T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Işıl ARDA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR**

Mayıs 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Işıl ARDA

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 14/ 06/ 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Hazar

Doç. Dr. Cemalettin KUBAT	Doç. Dr. Elman HAZAR	Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı vererek beni yönlendiren ve çalışmalarım sırasında benden yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR'e en derin teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

L	: Lineer Operatör
L^*	: Adjoint Operatör
W	: Wronskian
$G(x,\xi)$	: Green Fonksiyonu
$J_v(x)$	: Birinci Tip Bessel Fonksiyonu
$Y_v(x)$	: İkinci Tip Bessel Fonksiyonu
$P_n(x)$	: Legendre Polinomu
$H_n(x)$	: Hermite Polinomu
$\Gamma(x)$	:Gama Fonksiyonu
D^n	: n yinci Basamaktan Türev Operatörü

ÖZET

Anahtar kelimeler: Başlangıç Değer Problemi, Green Fonksiyonu, Sınır Değer Problemi, Sturm-Liouville Problemi, Sturm-Liouville Özdeğerleri, Sturm-Liouville Özfonksiyonları, Bessel Diferansiyel Denklemi, Legendre Diferansiyel Denklemi, Hermite Diferansiyel Denklemi.

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde diferansiyel denklemlerin kullanım alanlarından bahsedilerek teze giriş yapılmıştır. Ayrıca Sınır Değer Problemleri ile ilgili yapılan ilk çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde tek noktalı Sınır Değer Problemleri üzerinde durularak çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir.

Dördüncü bölümde iki noktalı Sınır Değer Problemleri incelenerek Green fonksiyonu ve özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir.

Beşinci bölümde ise özel bir Sınır Değer Problemi olan Sturm-Liouville Problemi üzerinde durulmuştur. Özellikleri verilerek, özdeğerleri ile özfonksiyonları incelenmiştir. Bu problemin özel halleri olan Özel Fonksiyonlardan birkaçı üzerinde durulmuştur. Son olarak da elde edilen verilerle Sturm-Liouville Teoremleri ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde ise tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

STUDYING OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

SUMMARY

Key Words: Initial Value Problem, Green's Function, Boundary Value Problem, Sturm-Liouville Problem, Sturm-Liouville eigenvalue, Sturm-Liouville eigenfunction, Bessel Equation, Legendre Equation, Hermite Equation.

This thesis is consists of six chapters.

In the first chapter, it is mentioned about the using areas of differential equations and there is an introduction to the thesis. Furthermore, it is discussed about the first study of the Boundary Value Problem.

In the second chapter, main definitions and concepts used in the thesis are given.

In the third chapter, one-dimensional Boundary Value Problems are examined and investigated the uniqueness and existence of the solutions.

In the fourth chapter, two-dimensional Boundary Value Problems are inspected and some properties related with Green's functions are given.

In the fifth chapter, a special Boundary Value Problem called Sturm-Liouville problem are mentioned. By given the properties of this function, eigenvalue and eigenfunction are investigated. Some special functions which related with this problem are examined. Finally with these datas Sturm-Liouville theorems are proved.

Finally in the sixth chapter, the results are stated gained through the study of thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bilim ve tekniğin yasaları, matematik diline aktarıldığında, birtakım denklemler aracılığı ile ifade edilir. Cebir, geometri ve analiz statik problemlerin birçoğunun çözümü için yeterli olmaktadır. Buna karşılık, doğadaki olayları tasvir eden yasaların büyük bir çoğunluğu, bir veya daha fazla büyüklüğün, diğer bir takım büyüklüklere göre değişim hızlarını içerir. Bu değişim hızları matematik olarak türev işlemi ile ifade edilir. Problemler, türev yardımıyla katsayıları değişkenlere bağlı olan adi diferansiyel denklemler veya kısmi türevli denklemler şeklinde belirtilir. Bu tipteki denklemlerin özelliği, araştırma yapılan bölgede veya bölgenin sınır çizgisinin üzerinde katsayıların tekil (singüler) olmasıdır. Yani bölgenin bazı noktalarında katsayıların sıfır olması veya belirsizlik halinde bulunmasıdır. Böyle tipteki denklemlere dönüşen fiziksel problemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor olduğu gibi bazı durumlarda çözüme ulaşmakta mümkün değildir. Problemin zorluğu, denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde aranmasından kaynaklanmaktadır. Bu da denklemin tüm özel durumları için sonsuz serinin yakınsaklığının ispatlanması ve özdeğer fonksiyonlarının ortogonalliğinin gösterilmesidir. Ayrıca matematiksel fizik probleminin çözümünün kararlılığını ispatlamak ve korumak da gerekir.

Sınır Değer Problemleri, fiziksel birçok alanda problemlerin çözümü için kullanılmaktadır. Örneğin klasik mekanik problemleri, elektro manyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziği, termodinamik problemleri ve özellikle dalga denklemlerinde bu problemlere sıkça rastlanmaktadır.

Sınır Değer Problemlerinin en önemli sınıfı, Sturm-Liouville Problemleridir. Bu problemlerin analizinde, diferansiyel operatörün içerdiği özfonksiyonlar incelenir. Klasik Sturm-Liouville Problemi adını, Jacques Charles François Sturm (1803-1855) ve Joseph Liouville (1809-1882) isimli bilim adamlarının çalışmalarından almıştır.

Sınır Değer Problemlerine öncelikle uzun bir süre boyunca Laplace Denkleminin harmonik çözümlerini bulmak amacıyla Dirichlet Problemi olarak çalışılmıştır ve problemin çözümüne de Dirichlet prensibi adı verilmiştir.

Bu ve bunun gibi birçok problemin çözümünde kullanılabilen bu problemin önemi dikkate alınarak tezde, Sınır Değer Problemleri, çözümlerin bulunmasında yardımcı olarak kullanılan Green Fonksiyonu, özel bir Sınır Değer Problemi olan Sturm-Liouville Problemleri ve özellikleri incelenerek tek bir kaynakta toplanmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1.

$$L = a_p(x)\frac{d^p}{dx^p} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \tag{2.1}$$

operatörü ile birlikte; $\overline{I}$ da $a_p(x) \neq 0$; x_0, $\overline{I}$ da sabit bir nokta; $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ verilen sayılar ve $f(x)$, $\overline{I}$ da parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. $x \in I$ olmak üzere $Lu = f$ problemine

$$u(x_0) = \gamma_1, \ldots, u^{(p-1)}(x_0) = \gamma_p \tag{2.2}$$

koşulları altında, x_0 noktası başlangıç değerini belirtmek üzere *Cauchy problemi* veya *başlangıç değer problemi* denir. [1]

