a, b, a', b' \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $aP + bQ$ ve $a'P + b'Q$ matrisleri köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda, $\mu \in \sigma(aP + bQ)\setminus\{a+b, a-b, b, -b\}$ ise $x^2 - a'x + \dfrac{1}{ab}(\mu(a-\mu) + b^2)a'b' - b'^2$ polinomunun kökleri $a'P + b'Q$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. $\mu \in \sigma(aP + bQ)\setminus\{a+b, a-b, b, -b\}$ alınsın. Teorem 4.4 (i)' ye göre, bir $\lambda \in \sigma(PQ + QP - Q)$, $\lambda = -\dfrac{1}{ab}(\mu(a-\mu) + b^2)$ olacak şekilde vardır. $\mu \notin \{a+b, a-b, b, -b\}$ olduğundan $\lambda \notin \{1,-1\}$ dir. $\lambda \in \sigma(PQ + QP - Q)$ ve $\lambda \notin \{1,-1\}$ olduğundan Teorem 4.4 (ii)' ye göre $x^2 - a'x - \lambda a'b' - b'^2$

polinomunun kökleri $a'P+b'Q$ matrisinin özdeğerleridir. $\lambda=-\frac{1}{ab}(\mu(a-\mu)+b^2)$ olduğu dikkate alındığında teoremin ispatı tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem PQ matrisinin spektrumu ile $aP+bQ$ matrisinin spektrumu arasındaki ilişkiyi ifade eder.

Teorem 4.6. $P,Q\in\mathbb{C}^{nxn}$ matrisleri $PQ\neq QP$, $P^2=P$ ve $Q^2=\mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a,b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda\in\sigma(PQ)\setminus\{0,1,-1\}$ ise $x^2-ax-\lambda ab-b^2$ polinomunun kökleri $aP+bQ$ matrisinin özdeğerleridir,

(ii) $\mu\in\sigma(aP+bQ)\setminus\{a+b,a-b,b,-b\}$ ise $-\dfrac{\mu(a-\mu)+b^2}{ab}\in\sigma(PQ)$ dur.

İspat. $i=1,\dots,k$ için

$$P_iQ_i=S_i\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}S_i^{-1}=S_i\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1}=S_i\begin{bmatrix}-\dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}\mathrm{I}_{x_i} & B_i\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1}$$

dir. $\rho_i=\dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}$ olarak alınırsa,

$$P_iQ_i=S_i\begin{bmatrix}-\rho_i\,\mathrm{I}_{x_i} & B_i\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{4.15}$$

bulunur.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(PQ)\setminus\{0,1,-1\}$ olsun. P_0 matrisi idempotent ve Q_0 matrisi involutif olduğundan,

$$(P_0Q_0)^3 = P_0\underbrace{Q_0P_0}_{P_0Q_0}Q_0P_0Q_0 = \underbrace{P_0^{\,2}}_{P_0}\underbrace{Q_0^{\,2}}_{I}P_0Q_0 = P_0^{\,2}Q_0 = P_0Q_0$$

dır. Dolayısıyla P_0Q_0 matrisi tripotenttir, yani $\sigma(P_0Q_0)\subset\{0,1,-1\}$ dir. O halde, $\lambda\notin\{0,1,-1\}$ ise, $\lambda\in\sigma(P_iQ_i)$ yani (4.15)' e göre $\lambda=-\rho_i$ olacak şekilde bir $i\in\{1,\ldots,k\}$ vardır. Lemma 4.2 (ii)' ye göre, aP_i+bQ_i matrisinin $\rho_i=\dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}$ ve $\mu_i+\nu_i=a$ olacak şekilde μ_i ve ν_i özdeğerleri mevcuttur. $\sigma(aP_i+bQ_i)\subset\sigma(aP+bQ)$ olduğundan $\mu_i,\nu_i\in\sigma(aP+bQ)$ olur. $\mu_i=\mu$ ve $\nu_i=\nu$ olarak alınırsa, $\mu+\nu=a$ ve $\mu\nu=-\lambda ab-b^2$ bulunur. O halde μ ve ν, $x^2-ax-\lambda ab-b^2$ polinomunun kökleridir. Bu da teoremin (i) maddesini ispatlar.

Şimdi de $\mu\in\sigma(aP+bQ)\setminus\{a+b,a-b,b,-b\}$ olsun. $\mu\notin\{a+b,a-b,b,-b\}$ ve $P_0Q_0=Q_0P_0$ olduğundan, Teorem 4.1' e göre $\mu\notin\sigma(aP_0+bQ_0)$ dır. O halde μ ve $a-\mu$, aP_i+bQ_i matrisinin özdeğerleri olacak şekilde bir $i\in\{1,\ldots,k\}$ vardır. Dolayısıyla, (4.15)' e göre $-\dfrac{\mu(a-\mu)+b^2}{ab}\in\sigma(P_iQ_i)$ olup, $\sigma(P_iQ_i)\subset\sigma(PQ)$ olduğundan $-\dfrac{\mu(a-\mu)+b^2}{ab}\in\sigma(PQ)$ dur. Bu da (ii)' de istenendir. ■

Aşağıdaki teorem, $aP+bQ$ matrisinin spektrumu ile PQP matrisinin spektrumu arasındaki ilişkiyi ortaya koyar.

Teorem 4.7. $P,Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri $PQ\neq QP$, $P^2=P$ ve $Q^2=\mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a,b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere, $aP+bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma(PQP) \setminus \{0,1,-1\}$ ise $x^2 - ax - \lambda ab - b^2$ polinomunun kökleri $aP + bQ$ matrisinin özdeğerleridir,

(ii) $\mu \in \sigma(aP + bQ) \setminus \{a+b, a-b, b, -b\}$ ise $-\dfrac{\mu(a-\mu)+b^2}{ab} \in \sigma(PQP)$ dir.

İspat. P ve Q matrisleri (4.1)' deki gibi olsun. Bu durumda,

$$PQP = S((\oplus_{i=1}^{k}(P_iQ_iP_i)) \oplus (P_0Q_0P_0))S^{-1}$$

yazılabilir. P_0 matrisi idempotent, Q_0 matrisi involutif ve $P_0Q_0 = Q_0P_0$ olduğundan,

$$(P_0Q_0P_0)^3 = P_0Q_0\underbrace{P_0P_0}_{P_0}Q_0\underbrace{P_0P_0}_{P_0}Q_0P_0 = P_0\underbrace{(Q_0P_0)}_{P_0Q_0}Q_0P_0Q_0P_0 = P_0^{\,2}Q_0^{\,2}\underbrace{P_0Q_0}_{Q_0P_0}P_0 = P_0\,\mathrm{I}\,Q_0P_0^{\,2} = P_0Q_0P_0$$

olur. Yani $P_0Q_0P_0$ matrisi tripotenttir. Dolayısıyla bu matrisin özdeğerleri $\{0,1,-1\}$ kümesindedir. (4.7) ve (4.15)' e göre, $i = 1,\dots,k$ için

$$P_iQ_iP_i = S_i\begin{bmatrix} -\dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}\mathrm{I}_{x_i} & B_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} = S_i\begin{bmatrix} -\dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} \qquad (4.16)$$

olur.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(PQP) \setminus \{0,1,-1\}$ olsun. $\lambda \notin \{0,1,-1\}$ ve $P_0Q_0P_0$ matrisinin özdeğerleri $\{0,1,-1\}$ kümesinde olduğundan, $\lambda \notin \sigma(P_0Q_0P_0)$ dır. O halde $\lambda \in \sigma(P_iQ_iP_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}$ olarak alınırsa, (4.16)' dan $\lambda = -\rho_i$ yazılabilir. Lemma 4.2 (ii)' ye göre, $aP_i + bQ_i$ matrisinin $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i+b^2}{ab}$ ve $\mu_i + \nu_i = a$ olacak şekilde μ_i ve ν_i özdeğerleri mevcuttur.

