T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK TİPTEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba AYDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd.Doç. Dr. Şevket GÜR**

Mayıs 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK TİPTEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba AYDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 14/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Üye	Üye
Doç.Dr. Cemalettin KUBAT	Doç.Dr. Elman HAZAR	Yrd.Doç.Dr. Sevket GÜR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bana yardım eden hocam, sayın Yrd.Doç.Dr. Şevket GÜR' e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$u(x,t)$	: Bilinmeyen fonksiyon
Ω	: R^n ‘de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge
∇	: Gradient operatör
$\nabla^2 = \Delta$	: Laplace operatörü
$\nabla^4 = \Delta^2$	: Biharmonik operatör
ν	: Birim dış normal $\partial\Omega$ ’de
(u,v)	: $\int_\Omega uvdx$
$\Vert\cdot\Vert_{L^p(\Omega)}$	: $\Vert\cdot\Vert_p$
$\Vert\cdot\Vert$	: $\Vert\cdot\Vert_2$

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hiperbolik denklem, çözümün patlaması, düzgün kararlılık, asimtotik davranış,

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde hiperbolik denklemin çözümün davranışından bahsedilerek teze giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde iki farklı dalga denkleminin asimtotik davranışı incelenmiştir.

Beşinci bölümde ele alınan hiperbolik denklemin çözümünün düzgün kararlılığı incelenmiştir.

Altıncı bölümde ele alınan hiperbolik denklemin çözümünün patlaması incelenmiştir.

BEHAVIOUR OF SOLUTION FOR HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

SUMMARY

Key Words: Hyperbolic equation, Blow-up of solution, Uniform stabilization, Asymptotic behavior

This thesis is consist of six chapters.

In the first chapter, it is mentioned about behavior of solution for hyperbolic equation and there is introduction to the thesis.

In the second chapter, main definitions, theorems and inequalities used in the thesis are given.

In the third and forth chapter, it is concerned with asymptotic behavior to two different wave equations.

In the fifth chapter, it is concerned with uniform stabilization to hyperbolic equation.

In the sixth chapter,it is concerned with blow-up of solution to hyperbolic equation.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Adi Türevli Diferansiyel Denklemler ve Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler yardımıyla gerçek hayatta karşılaştığımız birçok problemin modellemesi yapılabilmektedir. Bahsedilen bu problemlerin büyük çoğunluğu; başta fizik, kimya ve biyolojiden olmakla birlikte tıptan ekonomiye hemen hemen her bilim dalından gelebilmektedir. Problemlere karşılık gelen bu diferansiyel denklemlerin çözümleri maalesef her zaman tam olarak bulunamayabilir. Hatta çözümü bilinenler, bilinmeyenlere kıyasla çok küçük bir gruptur. Bu durumda nümerik yöntemlerle en azından yaklaşık bir çözüm elde etmeye ya da çözümün yapısı ile ilgili bilgiler edinilmeye çalışılır. Çözümün yapısı araştırılırken, işe ilk önce bu problemin çözümünün varlığı ve çözüm varsa eğer çözümün tek olup olmadığı araştırılarak başlanır. Tahmin edilebileceği üzere bu sorulara cevap bulmadan işe başlamak bazen zaman kaybından öteye gitmeyecek bir uğraştan başka bir şey değildir. Özellikle çözümün var olmadığı bir durum göz önüne alınırsa, bir probleme ilk olarak çözüm arama işine girişmenin ne kadar anlamsız olacağı anlaşılabilir. Çözümünün varlığı ve tek olduğu kanıtlanmış bir problem hakkında daha fazla bilgiye sahip olma ihtiyacı hissedilir. İşte asimptotik davranış bir diferansiyel denklemin çözümünün sonlu veya sonsuz bir zamanda davranışı hakkında, her ne kadar çözüm tam olarak bilinmese de bilgi verir.

Denklemin davranışı ile ilgili en basit haliyle $f(t)=t^3+t^2+3$ fonksiyonu ele alınsın. Burada t çok büyük değerler alırken; t^3, $f(t)$ 'nin davranışını t^2 ve 3 ‘e göre daha çok etkiler ve hatta bu iki terim $t\to\infty$ ‘a giderken önemsiz kalır.

Bütün bu araştırmaların gerçek hayatta karşılaşılan problemlerde faydası; örneğin, bir bölgede bulunan nüfusun artışı veya azalışı belirlenmiş koşullar altında sonlu veya uzun zaman davranışı ile belirlenebilir. Kimyasal bir deney sonucu ortaya çıkan ve çözümü bilinen yöntemlerle belirlenemeyen bir denklemin çözümün davranışı yardımıyla deneyin sonuçları hakkında bilgi sahibi olunabilir.

Yukarıda verilen örnekleri çoğaltmak mümkündür. Örneklerden de anlaşılacağı üzere oldukça ilgi çeken ve hayatla çoğu zaman bire-bir örtüşebilen bu diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışı konusu hakkında çalışmalar 1960 yılların başından günümüze kadar gelen devam etmektedir.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM, TEOREM VE EŞİTSİZLİKLER

Tanım 2.1.

$\Omega \subset R^n$ bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. Ω üzerinde tanımlanmış

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonları sınıfına, $L_p(\Omega)$ uzayı denir.

$1 \leq p < \infty$ için üzerindeki norm,

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

$p = 2$ için $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve üzerindeki iç çarpım,

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx, \qquad \forall u, v \in L_2(\Omega)$$

biçiminde tanımlanır.

Eşitsizlik 2.1. (Hölder eşitsizliği)

$1 \leq p, q < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ ise

$$\int_\Omega |u(x) v(x)| dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır. Hatta daha genel olarak

$$\left| \int_\Omega \prod_{i=1}^n u_i(x) dx \right| \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_\Omega |u_i(x)|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}}, \qquad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$$

eşitsizliği sağlanır.

Eşitsizlik 2.2. (Poincare-Friedrichs eşitsizliği)

$\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge olsun.

$c = c(\Omega) > 0$ olmak üzere $\forall u \in W_p^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

olacak şekilde $c = c(p,n) > 0$ sabiti vardır. Burada $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ dir.

Eşitsizlik 2.3. (Gronwall eşitsizliği)(İntegral formu)

u ve v fonksiyonları $[0,t]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar ve c negatif olmayan bir sayı olsun. Eğer

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(s)v(s)\,ds\,, \qquad t \in [0,T]$$

ise bu durumda

$$u(t) \leq c\exp\left\{\int_0^t v(s)\,ds\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1. (İntegral için Ortalama Değer Teoremi)

$f(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarının $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve $h(t)$'nin bu aralıkta işaret değiştirmediğini varsayalım. O zaman a ile b arasında bir c sayısı vardır öyle ki;

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = f(c)\int_a^b h(t)dt$$ olur.

BÖLÜM 3. DİSPERSİV VE DİSİPATİV TERİMLİ IV. MERTEBEN DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMTOTİK DAVRANIŞI

3.1.Giriş ve Problemin İfadesi

Lineer olmayan elastik çubuklarda, dikey gergin dalga denklemlerinin yayılımı ve lineer olmayan iyon akustik ve uzay iletim dalgaları araştırılırken temel ifadesi $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt}$ şeklinde lineer olmayan denklemler ve farklı lineer olmayan terimler elde edilmiştir.

Aşağıdaki problem ile ilgili ilk çalışmalardan biri Shang Yadong tarafından Acta Mathematicae Applicatae Sinica dergisindeki " Initial boundary value problem of equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u)$ " isimli makalede ele alınmıştır.

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u) \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.3}$$

$n = 1,2,3$ için $f \in C^1$, $f'(u)$ üstten sınırlı olsun.

(H0) $n = 2$ için $0 < p < \infty$ iken $\left|f'(u)\right| \le A|u|^p + B$; $n = 3$ için $0 < p \le \dfrac{4}{n-2}$

$u_i(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $(i = 0,1)$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda (3.1)-(3.3) probleminin herhangi bir $T > 0$ için

$u \in W^{2,\infty}\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ olacak şekilde

bir tek $u(x,t)$ çözümü vardır. Burada $A,\ B,\ p$ pozitif sabitlerdir.

Liu Yacheng ve Li Xiaoyuan Journal of Natural Science of Heilongjiang University dergisinde 2004 yılında yayınlanan " Some remarks on the equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u)$ " çalışmalarında (3.1)-(3.3) problemini bu sefer $n \geq 1$ şeklinde ele alarak çalışmışlar ve aşağıdaki sonucu elde etmişler.

$n \geq 1$ için $f \in C^1$, $f'(u)$ üstten sınırlı olsun.

(H1) $n = 2$ için $0 < p < \infty$ iken $\left|f'(u)\right| \leq A|u|^p + B$; $n \geq 3$ için $0 < p \leq \dfrac{4}{n-2}$

$u_i(x) \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ $\quad (i = 0,1)$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda (3.1)-(3.3) probleminin herhangi bir $T > 0$ için

$u \in W^{2,\infty}\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ olacak şekilde

bir tek $u(x,t)$ çözümü vardır. Burada $A,\ B,\ p$ pozitif sabitlerdir.

Her iki çalışmada da elde edilen (H0) ve (H1) sonuçlarına bakıldığında (H1) in (H0) a göre daha kapsamlı bir sonuç olduğu görülebilir.

Bu bölümün amacı (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün asimtotik davranışını incelemektir.

Teorem 3.1.

$\forall u \in R$ ve $f(u)$ için $uf(u) \leq F(u) \leq 0$ koşulunun sağlandığını varsayalım ve burada $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ dir. Bu durumda (3.1)-(3.3) probleminin çözümü için

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t}, \qquad 0 \leq t < \infty \tag{3.4}$$

dir. Burada

$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2-\int_\Omega F(u)dx$ ve $\lambda,\ C>0$ dır.

İspat

$u(x,t)$, (3.1)-(3.3) probleminin herhangi bir çözümü olsun. (3.1), u_t ile çarpılıp, Ω üzerinde integre edilirse,

$$\int_\Omega u_t u_{tt}dx-\int_\Omega u_t\Delta u dx-\int_\Omega u_t\Delta u_t dx-\int_\Omega u_t\Delta u_{tt}dx=\int_\Omega u_t f(u)\,dx \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinin sol tarafındaki integralleri hesaplayalım. Buna göre ilk integral,

$$\int_\Omega u_t u_{tt}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2 dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2$$

şeklinde yazılabilir. Diğer integraller ise kısmi integrasyon yardımıyla, $u|_{\partial\Omega}=0$ ile aşağıdaki şekilde hesaplanabilirler.

$$-\int_\Omega u_t\Delta u dx=-u_t\nabla u|_{\partial\Omega}+\int_\Omega \nabla u_t\nabla u dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$-\int_\Omega u_t\Delta u_t dx=-u_t\nabla u_t|_{\partial\Omega}+\int_\Omega \nabla u_t\nabla u_t dx=\|\nabla u_t\|^2$$

$$-\int_\Omega u_t\Delta u_{tt}dx=-u_t\nabla u_{tt}|_{\partial\Omega}+\int_\Omega \nabla u_t\nabla u_{tt}d=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|^2$$

(3.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade de ise $F(u)=\int_0^u f(s)ds$ ile

$$\int_{\Omega} u_t f(u)\,dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt}\int_0^u f(s)\,ds\,dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} F(u)\,dx$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (3.5),

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2 - \int_{\Omega} F(u)\,dx\right\} + \|\nabla u_t\|^2 = 0 \tag{3.6}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2 - \int_{\Omega} F(u)\,dx \tag{3.7}$$

dir. (3.7) kullanılarak (3.6) denklemi

$$\frac{d}{dt}E(t) + \|\nabla u_t\|^2 = 0 \tag{3.8}$$

şeklinde yazılabilir. $\delta > 0$ olmak üzere (3.8) denklemi $e^{\delta t}$ ile çarpılırsa,

$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}E(t)\right) = e^{\delta t}\frac{d}{dt}\left(E(t)\right) + \delta e^{\delta t}E(t)$ yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}E(t)\right) + e^{\delta t}\|\nabla u_t\|^2 = \delta e^{\delta t}E(t) \tag{3.9}$$

ve bu ifade de 0 ‘dan t’ye integre edilirse,

$$e^{\delta t}E(t) + \int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau = E(0) + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) eşitliğindeki sağ taraftaki integral (3.7) yardımıyla

$$e^{\delta t}E(t) + \int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau = E(0) + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left\{\frac{1}{2}\|u_\tau\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_\tau\|^2 - \int_{\Omega} F(u)\,dx\right\}d\tau$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik de

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau = E(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\left\|u_\tau\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2\right)d\tau$$

$$+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-\int_\Omega F(u)dx\right)d\tau \tag{3.11}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. (3.11) eşitliğinde sağ tarafta ikinci integralde bulunan $\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-\int_\Omega F(u)dx$ ifadesini düzenleyelim. Buna göre $uf(u)\leq F(u)$ ile

$$\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-\int_\Omega F(u)dx \leq \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-\int_\Omega uf(u)dx \tag{3.12}$$