Tanım 2.2. I aralığında tanımlı, sürekli $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonları *lineer bağımlıdır* $\Leftrightarrow$ Hepsi aynı anda sıfır olmayan $c_1, \ldots, c_n$ sabitleri için

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) \equiv 0 \tag{2.3}$$

eşitliği vardır. Yani bu n fonksiyonun herhangi birisi diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilirse bu fonksiyonlar *lineer bağımlıdır* denir, (2.3) eşitliğinde $c_1 = \cdots = c_n = 0$ ise bu fonksiyonlar *lineer bağımsızdır* denir. [1]

Tanım 2.3. $f_1, \ldots, f_n$, $(n-1)$. mertebeye kadar sürekli türevlere sahip, x değişkenine bağlı fonksiyonlar olmak üzere bu fonksiyonların Wronskianı,

$$W\left(f_1,\ldots,f_n;x\right)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & \cdots & f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Özel olarak f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Wronskianı,

$$W\left(f_1,f_2;x\right)=f_1\left(x\right)f_2^{'}\left(x\right)-f_1^{'}\left(x\right)f_2\left(x\right) \tag{2.5}$$

şeklindedir. Eğer I aralığında $f_1,\ldots,f_n$ lineer bağımlı ise Wronskianları sıfırdır. [1]

Tanım 2.4. $u_1,\ldots,u_p$, $Lu=0$ homojen denkleminin çözümleri olmak üzere

$$W\left(u_1,\ldots,u_p;x\right)=Ce^{-m(x)},\ x\in I \tag{2.6}$$

şeklindedir. Burada C, sabit; $m\left(x\right)$ ise $m^{'}=a_{p-1}/a_p$ denkleminin bir özel çözümüdür. (2.6) ifadesine, Wronskian için *Abel formülü* adı verilir. $p=2$ ve L operatörü self adjoint ise $a_2^{'}=a_1$ dir. Buradan (2.6),

$$W\left(u_1,u_2;x\right)=\frac{C}{a_2\left(x\right)},\ x\in I \tag{2.7}$$

formuna dönüşür.

(2.6) ve (2.7) formüllerinin ikisinde de C sabiti, Wronskianda kullanılan $\{u_k\}$ çözümleri ile belirlenir. Farklı çözümler, farklı C sabitleri oluşturur. Özel olarak $u_1,\ldots,u_p$ lineer bağımlı ise $W=0$ dolayısıyla $C=0$ dır. [1]

Tanım 2.5. Süperpozisyon Prensibi

$u_1(x)$ fonksiyonu $\{f_1(x);\alpha_1,\beta_1\}$ başlangıç değer probleminin, $u_2(x)$ fonksiyonu ise $\{f_2(x);\alpha_2,\beta_2\}$ başlangıç değer probleminin çözümleri ise $Au_1(x)+Bu_2(x)$ fonksiyonu da $\{Af_1(x)+Bf_2(x);A\alpha_1+B\alpha_2,A\beta_1+B\beta_2\}$ başlangıç değer problemin çözümüdür. [1]

Tanım 2.6.

$$H(x-\xi)=\begin{cases}0, & \xi \geq x\\ 1, & \xi < x\end{cases}$$

şeklindeki fonksiyona Heaviside fonksiyonu denir. [1]

Tanım 2.7.

$$Lu=a_2(x)u''+a_1(x)u'+a_0(x)u=f(x),\ \ a<x<b \tag{2.8}$$

diferansiyel denklemi ele alınsın. Burada $i=0,1,2$ olmak üzere $a_i(x)$ katsayıları $a\leq x\leq b$ aralığında sürekli ve $a_2(x)\neq 0$ olup $f(x)$, $a<x<b$ aralığında parçalı süreklidir. $u(x)$,

$$\left.\begin{aligned}B_1u=\alpha_{11}u(a)+\alpha_{12}u'(a)+\beta_{11}u(b)+\beta_{12}u'(b)=\gamma_1\\ B_2u=\alpha_{21}u(a)+\alpha_{22}u'(a)+\beta_{21}u(b)+\beta_{22}u'(b)=\gamma_2\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

sınır şartlarını sağlayan çözüm; $(\alpha_{11},\alpha_{12},\beta_{11},\beta_{12})$ ve $(\alpha_{21},\alpha_{22},\beta_{21},\beta_{22})$ vektörleri lineer bağımsız olmak üzere (2.8) denklemine (2.9) sınır şartları ile birlikte bir *sınır değer problemi* denir.

$\beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ ise aralığın bitiş noktalarındaki

$$B_1 u = \alpha_{11} u(a) + \alpha_{12} u'(a) = \gamma_1$$
$$B_2 u = \beta_{21} u(b) + \beta_{22} u'(b) = \gamma_2$$

ayrışmış sınır şartları elde edilir.

$\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = 1$ ise

$$u(a) = \gamma_1,\ u'(a) = \gamma_2$$

başlangıç şartları elde edilir.

Süper pozisyon prensibi, (2.8)-(2.9) probleminin çözümlerinde kullanılırsa: u, $\{f;\gamma_1,\gamma_2\}$ sınır değer probleminin çözümü; U, $\{F;\tau_1,\tau_2\}$ sınır değer probleminin çözümü olmak üzere $Au+BU$, $\{Af+BF;A\gamma_1+B\tau_1,A\gamma_2+B\tau_2\}$ sınır değer probleminin çözümüdür. u ve v, $\{f;\gamma_1,\gamma_2\}$ sınır değer probleminin çözümleri ise $u-v$, homojen sınır değer problemini sağlar. Homojen sınır değer probleminin sadece $u=0$ aşikâr çözümü varsa, $\{f;\gamma_1,\gamma_2\}$ probleminin ancak bir çözümü vardır; aşikâr olmayan bir çözümü varsa, , $\{f;\gamma_1,\gamma_2\}$ probleminin ya çözümü yoktur ya da birden fazla çözümü vardır. [1]

Tanım 2.8. $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ M kümesi üzerinde olmak üzere herhangi bir α ve β sabitleri için $\alpha u_1(x)+\beta u_2(x)$ de M kümesi üzerinde ise M bir *lineer manifolddur* denir. [1]