$\mu_i, \nu_i \in \sigma(aP_i + bQ_i) \subset \sigma(aP + bQ)$ olduğundan μ_i ve ν_i nicelikleri $aP + bQ$ matrisinin özdeğerleridir. $\mu_i = \mu$ ve $\nu_i = \nu$ alınırsa, $\mu + \nu = a$ ve $\mu\nu = -\lambda ab - b^2$ olur. Bu, μ ve ν nin, $x^2 - ax - \lambda ab - b^2$ polinomunun kökleri olduğunu ifade eder.

Şimdi de $\mu \in \sigma(aP + bQ) \setminus \{a+b, a-b, b, -b\}$ olsun. O halde μ ve $a - \mu$ nicelikleri $aP_i + bQ_i$ matrisinin özdeğerleri olacak şekilde bir $i \in \{1, \ldots, k\}$ vardır. Dolayısıyla (4.16)' dan $-\rho_i = -\dfrac{\mu(a-\mu) + b^2}{ab} \in \sigma(P_i Q_i P_i) \subset \sigma(PQP)$ yazılabilir. Böylece (ii)' de istenen elde edilir. ■

Teorem 4.8. $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisleri $PQ \neq QP$, $P^2 = P$ ve $Q^2 = \mathrm{I}$ olacak şekilde matrisler, $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma(PQ - QP) \setminus \{0\}$ ise $\lambda^2 = \left(\dfrac{\mu\nu + b^2}{ab}\right)^2 - 1$ ve $\mu + \nu = a$ olacak şekilde $\mu, \nu \in \sigma(aP + bQ)$ vardır,

(ii) $\mu \in \sigma(aP + bQ) \setminus \{a+b, a-b, b, -b\}$ ise $\left(\dfrac{\mu(a-\mu) + b^2}{ab}\right)^2 - 1 = \lambda^2$ olacak şekilde bir $\lambda \in \sigma(PQ - QP)$ vardır.

İspat. P ve Q matrisleri (4.1)' deki gibi olsun. O halde

$$PQ - QP = S((\oplus_{i=1}^{k}(P_i Q_i - Q_i P_i)) \oplus (P_0 Q_0 - Q_0 P_0))S^{-1}$$

yazılabilir. $P_0 Q_0 = Q_0 P_0$ olduğundan,

$$PQ - QP = S(\oplus_{i=1}^{k}(P_i Q_i - Q_i P_i) \oplus \mathbf{0})S^{-1} \tag{4.17}$$

bulunur. Lemma 4.2' ye göre, $i=1,\dots,k$ için

$$P_iQ_i - Q_iP_i = S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}S_i^{-1} - S_i\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1}$$

$$= S_i\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1} - S_i\begin{bmatrix} A_i & \mathbf{0} \\ C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1}$$

$$= S_i\begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_i \\ -C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1}$$

dir. Buradan

$$(P_iQ_i - Q_iP_i)^2 = S_i\begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_i \\ -C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1}S_i\begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_i \\ -C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1} = S_i\begin{bmatrix} -B_iC_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C_iB_i \end{bmatrix}S_i^{-1}$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$(P_iQ_i - Q_iP_i)^2 = S_i\left\{\left(\left(\frac{\mu_i\nu_i + b^2}{ab}\right)^2 - 1\right)\mathrm{I}_{m_i}\right\}S_i^{-1} = (\rho_i^2 - 1)\,\mathrm{I}_{m_i} \tag{4.18}$$

bulunur.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(PQ - QP)\setminus\{0\}$ olsun. $\lambda \neq 0$ olduğundan, (4.17)' ye göre $\lambda \in \sigma(P_iQ_i - Q_iP_i)$ olacak şekilde $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. Dolayısıyla $\lambda^2 \in \sigma((P_iQ_i - Q_iP_i)^2)$ olur. O halde (4.18)' den $\lambda^2 = \rho_i^2 - 1$ yazılabilir. Bununla birlikte Lemma 4.2 (ii)' den, $\lambda^2 = \left(\dfrac{\mu\nu + b^2}{ab}\right)^2 - 1$ ve $\mu + \nu = a$ olacak şekilde $\mu, \nu \in \sigma(aP + bQ)$ vardır. Bu da (i)' de istenendir.

Şimdi de $\mu \in \sigma(aP + bQ) \setminus \{a+b, a-b, b, -b\}$ alınsın. $\mu \notin \{a+b, a-b, b, -b\}$ ve $P_0Q_0 = Q_0P_0$ olduğundan, Teorem 4.1' e göre $\mu \notin \sigma(aP_0 + bQ_0)$ dır. Dolayısıyla $\mu \in \sigma(aP_i + bQ_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \ldots, k\}$ vardır. $\rho = \dfrac{\mu(a-\mu)+b^2}{ab}$ olarak tanımlanırsa, Lemma 4.2 ve (4.18)' den $\rho^2 - 1 \in \sigma((PQ-QP)^2)$ bulunur. Bu son ifadeye spektral dönüşüm teoremi uygulanırsa, $\rho^2 - 1 = \lambda^2$ olacak şekilde bir $\lambda \in \sigma(PQ - QP)$ olduğu görülür. Bu da (ii)' de istenendir. ■

BÖLÜM 5. İKİ İNVOLUTİF MATRİSTEN TÜRETİLEN BAZI MATRİSLERİN SPEKTRUMLARI

Bu bölümde, Q ve R matrisleri, $Q^2 = \mathrm{I}$ ve $R^2 = \mathrm{I}$ eşitliklerini sağlayan kompleks matrisler, c ve d sayıları $cQ + dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olacak şekilde sıfırdan farklı kompleks sayılar olmak üzere, $cQ + dR$ matrisinin spektrumu ile $QR + RQ$, $QR - RQ$, $QRQ + R$ ve $(QR)^2 + RQR$ matrislerinin spektrumları arasında bazı ilişkiler verilmektedir.

Herhangi bir A involutif matrisi için $\frac{1}{2}(\mathrm{I} + A)$ ve $\frac{1}{2}(\mathrm{I} - A)$ matrisleri idempotenttir. Öte yandan, herhangi bir P idempotent matrisi için $\mathrm{I} - 2P$ ve $-(\mathrm{I} - 2P)$ matrisleri involutiftir. Bu nedenle idempotent matrisler üzerindeki sonuçlar, involutif matrisler için de tartışılabilir. Bu bölüm, Bölüm 3' de, idempotent matrislere bağlı bazı matrislerin spektrumları ile ilgili ortaya konulan sonuçların, idempotent matrislerle ilişkili olan involutif matrisler için nasıl şekilleneceği düşüncesi ile ele alınmıştır.