şeklinde yazılabilir. $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt} = f(u)$ yardımıyla (3.12) eşitsizliğinin sağ tarafı için

$$\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-\int_\Omega F(u)dx \leq \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-\int_\Omega u\left(u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-(u,u_{tt})+(u,\Delta u)+(u,\Delta u_t)+(u,\Delta u_{tt}) \tag{3.13}$$

elde edilir. Şimdi (3.13) ün sağ tarafını düzenleyelim. $(u,\Delta u),(u,\Delta u_t)$ ve $(u,\Delta u_{tt})$ integrallerine kısmi integrasyon uygulanırsa $u|_{\partial\Omega}=0$ ile

$$(u,\Delta u)=\int_\Omega u\Delta u dx = u\nabla u\Big|_{\partial\Omega}-\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2 dx = -\left\|\nabla u\right\|^2$$

$$(u,\Delta u_t)=\int_\Omega u\Delta u_t dx = u\nabla u_t\Big|_{\partial\Omega}-\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2$$

$$\left(u,\Delta u_{tt}\right)=\int_{\Omega}u\Delta u_{tt}dx=u\nabla u_{tt}\big|_{\partial\Omega}-\int_{\Omega}\nabla u\nabla u_{tt}dx=-\left(\nabla u,\nabla u_{tt}\right)$$

olarak elde edilirler. Bunlar (3.13) de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_{\Omega}F\left(u\right)dx\leq\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\left(u,u_{tt}\right)-\|\nabla u\|^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2-\left(\nabla u,\nabla u_{tt}\right) \qquad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) den

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_{\Omega}F\left(u\right)dx\leq-\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\left(u,u_{tt}\right)-\left(\nabla u,\nabla u_{tt}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \qquad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan $-\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\leq 0$ olduğundan bu terimin ihmal edilmesi eşitsizliğin yönünü değiştirmeyeceğinden,

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_{\Omega}F\left(u\right)dx\leq-\left(u,u_{tt}\right)-\left(\nabla u,\nabla u_{tt}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \qquad (3.16)$$

yazılabilir. O halde (3.11) eşitliğindeki bulunan $\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_{\Omega}F(u)dx\right)d\tau$ terimi için

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_{\Omega}F\left(u\right)dx\right)d\tau\leq-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\left(u,u_{\tau\tau}\right)+\left(\nabla u,\nabla u_{\tau\tau}\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\nabla u\|^2\right)d\tau \quad (3.17$$

elde edilmiş olur. Kısmi integrasyon yardımıyla (3.17) nin sağ tarafında bulunan terimler düzenlenirse ilk olarak $-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(u,u_{\tau\tau}\right)d\tau$ terimi için

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(u,u_{\tau\tau}\right)d\tau=-\int_0^t e^{\delta\tau}\left\{\frac{d}{d\tau}\left(u,u_{\tau}\right)-\|u_{\tau}\|^2\right\}d\tau$$

$$= -\int_0^t e^{\delta\tau} \frac{d}{d\tau}(u, u_\tau)\, d\tau + \int_0^t e^{\delta\tau} \|u_\tau\|^2\, d\tau$$

yazılabilir. $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$ ile

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}(u, u_{\tau\tau})\, d\tau = -e^{\delta\tau}(u, u_\tau)\Big|_0^t + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u, u_\tau)\, d\tau + \int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\, d\tau$$

$$= -e^{\delta t}(u, u_t) + (u_0, u_1) + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u, u_\tau)\, d\tau + \int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\, d\tau \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.18) in sağ tarafına Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}(u, u_{\tau\tau})\, d\tau \le \frac{1}{2}e^{\delta t}\left(\|u\|^2 + \|u_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2\right) + \frac{1}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u\|^2 + \|u_\tau\|^2\right) d\tau$$

$$+\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\, d\tau \tag{3.19}$$

olur. (3.17) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan ikinci terim $-\int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u, \nabla u_{\tau\tau})\, d\tau$ için kısmi integrasyon uygulanırsa, $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$ ile

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u, \nabla u_{\tau\tau})\, d\tau = -\int_0^t e^{\delta\tau}\left\{\frac{d}{dt}(\nabla u, \nabla u_\tau) - \|\nabla u_\tau\|^2\right\} d\tau$$

$$= -\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\nabla u, \nabla u_\tau)\, d\tau + \int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\, d\tau$$

$$= -e^{\delta\tau}(\nabla u, \nabla u_\tau)\Big|_0^t + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u, \nabla u_\tau)\, d\tau + \int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\, d\tau$$

ve buradan da

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\nabla u,\nabla u_{\tau\tau}\right)d\tau=-e^{\delta t}\left(\nabla u,\nabla u_t\right)+\left(\nabla u_0,\nabla u_1\right)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\nabla u,\nabla u_\tau\right)d\tau$$

$$+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinin sağ tarafına Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\nabla u,\nabla u_{\tau\tau}\right)d\tau\le\frac{1}{2}e^{\delta t}\left(\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\nabla u_t\right\|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u_0\right\|^2+\left\|\nabla u_1\right\|^2\right)+\frac{1}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\left\|\nabla u\right\|^2+\left\|\nabla u_\tau\right\|^2\right)d\tau$$
$$+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau \tag{3.21}$$

olur. (3.17) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan üçüncü terim $-\frac{1}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau$ için kısmi integrasyon uygulanırsa, $u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right)$ olduğundan

$$-\frac{1}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau=-\frac{1}{2}e^{\delta\tau}\left\|\nabla u\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u_0\right\|^2+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan $-\frac{1}{2}e^{\delta\tau}\left\|\nabla u\right\|^2\le 0$ olduğundan bu terimin ihmal edilmesi eşitsizliğin yönünü değiştirmeyeceğinden,

$$-\frac{1}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau\le\frac{1}{2}\left\|\nabla u_0\right\|^2+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u\right\|^2 d\tau \tag{3.23}$$

olur. Buradan (3.17) eşitsizliği

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2-\int_\Omega F(u)dx\right)d\tau\le\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\left\|u\right\|^2+\left\|u_t\right\|^2\right)+\frac{\delta}{2}\left(\left\|u_0\right\|^2+\left\|u_1\right\|^2\right)$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u\|^2+\|u_\tau\|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\,d\tau+\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)+\frac{\delta}{2}\left(\|\nabla u_0\|^2+\|\nabla u_1\|^2\right)$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau+\frac{\delta}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau \tag{3.24}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (3.24) eşitsizliğinin (3.11) de yerine yazılmasıyla

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau\le E(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|u_\tau\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau$$
$$+\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u\|^2+\|u_t\|^2\right)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_0\|^2+\|u_1\|^2\right)+\frac{1}{2}\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u\|^2+\|u_\tau\|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\,d\tau$$
$$+\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)+\frac{\delta}{2}\left(\|\nabla u_0\|^2+\|\nabla u_1\|^2\right)+\frac{1}{2}\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau$$
$$+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau+\frac{\delta}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{1}{2}\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.25) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimler $\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2\le E(t)$ yardımıyla, benzer terimler bir araya toplanarak C_0,C_1,C_2 pozitif sabitler olmak üzere değerlendirilirse ilk olarak, $E(0)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_0\|^2+\|u_1\|^2+2\|\nabla u_0\|^2+\|\nabla u_1\|^2\right)$ terimleri için Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$E(0)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_0\|^2+\|u_1\|^2+2\|\nabla u_0\|^2+\|\nabla u_1\|^2\right)\le E(0)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_1\|^2+(2+\lambda_0)\|\nabla u_0\|^2+\|\nabla u_1\|^2\right)$$

yazılabilir. Buradan da $\frac{1}{2}\|u_1\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_1\|^2\le E(0)$ yardımıyla

$$E(0)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_0\|^2+\|u_1\|^2+2\|\nabla u_0\|^2+\|\nabla u_1\|^2\right)\le C_0E(0) \tag{3.26}$$

elde edilir. İkinci olarak $\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)$ terimleri Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)\le\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u_t\|^2+(1+\lambda_0)\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)\le C_1\delta e^{\delta t}E(t)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)\le C_1\delta e^{\delta t}E(t) \tag{3.27}$$

elde edilir. Üçüncü olarak $\frac{3}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|\nabla u_\tau\|^2+\|u_\tau\|^2\right)d\tau$ terimleri Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{3}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|\nabla u_\tau\|^2+\|u_\tau\|^2\right)d\tau\le\frac{3}{2}(\lambda_0+1)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau \tag{3.28}$$

yazılabilir. Son olarak da $\frac{1}{2}\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u\|^2+\|u_\tau\|^2+2\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau$ terimleri Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{1}{2}\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u\|^2+\|u_\tau\|^2+2\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau\le\frac{1}{2}\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+(2+\lambda_0)\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{1}{2}\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u\|^2+\|u_\tau\|^2+2\|\nabla u\|^2+\|\nabla u_\tau\|^2\right)d\tau\le C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) da bulunanların (3.25) eşitsizliğinde yerine yazılmasıyla

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau \le C_0E(0)+C_1\delta e^{\delta t}E(t)+\frac{3}{2}(\lambda_0+1)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau$$

$$+C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) eşitsizliğinin her iki tarafı da 2 ile çarpılırsa,

$$2e^{\delta t}E(t)+2\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau \le 2C_0E(0)+2C_1\delta e^{\delta t}E(t)+3(\lambda_0+1)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau$$

$$+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{3.31}$$

(3.31) in sağ tarafında bulunan $2C_1\delta e^{\delta t}E(t)$ ve $3(\lambda_0+1)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau$ terimlerinin sol tarafa atılmasıyla

$$(2-2C_1\delta)e^{\delta t}E(t)+\big(2-3(\lambda_0+1)\delta\big)\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau \le 2C_0E(0)$$

$$+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.32) eşitsizliği

$$e^{\delta t}E(t)+(1-2C_1\delta)e^{\delta t}E(t)+\big(2-3(\lambda_0+1)\delta\big)\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau \le 2C_0E(0)$$

$$+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{3.33}$$

şeklinde ifade edilir ve $(1-2C_1\delta)$, $\big(2-3(\lambda_0+1)\delta\big)$ katsayıları pozitif olacak şekilde seçilirse,

$(1-2C_1\delta)>0$ ise $\delta<\dfrac{1}{2C_1}$ ve $\big(2-3(\lambda_0+1)\delta\big)>0$ ise $\delta<\dfrac{2}{3(1+\lambda_0)}$ olur.

O halde $0<\delta<\min\left\{\frac{1}{2C_1},\frac{2}{3(1+\lambda_0)}\right\}$ elde edilir.

(3.33) ifadesinin sol tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler, δ'nun seçiminden dolayı pozitif olduğundan $(1-2C_1\delta)e^{\delta t}E(t)$ ve $\left(2-3(\lambda_0+1)\delta\right)\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau$ terimleri sol taraftan atılırsa, (3.33) ün sol tarafı daha küçüleceğinden ,

$$e^{\delta t}E(t)\le 2C_0E(0)+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{3.34}$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliği yardımıyla (3.34) den

$$e^{\delta t}E(t)\le 2C_0E(0)e^{2C_2\delta^2 t},\qquad t\ge 0$$

elde edilir. Buradan da

$$E(t)\le 2C_0E(0)e^{-\delta(1-2C_2\delta)t},\qquad t\ge 0$$

eşitsizliğinde $t\to\infty$'a giderken (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün üstel olarak sıfıra gittiğini gösterebilmek için, üstel fonksiyonun kuvvetindeki t'nin katsayısı negatif olarak seçilmelidir. Bu durumda $(1-2C_2\delta)>0$ olması için $\delta<\frac{1}{2C_2}$ olmalıdır.

Sonuç olarak eğer $0<\delta<\min\left\{\frac{1}{2C_1},\frac{2}{3(1+\lambda_0)},\frac{1}{2C_2}\right\}$ olacak şekilde seçilirse $t\to\infty$'a giderken (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün üstel olarak sıfıra gittiği ispatlanmış olur.

BÖLÜM 4. LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

4.1.Giriş ve Problemin İfadesi

Lineer olmayan dalga denklemleri, viskozite ile tanımlanmış titreşim için kullanılan bir problem akla getirir. Aşağıda verilen lineer olmayan dalga denklemi için başlangıç sınır değer problemi ilk olarak 1980 yılında Webb tarafından Canadian Journal of Mathematics dergisinde yayınlanan" Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation" isimli makalede çalışılmıştır.

$$u_{tt} - \alpha\Delta u_t - \Delta u = f(u), \qquad \alpha > 0, x \in \Omega, t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{4.2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.3}$$

Webb çalışmasında; $n = 1, 2, 3$ için $f(u)$ üzerinde alınan daha genel ve basit koşullar altında (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün varlığını kanıtlamıştır. Daha sonra $f(u)$ üzerinde alınan, bazı varsayımlar altında $n \geq 4$ için çözümün varlığı elde edilmiştir. Aynı problem enerjinin pozitif olmadığı durumlar düşünülerek potansiyel metot kullanılıp, Yacheng Liu, Wang Feng, Dacheng Liu tarafından 2004 yılında Acta Mathematicae Applicatae Sinica dergisinde " On potential well and application to strong damped nonlinear equations" isimli makalede çalışılmıştır. Bunun öncesinde ise Yadong Shang Journal of Engineering Mathematics dergisinde

2000 yılında yayınlanan “ Blow-up of solutions for two classes of strongly damped nonlinear wave equations “ isimli makalesinde (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün sonlu zamanda patlamasını çalışmıştır.