Tanım 2.9. $L = a_p(x)D^p + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$ lineer operatörü $a \le x \le b$ aralığında tanımlı olmak üzere

$$Lu = a_p u^{(p)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f, \;\; a < x < b \tag{2.10}$$

probleminine

$$\begin{aligned} B_1 u &= \alpha_{11} u(a) + \cdots + \alpha_{1p} u^{(p-1)}(a) + \beta_{11} u(b) + \cdots + \beta_{1p} u^{(p-1)}(b) = \gamma_1, \\ &\vdots \\ B_p u &= \alpha_{p1} u(a) + \cdots + \alpha_{pp} u^{(p-1)}(a) + \beta_{p1} u(b) + \cdots + \beta_{pp} u^{(p-1)}(b) = \gamma_p \end{aligned} \tag{2.11}$$

sınır şartları ile beraber *p.mertebeden bir sınır değer problemi* denir. Burada $i = 1, \ldots, p$ olmak üzere $a_i(x) \in C^p$ ve $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p}, \beta_{11}, \ldots, \beta_{1p}), \ldots,$ $(\alpha_{p1}, \ldots, \alpha_{pp}, \beta_{p1}, \ldots, \beta_{pp})$ lineer bağımsızdır. L diferansiyel operatörüdür ve $B_1, \ldots, B_p$ sabittir. $f = 0$, $\gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0$ durumunda probleme *homojen problem* denir. Homojen problem sadece aşikar çözüme sahipse, (2.10)-(2.11) probleminin en çok bir çözümü vardır; aşikar olmayan bir çözüme sahipse, bu durumda problemin ya çözümü yoktur ya da birden fazla çözümü vardır. [1]

Tanım 2.10. p boyutlu R_p uzayının iki vektörü w ve z olmak üzere

$$\langle w, z \rangle = \sum_{i=1}^{p} w_i z_i$$

reel sayısına w ve z vektörlerinin *iç çarpımları* denir. $\langle w, z \rangle = 0$ ise iki vektör ortogonaldir. Ayrıca $\langle w, w \rangle = w_1^2 + \cdots + w_p^2 = \|w\|^2$ dir. Tüm z vektörleri için $\langle w, z \rangle = 0$ ise w sıfır vektörüdür. [1]

Tanım 2.11. M, $R_p\,(k \le p)$ de k boyutlu lineer bir manifold olmak üzere buradaki M ye dik olan vektörlerin kümesine M nin *ortogonal tümleyeni* denir ve $M^{\perp}$ ile gösterilir. [1]

Tanım 2.12. R_p de $v \in M$, $w \in M^{\perp}$ ve $\langle v,w\rangle = 0$ olmak üzere

$$u = v + w \Rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \text{ (Pisagor Teoremi)}$$

dir. v vektörü M de u vektörünün bir izdüşümüdür. [1]

Tanım 2.13. λ bir reel (veya karmaşık) parametre olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0, \qquad a \le x \le b \tag{2.12}$$

şeklindeki diferansiyel denklem ele alınsın. L diferansiyel operatörü

$$L[u] = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u \tag{2.13a}$$

olarak tanımlanırsa, (2.12) denklemi bu operatör yardımıyla

$$L[u] - \lambda\rho(x)u = 0 \tag{2.13b}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada λ sayısına *spektral parametre*, $\rho(x)$ fonksiyonuna *potansiyel fonksiyon* denir. [1]

Tanım 2.14. (2.13a,b) denklemlerinin

$$\left.\begin{aligned} B_1u &= \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0 \\ B_2u &= \beta_{21}u(b) + \beta_{22}u'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına *Sturm-Liouville sınır değer problemi* denir. Burada α_{11}, α_{12}, β_{21}, β_{22} reel sabitler olup $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 \neq 0$ ve $\beta_{21}^2 + \beta_{22}^2 \neq 0$ dır. Özel olarak,

a) $\alpha_{12} = \beta_{22} = 0$ için (2.14) denklemleri

$$u(a) = u(b) = 0$$

ile tanımlı Dirichlet koşuluna,

b) $\alpha_{11} = \beta_{21} = 0$ için

$$u^{'}(a) = u^{'}(b) = 0$$

ile tanımlı Neumann sınır koşuluna indirgenmektedir. [8]

Tanım 2.15. (2.12) ifadesi, λ spektral parametresine bağlı bir denklem ailesidir. $u(x) = 0$ fonksiyonu λ parametresinin her bir değerinde denklemi ve verilmiş sınır şartlarını sağladığından aşikar bir çözümdür. Eğer bu homojen denklemin, λ parametresinin herhangi bir değerinde (2.14) homojen sınır koşullarını sağlayan aşikâr çözümden başka bir çözümü varsa, λ parametresinin bu değerine verilmiş sınır değer probleminin *özdeğeri* denir. Bu özdeğere karşılık gelen çözüme ise problemin *özfonksiyonu* denir. Özdeğerlerin oluşturduğu kümeye de, verilmiş sınır değer probleminin *spektrumu* adı verilir. [8]

Tanım 2.16. $\rho(x) > 0$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $x \in [a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\langle u,v \rangle_{\rho} = \int_{a}^{b} \rho(x) u(x) v(x) dx$$

büyüklüğüne $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre *skaler çarpımı* denir. [8]

Tanım 2.17. Tanım 2.16 da $u(x)=v(x)$ olduğunda

$$\|u\|_\rho=\left\{\int_a^b \rho(x)u^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

sayısına $u(x)$ in $\rho(x)$ fonksiyonuna göre *normu* denir. [8]

Tanım 2.18. Tanım 2.16 da $\rho(x)\equiv 1$ özel hali için

$$\langle u,v\rangle=\int_a^b u(x)v(x)\,dx$$

ifadesine $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının sadece *skaler çarpımı* denir. Eğer $\langle u,v\rangle=0$ ise o halde $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığında birbirine *diktir* denir. [8]

Tanım 2.19. $a\le x\le b$ aralığında kompleks değerli iki fonksiyon $f(x)$ ve $g(x)$ olmak üzere iç çarpımları

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx \tag{2.15}$$

şeklindedir. Burada $\overline{g}(x)$, $g(x)$ fonksiyonunun eşleniğidir. [2]

Tanım 2.20. Reel değişkenli $u(x)$ fonksiyonu, bir h komşuluğunda $(x-h)$ nin kuvvetlerine göre Taylor serisine açılabiliyorsa bu fonksiyon h de *analitiktir* denir. Bir (a,b) aralığının her noktasında analitik olan bir fonksiyon o *aralıkta analitiktir* denir.