Q ve R matrisleri değişmeli olduğunda, $c, d \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $cQ + dR$ matrisinin spektrumu ile ilgili olan aşağıdaki teorem, iyi bilinen

- Her involutif Q matrisi köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(Q) \subset \{-1, 1\}$ dir.

ve

- Köşegenleştirilebilir iki matrisin değişmeli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, onların eşanlı köşegenleştirilebilmesidir.

özellikleri kullanılarak kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 5.1. $Q, R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri $QR = RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c, d \in \mathbb{C}^{*}$ olsun. Bu durumda,

$$\sigma(cQ + dR) \subset \{c + d, c - d, -c + d, -c - d\}$$

dir.

İspat. $rk(QR) = r$ olsun. Q ve R matrisleri involutif olduğundan bu matrisler tersinirdir ve dolayısıyla tam ranklıdır. Yani $rk(Q) = rk(R) = n$ dir. Ayrıca Teorem 2.2.1' e göre, tersinir olan Q matrisi için, $rk(R) = rk(QR) = rk(Q)$ olduğundan $n = r$ dir. Q ve R matrisleri birbiriyle değişmeli iki köşegenleştirilebilir matris olduğundan, bu matrisler eşanlı köşegenleştirilebilirdir. O halde, $n_1 + n_2 = \frac{1}{2} iz(\mathrm{I} + Q)$, $n_3 + n_4 = \frac{1}{2} iz(\mathrm{I} - Q)$, $n_1 + n_3 = \frac{1}{2} iz(\mathrm{I} + R)$, $n_2 + n_4 = \frac{1}{2} iz(\mathrm{I} - R)$ ve $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ olmak üzere, genelliği bozmaksızın,

$$Q = S(\mathrm{I}_{n_1} \oplus \mathrm{I}_{n_2} \oplus -\mathrm{I}_{n_3} \oplus -\mathrm{I}_{n_4})S^{-1} \text{ ve } R = S(\mathrm{I}_{n_1} \oplus -\mathrm{I}_{n_2} \oplus \mathrm{I}_{n_3} \oplus -\mathrm{I}_{n_4})S^{-1}$$

yazılabilir. Buradan

$$cQ + dR = S((c + d)\mathrm{I}_{n_1} \oplus (c - d)\mathrm{I}_{n_2} \oplus (-c + d)\mathrm{I}_{n_3} \oplus (-c - d)\mathrm{I}_{n_4})S^{-1}$$

olur. Bu da ispatı sonuçlandırır. Dikkat edilirse,

$$QR = S(\mathrm{I}_{n_1} \oplus -\mathrm{I}_{n_2} \oplus -\mathrm{I}_{n_3} \oplus \mathrm{I}_{n_4})S^{-1}$$

olduğundan bu matrisin rankı ispatın başlangıcında da belirtildiği gibi $r = n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$' tür. ■

Bu bölümde, başlıca olarak, $cQ+dR$ matrisinin köşegenleştirilebilmesi varsayımı altında, $\sigma(QR+RQ)$, $\sigma(QR-RQ)$, $\sigma(QRQ+R)$ ve $\sigma((QR)^2+RQR)$ kümeleri ile $\sigma(cQ+dR)$ kümesi arasında ilişki kurulacaktır. Önce, ortaya koyulacak olan ana sonuçların elde edilmesinde faydalanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 5.2. $Q,R\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $QR\neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c,d\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $cQ+dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $i=0,...,k$ için, $Q_i, R_i\in\mathbb{C}^{m_i\times m_i}$ olmak üzere

$$Q=S((\oplus_{i=1}^{k}Q_i)\oplus Q_0)S^{-1}\ ,\ R=S((\oplus_{i=1}^{k}R_i)\oplus R_0)S^{-1}, \tag{5.1}$$

$Q_0R_0=R_0Q_0$ ve $i=1,...,k$ için $Q_iR_i\neq R_iQ_i$ olacak şekilde bir tersinir $S\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi ve $Q_0,...,Q_k,R_0,...,R_k$ involutif matrisleri vardır.

(ii) $i=1,...,k$ için

$$\mu_i+\nu_i=0,\ \sigma(cQ_i+dR_i)=\{\mu_i,\nu_i\}, \tag{5.2}$$

$$cd(Q_iR_i+R_iQ_i)=-(c^2+d^2+\mu_i\nu_i)\mathrm{I}_{m_i} \tag{5.3}$$

olacak şekilde $\mu_1,\nu_1;...;\mu_k,\nu_k$ farklı kompleks sayıları vardır.

(iii) $i=1,...,k$ için $x_i=\frac{1}{2}iz(\mathrm{I}+Q_i)$, $A_i\in\mathbb{C}^{x_i\times x_i}$, $D_i\in\mathbb{C}^{(m_i-x_i)\times(m_i-x_i)}$ ve

$$A_i=-\frac{1}{2cd}(c^2+d^2+\mu_i\nu_i)\mathrm{I}_{x_i}, \tag{5.4}$$

$$B_iC_i = \left(1 - \left(\frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i\nu_i)\right)^2\right)\mathrm{I}_{x_i}\,, \tag{5.5}$$

$$C_iB_i = \left(1 - \left(\frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i\nu_i)\right)^2\right)\mathrm{I}_{m_i - x_i} \tag{5.6}$$

ve

$$D_i = \frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i\nu_i)\,\mathrm{I}_{m_i - x_i} \tag{5.7}$$

olmak üzere

$$Q_i = S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1}, \quad R_i = S_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} S_i^{-1} \tag{5.8}$$

olacak şekilde tersinir $S_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ matrisleri vardır.

İspat. Lemma 2.4.10' da ifade edildiği gibi, Q bir involutif matris ise,

$$P = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q) \tag{5.9}$$

matrisi idempotenttir. $QR \neq RQ$ hipotezi ile birlikte (5.9) eşitliği dikkate alınırsa, $PR = \frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q)R = \frac{1}{2}(R + QR) \neq \frac{1}{2}(R + RQ) = R\frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q) = RP$, yani $PR \neq RP$ olur. $cQ + dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan,

$$cQ + dR = T\Lambda T^{-1}$$

olacak şekilde tersinir bir T matrisi ve köşegen bir Λ matrisi vardır. O halde, $2cP + dR$ lineer kombinasyonu için,

$$2cP + dR = 2c\frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q) + dR = c\,\mathrm{I} + cQ + dR = cT\,\mathrm{I}T^{-1} + T\Lambda T^{-1} = T(c\,\mathrm{I} + \Lambda)T^{-1}$$

yazılabilir. Böylece, $2cP + dR$ matrisi de köşegenleştirilebilir. P matrisi idempotent, R matrisi involutif, $PR \neq RP$ ve $2cP + dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan, bu matrisler için Lemma 4.2 uygulanabilir.