Bu bölümün amacı, $f(u)$ ile ilgili alınan daha basit ve daha genel koşullar altında (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün asimtotik davranışını incelemektir.

Aşağıda verilen önerme ile (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün tekliği gösterilmiş olur.

Önerme 4.1.

$f \in C^1$, $f'(u)$ üstten sınırlı olsun. $n=4$ için $0<p<\infty$ iken $\left|f'(u)\right| \le A|u|^p + B$;

$n>4$ için $0<p\le \dfrac{4}{n-4}$

$u_i(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $(i=0,1)$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda (4.1)-(4.3) probleminin herhangi bir $T>0$ için

$u_{tt} \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ ile $u \in W^{1,\infty}\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ olacak şekilde

bir tek çözümü vardır. Burada $A,\ B,\ p$ pozitif sabitlerdir.

Teorem 4.1.

$\forall u \in R$ ve $f(u)$ için $0 \le -F(u) \le -uf(u)$ koşulunun sağlandığını varsayalım ve burada $F(u)=\int_0^u f(s)ds$ dir. Bu durumda (4.1)-(4.3) probleminin çözümü için

$$E(t) \le CE(0)e^{-\lambda t}, \qquad t \ge 0 \tag{4.4}$$

dir. Burada $E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx$ ve $\lambda,\ C>0$ dır.

İspat

$u(x,t)$ (4.1)-(4.3) probleminin herhangi bir çözümü olsun. (4.1), u_t ile çarpılıp, Ω üzerinde integre edilirse,

$$\int_\Omega u_t u_{tt} dx - \alpha \int_\Omega u_t \Delta u_t dx - \int_\Omega u_t \Delta u dx = \int_\Omega u_t f(u) dx \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) eşitliğinin sol tarafındaki integralleri hesaplayalım. Buna göre ilk integral,

$$\int_\Omega u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u_t|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2$$

şeklinde yazılabilir. Diğer integraller ise kısmi integrasyon yardımıyla, $u|_{\partial\Omega} = 0$ ile aşağıdaki şekilde hesaplanabilirler.

$$-\alpha \int_\Omega \Delta u_t u_t dx = -\alpha \nabla u_t u_t \,|_{\partial\Omega} + \alpha \int_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx = \alpha \|\nabla u_t\|^2$$

$$-\int_\Omega \Delta u u_t dx = -\nabla u u_t \,|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

(4.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade ise $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ ile

$$\int_\Omega u_t f(u) dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}\int_0^u f(s) ds dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega F(u) dx$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (4.5),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 - \frac{d}{dt}\int_\Omega F(u) dx + \alpha \|\nabla u_t\|^2 = 0 \tag{4.6}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_{\Omega} F(u)dx \tag{4.7}$$

dir. (4.7) kullanılarak (4.6) denklemi

$$\frac{d}{dt}E(t) + \alpha\|\nabla u_t\|^2 = 0 \tag{4.8}$$

şeklinde yazılabilir. $\delta > 0$ olmak üzere (4.8) denklemi $e^{\delta t}$ ile çarpılırsa,

$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}E\left(t\right)\right) = e^{\delta t}\frac{d}{dt}\left(E\left(t\right)\right) + \delta e^{\delta t}E\left(t\right)$ yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}E(t)\right) + \alpha e^{\delta t}\|\nabla u_t\|^2 = \delta e^{\delta t}E(t)\,. \tag{4.9}$$

ve bu ifade de 0 ‘dan t ’ye integre edilirse,

$$e^{\delta t}E(t) - E(0) + \alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\, d\tau = \delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) eşitliğinde sağ taraftaki integral (4.7) yardımıyla,

$$e^{\delta t}E(t) + \alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\, d\tau = E(0) + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|u_\tau\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_{\Omega} F(u)dx\right)d\tau$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik de

$$e^{\delta t}E(t) + \alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\, d\tau = E(0) + \frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\, d\tau$$

$$+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\right)d\tau \tag{4.11}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. (4.11) eşitliğinde sağ tarafta ikinci integralde bulunan $\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx$ ifadesini düzenleyelim. Buna göre $-F(u)\le -uf(u)$ ile

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\le\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega uf(u)dx \tag{4.12}$$

şeklinde yazılabilir. $u_{tt}-\alpha\Delta u_t-\Delta u=f(u)$ yardımıyla (4.12) eşitsizliğinin sağ tarafı için

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\le\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega u\left(u_{tt}-\alpha\Delta u_t-\Delta u\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\left(u,u_{tt}\right)+\alpha\left(u,\Delta u_t\right)+\left(u,\Delta u\right) \tag{4.13}$$

elde edilir. Şimdi (4.13) ün sağ tarafını düzenleyelim. $\left(u,\Delta u_t\right)$ve $\left(u,\Delta u\right)$ integrallerine kısmi integrasyon uygulanırsa $u|_{\partial\Omega}=0$ ile

$$\left(u,\Delta u_t\right)=\int_\Omega u\Delta u_t dx=u\nabla u_t\,|_{\partial\Omega}-\int_\Omega\nabla u_t\nabla u dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla u|^2dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\left(u,\Delta u\right)=\int_\Omega u\Delta u dx=u\nabla u\,|_{\partial\Omega}-\int_\Omega\nabla u\nabla u dx=-\|\nabla u\|^2$$

olarak elde edilir ve bunlar (4.13) de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\le\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\left(u,u_{tt}\right)-\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2-\|\nabla u\|^2 \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) den

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\le -\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\left(u,u_{tt}\right)-\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan $-\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\le 0$ olduğundan bu terimin ihmal edilmesi eşitsizliğin yönünü değiştirmeyeceğinden,

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\le -(u,u_{tt})-\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \tag{4.16}$$

yazılabilir. O halde (4.11) eşitliğindeki bulunan $\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\right)d\tau$ terimi için

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\right)d\tau\le -\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left\{\left(u,u_{\tau\tau}\right)+\frac{\alpha}{2}\frac{d}{d\tau}\|\nabla u\|^2\right\}d\tau$$

elde edilir. Buradan da

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\right)d\tau\le -\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(u,u_{\tau\tau}\right)d\tau-\frac{\alpha\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau \tag{4.17}$$

şeklinde yazılabilir. Kısmi integrasyon yardımıyla (4.17) nin sağ tarafında bulunan terimler düzenlenirse ilk olarak $-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(u,u_{\tau\tau}\right)d\tau$ terimi için

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}\left(u,u_{\tau\tau}\right)d\tau=-\int_0^t e^{\delta\tau}\left\{\frac{d}{d\tau}\left(u_\tau,u\right)-\|u_\tau\|^2\right\}d\tau$$

$$=-\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\left(u_\tau,u\right)d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2 d\tau$$

yazılabilir. $u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x)$ ile

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}(u,u_{\tau\tau})\,d\tau=-e^{\delta\tau}(u_\tau,u)\Big|_0^t+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_\tau,u)\,d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\,d\tau$$

$$=-e^{\delta t}(u_t,u)+(u_1,u_0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_\tau,u)\,d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\,d\tau \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.18) eşitliğinin sağ tarafına Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}(u,u_{\tau\tau})\,d\tau\le\frac{e^{\delta t}}{2}\left(\|u_t\|^2+\|u\|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2+\|u_0\|^2\right)+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+\|u\|^2\right)d\tau$$

$$+\int_0^t e^{\delta t}\|u_\tau\|^2\,d\tau \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.17) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan ikinci terim $-\frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau$ için kısmi integrasyon uygulanırsa, $u(x,0)=u_0(x)$ ile

$$-\frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\,d\tau=-\frac{\alpha}{2}\left\{e^{\delta t}\|\nabla u\|^2\Big|_0^t-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau\right\}$$

$$=-\frac{\alpha}{2}e^{\delta t}\|\nabla u\|^2+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\delta\alpha}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau$$

elde edilir. $-\frac{\alpha}{2}e^{\delta t}\|\nabla u\|^2\le 0$ olduğundan bu terimin ihmal edilmesi eşitsizliğin yönünü değiştirmeyeceğinden,

$$-\frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau\le\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\alpha\delta}{2}\int_0^t e^{\delta t}\|\nabla u\|^2\,d\tau \tag{4.20}$$

yazılabilir. (4.17) de (4.19) ve (4.20) yerine yazılırsa

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)dx\right)d\tau\le\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u_t\|^2+\|u\|^2\right)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_1\|^2+\|u_0\|^2\right)$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+\|u\|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta t}\|u_\tau\|^2\,d\tau+\frac{\alpha\delta}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\alpha\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta t}\|\nabla u\|^2\,d\tau \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitsizliğinin (4.11) de yerine yazılmasıyla

$$e^{\delta t}E(t)+\alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau\le E(0)+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\,d\tau++\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u_t\|^2+\|u\|^2\right)$$

$$+\frac{\delta}{2}\left(\|u_1\|^2+\|u_0\|^2\right)+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+\|u\|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\,d\tau$$

$$+\frac{\alpha\delta}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\alpha\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimler $\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\le E(t)$ yardımıyla, benzer terimler bir araya toplanarak C_0, C_1, C_2 pozitif sabitler olmak üzere değerlendirilirse ilk olarak

$E(0)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_1\|^2+\|u_0\|^2\right)+\frac{\alpha\delta}{2}\|\nabla u_0\|^2$ terimleri için Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$E(0)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_1\|^2+\|u_0\|^2\right)+\frac{\alpha\delta}{2}\|\nabla u_0\|^2\le E(0)+\frac{\delta}{2}\|u_1\|^2+\frac{\delta}{2}(\lambda_0+\alpha)\|\nabla u_0\|^2$$

yazılabilir. Buradan da $\frac{1}{2}\|u_1\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2\le E(0)$ yardımıyla

$$E(0)+\frac{\delta}{2}\left(\|u_1\|^2+\|u_0\|^2\right)+\frac{\alpha\delta}{2}\|\nabla u_0\|^2\le C_0E(0) \tag{4.23}$$

elde edilir. İkinci olarak $\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u_t\|^2+\|u\|^2\right)$ terimleri Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u_t\|^2+\|u\|^2\right)\le\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\|u_t\|^2+\lambda_0\|\nabla u\|^2\right)\le C_1\delta e^{\delta t}E(t) \tag{4.24}$$

elde edilir. Üçüncü olarak $\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}3\|u_\tau\|^2\,d\tau$ terimleri Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}3\|u_\tau\|^2\,d\tau\le\frac{3}{2}\delta\lambda_0\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau \tag{4.25}$$

elde edilir. Son olarak $\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+\|u\|^2\right)d\tau+\frac{\alpha\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau$ terimleri Poincare eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+\|u\|^2\right)d\tau+\frac{\alpha\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau\le\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+(\lambda_0+\alpha)\|\nabla u\|^2\right)d\tau$$

yazılabilir ve buradan da

$$\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\|u_\tau\|^2+\|u\|^2\right)d\tau+\frac{\alpha\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau\le C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) bulunanların (4.22) eşitsizliğinde yerine yazılmasıyla

$$e^{\delta t}E(t)+\alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau\le C_0E(0)+\frac{3}{2}\delta\lambda_0\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau+C_1\delta e^{\delta t}E(t)$$

$$+C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.27) eşitsizliğinin her iki tarafı da 2 ile çarpılırsa,

$$2e^{\delta t}E(t)+2\alpha\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau \leq 2C_0E(0)+3\delta\lambda_0\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau+2C_1\delta e^{\delta t}E(t)$$

$$+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{4.28}$$

(4.28) in sağ tarafında bulunan $2C_1\delta e^{\delta t}E(t)$ ve $3\delta\lambda_0\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau$ terimlerinin sol tarafa atılmasıyla

$$\left(2-2C_1\delta\right)e^{\delta t}E(t)+\left(2\alpha-3\delta\lambda_0\right)\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau \leq 2C_0E(0)+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) eşitsizliği

$$e^{\delta t}E(t)+\left(1-2C_1\delta\right)e^{\delta t}E(t)+\left(2\alpha-3\delta\lambda_0\right)\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau \leq 2C_0E(0)$$

$$+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{4.30}$$

şeklinde ifade edilir ve $\left(1-2C_1\delta\right)$, $\left(2\alpha-3\delta\lambda_0\right)$ katsayıları pozitif olacak şekilde seçilirse,

$\left(1-2C_1\delta\right)>0$ ise $\delta<\dfrac{1}{2C_1}$ ve $\left(2\alpha-3\delta\lambda_0\right)>0$ ise $\delta<\dfrac{2\alpha}{3\lambda_0}$ olur. O halde

$0<\delta<\min\left\{\dfrac{1}{2C_1},\dfrac{2\alpha}{3\lambda_0}\right\}$ elde edilir.