Karmaşık değişkenli ve tek değerli bir u fonksiyonu, D bölgesinin ancak bazı noktaları hariç diğer noktalarında türevlenebiliyorsa, bu fonksiyon *D bölgesinde analitiktir* denir. Eğer bu fonksiyon D bölgesinin bütün noktalarında türevlenebiliyorsa buna *düzgün analitik fonksiyon* denir. Örneğin,

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu, $z=1$ noktası hariç her yerde analitiktir. [9]

Tanım 2.21. $u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$ denkleminde $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik değil ise bu noktaya denklemin *singüler noktası* denir. [10]

Tanım 2.22. Aşağıdaki koşulları sağlayan (2.12)-(2.13) Sturm-Liouville problemine *regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi* adı verilir:

a) $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $x \in [a,b]$,

b) $p'(x)$, $[a,b]$ aralığında süreklidir,

c) $q(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında süreklidir,

d) $-\infty < a < b < \infty$

Bu koşullardan herhangi biri bozulduğunda, *singüler Sturm-Liouville* sınır değer problemi ortaya çıkar. [8]

Tanım 2.23. Bir özdeğere karşılık gelen tüm özfonksiyonlar birbirinin skaler çarpımı ise, bu özdeğere *basittir* denir. [4]

Tanım 2.24. $G(x,\xi;\lambda)$ fonksiyonuna Sturm-Liouville probleminin *Green fonksiyonu* denir. [8]

Tanım 2.25.

$$L[u](x)=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u+\lambda\rho(x)u=0 \qquad a<x<b \qquad (2.16)$$

diferansiyel denklemini

$$\begin{aligned}\alpha_{11}u(a)+\alpha_{12}u'(a)=0\\ \beta_{21}u(b)+\beta_{22}u'(b)=0\end{aligned} \qquad (2.17)$$

sınır şartları ile birlikte ele alınsın.

(a) $\lim_{x\to a^+} p(x)=0$ veya $\lim_{x\to b^-} p(x)=0$ dır.

(b) $p(x)$, $q(x)$ veya $\rho(x)$ fonksiyonlarından herhangi biri $x\to a$ veya $x\to b$ durumunda sınırsızdır.

(c) (a,b) aralığı sınırsızdır. $\left((a,\infty),\ (-\infty,b),\ (-\infty,\infty)\right)$

Bu şartlardan en az birini sağlayan (2.16)-(2.17) problemine *singüler Sturm-Liouville problemi* denir. [4]

Tanım 2.26. (2.16) denkleminde $p(x)=x$, $q(x)=-\upsilon^2/x$, $\rho(x)=x$ ve $a=0$ alınarak elde edilen

$$(xu')'+\left(\lambda x-\frac{\upsilon^2}{x}\right)u=0 \qquad (2.18)$$

veya

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left(\lambda-\frac{\upsilon^2}{x^2}\right)u=0 \qquad (2.19)$$

diferansiyel denklemine *Bessel Diferansiyel Denklemi* denir. Burada υ bir sayı, λ ise spektral parametredir. [4]

Tanım 2.27. $J_\upsilon(x)$ fonksiyonuna birinici tipten ve υ 'üncü mertebeden *Bessel fonksiyonu* denir. [4]

Tanım 2.28. $Y_k(x)$ fonksiyonuna ikinci tipten ve k'ıncı mertebeden *Bessel fonksiyonu* veya *Weber fonksiyonu* denir. Genel halde, keyfi υ değerleri için Weber fonksiyonları

$$Y_\upsilon(x)=\frac{J_\upsilon(x)\cos\upsilon\pi-J_{-\upsilon}(x)}{\sin\upsilon\pi}$$

olarak tanımlanmaktadır. [4]

Tanım 2.29. (2.16) denkleminde $p(x)=1-x^2$, $\rho(x)=1$, $q(x)=0$, $a=-1$ ve $b=1$ alınarak elde edilen

$$\left[\left(1-x^2\right)u'\right]'+\lambda u=0 \tag{2.20}$$

veya

$$u''-\frac{2x}{1-x^2}u'+\frac{\lambda}{1-x^2}u=0 \tag{2.21}$$

denklemine *Legendre Diferansiyel Denklemi*, bu denklemin çözümlerine ise *Legendre fonksiyonları* denir. [4]

Tanım 2.30. (2.16) denkleminde $p(x)=e^{-x^2}$, $q(x)\equiv 0$, $\rho(x)=e^{-x^2}$, $a=-\infty$ ve $b=\infty$ alınarak elde edilen

$$\left(e^{-x^2}u'\right)' + \lambda e^{-x^2}u = 0 \tag{2.22}$$

veya

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.23}$$

denklemine *Hermite Diferansiyel Denklemi* denir.

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}u(x) = 0 \tag{2.24}$$

sınır koşulları altında $p(x) \neq 0$ olmasına rağmen geçerli olduğu aralık sonsuz olduğundan problem singüler bir Sturm-Liouville problemidir. (2.23) denkleminin (2.24) koşullarını sağlayan çözümlerine *Hermite fonksiyonları* denir. [4]

Tanım 2.31. $a_n = 2^n$ alınarak elde edilen $H_n(x)$ polinomlarına *Hermite polinomları* denir. [4]

Tanım 2.32. Bir fonksiyonun $[a,\infty)$ aralığında sonsuz sayıda kökü varsa, bu fonksiyona *salınımlıdır* denir. [4]

Teorem 2.1. Lineer Sistemler için Varlık ve Teklik Teoremi

$A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$, $n\times n$ tipindeki bir matris fonksiyonu ve $t_0 \in (a,b)$ olmak üzere $f(t)$ vektörel bir fonksiyon olsun. Herhangi bir x_0 başlangıç vektörü için (a,b) aralığında

$$X'(t) = A(t)X(t) + f(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü vardır. [4]

Teorem 2.2. Rolle Teoremi

$f:[a,b]\to R$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise (a,b) aralığında $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır. [7]

Teorem 2.3. Bolzano-Weierstrass Teoremi

Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır. [7]

Teorem 2.4. Leibniz Formülü

f ve g fonksiyonları bir $A\subset R$ cümlesi üzerinde $n.$ mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ise $f\cdot g$ fonksiyonu da $n.$ mertebeden türevlenebilirdir ve

$$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x)$$

şeklindedir. [7]

Teorem 2.5.

$$Lu=f,\ \ a<x<b\,;\ B_1u=\gamma_1,\ldots,B_pu=\gamma_p \tag{2.25}$$

olmak üzere (2.10)-(2.11) sınır değer problemi ele alınsın. (2.11) tipindeki sınır şartları ile birlikte

$$Lu=0,\ \ a<x<b\,;\ B_1u=0,\ldots,B_pu=0 \tag{2.26}$$

homojen probleminin sadece aşikar çözümü varsa, (2.25) probleminin tek çözümü vardır. (2.26) problemi aşikar olmayan çözümlere sahip ise, (2.25) özel bir tip olmadıkça çözümü yoktur.

$$L^{*}v=0,\ a<x<b\ ;\ B_1^{*}v=0,\ldots,B_p^{*}v=0 \tag{2.27}$$

ise bu problemin adjoint homojen problemidir. [1]

Teorem 2.6. n bilinmeyenli m lineer denklemler için: $m>n$ ise denklem sisteminin çözümü yoktur; $m<n$ ise denklem sisteminin sonsuz çözümü, $m=n$ ise denklem sisteminin tek çözümü vardır. Eğer denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfır ise ya çözüm yoktur ya da sonsuz çözüm vardır.

n bilinmeyenli m denklem kümesi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j=f_i\ ,\ i=1,\ldots,m \tag{2.28a}$$

şeklinde yada

$$Au=f \tag{2.28b}$$

şeklinde tek bir denklem olarak yazılabilir. Burada A, $\left(a_{ij}\right)$ katsayılarının $m\times n$ tipinde bir matrisi; $f=\left(f_1,\ldots,f_m\right)$ m boyutlu, $u=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ n boyutlu birer vektördür. A matrisinin elemanları ve f vektörünün bileşenleri reel sayılar olarak alındığından u çözümünün bileşenleri de reeldir. Böylece $f\in R_m$, $u\in R_n$ olmak üzere

$$A:R_n\to R_m$$

lineer bir dönüşümdür.