Lemma 4.2 (i)' ye göre, $P_0R_0 = R_0P_0$ ve $i = 1,...,k$ için $P_iR_i \neq R_iP_i$ olmak üzere,

$$P = S((\oplus_{i=1}^{k} P_i) \oplus P_0)S^{-1},\; R = S((\oplus_{i=1}^{k} R_i) \oplus R_0)S^{-1} \tag{5.10}$$

olacak şekilde, $P_0,...,P_k$ idempotent matrisleri, $R_0,...,R_k$ involutif matrisleri ve bir tersinir S matrisi vardır.

Lemma 4.2 (ii)' den,

$$\xi_i + \eta_i = 2c,\; \sigma(2cP_i + dR_i) = \{\xi_i, \eta_i\},\; 2cd(P_iR_i + R_iP_i - R_i) = -(\xi_i\eta_i + d^2)\,\mathrm{I}_{m_i} \tag{5.11}$$

olacak şekilde $\xi_1, \eta_1; ...; \xi_k, \eta_k$ farklı kompleks sayıları vardır.

Lemma 4.2 (iii)' ye göre, $i = 1,...,k$ için $x_i = rk(P_i)$ ve $\vartheta_i = \frac{1}{2cd}(\xi_i\eta_i + d^2)$ olmak üzere,

$$P_i = S_i\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1},\; R_i = S_i\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{5.12}$$

ve

$$A_i = -\vartheta_i \mathrm{I}_{x_i}\,,\ B_iC_i = (1-\vartheta_i^2)\mathrm{I}_{x_i}\,,\ C_iB_i = (1-\vartheta_i^2)\mathrm{I}_{m_i-x_i}\,,\ D_i = \vartheta_i \mathrm{I}_{m_i-x_i} \qquad (5.13)$$

olacak şekilde tersinir S_i matrisleri mevcuttur.

(5.9) eşitliğine göre, $Q = 2P - \mathrm{I}$ olup, buradaki P matrisinin yerine (5.10)' daki karşılığı yazılırsa,

$$Q = S((\oplus_{i=1}^{k}(2P_i - \mathrm{I})) \oplus (2P_0 - \mathrm{I}))S^{-1}$$

elde edilir.

$$Q_i = 2P_i - \mathrm{I}\ , \quad i = 0,1,...,k, \qquad (5.14)$$

olsun. Bu durumda,

$$Q = S((\oplus_{i=1}^{k} Q_i) \oplus Q_0)S^{-1}$$

yazılabilir. Tüm Q_i matrislerinin involutif olduğu açıktır. $P_0R_0 = R_0P_0$ ve $i = 1,...,k$ için $P_iR_i \neq R_iP_i$ olduğu dikkate alınırsa,

$$Q_0R_0 = (2P_0 - \mathrm{I})R_0 = 2P_0R_0 - R_0 = 2R_0P_0 - R_0 = R_0(2P_0 - \mathrm{I}) = R_0Q_0$$

ve

$$Q_iR_i = (2P_i - \mathrm{I})R_i = 2P_iR_i - R_i \neq 2R_iP_i - R_i = R_i(2P_i - \mathrm{I}) = R_iQ_i$$

bulunur. Böylece lemmanın (i) maddesi ispatlanmış olur.

(5.11)' in ikinci eşitliği ve (5.14)' ten,

$$\sigma(cQ_i + dR_i) = \sigma(c(2P_i - \mathrm{I}) + dR_i) = \sigma(2cP_i + dR_i - c\,\mathrm{I}) = \{\xi_i - c, \eta_i - c\}$$

yazılabilir. $\mu_i = \xi_i - c$, $\nu_i = \eta_i - c$ olarak alınırsa, $\sigma(cQ_i + dR_i) = \{\mu_i, \nu_i\}$ olduğu görülür. (5.11)' in ilk eşitliğinden de,

$$\mu_i + \nu_i = (\xi_i - c) + (\eta_i - c) = \xi_i + \eta_i - 2c = 2c - 2c = 0$$

elde edilir. Şimdi (5.11)' in son eşitliğini, Q_i ve R_i matrislerine göre ifade edelim: (5.11) eşitliğinin sol tarafı,

$$2cd(P_iR_i + R_iP_i - R_i) = 2cd(\frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q_i)R_i + R_i\frac{1}{2}(\mathrm{I} + Q_i) - R_i)$$

$$= 2cd(\frac{1}{2}(Q_iR_i + R_iQ_i)) = cd(Q_iR_i + R_iQ_i)$$

olup, $\xi_i = \mu_i + c$, $\eta_i = \nu_i + c$ ve $\mu_i + \nu_i = 0$ olduğundan, (5.11) eşitliğinin sağ tarafı

$$-(\xi_i\eta_i + d^2)\,\mathrm{I}_{m_i} = -((\mu_i + c)(\nu_i + c) + d^2)\,\mathrm{I}_{m_i} = -(c^2 + d^2 + \mu_i\nu_i)\,\mathrm{I}_{m_i}$$

olur. Böylece, (5.2)' nin son bağıntısı olan,

$$cd(Q_iR_i + R_iQ_i) = -(c^2 + d^2 + \mu_i\nu_i)\,\mathrm{I}_{m_i}$$

elde edilir.

$i = 1, \ldots, k$ için $Q_i = 2P_i - \mathrm{I}$ eşitliğinde P_i matrisinin yerine (5.12)' deki karşılığı yazılır ve I matrisinin yerine $S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1}$ matrisi alınırsa,

$$Q_i = 2S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} - S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1} = S_i \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathrm{I}_{m_i - x_i} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\vartheta_i = \dfrac{1}{2cd}(\xi_i \eta_i + d^2)$, $\xi_i = \mu_i + c$, $\eta_i = \nu_i + c$ ve $\mu_i + \nu_i = 0$ olduğundan,

$$\vartheta_i = \frac{1}{2cd}((\mu_i + c)(\nu_i + c) + d^2) = \frac{1}{2cd}(\mu_i \nu_i + c(\mu_i + \nu_i) + c^2 + d^2) = \frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i \nu_i)$$

bulunur. O halde (5.13)' den,

$$A_i = -\vartheta_i \, \mathrm{I}_{x_i} = -\frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i \nu_i)\, \mathrm{I}_{x_i},$$

$$B_i C_i = (1 - \vartheta_i^2)\, \mathrm{I}_{x_i} = \left(1 - \left(\frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i \nu_i) \right)^2 \right) \mathrm{I}_{x_i},$$

$$C_i B_i = (1 - \vartheta_i^2)\, \mathrm{I}_{m_i - x_i} = \left(1 - \left(\frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i \nu_i) \right)^2 \right) \mathrm{I}_{m_i - x_i}$$

ve

$$D_i = \vartheta_i \, \mathrm{I}_{m_i - x_i} = \frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i \nu_i)\, \mathrm{I}_{m_i - x_i}$$

elde edilir.