(4.30) ifadesinin sol tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler, δ'nun seçiminden dolayı pozitif olduğundan $\left(1-2C_1\delta\right)e^{\delta t}E(t)$ ve $\left(2\alpha-3\delta\lambda_0\right)\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau$ terimleri sol taraftan atılırsa, (4.30) un sol tarafı daha küçüleceğinden ,

$$e^{\delta t}E(t)\le 2C_0E(0)+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau \tag{4.31}$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliğini yardımıyla (4.31) den

$$e^{\delta t}E(t)\le 2C_0E(0)e^{2C_2\delta^2 t}, \qquad \mathrm{t}\ge 0$$

elde edilir. Buradan da,

$$E(t)\le 2C_0E(0)e^{-\delta(1-2C_2\delta)t}, \qquad \mathrm{t}\ge 0$$

eşitsizliğinde $t\to\infty$'a giderken (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün üstel olarak sıfıra gittiğini gösterebilmek için, üstel fonksiyonun kuvvetindeki t'nin katsayısı negatif olarak seçilmelidir. Bu durumda $(1-2C_2\delta)>0$ olması için $\delta<\dfrac{1}{2C_2}$ olmalıdır.

Sonuç olarak eğer $0<\delta<\min\left\{\dfrac{1}{2C_1},\dfrac{2\alpha}{3\lambda_0},\dfrac{1}{2C_2}\right\}$ olacak şekilde seçilirse $t\to\infty$'a giderken (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün üstel olarak sıfıra gittiği ispatlanmış olur.

BÖLÜM 5. LİNEER OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜMÜN DÜZGÜN KARARLILIĞI

5.1. Giriş ve Problemin İfadesi

Bu bölümde aşağıda ifadesi verilen lineer olmayan hiperbolik denklem için başlangıç sınır-değer probleminin çözümünün davranışı incelenmektedir.

$$u_{tt} + k_1\Delta^2 u + k_2\Delta^2 u_t + \Delta g\left(\Delta u\right) = 0 \qquad \Omega\times R^+ \tag{5.1}$$

$$u = 0 \qquad \Gamma\times R^+ \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \Gamma\times R^+ \tag{5.3}$$

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right) \tag{5.4}$$

Burada Ω R^n ‘de Γ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, k_1, k_2 pozitif sabitler ve g, C^2 sınıfından reel değerli fonksiyon olsun.

Bu problem elastomer çubuğun hareketini tanımlamaktadır. Problemin fiziksel yorumuyla ilgili daha fazla bilgi H.T.Banks, D.S. Gilliam ve V.I. Shubov isimli yazarların “ Differential and Integral Equations 10 “ kitabının “ Global solvability for damped abstract nonlinear hyperbolic systems ” bölümünde bulunmaktadır. Ama bu problemin fiziksel yorumuna burada girilmeyecektir.

Lemma 5.1.

$E : R^+ \to R^+$ $\left(R^+ := \left[0,\infty\right)\right)$ artmayan bir fonksiyon ve

$$\forall S \in R^{+} \text{ için } \int_{S}^{\infty} E(t)dt \leq TE(S) \tag{5.5}$$

olsun. Burada $T > 0$ dır. Bu durumda

$$\forall t \geq 0 \text{ için } E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{T}} \tag{5.6}$$

dır.

Teorem 5.1.

(u_0, u_1), $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$'ye ait ve burada $i = 1, 2, 3$ için c_i pozitif sabitler, $\varepsilon > 0$ için $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ iken

$$-\frac{1}{2}(k_1 + k_2 - \varepsilon)|x|^2 - c_1 \leq G(x) \leq c_2 |x|^2 + c_3 \tag{H1}$$

olsun.

Burada i=1,2 için c_i pozitif sabitler ve

$$a > 0 \text{ için } g'(x) \geq -a \quad \text{iken} \tag{H2}$$

$$|g(x)| \leq \tilde{c}_1 |x| + \tilde{c}_2 \tag{H3}$$

olsun. Bu durumda (5.1)-(5.4) probleminin $u \in C\left(R^{+}; H_0^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(R^{+}; L^2(\Omega)\right)$ olan tek bir çözümü vardır.

(5.1)-(5.4) probleminin t zamanındaki enerjisi aşağıdaki formül ile tanımlansın.

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|u_t|^2 + k_1|\Delta u|^2\right)dx + \int_{\Omega} G(\Delta u)dx \tag{5.7}$$

(5.1) denklemini u_t ile çarpılıp, Ω üzerinde integre edilirse,

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx \ + k_1 \int_{\Omega} u_t \Delta^2 u dx + k_2 \int_{\Omega} u_t \Delta^2 u_t dx + \int_{\Omega} u_t \Delta g\left(\Delta u\right) dx = 0 \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.8) eşitliğinin sol tarafındaki integralleri hesaplayalım. Buna göre ilk integral

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \left|u_t\right|^2 dx$$

şeklinde yazılabilir. Diğer integraller ise kısmi integrasyon yardımıyla, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ ve $\nabla u\big|_{\partial\Omega} = 0$ ile aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\int_{\Omega} u_t \Delta^2 u dx = u_t\ \nabla^3 u\Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u dx = -\nabla u_t \nabla^2 u\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \nabla^2 u_t \nabla^2 u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \left|\Delta u\right|^2 dx\,,$$

$$\int_{\Omega} u_t \Delta^2 u_t dx = u_t\ \nabla^3 u_t\Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u_t dx = -\nabla u_t \nabla^2 u_t\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \nabla^2 u_t \nabla^2 u_t dx = \int_{\Omega} \left|\Delta u_t\right|^2 dx\,,$$

$$\int_{\Omega} u_t \Delta g\left(\Delta u\right) dx = u_t\ \nabla g\left(\Delta u\right)\Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla g\left(\Delta u\right) dx = -\nabla u_t g\left(\Delta u\right)\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \Delta u_t g\left(\Delta u\right) dx$$
$$= \int_{\Omega} \frac{d}{dt}\int_{0}^{\Delta u} g\left(\tau\right) d\tau dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} G\left(\Delta u\right) dx$$

Bu durumda (5.8)

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\left|u_t\right|^2 + \frac{k_1}{2}\left|\Delta u\right|^2 + G\left(\Delta u\right)\right\} dx + k_2 \int_{\Omega}\left|\Delta u_t\right|^2 dx = 0 \tag{5.9}$$

olarak yazılabilir. (5.7) kullanılarak (5.9) denklemi,

$$\frac{d}{dt} E\left(t\right) = -k_2 \int_{\Omega}\left|\Delta u_t\right|^2 dx \tag{5.10}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade de $0 \le S < T < \infty$ olmak üzere S' den T' ye integre edilirse,

$$\int_S^T \frac{d}{dt} E(t)\, dt = \int_S^T -k_2 \int_\Omega |\Delta u_t|^2 dxdt$$

$$E(T) - E(S) = -k_2 \int_S^T \int_\Omega |\Delta u_t|^2 dxdt$$

$$E(S) - E(T) = k_2 \int_S^T \int_\Omega |\Delta u_t|^2 dxdt \qquad 0 \le S < T < \infty \tag{5.11}$$

elde edilir. Buradan da $S < T$ için $E(S) - E(T) \ge 0$ olduğuna göre $E(t)$ enerji fonksiyonunun monoton artmayan olduğunu görülebilir.

Teorem 5.2.

g üzerinde (H1)-(H3) hipotezleri geçerli ve $u(x,t)$, (5.1)-(5.4) probleminin $C\left(R^+; H_0^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(R^+; L^2(\Omega)\right)$ sınıfında çözümü olsun.

$\forall x \in R$ için $xg(x) \ge 0$ (H4)

$\forall x \in R$ için $2G(x) \le xg(x)$ (H5)

varsayımları altında

$\forall t \in R^+$ için $E(t) \le E(0) e^{1-wt}$

dır. Burada

$$\frac{1}{w} = \frac{c(\Omega)}{k_2} + \max\left\{1, \frac{c(\Omega)}{k_1}\right\} + \frac{k_2}{k_1} \quad \text{ve}$$

$$c(\Omega),\ \forall u \in H_0^2(\Omega) \text{ için } \int_\Omega u^2 dx \le c(\Omega) \int_\Omega |\Delta u|^2 dx \tag{*}$$

eşitsizliğinde bölgeye bağlı bir sabittir.

İspat

$u(x,t)$, (5.1)-(5.4) probleminin herhangi bir çözümü olsun. (5.1) denklemi u ile çarpılıp, Ω üzerinde integre edilirse,

$$\int_{\Omega} uu_{tt} + k_1 \int_{\Omega} u\Delta^2 udx + k_2 \int_{\Omega} u\Delta^2 u_t dx + \int_{\Omega} u\Delta g(\Delta u)\,dx = 0 \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.12) eşitliğinin sol tarafındaki integralleri hesaplayalım. Buna göre ilk integral

$$\int_{\Omega} uu_{tt}dx = \int_{\Omega}\left\{(uu_t)_t - |u_t|^2\right\}dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} uu_t dx - \int_{\Omega}|u_t|^2 dx$$

şeklinde yazılabilir. Diğer integraller ise kısmi integrasyon yardımıyla, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ ve $\nabla u\big|_{\partial\Omega} = 0$ ile aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\int_{\Omega} u\Delta^2 udx = u\nabla^3 u\Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega}\nabla u\nabla^3 udx = -\nabla u\nabla^2 u\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega}\nabla^2 u\nabla^2 udx = \int_{\Omega}|\Delta u|^2\,dx\,,$$

$$\int_{\Omega} u\Delta^2 u_t dx = u\nabla^3 u_t\Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega}\nabla u\nabla^3 u_t dx = -\nabla u\nabla^2 u_t\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega}\nabla^2 u\nabla^2 u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\Delta u|^2\,dx\,,$$

$$\int_{\Omega} u\Delta g(\Delta u)\,dx = u\nabla g(\Delta u)\Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega}\nabla u\nabla g(\Delta u)\,dx = -\nabla ug(\Delta u)\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega}\Delta ug(\Delta u)dx$$
$$= \int_{\Omega}\Delta ug(\Delta u)\,dx$$

Bu durumda (5.12)

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left\{uu_t + \frac{k_2}{2}|\Delta u|^2\right\}dx + \int_{\Omega}\left\{k_1|\Delta u|^2 - \left|u_t^{\,2}\right| + \Delta ug(\Delta u)\right\}dx = 0 \tag{5.13}$$

olarak yazılabilir. $0 \le S < T < \infty$ olmak üzere (5.13) S ’ den T ’ ye integre edilirse,

$$\left[\int_\Omega u u_t dx\right]_S^T + \frac{k_2}{2}\left[\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right]_S^T + \int_S^T \int_\Omega \left\{k_1 |\Delta u|^2 - |u_t|^2 + \Delta u g(\Delta u)\right\} dxdt = 0$$

elde edilir ve buradan da

$$\int_S^T \int_\Omega \left\{k_1 |\Delta u|^2 - |u_t|^2\right\} dxdt = -\left[\int_\Omega u u_t dx\right]_S^T - \frac{k_2}{2}\left[\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right]_S^T + \int_S^T \int_\Omega -\Delta u g(\Delta u) dxdt \qquad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir. (5.14) ün her iki tarafına $2\int_S^T \int_\Omega G(\Delta u) dxdt$ eklenirse,

$$\int_S^T \int_\Omega \left\{k_1 |\Delta u|^2 - \left|u_t^2\right| + 2G(\Delta u)\right\} dxdt = -\left[\int_\Omega u u_t dx\right]_S^T - \frac{k_2}{2}\left[\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right]_S^T$$

$$+\int_S^T \int_\Omega \left\{2G(\Delta u) - \Delta u g(\Delta u)\right\} dxdt \qquad (5.15)$$

olur. (5.7) den (5.15) in her iki tarafına $2\int_S^T \int_\Omega |u_t|^2 dxdt$ eklenirse, sol tarafta $2\int_S^T E(t)\, dt$ elde edilir. Yani

$$2\int_S^T E(t)\, dt = 2\int_S^T \int_\Omega |u_t|^2 dxdt - \left[\int_\Omega u u_t dx\right]_S^T - \frac{k_2}{2}\left[\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right]_S^T$$

$$+\int_S^T \int_\Omega \left\{2G(\Delta u) - \Delta u g(\Delta u)\right\} dxdt \qquad (5.16)$$

elde edilir. (H5)’deki $\forall x \in R$ için $2G(x) \le xg(x)$ koşulu yardımıyla (5.16)

$$2\int_S^T E(t)\,dt \le 2\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt - \left[\int_\Omega uu_t dx\right]_S^T - \frac{k_2}{2}\left[\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx\right]_S^T \tag{5.17}$$

elde edilir. (5.17) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim olan $2\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt$ için (*) eşitsizliği yardımıyla,

$$2\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt \le 2c(\Omega)\int_S^T\int_\Omega |\Delta u_t|^2\,dxdt = \frac{2c(\Omega)}{k_2}\int_S^T\int_\Omega k_2\,|\Delta u_t|^2\,dxdt$$

elde edilir ve buradan da (5.11) eşitliği yardımıyla

$$2\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt \le \frac{2c(\Omega)}{k_2}\big(E(S)-E(T)\big)$$

elde edilir. $E(t)$ artmayan fonksiyon olduğu için,

$$2\int_S^T\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt \le \frac{2c(\Omega)}{k_2}E(S) \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.17) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim $-\left[\int_\Omega uu_t dx\right]_S^T$ için

$$\int_\Omega uu_t dx \le \left|\int_\Omega uu_t dx\right| \le \int_\Omega |uu_t|\,dx$$

ve Cauchy eşitsizliğini yardımıyla,

$$\int_\Omega uu_t dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u|^2 + |u_t|^2\right)dx$$

olduğundan (*) eşitsizliği yardımıyla,

$$\int_\Omega uu_t dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u|^2 + |u_t|^2\right)dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left(c(\Omega)|\Delta u|^2 + |u_t|^2\right)dx$$

elde edilir. Eğer

$c(\Omega) \le k_1$ olsaydı; $\frac{1}{2}\int_\Omega \left(c(\Omega)|\Delta u|^2 + |u_t|^2\right)dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left(k_1|\Delta u|^2 + |u_t|^2\right)dx \le E(t)$ ve