(2.28a,b) incelendiğinde $u\in R_n$ ise $Au\in R_m$ dir ve $v\in R_m$ için

$$\left\langle Au,v\right\rangle_m=\sum_{i=1}^{m}v_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j\right)=\sum_{j=1}^{n}u_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i=\sum_{i=1}^{n}u_j\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}v_j\right)=\left\langle u,A^*v\right\rangle_n$$

elde edilir. Burada A^*, $a_{ij}^*=a_{ji}$ ile $n\times m$ tipinde bir adjoint matristir. Böylece A^*, A matrisinin satır ve sütunlarının yer değişmesi ile oluşmuştur. $A^*:R_m\to R_n$, $m=n$ ve $a_{ij}=a_{ji}$ ise matris simetriktir ve $A=A^*$ dır.

(2.28a,b), iki problemi aynı anda içermektedir:

$$Au=0 \text{ (homojen denklem)} \tag{2.29}$$

$$A^*u=0 \text{ (adjoint homojen denklem)} \tag{2.30}$$

(2.29), (2.30) denkleminin $f=0$ alınmış halidir. A karesel bir matris ise (2.29) ve (2.30) aynı anlama gelir.

(2.28) denkleminin bir u_p çözümü bulunursa, u_h (2.29) denkleminin çözümü olmak üzere genel çözüm $u=u_p+u_h$ şeklindedir. (2.29) in sadece sıfır çözümü varsa, (2.28) tek çözüme sahip olur. [1]

Teorem 2.7. $k(x,\xi)$, $a<x<b$, $a<\xi<b$ karesel bölgesinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)d\xi-u(x)=f(x),\ \ a<x<b \tag{2.31}$$

homojen olmayan integral denklemine karşılık gelen homojen denklem,

$$\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)d\xi-u(x)=0,\ \ a<x<b \tag{2.32}$$

ve adjoint homojen denklem,

$$\int_a^b k(\xi,x)v(\xi)d\xi - v(x) = 0,\ \ a < x < b \tag{2.33}$$

ele alınsın.

(a) (2.32) probleminin sadece aşikar çözümü varsa, (2.33) ve (2.31) problemlerinin tek çözümü vardır.

(b) (2.32) probleminin aşikar olmayan çözümleri varsa, (2.33) ve (2.31) problemlerinin çözümü vardır $\Leftrightarrow$ (2.33) probleminin çözümü olan her v fonksiyonu,

$$\int_a^b f(x)v(x)dx = 0$$

eşitliğini sağlar. [1]

Teorem 2.8. Homojen sınır şartları ile (2.25) problemi ele alınsın;

$$Lu = f,\ \ a < x < b\ ;\ B_1u = \cdots = B_pu = 0 \tag{2.34}$$

(a) (2.26) homojen probleminin sadece aşikar çözümü varsa, (2.27) adjoint homojen probleminin ve (2.34) probleminin tek çözümü vardır.

(b) (2.26) probleminin k bağımsız çözümü varsa, (2.27) probleminin de k bağımsız çözümü vardır. Buradan (2.34) probleminin çözümü vardır $\Leftrightarrow$ $\int_a^b fv^{(1)}dx = \cdots = \int_a^b fv^{(k)}dx = 0$ eşitliği sağlanır. Burada $\left(v^{(1)},\ldots,v^{(k)}\right)$, (2.27) probleminin çözümlerinin kümesidir. Koşullar sağlanırsa, (2.34) probleminin genel çözümü $\tilde{u} + \sum_{i=1}^{k} c_i u^{(i)}$ olarak bulunur. Burada $\tilde{u}$, (2.34) probleminin özel bir çözümü; $\{c_i\}$, keyfi sabitler ve $u^{(1)},\ldots,u^{(k)}$, (2.26) probleminin lineer bağımsız çözümleridir. [1]

Teorem 2.9. Strum-Liouville Özdeğerleri

(2.12) denklemindeki $p(x)$, $p^{'}(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve $[a,b]$ aralığının her noktasında $p(x)>0$ ve $\rho(x)>0$ olsun. Bu durumda (2.12)-(2.14) Strum-Liouville probleminin özdeğerleri, artan

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_{n-1}<\lambda_n<\cdots \tag{2.35}$$

reel sayı dizisini oluşturmaktadır ve

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty \tag{2.36}$$

şeklindedir. Her λ_n özdeğerine, sabit katlar hariç, yalnız bir $u_n(x)$ özfonksiyonu karşılık gelir. Ayrıca, her $x\in[a,b]$ için $q(x)\geq 0$ ve (2.14) koşullarındaki α_{11}, α_{12}, β_{21}, β_{22} katsayıları negatif değil ise tüm özdeğerler de negatif değildir. [6]

Tanım 2.33. (2.12)-(2.14) Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri teorem 2.9 gibi sıralansın. λ_n özdeğerine karşılık gelen $u_n(x)$ özfonksiyonu, bir çarpımsal sabit ile hesaplanabilir. Her bir özfonksiyonun, çarpılacağı keyfi sabit

$$\int_a^b u_n^2(x)\rho(x)\,dx=1 \qquad n=1,2,\ldots$$

şartını sağlamalıdır. Bu şarta *normalleştirme şartı* denir. [2]

Teorem 2.10. Fredholm Alternatifi

(2.28a,b) denkleminin çözüm veya çözümlerinin var olması için gerek ve yeter şart (2.30) denklemini sağlayan her v için

$$\langle f, v \rangle_m = 0$$

olmasıdır. [1]

İspat.

$\Rightarrow$) Kabul edelim ki (2.28a,b) denkleminin bir çözümü var olsun. O halde bir u çözümü için $f = Au$ olur ve $\langle f, v \rangle_m = \langle Au, v \rangle_m = \langle u, A^* v \rangle_n$ şeklindedir. Böylece (2.30) denklemini sağlayan her v çözümü için $\langle f, v \rangle_m = 0$ elde edilir.