Not etmek gerekir ki, idempotent bir matrisin rankı izine eşit olduğundan, idempotent olan $X_i = \dfrac{1}{2}(\mathrm{I} + Q_i)$ matrisi için $rk(X_i) = iz(X_i)$, yani lemmanın (iii) maddesinde ifade edildiği gibi $x_i = iz(\dfrac{1}{2}(\mathrm{I} + Q_i)) = \dfrac{1}{2} iz(\mathrm{I} + Q_i)$ dir. ■

Lemma 4.2' de idempotent olan P_0 ve involutif olan R_0 bloklarının yok olabilmesi olası olup, $Q_0 = 2P_0 - \mathrm{I}$ olduğundan, bu lemmada da Q_0 ve R_0 bloklarının yok olabileceğine dikkat etmek gerekir.

Aşağıdaki sonuç Lemma 5.2' nin direkt bir sonucudur.

Sonuç 5.3. $Q,R\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $QR\neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c,d\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $cQ+dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Eğer $\lambda\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ ise, bu durumda $\lambda+\mu=0$ eşitliğini sağlayan bir $\mu\in\sigma(cQ+dR)$ vardır.

Teorem 5.4. $Q,R\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $QR\neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c,d\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $cQ+dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\mu\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ ise $\dfrac{\mu^2-c^2-d^2}{2cd}$ niceliği, $\frac{1}{2}(QR+RQ)$ matrisinin bir özdeğeridir,

(ii) $\lambda\in\sigma[\frac{1}{2}(QR+RQ)]\setminus\{1,-1\}$ ise $x^2-c^2-d^2-2cd\lambda$ polinomunun kökleri $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. Q ve R matrisleri, Lemma 5.2' deki gibi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(QR+RQ)&=\frac{1}{2}\left\{S((\oplus_{i=1}^{k}(Q_iR_i+R_iQ_i))\oplus(Q_0R_0+R_0Q_0))S^{-1}\right\}\\&=S((\oplus_{i=1}^{k}\frac{1}{2}(Q_iR_i+R_iQ_i))\oplus\frac{1}{2}(Q_0R_0+R_0Q_0))S^{-1}\end{aligned}$$

yazılabilir. Q_0 ile R_0 matrisleri değişmeli olduğundan, $\frac{1}{2}(Q_0R_0+R_0Q_0)=Q_0R_0$ olur. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2}(QR+RQ)=S((\oplus_{i=1}^{k}\frac{1}{2}(Q_iR_i+R_iQ_i))\oplus Q_0R_0)S^{-1}$$

bulunur. Q_0 ile R_0 değişmeli iki involutif matris olduğundan, Q_0R_0 matrisi de involutiftir. Dolayısıyla $\sigma(Q_0R_0)\subset\{1,-1\}$ dir. $i=1,...,k$ için $\rho_i=\frac{1}{2cd}(c^2+d^2+\mu_i\nu_i)$ olarak tanımlanırsa, (5.4), (5.7) ve (5.8) den,

$$\frac{1}{2}(Q_iR_i+R_iQ_i)=S_i\begin{bmatrix}-\rho_i\,\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\rho_i\,\mathrm{I}_{m_i-x_i}\end{bmatrix}S_i^{-1}=-\rho_i\,\mathrm{I}_{m_i} \tag{5.15}$$

elde edilir.

$\mu\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ olsun. $Q_0R_0=R_0Q_0$ olduğundan Teorem 5.1' e göre $\mu\notin\sigma(cQ_0+dR_0)$ dır. O halde, (5.2) bağıntılarından, $\sigma(cQ_i+dR_i)=\{\mu,-\mu\}$ olacak şekilde bir $i\in\{1,...,k\}$ vardır. Hipotezden $cd\neq 0$ olduğundan, (5.3)' e göre, $-\frac{1}{2cd}(c^2+d^2-\mu^2)\in\sigma[\frac{1}{2}(Q_iR_i+R_iQ_i)]$ yazılabilir. $\sigma[\frac{1}{2}(Q_iR_i+R_iQ_i)]\subset\sigma[\frac{1}{2}(QR+RQ)]$ olduğundan teoremin (i) maddesi ispatlanmış olur.

$\lambda\in\sigma[\frac{1}{2}(QR+RQ)]\setminus\{1,-1\}$ olsun. $\lambda\notin\{1,-1\}$ olduğundan $\lambda\notin\sigma(Q_0R_0)$ dır. O halde $\lambda\in\sigma[\frac{1}{2}(Q_iR_i+R_iQ_i)]$ olacak şekilde bir $i\in\{1,...,k\}$ vardır. Dolayısıyla (5.15)' den $\lambda=-\rho_i$ yazılabilir. (5.2) bağıntıları göz önüne alınırsa, $\lambda=-\frac{1}{2cd}(c^2+d^2+\mu\nu)$ ve $\mu+\nu=0$ olacak şekilde $\mu,\nu\in\sigma(cQ+dR)$ vardır. $\mu+\nu=0$ ve $\mu\nu=-c^2-d^2-2cd\lambda$ olduğundan da teoremin (ii) maddesinde istenen sonuç elde edilir. ■

Bu teoremin bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir:

Sonuç 5.5. $Q,R\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $QR\neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c,d\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $cQ+dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\omega\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ ise $\dfrac{\omega^2-c^2-d^2}{cd}$ niceliği $QR+RQ$ matrisinin bir özdeğeridir,

(ii) $u\in\sigma(QR+RQ)\setminus\{2,-2\}$ ise $x^2-c^2-d^2-cdu$ polinomunun kökleri $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. $\omega\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ ise Teorem 5.4 (i)' ye göre, $\dfrac{\omega^2-c^2-d^2}{2cd}\in\sigma[\frac{1}{2}(QR+RQ)]$ yazılabilir. Buradan, spektral dönüşüm teoremine göre $\dfrac{\omega^2-c^2-d^2}{cd}\in\sigma(QR+RQ)$ olur. Böylece (i)' de istenen elde edilir.

$u\in\sigma(QR+RQ)\setminus\{2,-2\}$ ise $\frac{u}{2}\in\sigma[\frac{1}{2}(QR+RQ)]\setminus\{1,-1\}$ dir. $\frac{u}{2}=:\lambda$ olsun. $\lambda\in\sigma[\frac{1}{2}(QR+RQ)]\setminus\{1,-1\}$ ise, Teorem 5.4 (ii)' ye göre $x^2-c^2-d^2-2cd\lambda$ polinomunun kökleri $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleridir. Bu polinomda λ yerine $\frac{u}{2}$ alınırsa, $x^2-c^2-d^2-cdu$ polinomunun kökleri $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleri olur. ■

Teorem 5.6. $Q,R\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $QR\neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c,d,c',d'\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $cQ+dR$ ve $c'Q+d'R$ matrisleri köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda, $\mu\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ ise, $x^2-c'^2-d'^2-\frac{1}{cd}c'd'(\mu^2-c^2-d^2)$ polinomunun kökleri $c'Q+d'R$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. $\mu \in \sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d, c-d, -c+d, -c-d\}$ olsun.