$c(\Omega) \ge k_1$ olsaydı; $\frac{1}{2}\int_\Omega \left(c(\Omega)|\Delta u|^2 + |u_t|^2\right)dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left(c(\Omega)|\Delta u|^2 + \frac{c(\Omega)}{k_1}|u_t|^2\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\frac{c(\Omega)}{k_1}\int_\Omega \left(k_1|\Delta u|^2 + |u_t|^2\right)dx = \frac{c(\Omega)}{k_1}E(t)$$

elde edilirdi. Bu durumda

$$\int_\Omega uu_t dx \le \max\left\{1, \frac{c(\Omega)}{k_1}\right\}E(t)$$

olur ve $E(t)$ artmayan fonksiyon olduğu için

$$-\left[\int_\Omega uu_t dx\right]_S^T = \left[\int_\Omega uu_t dx\right]_T^S \le \max\left\{1, \frac{c(\Omega)}{k_1}\right\}E(S) \tag{5.19}$$

elde edilir. (5.17) eşitsizliğinin sol tarafındaki sonuncu terim olan $-\frac{k_2}{2}\left[\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right]_S^T$ için

$$\frac{k_2}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \le \frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1}\int_\Omega k_1|\Delta u|^2 dx \le \frac{k_2}{k_1}E(t)$$

olur ve $E(t)$ artmayan fonksiyon olduğundan

$$-\frac{k_2}{2}\left[\int_{\Omega}|\Delta u|^2\,dx\right]_S^T=\frac{k_2}{2}\left[\int_{\Omega}|\Delta u|^2\,dx\right]_T^S\le\frac{k_2}{k_1}E(S) \tag{5.20}$$

elde edilir. (5.18), (5.19) ve (5.20) da bulunanların (5.17) de yerine yazılmasıyla,

$$2\int_S^T E(t)\,dt\le\left(\frac{2c(\Omega)}{k_2}+\max\left\{1,\frac{c(\Omega)}{k_1}\right\}+\frac{k_2}{k_1}\right)E(S)$$

$$\le\left(\frac{2c(\Omega)}{k_2}+2\max\left\{1,\frac{c(\Omega)}{k_1}\right\}+\frac{2k_2}{k_1}\right)E(S)$$

elde edilir ve buradan da

$$\int_S^T E(t)\,dt\le\left(\frac{c(\Omega)}{k_2}+\max\left\{1,\frac{c(\Omega)}{k_1}\right\}+\frac{k_2}{k_1}\right)E(S) \tag{5.21}$$

elde edilir. $T\to\infty$ giderken,

$$\lim_{T\to\infty}\int_S^T E(t)\,dt\le\lim_{T\to\infty}\left(\frac{c(\Omega)}{k_2}+\max\left\{1,\frac{c(\Omega)}{k_1}\right\}+\frac{k_2}{k_1}\right)E(S)$$

ve

$$\forall S\ge 0 \text{ için } \int_S^\infty E(t)\,dt\le\left(\frac{c(\Omega)}{k_2}+\max\left\{1,\frac{c(\Omega)}{k_1}\right\}+\frac{k_2}{k_1}\right)E(S) \tag{5.22}$$

şeklinde yazılabilir.

$\frac{1}{w} = \frac{c(\Omega)}{k_2} + \max\left\{1, \frac{c(\Omega)}{k_1}\right\} + \frac{k_2}{k_1}$ şeklinde ifade edilirse, (5.22)

$$\int_S^{\infty} E(t)\,dt \leq \frac{1}{w} E(S) \tag{5.23}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade de lemma 5.1. yardımıyla

$$E(t) \leq E(0)e^{1-wt} \tag{5.24}$$

olarak yazılabilir.

Bu durumda $T \to \infty$ giderken (5.1)-(5.4) probleminin çözümünün düzgün kararlılığı ispatlanmış olur.

BÖLÜM 6. LİNEER OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN PATLAMASI

6.1.Giriş ve Problemin İfadesi

Bu bölümde aşağıda ifadesi verilen lineer olmayan hiperbolik denklem için başlangıç sınır-değer probleminin çözümünün patlaması incelenmektedir.

$$u_{tt} + k_1 \nabla^4 u + k_2 \nabla^4 u_t + \nabla^2 g\left(\nabla^2 u\right) = 0, \qquad \Omega \times (0,T), \tag{6.1}$$

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad \partial u \times (0,T), \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{6.3}$$

Burada $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyon, Ω, R^n ‘de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge (n>1 bir doğal sayı olmak üzere), k_1, k_2 pozitif sabitler, ∇ gradient operatör, $\nabla^2 = \Delta$ laplace operatörü, $\nabla^4 = \Delta^2$ biharmonik operatör, ν $\partial\Omega$ ’da birim dış normal, $g(s)$ verilmiş lineer olmayan bir fonksiyon, $u_0(x), u_1(x)$ verilen başlangıç-değer koşullarını belirtir.

$$\begin{aligned} & w_{tt} + A_1 w + A_2 w_t + N^* g(Nw) = f(t) \\ & w(0) = \varphi_0 \\ & w_t(0) = \varphi_1 \end{aligned} \tag{*}$$

A_1, A_2, N ve f belirli koşulları sağlamak üzere H.T.Banks, D.S. Gilliam ve V.I. Shubov isimli yazarların "Differential and Integral Equations 10 " kitabının " Global solvability for damped abstract nonlinear hyperbolic systems" bölümünde (*) denklemiyle verilen denklemlerinin genel bir sınıfı çalışılmıştır. Bu kitapta lineer olmayan terim üzerinde oldukça genel koşullar alınarak (*) probleminin çözümünün; global zamanda varlığı, tekliği, düzenliliği ve başlangıç verilerine sürekli bağımlılığı incelenmiştir. Yukarıdaki (6.1)-(6.3) problemi (*) probleminin sadece özel bir örneğidir. Bu örnek ismi verilen kitabın ayrı bir bölümünde incelenmiştir. Kitabın yazarları tarafından, çözümün varlığını elde etmek için "monotonicity method" ve çözümün tekliğini elde etmek için "Ladyzhenskaya's argument" kullanılmıştır. Bahsedilen bu sonuçları elde etmek için yarı-grup formülasyonu kullanılmamış; fakat, kitapta problemin yarı-grup formülasyonu için bir bölüm ayrılmıştır.

Lineer olmayan bir denklemin çözümünün patlaması sonucunu elde etmek için genel düşünce çözümün enerji diferansiyel eşitsizliğinin kurulmasıdır. Örneğin; lineer olmayan bir denklemin çözümünün patlamasından söz etmek için genellikle "cancavity method" olarak adlandırılan bir metod uygulanır. Bu metodu uygulamak için $t \geq 0$ ve $H(t)$ pozitif, iki kere diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $H''H - (\beta+1)(H')^2 \geq 0$ şeklinde diferansiyel bir eşitsizlik kurma ihtiyacı duyulur. Bütün bunlardan hareketle aşağıda ifade edilen teoremi kanıtlamak için benzer şekilde ilerki satırlarda diferansiyel bir eşitsizlik kurulacaktır. (6.54 deki gibi)

Yukarıdaki (6.1)-(6.3) problemi için kanıtlanacak teoremle ilgili olarak daha önceki çalışmalardan verilen koşullar altında, çözümün tekliği ile ilgili aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 6.1.

$n = 3$, $u_0 \in H^4(\Omega)$, $u_1 \in H^2(\Omega)$ ve $g \in C^3(R)$ olsun. (6.1)-(6.3) başlangıç-sınır değer problemi $[0, T_0)$ maksimum bir zaman aralığında

$u \in C\left(\left[0,T_0\right);H^4\left(\Omega\right)\right)\cap C^1\left(\left[0,T_0\right);H^2\left(\Omega\right)\right)\cap H^1\left(\left(0,T_0\right);H^4\left(\Omega\right)\right)\cap H^2\left(\left(0,T_0\right);L^2\left(\Omega\right)\right)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

Aşağıda verilen lemmadan çözümün patlamasını elde etmede yararlanılacaktır.

Lemma 6.1

$u_t = F\left(t,u\right)$, $v_t \geq F\left(t,v\right)$, $F \in C\left(\left[0,\infty\right)\times\left(-\infty,+\infty\right)\right)$ ve $u\left(t_0\right)=v\left(t_0\right), t_0 \geq 0$ olsun. Bu durumda $t \geq t_0$ için $v\left(t\right) \geq u\left(t\right)$ dir.

Teorem 6.2.

(1) $sg\left(s\right) \leq KG\left(s\right), G\left(s\right)=\int_0^s g\left(\tau\right)d\tau$ olmak üzere $G\left(s\right) \leq -\alpha\left|s\right|^{q+1}, K>2, \alpha>0, q>1$ sabitleri

(2) $k_2=1, u_0 \in H^2\left(\Omega\right), u_1 \in L^2\left(\Omega\right)$ ve

$$E\left(0\right)=\left\|u_1\right\|^2+k_1\left\|\nabla^2 u_0\right\|^2+2\int_\Omega G\left(\nabla^2 u_0\right)dx$$

$$\leq \frac{-4\left|\Omega\right|}{\left[\left\{\left(K-2\right)\alpha\right\}/\left(q+3\right)\right]^{2/(q-1)}\left(1-e^{-(q-1)/4}\right)^{4/(q-1)}}<0$$

$\left|\Omega\right|, \Omega$ 'nın ölçüsünü belirtmek üzere (1) ve (2) koşullarının gerçeklendiğini varsayalım. Bu durumda (6.1)-(6.3) probleminin $u\left(x,t\right)$ çözümü sonlu $\tilde{T}$ zamanında patlar. Yani $\|\ .\ \|$ $L^2\left(\Omega\right)$ uzayının normunu belirtmek üzere $t \to \tilde{T}^-$ iken $\left\|u\left(.,t\right)\right\|^2+\int_0^t\int_\Omega\left[\nabla^2 u\left(x,\tau\right)\right]^2 dxd\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left[\nabla^2 u\left(x,s\right)\right]^2 dxdsd\tau \to \infty$ olur.

İspat

$u\left(x,t\right)$, (6.1)-(6.3) probleminin herhangi bir çözümü olsun. (6.1) denklemi $2u_t$ ile çarpılıp, Ω üzerinde integre edilirse,

$$\int_{\Omega} 2u_t u_{tt} + \int_{\Omega} 2u_t k_1 \Delta^2 u + \int_{\Omega} 2u_t k_2 \Delta^2 u_t + \int_{\Omega} 2u_t \Delta g\left(\Delta u\right) = 0 \tag{6.4}$$

elde edilir. (6.4) denkleminin sol tarafındaki integralleri hesaplayalım. Buna göre ilk integral

$$\int_{\Omega} 2u_t u_{tt} dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt}\left|u_t\right|^2 dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx = \frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|^2 \tag{6.5}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer integraller ise kısmi integrasyon yardımıyla $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ ve $\nabla u\big|_{\partial\Omega} = 0$ ile aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. İlk olarak $\int_{\Omega} 2k_1 u_t \nabla^4 u dx$ terimi için

$$\int_{\Omega} 2k_1 u_t \nabla^4 u dx = 2k_1 \int_{\Omega} u_t \nabla^4 u dx = 2k_1 \left\{ u_t \nabla^3 u \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u dx \right\} = -2k_1 \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u dx$$

$$= -2k_1 \left\{ \nabla u_t \nabla^2 u \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla^2 u_t \nabla^2 u dx \right\} = 2k_1 \int_{\Omega} \nabla^2 u_t \nabla^2 u dx$$

$$= k_1 \int_{\Omega} \frac{d}{dt}\left|\nabla^2 u\right|^2 dx = k_1 \frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^2 dx = k_1 \frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u\right\|^2 \quad ,$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_{\Omega} 2k_1 u_t \nabla^4 u dx = k_1 \frac{d}{dt}\left\|\nabla^2 u\right\|^2 \tag{6.6}$$