$\Leftarrow$) (2.30) denklemini sağlayan her v için $\langle f, v \rangle_m = 0$ olsun. f vektörünün A aralığında R_A nın bir elemanı olup olmadığı incelensin. R_A bir lineer manifold olduğundan f vektörü, $h \in R_A$ ve $h^\perp \in R_A^\perp$ olmak üzere $h + h^\perp$ olarak ayrılabilir. $h^\perp$ vektörü sadece h vektörüne değil, R_A nın bütün elemanlarına ortogonaldir: her $u \in R_n$ için $0 = \langle Au, h^\perp \rangle_m = \langle u, A^* h^\perp \rangle_n$ ve buradan $A^* h^\perp = 0$ olur. Böylece $h^\perp$, (2.30) denkleminin bir çözümüdür. Kabulden $f = h + h^\perp$ vektörü de $h^\perp$ vektörüne ortogonal olur. h, $h^\perp$ vektörüne ortogonal olduğundan dolayı $h^\perp$ kendisine ortogonaldir. Yani $h^\perp = 0$ ve $f \in R_A$ elde edilir.

Tanım 2.34. $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için öncelikle $\det A \neq 0$ regüler durumu ele alınsın. Bu durumda $\det A^* \neq 0$ olur ve (2.29) ile (2.30) denklemleri sadece sıfır çözüme sahip olurlar. Böylece herhangi bir f vektörü için (2.28a,b) denklemlerinin, $u = A^{-1} f$ şeklinde bir çözümü vardır. Buradaki A^{-1}, A matrisinin ters matrisidir. Bu matrise *Green matrisi* denir.

$\det A = 0$ singüler durumunda ise, A matrisinin satırları arasında lineer bağımlılık vardır. Eğer lineer bağımlı elemanlar f vektöründe ise (2.28a,b) denkleminin çözümü vardır. $f = 0$ ise (2.29) homojen problemi, çoğu durumda sıfır çözümü olmasıyla birlikte, her zaman çözülebilir. (2.29) denkleminin $k(\leq n)$ bağımsız çözümü varsa A matrisi, k boyutlu bir *sıfır uzayı* adını alır. A dan farklı bir sıfır uzayına sahip olmasına rağmen A^* için de aynı durum geçerlidir. (2.30) denkleminin k bağımsız çözümlerinin kümesi $v^{(1)},\ldots,v^{(k)}$, (2.29) denkleminin k bağımsız çözümlerinin kümesi $u^{(1)},\ldots,u^{(k)}$ olmak üzere f vektörü, $i=1,\ldots,k$ için $\left\langle f,v^{(i)}\right\rangle=0$ şartlarını sağlarsa (2.28a,b) denklemlerinin genel çözümü

$$u=u_p+\sum_{i=1}^{k}c_iu^{(i)}$$

olur. Burada u_p, (2.28a,b) denkleminin özel bir çözümüdür. [1]

Teorem 2.11. İntegral Hesabının Birinci Ortalama Değer Teoremi

f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve g ile fg bu aralıkta integrallenebilir olsun. g, $[a,b]$ üzerinde her yerde aynı işaretli ve f sınırlı ise $[\inf f,\sup f]$ aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=k\int_a^b g(x)\,dx$$

dır. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ise $[a,b]$ aralığındaki en az bir x_0 noktası için

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx$$

olur. [7]

BÖLÜM 3. TEK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde $Lu = f$ diferansiyel denkleminin x ekseni üzerinde bulunan bir I aralığındaki çözümlerine değinilecektir. L, (2.1) şeklinde lineer, p. mertebeden adi diferansiyel operatör olup $k = 1,\ldots,p$ olmak üzere $\{a_k(x)\}$ katsayıları $\overline{I}$ da sürekli, $a_p(x) \neq 0$ ve x noktası $a_p(x)$ in bir singüler noktasıdır. Homojen olmayan $f(x)$ fonksiyonunun aynı aralık üzerinde parçalı sürekli olduğu kabul edilirse $Lu = f$ denkleminin bir çözümü olarak $(p-1)$. mertebeden sürekli, p. mertebeden parçalı sürekli türevlere sahip ve f fonksiyonunun bütün noktalarında sürekli olan bir $u(x)$ fonksiyonu alınabilir.

Teorem 3.1. Lineer Denklemler için Varlık ve Teklik Teoremi

L, (2.1) tipinde bir operatör; $\overline{I}$ da $a_p(x) \neq 0$; x_0, $\overline{I}$ da sabit bir nokta; $\gamma_1,\ldots,\gamma_p$ verilen sayılar ve $f(x)$, $\overline{I}$ da parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. $x \in I$ olmak üzere $Lu = f$ başlangıç değer probleminin (2.2) koşulları altında tek çözümü vardır.

İspat. $y_1 = u$, $y_2 = u'$, …, $y_n = u^{(n-1)}$ olsun. Başlangıç değer problemi

$$\begin{aligned}
y_1'(x_0) &= y_2(x_0), \qquad & y_1(x) &= u_0 \\
&\vdots \\
y_{(p-1)}'(x_0) &= y_p(x_0), \qquad & y_{p-1}(x) &= u_{p-2} \\
& & y_p(x) &= u_{p-1} \\
y_p'(x_0) &= -a_{p-1}(x_0)\,y_1(x_0) - \cdots - a_0(x_0)\,y_p(x_0) + f(x_0)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

sistemine indirgenir. (3.1) sistemini matris formunda $y^{'}(x_0)=A(x_0)y(x_0)+g(x_0)$ şeklinde kısaltılırsa, $A(x_0)$ katsayısı $-a_0(x_0),\ldots,-a_{p-1}(x_0),0$ veya 1; $g(x_0)$ fonksiyonu ise 0 veya $f(x_0)$ olarak bulunur. $a_0(x_0),\ldots,a_{n-1}(x_0)$ ve $f(x_0)$, (a,b) aralığında sürekli ise $A(x_0)$ katsayısı ve $g(x_0)$ fonksiyonu da süreklidir. Böylece teorem 2.1 in sonucu olarak, başlangıç değer probleminin (a,b) aralığında tek çözümü vardır. (3.1) sistemi de başlangıç değer problemine eşit olduğundan, (2.1)-(2.2) denklem sisteminin de (a,b) aralığında tek çözümü vardır.

$Lu=0$ homojen probleminin $u(x_0)=\cdots=u^{(p-1)}(x_0)=0$ homojen sınır şartları altındaki tek çözümü $u\equiv 0$ şeklindedir.

Teorem 3.2. $u_1,\ldots,u_p$, $Lu=0$ probleminin çözümleri olmak üzere bu çözümlerin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $x_0\in I$ noktasında Wronskianlarının sıfır olmasıdır.