Teorem 5.4 (i)' ye göre bir $\lambda \in \sigma[\frac{1}{2}(QR+RQ)]$, $\lambda = \frac{1}{2cd}(\mu^2 - c^2 - d^2)$ olacak şekilde vardır. $\mu \notin \mp(c \mp d)$ olduğundan $\lambda \notin \{1,-1\}$ dir. O halde Teorem 5.4 (ii)' ye göre $x^2 - c'^2 - d'^2 - 2c'd'\lambda$ polinomunun kökleri $c'Q + d'R$ matrisinin özdeğerleridir. $\lambda = \frac{1}{2cd}(\mu^2 - c^2 - d^2)$ olduğu dikkate alınırsa, istenen elde edilir. ■

Teorem 5.7. $Q, R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $QR \neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c, d \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $cQ+dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma(QR-RQ)\setminus\{0\}$ ise $\lambda^2 = -4\left\{1-(\frac{1}{2cd}(c^2+d^2+\mu\nu))^2\right\}$ ve $\mu+\nu=0$ olacak şekilde $\mu, \nu \in \sigma(cQ+dR)$ vardır,

(ii) $\mu \in \sigma(cQ+dR)\setminus\mp\{c \mp d\}$ ise $\lambda^2 = -4\left\{1-(\frac{1}{2cd}(c^2+d^2-\mu^2))^2\right\}$ olacak şekilde bir $\lambda \in \sigma(QR-RQ)$ vardır.

İspat. Q ve R matrisleri Lemma 5.2' deki gibi olsun. Bu durumda,

$$QR - RQ = S((\oplus_{i=1}^{k}(Q_iR_i - R_iQ_i)) \oplus \mathbf{0})S^{-1}$$

yazılabilir. (5.8)' den $i = 1, \ldots, k$ için

$$Q_iR_i - R_iQ_i = S_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2B_i \\ -2C_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

olup, $\rho_i = \frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i\nu_i)$ olmak üzere, (5.5) ve (5.6) ifadeleri dikkate alınırsa,

$$(Q_i R_i - R_i Q_i)^2 = -4(1-\rho_i^2)\,\mathrm{I}_{m_i} \tag{5.16}$$

elde edilir.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(QR-RQ)\backslash\{0\}$ olsun. Bu durumda, $\lambda^2 \in \sigma[(QR-RQ)^2]\backslash\{0\}$ olur. O halde $\lambda^2 \in \sigma[(Q_i R_i - R_i Q_i)^2]$ olacak şekilde bir $i \in \{1,...,k\}$ vardır. (5.16) eşitliği göz önüne alınırsa, $\lambda^2 = -4(1-\rho_i^2)$ yazılabilir. (5.2) bağıntıları dikkate alınır ve $\rho_i = \dfrac{1}{2cd}(c^2+d^2+\mu_i\nu_i)$ olduğu hatırlanırsa, (i)' nin ispatı tamamlanır.

Şimdi de, $\mu \in \sigma(cQ+dR)\backslash\{c+d, c-d, -c+d, -c-d\}$ olsun. O halde $\mu \in \sigma(cQ_i + dR_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,...,k\}$ vardır. $\rho = \dfrac{1}{2cd}(c^2+d^2-\mu^2)$ olmak üzere, (5.16) ve Lemma 5.2' den $-4(1-\rho^2) \in \sigma[(QR-RQ)^2]$ elde edilir. Spektral dönüşüm teoremi uygulanırsa (ii)' nin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 5.8. $Q, R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $QR \neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c, d \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $cQ+dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma[\frac{1}{2}((QR)^2+RQR)]\backslash\{0,1\}$ ise $x^2 \mp cd\sqrt{2\lambda+2} - c^2 - d^2$ polinomunun kökleri $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleridir,

(ii) $\mu \in \sigma(cQ+dR)\backslash \mp\{(c \mp d)\}$ ise $\dfrac{1}{2c^2d^2}(c^2+d^2-\mu^2)^2 - 1 \in \sigma[\frac{1}{2}((QR)^2+RQR)]$ dir.

İspat. Q ve R matrisleri Lemma 5.2' deki gibi olsun. Bu takdirde,

$$\frac{1}{2}((QR)^2+RQR) = S((\oplus_{i=1}^{k}\frac{1}{2}((Q_iR_i)^2 + R_iQ_iR_i)) \oplus \frac{1}{2}((Q_0R_0)^2 + R_0Q_0R_0))S^{-1}$$

yazılabilir. Q_0 ve R_0 matrisleri değişmeli involutif matrisler olduğundan

$$\frac{1}{2}((Q_0R_0)^2+R_0Q_0R_0)=\frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q_0)$$

dır. Q_0 matrisi involutif olduğundan $\frac{1}{2}(\mathrm{I}+Q_0)$ matrisi idempotenttir, dolayısıyla $\sigma(\frac{1}{2}((Q_0R_0)^2+R_0Q_0R_0))\subset\{0,1\}$ dir. $\rho_i=\frac{1}{2cd}(c^2+d^2+\mu_i\nu_i)$, $E_i=A_iB_i-B_iD_i$ olmak üzere, (5.4), (5.5) ve (5.7) bağıntıları kullanılırsa, $i=1,...,k$ için

$$\frac{1}{2}((Q_iR_i)^2+R_iQ_iR_i)=S_i\begin{bmatrix}(2\rho_i^{\;2}-1)\mathrm{I}_{x_i} & E_i\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{5.17}$$

elde edilir.

Şimdi, $\lambda\in\sigma[\frac{1}{2}((QR)^2+RQR)]\setminus\{0,1\}$ olsun. $\lambda\notin\{0,1\}$ ise, $\lambda\notin\sigma(\frac{1}{2}((Q_0R_0)^2+R_0Q_0R_0))$ dır. O halde $\lambda\in\sigma[\frac{1}{2}((Q_iR_i)^2+R_iQ_iR_i)]$ olacak şekilde bir $i\in\{1,...,k\}$ vardır. Dolayısıyla (5.17)' den $\lambda=2\rho_i^{\;2}-1$ yazılabilir. Buradan $\rho_i=\mp\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda+2}$ olur. $\rho_i=\frac{1}{2cd}(c^2+d^2+\mu_i\nu_i)$ olduğu ve (5.2) bağıntıları dikkate alınırsa, $cQ+dR$ matrisinin, $\mu\nu=2cd\rho_i-c^2-d^2$ ve $\mu+\nu=0$ olacak şekilde özdeğerlerinin mevcut olduğu görülür. $\mu+\nu=0$ ve $\mu\nu=\mp cd\sqrt{2\lambda+2}-c^2-d^2$ olduğundan, $x^2\mp cd\sqrt{2\lambda+2}-c^2-d^2$ polinomunun kökleri $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleridir. Böylece (i)' nin ispatı ispatlanır.