şeklinde yazılır. $\int_{\Omega} 2k_2 u_t \nabla^4 u_t dx$ terimi için

$$\int_{\Omega} 2k_2 u_t \nabla^4 u_t dx = 2k_2 \int_{\Omega} u_t \nabla^4 u_t dx = 2k_2 \left\{ u_t \nabla^3 u_t \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3{}_t u dx \right\} = -2k_2 \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla^3 u_t dx$$

$$= -2k_2 \left\{ \nabla u_t \nabla^2 u_t \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla^2 u_t \nabla^2 u_t dx \right\} = 2k_2 \int_{\Omega} \nabla^2 u_t \nabla^2 u_t dx$$

$$= 2k_2 \int_\Omega \left|\nabla^2 u_t\right|^2 dx = 2k_2 \left\|\nabla^2 u_t\right\|^2$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_\Omega 2k_2 u_t \nabla^4 u_t dx = 2k_2 \left\|\nabla^2 u_t\right\|^2 \tag{6.7}$$

şeklinde yazılır. (6.4) denkleminin son terimi $\int_\Omega 2u_t \nabla^2 g\left(\nabla^2 u\right) dx$, $G(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau$ yardımıyla

$$\int_\Omega 2u_t \nabla^2 g\left(\nabla^2 u\right) dx = 2u_t \nabla g\left(\nabla^2 u\right)\Big|_{\partial\Omega} - 2\int_\Omega \nabla u_t \nabla g\left(\nabla^2 u\right) dx = -2\int_\Omega \nabla u_t \nabla g\left(\nabla^2 u\right) dx$$

$$= -2\left\{ \nabla u_t g\left(\nabla^2 u\right)\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla^2 u_t g\left(\nabla^2 u\right) \right\} = 2\int_\Omega \frac{d}{dt} \int_0^{\nabla^2 u} g(s)\, ds dx = 2\frac{d}{dt}\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right) dx$$

olarak elde edilir. Buradan da

$$\int_\Omega 2u_t \nabla^2 g\left(\nabla^2 u\right) dx = 2\frac{d}{dt}\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right) dx \tag{6.8}$$

şeklinde yazılır. (6.5), (6.6), (6.7) ve (6.8) de bulunanların (6.4) de yerine yazılmasıyla,

$$\frac{d}{dt}\left\{ \left\|u_t\right\|^2 + k_1 \left\|\nabla^2 u\right\|^2 + 2\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right) dx \right\} + 2k_2 \left\|\nabla^2 u_t\right\|^2 = 0 \tag{6.9}$$

elde edilir.

$$E(t) = \left\|u_t(.,t)\right\|^2 + k_1 \left\|\nabla^2 u(.,t)\right\|^2 + 2k_2 \int_0^t \left\|\nabla^2 u_\tau(.,\tau)\right\|^2 d\tau + 2\int_\Omega G\left(\nabla^2 u(x,t)\right) dx \tag{6.10}$$

olarak alınırsa (6.9) denklemi

$$\dot{E}(t)=0 \quad , \; t>0 \tag{6.11}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade de 0 ‘dan t ’ye integre edilirse,

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}E(\tau)\,d\tau = E(t)-E(0)=0$$

elde edilir ve teoremin 2. varsayımındaki $E(0)<0$ yardımıyla

$$E(t)=E(0)<0 \tag{6.12}$$

şeklinde yazılabilir. (6.12) nin sol tarafı (6.10) yardımıyla

$$\|u_t\|^2+k_1\left\|\nabla^2 u\right\|^2+2k_2\int_0^t\left\|\nabla^2 u_\tau\right\|^2 d\tau+2\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right)dx=E(0)$$

şeklinde yazılabilir ve daha sonra tüm terimler eşitliğin sağ tarafına geçirilirse

$$0=E(0)-\|u_t\|^2-k_1\left\|\nabla^2 u\right\|^2-2k_2\int_0^t\left\|\nabla^2 u_\tau\right\|^2 d\tau-2\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right)dx \tag{6.13}$$

olarak yazılabilir. (6.13) denkleminin her iki tarafına $K\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right)dx$ eklenirse,

$$\begin{aligned}K\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right)dx &= E(0)-\|u_t\|^2-k_1\left\|\nabla^2 u\right\|^2-2k_2\int_0^t\left\|\nabla^2 u_\tau\right\|^2 d\tau\\ &+(K-2)\int_\Omega G\left(\nabla^2 u\right)dx\end{aligned} \tag{6.14}$$

elde edilir.

$$M(t)=\|u\|^2+\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla^2u\right|^2dxd\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2u\right|^2dxdsd\tau \tag{6.15}$$

olarak alınır ve bu denklemin t'ye göre iki kere türevi alınırsa,

$$\dot{M}(t)=2\int_\Omega uu_tdx+\int_\Omega\left|\nabla^2u\right|^2dx+\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla^2u\right|^2dxd\tau \tag{6.16}$$

ve

$$\ddot{M}(t)=2\int_\Omega\left\{u_t^{\,2}+uu_{tt}+\nabla^2u\nabla^2u_t+\frac{1}{2}\left|\nabla^2u\right|^2\right\}dx \tag{6.17}$$

elde edilir. (6.17) $u_{tt}=-k_1\nabla^4u-k_2\nabla^4u_t-\nabla^2g\left(\nabla^2u\right)$ yardımıyla

$$\ddot{M}(t)=2\int_\Omega\left\{u_t^{\,2}-k_1u\nabla^4u-k_2u\nabla^4u_t-u\nabla^2g\left(\nabla^2u\right)+\nabla^2u\nabla^2u_t+\frac{1}{2}\left|\nabla^2u\right|^2\right\}dx \tag{6.18}$$

şeklinde yazılabilir. (6.18) in sağ tarafında bulunan integralin altındaki bazı terimleri düzenleyelim. $-k_1u\nabla^4u$, $-k_2u\nabla^4u_t$ ve $-u\nabla^2g\left(\nabla^2u\right)$ terimlerine Ω üzerinde kısmi integrasyon uygulanırsa $u\big|_{\partial\Omega}=0$ ve $\nabla u\big|_{\partial\Omega}=0$ ile, ilk olarak $-k_1u\nabla^4u$ terimi için

$$-k_1\int_\Omega u\nabla^4udx=-k_1\left\{u\nabla^3u\Big|_{\partial\Omega}-\int_\Omega\nabla u\nabla^3udx\right\}$$

$$=k_1\left\{\nabla u\nabla^2u\Big|_{\partial\Omega}-\int_\Omega\nabla^2u\nabla^2udx\right\}=-k_1\int_\Omega\left|\nabla^2u\right|^2dx$$

elde edilir. Buradan da

$$-k_1\int_\Omega u\nabla^4udx=-k_1\int_\Omega\left|\nabla^2u\right|^2dx \tag{6.19}$$

şeklinde yazılır. $-k_2 u\nabla^4 u_t$ terimi için

$$-k_2 \int_\Omega u\nabla^4 u_t dx = -k_2 \left\{ u\nabla^3 u_t \Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla u \nabla^3 u_t dx \right\}$$
$$= k_2 \left\{ \nabla u \nabla^2 u_t \Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla^2 u \nabla^2 u_t dx \right\} = -k_2 \int_\Omega \nabla^2 u \nabla^2 u_t dx$$

elde edilir. Buradan da

$$-k_2 \int_\Omega u\nabla^4 u_t dx = -k_2 \int_\Omega \nabla^2 u \nabla^2 u_t dx \tag{6.20}$$

şeklinde yazılır. $-u\nabla^2 g\left(\nabla^2 u\right)$ terimi için

$$-\int_\Omega u\nabla^2 g\left(\nabla^2 u\right) dx = -u\nabla g\left(\nabla^2 u\right)\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \nabla u \nabla g\left(\nabla^2 u\right) dx$$
$$= \nabla u g\left(\nabla^2 u\right)\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla^2 u g\left(\nabla^2 u\right) dx = -\int_\Omega \nabla^2 u g\left(\nabla^2 u\right) dx$$

elde edilir. Buradan da

$$-\int_\Omega u\nabla^2 g\left(\nabla^2 u\right) dx = -\int_\Omega \nabla^2 u g\left(\nabla^2 u\right) dx \tag{6.21}$$

şeklinde yazılır. (6.19), (6.20), (6.21) de bulunanların (6.18) yerine yazılmasıyla

$$\ddot{M}(t) = 2\int_\Omega \left\{ u_t^{\,2} - k_1 \left|\nabla^2 u\right|^2 - k_2 \nabla^2 u \nabla^2 u_t - \nabla^2 u g\left(\nabla^2 u\right) + \nabla u^2 \nabla^2 u_t + \frac{1}{2}\left|\nabla^2 u\right|^2 \right\} dx \tag{6.22}$$

elde edilir. $sg(s) \le KG(s)$ ve $k_2 = 1$ yardımıyla

$$\ddot{M}(t) \geq 2\int_{\Omega}\left\{u_t^2(x,t) - k_1\left|\nabla^2 u\right|^2 - KG\left(\nabla^2 u\right) + \frac{1}{2}\left|\nabla^2 u\right|^2\right\}dx \tag{6.23}$$

elde edilir ve bu eşitsizlik (6.14) yardımıyla

$$\ddot{M}(t) \geq -2E(0) + 2\int_{\Omega}\left\{u_t^2 - k_1\left|\nabla^2 u\right|^2 + u_t^2 + 2\int_0^t\left|\nabla^2 u_\tau\right|^2 d\tau + k_1\left|\nabla^2 u\right|^2 - (K-2)G\left(\nabla^2 u\right) + \frac{1}{2}\left|\nabla^2 u\right|^2\right\}dx \tag{6.24}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\ddot{M}(t) \geq -2E(0) - 2(K-2)\int_{\Omega}G\left(\nabla^2 u\right)dx + \int_{\Omega}\left\{4u_t^2 + \left|\nabla^2 u\right|^2\right\}dx + 4\int_0^t\left\|\nabla^2 u_\tau\right\|^2 d\tau \tag{6.25}$$

elde edilir. $4\int_0^t\left\|\nabla^2 u_\tau\right\|^2 d\tau \geq 0$ olduğu için bu terimi attığımızda daha küçük bir ifade elde edileceğinden,

$$\ddot{M}(t) \geq -2E(0) - 2(K-2)\int_{\Omega}G\left(\nabla^2 u\right)dx + \int_{\Omega}\left\{4u_t^2 + \left|\nabla^2 u\right|^2\right\}dx \tag{6.26}$$

olur. $\alpha > 0, q > 1$ olmak üzere $G(s) \leq -\alpha|s|^{q+1}$ eşitsizliği yardımıyla,

$$\ddot{M}(t) \geq -2E(0) + 2(K-2)\alpha\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dx + 4\left\|u_t\right\|^2 + \left\|\nabla^2 u\right\|^2 \tag{6.27}$$

şeklinde yazılabilir. $4\left\|u_t\right\|^2, \left\|\nabla^2 u\right\|^2 \geq 0$ olduğundan bu terimler (6.27) nin sağ tarafından atıldığında ifadenin sağ tarafı daha da küçüleceğinden

$$\ddot{M}(t) \geq -2E(0) + 2(K-2)\alpha \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx \tag{6.28}$$

olarak elde edilir. (6.28) 0'dan t'ye iki kez integre edilirse

$$\dot{M}(t) \geq -2E(0)t + 2(K-2)\alpha \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx d\tau + \dot{M}(0) \tag{6.29}$$

$$M(t) \geq -E(0)t^2 + 2(K-2)\alpha \int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx ds d\tau + \dot{M}(0)t + M(0) \tag{6.30}$$

elde edilir. (6.27), (6.29) ve (6.30) eşitsizliklerinin toplanmasıyla

$$\ddot{M}(t) + \dot{M}(t) + M(t) \geq 4\|u_t\|^2 + \|\nabla^2 u\|^2 + 2(K-2)\alpha \left\{ \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx d\tau \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx ds d\tau \right\} - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right) + (t+1)\dot{M}(0) + M(0) \tag{6.31}$$

elde edilir. (6.31) in sol tarafı (6.16) yardımıyla,

$$\ddot{M}(t) + 2\int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^2 dx d\tau + M(t) \geq 4\|u_t\|^2 + \|\nabla^2 u\|^2$$

$$+2(K-2)\alpha \left\{ \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx d\tau + \int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx ds d\tau \right\}$$

$$-2E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right) + (t+1)\dot{M}(0) + M(0)$$

ve

$$\ddot{M}(t) + 2\int_{\Omega} u u_t dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^2 dx d\tau + M(t) \geq 4\|u_t\|^2 + 2(K-2)\alpha \left\{ \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx d\tau + \int_0^t \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^{q+1} dx ds d\tau \right\} - 2E(0)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$$

$$+(t+1)\dot{M}(0)+M(0) \tag{6.32}$$

olacak şekilde yazılabilir. (6.32) eşitsizliğinin sol tarafındaki $2\int_{\Omega} uu_t dx$ terimi Cauchy eşitsizliği yardımıyla

$$\|u\|^2+\|u_t\|^2 \geq 2\int_{\Omega} uu_t dx$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizlik (6.32) nin sol tarafına uygulanırsa,