İspat. $u_1,\ldots,u_p$, I üzerinde lineer bağımlı ise biri diğerinin katı olarak yazılabilir. Determinantın herhangi iki satırı, bir diğerinin sabit katı olarak yazılmış olduğunda değeri sıfır olur. Dolayısıyla da $W=0$ bulunur. Tersine $W\left(u_1,\ldots,u_p;x_0\right)=0$ ise

$$
\begin{gathered}
c_1u_1(x_0)+\cdots+c_pu_p(x_0)=0,\\
\vdots\\
c_1u_1^{(p-1)}(x_0)+\cdots+c_pu_p^{(p-1)}(x_0)=0
\end{gathered}
$$

olduğundan $\left(c_1,\ldots,c_p\right)$ aşikar olmayan çözümlerin varlığı için gerek ve yeter şart elde edilir. Buradan $U(x)=c_1u_1(x)+\cdots+c_pu_p(x)$ şeklindedir ve U, homojen diferansiyel denklemin $U(x_0)=U^{'}(x_0)=\cdots=U^{(p-1)}(x_0)=0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür. Teorem 3.1 den dolayı $U\equiv 0$ olup $\left\{u_1(x),\ldots,u_p(x)\right\}$ kümesi lineer bağımlı olmuş olur.

Teorem 3.3. $u_1(x),\ldots,u_p(x)$, başlangıç değer probleminin $\{0;1,0,0,\ldots,0\}_{x_0}$, $\{0;0,1,0,\ldots,0\}_{x_0},\ldots,$ $\{0;0,0,0,\ldots,1\}_{x_0}$ şartlarını sağlayan çözümleri olsunlar. Bu durumda $(u_1,\ldots,u_p)$ kümesi lineer bağımsızdır ve homojen denklemin her çözümü, $c_1,\ldots,c_p$ sabitleri yardımı ile $u=c_1u_1+\cdots+c_pu_p$ şeklinde yazılabilir.

İspat. $W(u_1,\ldots,u_p;x_0)=1\neq 0$ olduğundan $(u_1,\ldots,u_p)$ kümesi lineer bağımsızdır. Buradan,

$$\begin{gathered} a_1u_1(x_0)+\cdots+a_pu_p(x_0)=u(x_0) \\ \vdots \\ a_1u_1^{(p-1)}(x_0)+\cdots+a_pu_p^{(p-1)}(x_0)=u^{(p-1)}(x_0) \end{gathered}$$

yazılabilir. Burada , $a_1,\ldots,a_p$ bilinmeyenlerdir. Wronskian sıfırdan farklı olduğu için katsayılar determinantı da sıfır değildir ve denklem sisteminin tek çözümü vardır.

Yukarıdaki sistemde $a_1=c_1,\ldots,a_p=c_p$ alınırsa,

$$u(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_pu_p(x)$$

elde edilir.

$Lu=0$ denkleminin herhangi p bağımsız çözümleri bu denklemin bir *bazıdır*. $x_0=0$, $u_1=\cos x$, $u_2=\sin x$ alınarak $u''+u=0$ denkleminin $\{\cos x,\sin x\}$ bazı elde edilebilir. Ayrıca $v_1(x)=\cos x+\sin x$ ve $v_2(x)=2\cos x-3\sin x$ fonksiyonları da bu denklem için bir başka baz oluşturur.

$-\infty<x<\infty$ aralığında $a_p(x)\neq 0$; $u_\xi(x)$, $Lu=0$ homojen denkleminin

$$u_\xi(\xi)=0,\ u_\xi^{'}(\xi)=0,\ldots,\ u_\xi^{(p-2)}(\xi)=0\,,\ u_\xi^{(p-1)}(\xi)=1/a_p(\xi)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olsun. Süper pozisyon prensibi yardımı ile

$$Lu=f\,,\ a<x\,,\ u(a)=0\,,\ldots,\ u^{(p-1)}(a)=0$$

denklem sisteminin çözümünün

$$u(x)=\int_a^\infty H(x-\xi)u_\xi(x)f(\xi)d\xi=\int_a^x u_\xi(x)f(\xi)d\xi$$

şeklinde olması tahmin edilebilir.

Bu çözümün doğru olduğu kabul edilsin. Bu durumda $u(a)=0$ olduğundan $u^{'}(x)=u_x(x)f(x)+\int_a^x u^{'}(x)f(\xi)d\xi$ olarak elde edilir, yani $u^{'}(a)=0$ dır. $u_x(x)=\cdots=u_x^{(p-2)}(x)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}u^{(k)}(x)&=u_x^{(k-1)}(x)f(x)+\int_a^x u_\xi^{(k)}(x)f(\xi)d\xi\\&=\int_a^x u_\xi^{(k)}(x)f(\xi)d\xi,\quad k=1,2,\ldots,p-1\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $k=1,\ldots,p-1$ için $u^{(k)}(a)=0$ olur. Ayrıca $u_x^{(p-1)}=\dfrac{1}{a_p(x)}$ şartı yardımı ile,

$$\begin{aligned}u^{(p)}(x)&=u_x^{(p-1)}(x)f(x)+\int_a^x u_\xi^{(p)}(x)f(\xi)d\xi\\&=\frac{f(x)}{a_p(x)}+\int_a^x u_\xi^{(p)}(x)f(\xi)d\xi\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir. $Lu_{\xi}=0$ olduğundan

$$Lu = a_p(x)u^p + \cdots + a_0(x)u = f(x) + \int_a^x Lu_{\xi}(x) f(\xi)\, d\xi = f(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.4. $-\infty < x < \infty$ aralığında $a_p(x) \neq 0$ olmak üzere homojen sınır şartları altında başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$u(x) = \int_a^x u_{\xi}(x) f(\xi)\, d\xi \tag{3.2}$$

şeklindedir. Burada $u_{\xi}(x)$, $Lu=0$ homojen denkleminin

$$u(\xi)=0, \ldots, u^{(p-2)}(\xi)=0,\; u^{(p-1)}(\xi)=\frac{1}{a_p(\xi)} \tag{3.3}$$

sınır şartları altındaki çözümüdür.

$$Lu = f;\; v(a)=\gamma_1, \ldots, v^{(p-1)}(a)=\gamma_p \tag{3.4}$$

probleminin çözümü

$$v(x) = \int_a^x u_{\xi}(x) f(\xi)\, d\xi + \gamma_1 u_1(x) + \cdots + \gamma_p u_p(x) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.1. Bir boyutlu ısı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.6}$$

dir. Burada, u bağımlı değişkeni, x ve t nin bilinmeyen bir fonksiyonudur. k ise verilen bir sabittir.