Şimdi de, $\mu\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ olsun. O halde $\mu\in\sigma(cQ_i+dR_i)$ olacak şekilde bir $i\in\{1,...,k\}$ vardır. Lemma 5.2' den, μ ve $-\mu$, cQ_i+dR_i matrisinin özdeğerleridir. (5.17) eşitliği dikkate alınırsa,

$$2\left(\frac{1}{2cd}(c^2+d^2-\mu^2)\right)^2-1\in\sigma[\frac{1}{2}((Q_iR_i)^2+R_iQ_iR_i)]$$

olur. $\sigma[\frac{1}{2}((Q_iR_i)^2+R_iQ_iR_i)]\subset\sigma[\frac{1}{2}((QR)^2+RQR)]$ olduğundan, (ii)' de istenen elde edilir. ∎

Bu teoremin bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir:

Sonuç 5.9. $Q,R\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $QR\neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c,d\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere, $cQ+dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $u\in\sigma[(QR)^2+RQR]\setminus\{0,2\}$ ise $x^2\mp cd\sqrt{u+2}-c^2-d^2$ polinomunun kökleri $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleridir,

(ii) $\omega\in\sigma(cQ+dR)\setminus\mp\{(c\mp d)\}$ ise $\frac{1}{c^2d^2}(c^2+d^2-\omega^2)^2-2\in\sigma[(QR)^2+RQR]$ dir.

İspat. $u\in\sigma[(QR)^2+RQR]\setminus\{0,2\}$ ise, $\frac{u}{2}\in\sigma[\frac{1}{2}((QR)^2+RQR)]\setminus\{0,1\}$ dir. $\frac{u}{2}=:\lambda$ alınırsa, Teorem 5.8 (i)' ye göre $x^2\mp cd\sqrt{2\lambda+2}-c^2-d^2$ polinomunun kökleri, $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleridir. Bu polinomda, λ yerine $\frac{u}{2}$ koyulursa, $x^2\mp cd\sqrt{u+2}-c^2-d^2$ polinomunun kökleri, $cQ+dR$ matrisinin özdeğerleri olur.

$\omega\in\sigma(cQ+dR)\setminus\{c+d,c-d,-c+d,-c-d\}$ ise, Teorem 5.8 (ii)' ye göre $\frac{1}{2c^2d^2}(c^2+d^2-\omega^2)^2-1$, $\frac{1}{2}((QR)^2+RQR)$ matrisinin bir özdeğeri olup, buradan $\frac{1}{c^2d^2}(c^2+d^2-\omega^2)^2-2\in\sigma((QR)^2+RQR)$ elde edilir. ∎

Teorem 5.10. $Q, R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $QR \neq RQ$ olacak şekilde iki involutif matris ve $c, d \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $cQ + dR$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda,

(i) $\lambda \in \sigma(QRQ + R)\backslash\{1,-1\}$ ise $x^2 \mp \lambda cd - c^2 - d^2$ polinomunun kökleri $cQ + dR$ matrisinin özdeğerleridir,

(ii) $\mu \in \sigma(cQ + dR)\backslash\{\mp(c \mp d)\}$ ise $\mp\frac{1}{cd}(c^2 + d^2 - \mu^2) \in \sigma(QRQ + R)$

dir.

İspat. Q ve R matrisleri, Lemma 5.2' deki gibi olsun. Bu durumda

$$QRQ + R = S((\oplus_{i=1}^{k}(Q_iR_iQ_i + R_i)) \oplus (Q_0R_0Q_0 + R_0))S^{-1}$$

yazılabilir. Q_0 ile R_0 matrisleri değişmeli involutif matrisler olduğundan $Q_0R_0Q_0 + R_0$ matrisi de involutiftir. Dolayısıyla $\sigma(Q_0R_0Q_0 + R_0) \subset \{1,-1\}$ dir. $i = 1,...,k$ için $\rho_i = \frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 + \mu_i\nu_i)$ olarak tanımlanır ve (5.4), (5.7) ve (5.8) bağıntıları dikkate alınırsa,

$$Q_iR_iQ_i + R_i = S_i\begin{bmatrix} -2\rho_i I_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\rho_i I_{m_i - x_i}\end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{5.18}$$

elde edilir.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(QRQ + R)\backslash\{1,-1\}$ olsun. Bu durumda $\lambda \in \sigma(Q_iR_iQ_i + R_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,...,k\}$ vardır. O halde (5.18)' den, $\lambda = -2\rho_i$ veya $\lambda = 2\rho_i$ yazılabilir. Lemma 5.2 (ii) dikkate alınırsa, $\lambda = \mp\frac{1}{cd}(c^2 + d^2 + \mu\nu)$ ve $\mu + \nu = 0$ olacak şekilde $\mu, \nu \in \sigma(cQ_i + dR_i)$' nin var olduğu görülür. $\mu + \nu = 0$ ve

$\mu\nu = \mp\lambda cd - c^2 - d^2$ olduğundan $x^2 \mp \lambda cd - c^2 - d^2$ polinomunun kökleri $cQ + dR$ nin özdeğerleridir. Böylece (i) ispatlanmış olur.

$\mu \in \sigma(cQ + dR) \setminus \{c + d, c - d, -c + d, -c - d\}$ olsun. Teorem 5.1 ve Lemma 5.2' den $\sigma(cQ_i + dR_i) = \{\mu, -\mu\}$ olacak şekilde bir $i \in \{1, ..., k\}$ vardır. $\rho = \frac{1}{2cd}(c^2 + d^2 - \mu^2)$ olarak tanımlanırsa, (5.18)' den $\mp 2\rho \in \sigma(QRQ + R)$ olur. Böylece (ii)' de istenen elde edilir. ■

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bölüm 3' de, $a,b \in \mathbb{C}^*$, P ve Q matrisleri birbiriyle değişmeli olmayan idempotent matrisler olmak üzere oluşturulan $aP+bQ$ lineer birleşim matrisi tekrar göz önüne alınsın. [2]' de, " $a,b \in \mathbb{C}^*$ ve P ile Q birbirinden farklı kompleks idempotent matrisler olmak üzere, $aP+bQ$ matrisi idempotent ise, $PQ \neq QP$ olmak üzere $a \notin \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, $b=1-a$ ve $(P-Q)^2 = \mathbf{0}$ koşulları sağlanır " şeklinde bir sonuç ortaya koyuldu. Bu sonuç, Lemma 3.2 vasıtasıyla da elde edilebilir. Şöyle ki;

$aP+bQ$ matrisi idempotent olduğundan, $\sigma(aP+bQ) \subset \{0,1\}$ dir. $PQ \neq QP$ olduğundan $\sigma(aP+bQ)$ kümesi tek elemanlı değildir.($PQ = QP$ olsaydı, P ve Q matrislerinin ikisi de sıfır matrisi olabilirdi ve $aP+bQ=\mathbf{0}$ olacağından $\sigma(aP+bQ) \subset \{0\}$ olurdu. Ya da bu matrislerin ikisi de birim matris olabilirdi. Dolayısıyla lineer birleşim matrisinin spektrumu sadece $a+b$ sayısından oluşurdu.) Lemma 3.2' den $P_0Q_0 = Q_0P_0$, $a+b=1$ ve $(P_1-Q_1)^2 = \mathbf{0}$ olmak üzere, $P = S(P_1 \oplus P_0)S^{-1}$ ve $Q = S(Q_1 \oplus Q_0)S^{-1}$ yazılabilir. Çünkü $aP+bQ = S((aP_1+bQ_1) \oplus (aP_0+bQ_0))S^{-1}$ olup, $aP+bQ$ matrisi idempotent olduğundan, aP_1+bQ_1 matrisi de idempotenttir. Dolayısıyla $\sigma(aP_1+bQ_1) \subset \{0,1\}$ dir. Yine Lemma 3.2' den, $\sigma(aP_1+bQ_1) = \{\mu_1, \nu_1\}$ ve $\mu_1+\nu_1 = a+b$ olup, $\mu_1 = 0$ ve $\nu_1 = 1$ olduğundan $a+b=1$ olur. Lemma 3.2 (ii)' nin son bağıntısına göre, $ab(P_1-Q_1)^2 = \mu_1\nu_1 \, \mathrm{I}_{m_1}$, yani $ab(P_1-Q_1)^2 = 0.1.\mathrm{I}_{m_1} = \mathbf{0}$ elde edilir. $a,b \in \mathbb{C}^*$ olduğundan, $(P_1-Q_1)^2 = \mathbf{0}$ olur. P_0 ve Q_0 blokları var olsaydı, aP_0+bQ_0 matrisinin de idempotent olduğu bilindiğinden, $(a,b)=(1,1)$, $(a,b)=(1,-1)$ veya $(a,b)=(-1,1)$ olurdu. Bu da $a+b=1$ olmasıyla çelişirdi. O halde,