$$\ddot{M}(t)+M(t)+\|u\|^2+\|u_t\|^2+\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^2 dxd\tau \geq 4\|u_t\|^2+2(K-2)\alpha\left\{\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxd\tau+\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxdsd\tau\right\}-2E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)$$
$$+(t+1)\dot{M}(0)+M(0) \tag{6.33}$$

elde edilir. $\|u_t\|^2$ eşitsizliğin sağ tarafına geçirilir ve eşitsizliğin sol tarafına $\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^2 dxdsd\tau$ eklenirse, eşitsizliğin sol tarafında (6.15) yardımıyla $M(t)$ elde edilir. (6.33) eşitsizliğinin sol tarafına negatif olmayan bir terim olan $\ddot{M}(t)$ eklenirse,

$$\ddot{M}(t)+M(t)+\|u\|^2+\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^2 dxd\tau+\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^2 dxdsd\tau+\ddot{M}(t)\geq 3\|u_t\|^2$$
$$+2(K-2)\alpha\left\{\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx+\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxd\tau+\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxdsd\tau\right\}$$
$$-2E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+(t+1)\dot{M}(0)+M(0) \tag{6.34}$$

olur. $3\left\|u_t\right\|^2 \geq 0$ terimi eşitsizliğin sağ tarafından atılırsa

$$2\ddot{M}(t)+2M(t)\geq 2(K-2)\alpha\left\{\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx+\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxd\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxdsd\tau\right\}$$

$$-2E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+(t+1)\dot{M}(0)+M(0) \tag{6.35}$$

elde edilir. Buradan da

$$\ddot{M}(t)+M(t)\geq (K-2)\alpha\left\{\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx+\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxd\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxdsd\tau\right\}$$

$$-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0)+\frac{1}{2}M(0) \tag{6.36}$$

olarak yazılabilir. (6.36) denkleminin sağ tarafındaki $\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx$, $\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxd\tau$ ve $\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dxdsd\tau$ integrallerine Hölder eşitsizliği uygulanırsa, sırasıyla $\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx$ integrali için

$$\left\|\nabla^2 u\right\|^{q+1}=\left(\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^2dx\right)^{\frac{q+1}{2}}\leq\left\{\left(\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{2.\frac{q+1}{2}}dx\right)^{\frac{2}{q+1}}\left(\int_\Omega 1^{\frac{q+1}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{q+1}}\right\}^{\frac{q+1}{2}}=\left(\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx\right)\left|\Omega\right|^{\frac{q-1}{2}}$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1}dx\geq\left|\Omega\right|^{\frac{1-q}{2}}\left\|\nabla^2 u\right\|^{q+1} \tag{6.37}$$

şeklinde yazılabilir. $\left\|\nabla^2 u\right\|^{q+1}$ terimi için Poincare eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|\nabla^2 u\right\|^{q+1} \geq \xi(\Omega)\left\|u\right\|^{q+1}$$

yazılabilir ve $\xi(\Omega)$ bölgeye bağlı bir sabit olmak üzere $\xi(\Omega) \geq 1$ olacak şekilde seçilirse (6.37) eşitsizliği

$$\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dx \geq \left|\Omega\right|^{\frac{1-q}{2}} \xi(\Omega)\left\|u\right\|^{q+1}$$

olduğundan

$$\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dx \geq \left|\Omega\right|^{\frac{1-q}{2}} \left\|u\right\|^{q+1} \tag{6.38}$$

şeklinde yazılabilir. $\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxd\tau$ integrali Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\left(\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^2 dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} \leq \left\{\left(\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{2.\frac{q+1}{2}} dxd\tau\right)^{\frac{2}{q+1}}\left(\int_0^t\int_{\Omega} 1^{\frac{q+1}{q-1}} dxd\tau\right)^{\frac{q-1}{q+1}}\right\}^{\frac{q+1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxd\tau\right)\left(\int_0^t\left|\Omega\right|d\tau\right)^{\frac{q-1}{2}} = \left(\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxd\tau\right)\left(\left|\Omega\right|t\right)^{\frac{q-1}{2}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\left(\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxd\tau\right) \geq \left(\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^2 dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} \left(\left|\Omega\right|t\right)^{\frac{1-q}{2}} \tag{6.39}$$

şeklinde yazılabilir. $\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxdsd\tau$ integrali Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^2 dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} \leq \left\{\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{2.\frac{q+1}{2}} dxdsd\tau\right)^{\frac{2}{q+1}}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega 1^{\frac{q+1}{q-1}} dxdsd\tau\right)^{\frac{q-1}{q+1}}\right\}^{\frac{q+1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxdsd\tau\right)\left(\int_0^t\int_0^\tau|\Omega|d\tau dt\right)^{\frac{q-1}{2}}=\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxdsd\tau\right)\left(\int_0^t|\Omega|\tau d\tau\right)^{\frac{q-1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxdsd\tau\right)\left(|\Omega|\frac{t^2}{2}d\tau\right)^{\frac{q-1}{2}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^{q+1} dxdsd\tau\right)\geq\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^2 dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}\left(|\Omega|\frac{t^2}{2}d\tau\right)^{\frac{1-q}{2}} \qquad (6.40)$$

şeklinde yazılabilir. (6.38), (6.39),(6.40) da Hölder eşitsizliği yardımıyla bulunanlar (6.36) da yerine yazılırsa

$$\ddot{M}(t)+M(t)\geq(K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\left\{\left(\int_\Omega|u|^2 dx\right)^{\frac{q+1}{2}}+t^{\frac{1-q}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^2 dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}\right.$$

$$\left.+t^{1-q}2^{\frac{q-1}{2}}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla^2 u\right|^2 dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}\right\}-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0)$$

$$+\frac{1}{2}M(0) \qquad (6.41)$$

elde edilir. $t\geq 1$ olarak seçilirse $q>1$ olduğundan $1\geq\frac{1}{t^{(q-1)/2}}>\frac{1}{t^{q-1}}>0$ dir. Bu durumda (6.41) in sağ tarafında parantez içinde bulunan ifade için

$$\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}} + t^{\frac{1-q}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} + t^{1-q}2^{\frac{q-1}{2}}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}$$

$$\geq \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}} + t^{\frac{1-q}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} + t^{1-q}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}$$

$$\geq \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}} + t^{1-q}\left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} + t^{1-q}\left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}$$

$$\geq t^{1-q}\left\{\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}} + \left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}} + \left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}\right\}$$

elde edilir ve (6.41) de yerine yazılırsa,

$$\ddot{M}(t) + M(t) \geq (K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}} t^{1-q}\left\{\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}} + \left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxdsd\tau\right)^{\frac{q+1}{2}}\right\} - E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) + \frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0) + \frac{1}{2}M(0) \quad (6.42)$$

elde edilir. $a,b,c>0,\ m>1$ olmak üzere $(a+b+c)^m \leq 2^{2m-2}\left(a^m+b^m+c^m\right)$ eşitsizliği yardımıyla

$m = \dfrac{q+1}{2}$, a$=\int_\Omega |u|^2\,dx$, $b = \int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxd\tau$, $c = \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxdsd\tau$ olarak alınır ve (6.42) ye uygulanırsa,

$$\ddot{M}(t) + M(t) \geq (K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}} t^{1-q}2^{1-q}\left\{\int_\Omega |u|^2\,dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxd\tau\right.$$

$$\left. + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla^2 u|^2\,dxdsd\tau\right\}^{\frac{q+1}{2}} - E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) + \frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0) + \frac{1}{2}M(0) \quad (6.43)$$

elde edilir.

(6.15) yardımıyla

$$\ddot{M}(t)+M(t)\geq(K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}t^{1-q}2^{1-q}M^{\frac{q+1}{2}}(t)-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0)$$
$$+\frac{1}{2}M(0) \tag{6.44}$$

elde edilir. (6.29) ve (6.30) dan $t\to+\infty$ iken $\dot{M}(t)\to+\infty$ ve $\mathrm{M}(t)\to+\infty$ olduğu görülür. Bu yüzden $M(t)>0$ ve $\dot{M}(t)>0$ olacak şekilde bir $t_0\geq1$ vardır. Burada $t\geq t_0$ dır. (6.44) ün her iki tarafını $2\dot{M}(t)$ ile çarpılırsa,

$$2\dot{M}(t)\ddot{M}(t)+2\dot{M}(t)M(t)\geq(K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}t^{1-q}2^{1-q}2\dot{M}(t)M^{\frac{q+1}{2}}(t)$$
$$+2\dot{M}(t)\left[-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0)+\frac{1}{2}M(0)\right] \tag{6.45}$$

elde edilir. (6.29) yardımıyla

$$\dot{M}(t)\geq-2E(0)t+2(K-2)\alpha\int_0^t\int_\Omega|\nabla^2u|^{q+1}\,dxd\tau+\dot{M}(0)\geq-2E(0)t+\dot{M}(0)$$

elde edilir ve bu eşitsizlik (6.45) e uygulanırsa

$$2\dot{M}(t)\ddot{M}(t)+2\dot{M}(t)M(t)\geq(K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}t^{1-q}2^{1-q}2\dot{M}(t)M^{\frac{q+1}{2}}(t)$$
$$+\left[-4E(0)t+2\dot{M}(0)\right]\left[-E(0)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0)+\frac{1}{2}M(0)\right] \tag{6.46}$$

elde edilir. (6.46) eşitsizliğinin sol ve sağ tarafındaki ifadeler düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right]\geq\frac{(K-2)\alpha|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}t^{1-q}2^{1-q}2\frac{d}{dt}M^{\frac{q+3}{2}}(t)}{\frac{q+3}{2}}$$

$$+\left[-4E(0)t+2\dot{M}(0)\right]\left[-E(0)\left(\frac{t^{2}}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0)+\frac{1}{2}M(0)\right] \qquad (6.47)$$

elde edilir.

$$C_{1}=\frac{2(K-2)\alpha}{2^{q-2}(q+3)|\Omega|^{\frac{q-1}{2}}} \quad \text{ve}$$

$$\mathrm{H}(t)=\left[-4E(0)t+2\dot{M}(0)\right]\left[-E(0)\left(\frac{t^{2}}{2}+t+1\right)+\frac{1}{2}(t+1)\dot{M}(0)+\frac{1}{2}M(0)\right]$$

şeklinde ifade edilirse, (6.47) denklemi

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right]\geq C_{1}t^{1-q}\frac{d}{dt}M^{\frac{q+3}{2}}(t)+H(t) \qquad t\geq t_{0} \qquad (6.48)$$

olarak yazılabilir. (6.48) denkleminin her iki tarafı t^{q-1} ile çarpılırsa,

$$t^{q-1}\frac{d}{dt}\left[\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right]\geq C_{1}\frac{d}{dt}M^{\frac{q+3}{2}}(t)+t^{q-1}H(t) \qquad (6.49)$$

elde edilir ve eşitsizliğin sol tarafı

$$\frac{d}{dt}\left[t^{q-1}\left(\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right)\right]\geq t^{q-1}\frac{d}{dt}\left[\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right] \quad \text{yardımıyla}$$

$$\frac{d}{dt}\left[t^{q-1}\left(\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right)\right]\geq C_{1}\frac{d}{dt}M^{\frac{q+3}{2}}(t)+t^{q-1}H(t) \qquad t\geq t_{0} \qquad (6.50)$$

şeklinde yazılabilir. (6.50) eşitsizliğinin her iki tarafı t_0 'den t 'ye integre edilirse,

$$t^{q-1}\left(\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right)-C_1 M^{\frac{q+3}{2}}(t)\geq\int_{t_0}^{t}\tau^{q-1}H(\tau)d\tau+t_0^{\,q-1}\left(\dot{M}^{2}(t_0)+M^{2}(t_0)\right)$$
$$-C_1 M^{\frac{q+3}{2}}(t_0) \tag{6.51}$$

elde edilir. $t\to+\infty$ ' a giderken (6.51) eşitsizliğinin sağ tarafı $+\infty$ 'a yaklaştığından $t\geq t_1$ olmak üzere (6.51) in sağ tarafını sıfır veya sıfırdan büyük yapan bir $t_1\geq t_0$ vardır. O halde (6.51)

$$t^{q-1}\left(\dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)\right)\geq C_1 M^{\frac{q+3}{2}}(t),\qquad t\geq t_1 \tag{6.52}$$

şeklinde yazılabilir. $M(t)\geq 0$ ve $\dot{M}(t)\geq 0$ olduklarından

$$\left(\dot{M}(t)+\mathrm{M}(t)\right)^{2}\geq \dot{M}^{2}(t)+M^{2}(t)$$

olarak yazılabilir. Buradan da (6.52) denklemi

$$t^{q-1}\left(\dot{M}(t)+\mathrm{M}(t)\right)^{2}\geq C_1 M^{\frac{q+3}{2}}(t),\qquad t\geq t_1 \tag{6.53}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitsizliğin sol tarafındaki t^{q-1} terimini sağa geçirilir ve her iki tarafın karekökünü alınırsa, $C_2=\sqrt{C_1}$ olmak üzere

$$\dot{M}(t)+\mathrm{M}(t)\geq C_2 t^{\frac{1-q}{2}} M^{\frac{q+3}{4}}(t),\qquad t\geq t_1 \tag{6.54}$$

elde edilir.