$(P-Q)^2 = \{S(P_1-Q_1)S^{-1}\}^2 = S(P_1-Q_1)^2 S^{-1} = \mathbf{0}$ olur. Böylece, $PQ \neq QP$ olmak üzere [2]' deki teoremin alternatif bir ispatı elde edilir.

Yine aynı lemma kullanılarak [3] ve [16]' da ortaya koyulan " P, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $P+Q$ matrisi köşegenleştirilebilir ve $P-Q$ matrisi tersinir olacak şekilde iki idempotent matris ise, bu durumda $P+Q$ ve $\mathrm{I}_n - PQ$ matrisleri tersinirdir " sonucu da kolaylıkla elde edilebilir.

Bölüm 3, Bölüm 4 ve Bölüm 5' de ortaya koyulan orijinal sonuçların elde edilmesi için fikir oluşturan, literatürde var olan bir çalışmadır. Bölüm 4 ve Bölüm 5 de, özellikle istatistik teorisinde yaygın olarak ortaya çıkan idempotent matrisler ile, kuantum mekaniği gibi daha birçok bilim dalında karşılaşılan involutif matrislerin çeşitli kombinasyonlarının spektrumları göz önüne alındı. Yine, Bölüm 3' deki gibi, lineer kombinasyon matrisinin köşegenleştirilebilir olması koşulu ile ilerlendi.

İdempotent ve involutif matrislerin, spektrum kavramının, Bölüm 1' de bahsedildiği üzere, çeşitli bilim dallarındaki yaygın kullanımları dikkate alındığında, bu tür kavramları içinde barındıran çalışmaların incelenmeye değer olduğu söylenebilir.

Çalışmada ele alınan, lineer kombinasyon matrislerini oluşturan matrislerin tripotent ya da başka tipli özel matris olması durumu için de benzer problemlerin incelenmesinin de mümkün olduğunu vurgulamakta yarar vardır. Yine, lineer kombinasyonu oluşturan idempotent matrislerin sayısının artırılması ile de benzer problemler ele alınabilir ve ilginç sonuçlar elde edilebilir diye düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] ADLER, S.L., Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press Inc., New York, 1995.

[2] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321, 3-7, 2000.

[3] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices , Linear Algebra Appl., 388, 25-29, 2004.

[4] BAKSALARY, O.M., BERNSTEIN, D.S., TRENKLER, G., On the equality between rank and trace of an idempotent matrix, Appl. Math. Comput., 217, 4076-4080, 2010.

[5] BENÍTEZ, J., RAKOČEVIĆ, V., Applications of CS decomposition in linear combinations of two orthogonal projectors, Appl. Math. Comput., 203, 761-769, 2008.

[6] BENÍTEZ, J., RAKOČEVIĆ, V., On the spectrum of linear combinations of two projections in $\mathbb{C}^*-$algebras. Linear Multilinear Algebra, 58, 673-679, 2010.

[7] BETHE, H.A., SALPETER, E.E., Quantum Mechanics of One-and Two-electron Atoms, Plenum Pub. Co., New York, 1977.

[8] BU. C., Linear maps preserving Drazin inverses of matrices over fields, Linear Algebra Appl. 396, 159-173, 2005.

[9] BJØRSTAD, P.E., MANDEL, J., On the spectra of sums of orthogonal projections with applications to parallel computing, BIT 31, 76-88, 1991.

[10] GRAYBILL, F.A., Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company inc., California, 1969.

[11] GREENE, W.H., Econometric Analysis, Prentice-Hall, 2003.

[12] GROMOV, N.A., The matrix quantum unitary Cayley-Klein groups, J. Phys., A 26, L5-L8, 1993.

[13] HORN, R.A., JOHNSON, C.R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.

[14] HOUSEHOLDER, A.S., CARPENTER, J.A., The singular values of involutory and idempotent matrices, Numerische Mathematik, 5, 234-237, 1963.

[15] KHAN, N.A., On involutory matrices, The American Mathematical Monthly, 63, 704-709, 1956.

[16] KOLIHA, J.J., RAKOČEVIĆ, V., Invertibility of the sum of idempotents, Linear Multilinear Algebra, 50, 285-292, 2002.

[17] KOLIHA, J.J., RAKOČEVIĆ, V., On the norm of idempotents in $\mathbb{C}^{*}-$ algebras, Rocky Mountain J. Math., 34, 685-697, 2004.

[18] LAY, D.C., Linear Algebra and Its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 2005.

[19] LIU, X., BENÍTEZ, J., The spectrum of matrices depending on two idempotents, Applied Mathematics Letters, 24, 1640-1646, 2011.

[20] MESSER. R., Linear Algebra Gateway to Mathematics, Harper Collins College Publishers, USA, 1994.

[21] MESTECHKİN, M.M., Restricted Hartree-Fock method instability, Int. J. Quant. Chem., 13, 469-481, 1978.

[22] MEYER, C.D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 2000.

[23] OVCHINNIKOV, M.A., Properties of Viro-Turaev representations of the mapping class group of a Torus, J. Math. Sci. (NY), 113, 856-867, 2003.

[24] ÖZDEMİR, H., ÖZBAN, A.Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput., 159, 439-448, 2004.

[25] SARDUVAN M., ÖZDEMİR, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Applied Mathematics and Computation 200, 401-406, 2008.

[26] SPİNDLER, K., Abstract Algebra With Applications: V. 1: Vector Spaces and Groups, Taylor & Francis Ltd., 1993.

[27] STRANG, G., Linear Algebra and Its Applications, USA, 1988.

[28] TİAN, Y., STYAN, G.P.H., Rank equalities for idempotent and involutory matrices, Linear Algebra Appl., 335, 101-107, 2001.

[29] ZHANG, X., CAO. C., Additive operators preserving identity matrices, Harbin Press, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba PETİK, 14.11.1987 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2004 yılında tamamladı. 2005 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2009 yılında bölüm ve fakülte birinciliği, üniversite ikinciliği ile lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD' da yüksek lisans programına kaydoldu. Şu anda herhangi bir kurumda çalışmamaktadır.