$$\dot{W}(t)+W(t)=C_2 t^{\frac{1-q}{2}} W^{\frac{q+3}{4}}(t), \qquad t \geq t_1, \\ W(t_1)=M(t_1) \tag{6.55}$$

Bernoulli başlangıç-değer probleminin çözümü için,

$\dot{W}(t)+W(t)=C_2 t^{\frac{1-q}{2}} W^{\frac{q+3}{4}}(t)$ denkleminin her iki tarafı $W^{\frac{q+3}{4}}(t)$ terimi ile bölünürse,

$$W^{-\frac{q+3}{4}}(t)\dot{W}(t)+W^{\frac{1-q}{4}}(t)=C_2 t^{\frac{1-q}{2}} \tag{6.56}$$

olur. $T(t)=W^{\frac{1-q}{4}}(t)$ şeklinde ifade edilirse $\dot{T}(t)=\frac{1-q}{4}W^{-\frac{q+3}{4}}(t)\dot{W}(t)$ olacağından (6.56) denklemi

$$\frac{4}{1-q}\dot{T}(t)+T(t)=C_2 t^{\frac{1-q}{2}}$$

olarak elde edilebilir ve buradan da

$$\dot{T}(t)+\frac{1-q}{4}T(t)=\frac{1-q}{4}C_2 t^{\frac{1-q}{2}} \tag{6.57}$$

şeklinde yazılabilir. (6.57) nin her iki tarafı $e^{\frac{1-q}{4}t}$ ile çarpılır ve bulunan ifadenin sol tarafı $e^{\frac{1-q}{4}t}\dot{T}(t)+\frac{1-q}{4}e^{\frac{1-q}{4}t}T(t)=\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1-q}{4}t}T(t)\right]$ yardımıyla düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1-q}{4}t}T(t)\right]=\frac{1-q}{4}C_2 e^{\frac{1-q}{4}t}t^{\frac{1-q}{2}} \tag{6.58}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $T(t)=W^{\frac{1-q}{4}}(t)$ yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1-q}{4}t}W^{\frac{1-q}{4}}(t)\right]=\frac{1-q}{4}C_2e^{\frac{1-q}{4}t}t^{\frac{1-q}{2}} \tag{6.59}$$

elde edilir. Başlangıç koşulu yardımıyla, $t \geq t_1$ olmak üzere (6.59) t_1'den t 'ye integre edilirse

$$e^{\frac{1-q}{4}t}W^{\frac{1-q}{4}}(t)-e^{\frac{1-q}{4}t_1}M^{\frac{1-q}{4}}(t_1)=\int_{t_1}^{t}\frac{1-q}{4}e^{\frac{1-q}{4}\tau}C_2\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau,$$

$$e^{\frac{1-q}{4}t}W^{\frac{1-q}{4}}(t)=e^{\frac{1-q}{4}t_1}M^{\frac{1-q}{4}}(t_1)+\int_{t_1}^{t}\frac{1-q}{4}e^{\frac{1-q}{4}\tau}C_2\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau,$$

$$W^{\frac{1-q}{4}}(t)=e^{\frac{1-q}{4}(t_1-t)}M^{\frac{1-q}{4}}(t_1)+e^{-\frac{1-q}{4}t}\int_{t_1}^{t}\frac{1-q}{4}e^{\frac{1-q}{4}\tau}C_2\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau,$$

$$W(t)=\left[e^{\frac{1-q}{4}(t_1-t)}M^{\frac{1-q}{4}}(t_1)+e^{-\frac{1-q}{4}t}\int_{t_1}^{t}\frac{1-q}{4}e^{\frac{1-q}{4}\tau}C_2\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau\right]^{\frac{4}{1-q}},$$

$$W(t)=e^{(t_1-t)}M(t_1)\left[1+\frac{C_2(1-q)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)e^{-\frac{1-q}{4}t_1}\int_{t_1}^{t}e^{\frac{1-q}{4}\tau}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau\right]^{\frac{4}{1-q}},$$

elde edilir ve buradan da

$$W(t)=e^{(t_1-t)}M(t_1)\left[1-\frac{C_2(q-1)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)\int_{t_1}^{t}e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau\right]^{\frac{4}{1-q}},\qquad t\geq t_1 \tag{6.60}$$

olarak yazılabilir. (6.60) eşitliğinin sağ tarafında parantez içinde bulunan ifade

$$Q(t)=\frac{C_2(q-1)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)\int_{t_1}^{t}e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau \tag{6.61}$$

$$Z(t)=1-Q(t) \tag{6.62}$$

şeklinde ifade edilirse, buradan $Z\left(t_1\right)=1$ olduğunu kolayca görülebilir.

$Q(t)$ içindeki $\int_{t_1}^{t} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau$ integrali için

$$\int_{t_1}^{t} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau=\int_{t_1}^{t_1+1} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau+\int_{t_1+1}^{t} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau$$

olduğundan

$$\int_{t_1}^{t} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau\geq\int_{t_1}^{t_1+1} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau$$

elde edilebilir ve integral için ortalama değer teoreminden, $\int_{t_1}^{t_1+1} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau$ integralinde $f\left(t\right)=t^{\frac{1-q}{2}}$ alırsak,

$q>1$ ve $1\leq t_1\leq t\leq t_1+1$ için $\left(t_1+1\right)^{\frac{1-q}{2}}\leq f\left(\tau\right)\leq t_1^{\frac{1-q}{2}}$ olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_1+1} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau\geq\left(t_1+1\right)^{\frac{1-q}{2}}\int_{t_1}^{t_1+1} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}d\tau$$

elde edilir. Buradan da (6.61) eşitliği için

$$Q(t)\geq\frac{C_2\left(q-1\right)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}\left(t_1\right)\left(t_1+1\right)^{\frac{1-q}{2}}\int_{t_1}^{t_1+1} e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}d\tau=\frac{C_2\left(q-1\right)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}\left(t_1\right)\left(t_1+1\right)^{\frac{1-q}{2}}\frac{e^{\frac{1-q}{4}}-1}{\frac{1-q}{4}}$$

$$Q(t)\geq C_2M^{\frac{q-1}{4}}\left(t_1\right)\left(t_1+1\right)^{\frac{1-q}{2}}\left(1-e^{\frac{1-q}{4}}\right),\qquad t\geq t_1+1 \tag{6.63}$$

elde edilir. (6.30) yardımıyla

$M(t) \geq -E(0)t^2 + \dot{M}(0)t + M(0)$ olduğundan

$M^{\frac{q-1}{4}}(t)(t+1)^{\frac{1-q}{2}} \geq \left\{ \dfrac{-E(0)t^2 + \dot{M}(0)t + M(0)}{(t+1)^2} \right\}^{\frac{q-1}{4}}$ ve $t \to +\infty$ iken eşitsizliğin sağ tarafı $(-E(0))^{\frac{q-1}{4}}$ 'e gider. Yani t_1 yeterli olacak büyüklükte alınırsa,

$$Q(t) \geq C_2 (-E(0))^{\frac{q-1}{4}} \left(1 - e^{\frac{1-q}{4}}\right) \geq \frac{C_2}{2} (-E(0))^{\frac{q-1}{4}} \left(1 - e^{\frac{1-q}{4}}\right) \qquad (6.64)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $C_1 = \dfrac{2(K-2)\alpha}{2^{q-2}(q+3)|\Omega|^{\frac{q-1}{2}}}$ ve teorem 6.2.'nin 2. varsayımındaki $E(0) \leq \dfrac{-4|\Omega|}{\left[\{(K-2)\alpha\}/(q+3)\right]^{2/(q-1)} \left(1 - e^{-(q-1)/4}\right)^{4/(q-1)}}$ yerine yazılırsa,

$$Q(t) \geq \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(K-2)\alpha}{2^{q-2}(q+3)|\Omega|^{\frac{q-1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{4|\Omega|}{\left[\{(K-2)\alpha\}/(q+3)\right]^{2/(q-1)} \left(1 - e^{-(q-1)/4}\right)^{4/(q-1)}} \right\}^{\frac{q-1}{4}} \left(1 - e^{\frac{1-q}{4}}\right)$$

elde edilir ve buradan da

$$Q(t) \geq 1 \qquad t \geq t_1 + 1$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan da $Z(t) = 1 - Q(t) \leq 0 \qquad t \geq t_1 + 1$ elde edilir.

$Z(t)$'nin sürekliliği, $Z(t_1) = 1$ ve $t \geq t_1 + 1$ için $Z(t) \leq 0$ olması nedeniyle ve ara değer teoremi gereğince $t_1 < \tilde{T} \leq t_1 + 1$ arasında $Z(\tilde{T}) = 0$ olur. Bu yüzden $t \to \tilde{T}^-$ iken

$$W(t)=e^{(t_1-t)}M(t_1)\left[1-\frac{C_2(q-1)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)\int_{t_1}^{t}e^{\frac{1-q}{4}(\tau-t_1)}\tau^{\frac{1-q}{2}}d\tau\right]^{\frac{4}{1-q}}, \qquad t\geq t_1$$

eşitliğinden de görüleceği gibi $W(t)$ ‘nin ilk iki terimi sabit ve pozitif değerler alırken, parantez içindeki terim yani $Z(t)$ sıfıra yaklaşır. Ama $Z(t)$ ‘nin kuvveti negatif olduğu için, $W(t)\to+\infty$ olur. Lemma 6.1. ‘den $\dot{u}=\mathrm{W}(t), \dot{v}=\mathrm{M}(t)$ olarak alınırsa, $M(t)\geq W(t)$ $t\geq t_1$ olur ve $t\to\tilde{T}^{-}$ iken $M(t)\to+\infty$ olur. Böylece verilen koşullar altında (6.1)-(6.3) probleminin çözümü sonlu bir $\tilde{T}$ zamanında patlamış olur.

BÖLÜM 7.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada hiperbolik tipten kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışları farklı koşullardaki makaleler ele alınarak incelenmiştir. Her bir bölümde ele alınan problemlerde sırasıyla çözümlerin asimtotik davranışları, kararlılığı ve patlaması incelenmiştir.

Benzer şekilde eliptik ve parabolik tipten kısmi diferansiyel denklemler için de çalışmalar yapılabileceği gibi çözümlerin sürekli bağımlılığı da araştırmacıların ilgisini çekebilir.

KAYNAKLAR

[1] XU, Run-Zhang, ZHAO, Xi-Ren, SHEN, Ji-Hong, Asymptotic Behavior of Solution for fourth order Wave Equation with dispersive and dissipative terms, Applied Mathematics and Mechanics, pp. 259-262, 2008

[2] XU, Run-Zhang, LİU, Yacheng, Asymptotic Behavior of Solutions for initial- boundary value problems for strongly damped nonlinear Wave Equations, Nonlinear Analysis, pp. 2492-2495, 2008

[3] AASSILA, M. , GUESMIA, A. , Energy Decay for a Damped Nonlinear Hyperbolic Equation, Applied Mathematics Letters, pp. 49-52, 1999

[4] GUOWANG, Chen, YANPING, Wang, ZHANCAI, Zhao, Blow-Up of Solution of an Initial Boundary Value Problem for a Damped Nonlinear Hyperbolic Equation, Applied Mathematics Letters, pp. 491-497, 2004

[5] YADONG, Shang, Initial Boundary Value Problem of Equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f\left(u\right)$, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2000, 23(3):385-393 (in Chinese)

[6] YACHENG, Liu, XIAOYUAN, Li, Some Remarks on the Equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f\left(u\right)$, Journal of Natural Science of Heillongjiang University, 2004, 21(3):1-6 (in Chinese)

[7] WEBB, G.F., Existence and Asymptotic Behavior for a Strongly Damped Nonlinear Wave Equation, Canadian Journal of Mathematics 32, 1980, 634-643

[8] YACHENG, Liu, DACHENG, Liu, Initial Boundary Value Problem of Equation $u_{tt} - \alpha\Delta u_t - \Delta u = f\left(u\right)$, Journal of Huazhong University of Science and Technology 16(6), 1988, 169-173

[9] YADONG, Shang, Blow-Up of Solutions for two Classes of Strongly Damped Nonlinear Wave Equations Journal of Engineering Mathematics 17(2), 2000, 65-70

[10] BANKS, H.T., GILLIAM D.S., SHUBOV V.I., Global Solvability for Damped Abstract Nonlinear Hyperbolic Systems, Differential and Integral Equations 10(2), 1997, 309-332

[11] KOMORNIK, V., Exact Controllability and Stabilization, the Multiplier Method, Masson-John Wiley, Paris, 1994

[12] EVANS, Lawrence C., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Volume 19

[13] ADAMS, Robert A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York San Francisco London, 1975

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba AYDEMİR 2005 yılında Hacettepe Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği (Almanca) Bölümü'nden mezun oldu. 2003-2009 yılları arasında çeşitli eğitim kurumlarında Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Almanca ve İngilizce bilen Tuğba Aydemir, Şubat 2009 beri Yalova Üniversitesi Rektörlüğü'nde Eğitim-Öğretim Planlamacısı olarak görev yapmaktadır.