Denklem (3.6), x ekseni boyunca uzanan ısıtılmış bir çubukta t zaman ve x konum olmak üzere u sıcaklığının değişimini modeller. Çubuğun, ekseni dik kesen A alanlı düzgün dik kesitinin olduğunu ve homojen malzemeden yapıldığını kabul edelim. Ayrıca, çubuğun dik kesitinin oldukça küçük olduğunu, u nun her bir dik kesit üzerinde sabit olduğunu, çubuğun yanal yüzeyinin de ısı geçirmeyecek şekilde yalıtıldığını kabul edelim. Bu durumda, u gerçekten x ve t nin bir fonksiyonudur ve ısı, çubuk boyunca sadece x ekseni yönünde akacaktır. Genel olarak ısı, bir bütünün sıcak kısımlarından soğuk kısımlarına doğru bir sıvının akışı gibi akan şekilde düşünülür.

Çubukta, $\phi(x,t)$ ısı akışı, x deki dik kesitin bir birim alanında t zamanında geçen ısı akış oranıdır. ϕ nin tipik birimleri, santimetre karedeki saniye başına kaloridir. Denklem (3.6) nın elde edilişi

$$\phi=-K\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.7}$$

formülüne dayanır. Burada K orantı sabitine, çubuk malzemesinin *termik iletkenliği* denir. Denklem (3.7) deki eksi işareti, $u_x>0$ iken ısı akışının negatif x yönünde olmasına karşılık gelir, oysa ϕ pozitif x yönündeki ısı akışı için pozitiftir. Kısaca ısı, sıcak bir yerden soğuk bir yere doğru akar, fakat tersi doğru değildir.

Bu çubuğun $[x,x+\Delta x]$ aralığına karşılık gelen küçük bir kısmı incelensin. İki uç nokta boyunca bu parça içindeki ısının R akış oranı

$$\begin{aligned} R&=A\phi(x,t)-A\phi(x+\Delta x,t)\\ &=KA\left[u_x(x+\Delta x)-u_x(x,t)\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir. Parça içindeki sıcaklığın elde edilen u_t zaman değişim oranı, onun δ yoğunluğuna ve belirli c ısısına bağlıdır.

Öz ısı c, 1g. malzemenin sıcaklığını 1° yükseltmek için gerekli ısı miktarıdır. Sonuç olarak $c\delta u$ ısı kalorisi, 1 cm^3 lük malzemeyi 0 sıcaklığından u sıcaklığına yükseltmek için gerekli olan dx genişliğindeki çubuğun ince bir diliminin hacmi Adx dir. Böylece $c\delta uAdx$ ısı kalorisi, bu dilimin sıcaklığını 0 dan u ya yükseltmek için gereklidir. Çubuğun $[x, x+\Delta x]$ parçasının

$$Q(t)=\int_{x}^{x+\Delta x} c\delta Au(x,t)\,dx \tag{3.9}$$

ısı içeriği, onu sıfırdan verilen $u(x,t)$ sıcaklığına yükseltmek için gerekli ısı miktarıdır. Isı, parçaya sadece iki uçtan girip çıktığından (3.8) yardımıyla $R = dQ/dt$ olduğundan

$$Q'(t)=KA\left[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)\right] \tag{3.10}$$

olur. Böylece (3.9) denkleminin türevi alınıp integral için ortalama değer teoremi uygulanırsa $(x+\Delta x)$ deki bazı $\overline{x}$ ler için

$$Q'(t)=\int_{x}^{x+\Delta x} c\delta Au_t(x,t)\,dx = c\delta Au_t\left(\overline{x},t\right)\Delta x \tag{3.11}$$

olduğu görülür. (3.10) ve (3.11) eşitlenerek,

$$c\delta Au_t\left(\overline{x},t\right)\Delta x = KA\left[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)\right]$$

buradan da

$$u_t\left(\overline{x},t\right)=k\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x} \tag{3.12}$$

$$k=\frac{K}{c\delta} \tag{3.13}$$

ifadesi malzemenin ısı yayılımıdır. Denklem (3.12) de $\Delta x \to 0$ ve $\overline{x} \to x$ için limit alınırsa, bir boyutlu ısı denklemi (3.6) elde edilir. Böylece yalıtılmış kenarları olan ince çubukta $u(x,t)$ sıcaklığı, bu kısmi türevli denklemi sağlamalıdır.

Çubuğun $x=0$ dan $x=L$ ye uzanan sonlu L uzunluğuna sahip olduğunu kabul edelim. Çubuğun $u(x,t)$ sıcaklık fonksiyonu, uygun yardımcı koşullar ile (3.6) denklemini mümkün bütün çözümleri arasından belirlenir. Bir adi türevli denklemin bir çözümü keyfi sabitler içeriyorken, bir kısmi türevli denklemin bir çözümü genellikle keyfi fonksiyonlar içerir. Bu örnekte $t=0$ zamanında çubuğun $f(x)$ sıcaklık fonksiyonu belirlenebilir. Bu,

$$u(x,0)=f(x) \tag{3.14}$$

başlangıç koşulunu verir. Çubuğun iki ucunda sabit sıcaklıklar belirlenebilir. Örneğin, her bir uç sıfır sıcaklığında büyük bir buz bloğuna bağlanırsa uç nokta koşulları

$$u(0,t)=u(L,t)=0 \qquad \forall t \ \ i\c{c}in \tag{3.15}$$

olur. Birleştirilirse de

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<L, \ \ t>0)\\
&u(0,t)=u(L,t)=0\\
&u(x,0)=f(x)
\end{aligned}$$

sınır değer problemi elde edilir.

BÖLÜM 4. İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

(2.8) diferansiyel denklemi, (2.9) sınır şartları ile birlikte ele alındığında oluşan sınır değer problemi incelenmek üzere

$$u'' + a(x)u = 0$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi

$$u(a) = u(b) = 0$$

sınır şartları ile birlikte ele alınsın. Burada $a(x)$ sürekli bir fonksiyondur. $p(x)$ ve $q(x)$, sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere u_1 ve u_2, homojen olmayan problemin iki çözümü olarak alınırsa,

$$Lu_1 \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_1}{dx}\right] - q(x)u_1 = f(x) \tag{4.1}$$

$$Lu_2 \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_2}{dx}\right] - q(x)u_2 = g(x) \tag{4.2}$$

olur. (4.1) denklemi u_2 ile, (4.2) denklemi u_1 ile çarpılırsa,

$$\left(p(x)u_1'\right)' u_2 - q(x)u_1u_2 = f(x)u_2$$

$$\left(p(x)u_2'\right)' u_1 - q(x)u_2u_1 = g(x)u_1$$

ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left(p(x)u_1'\right)' u_2 - \left(p(x)u_2'\right)' u_1 = f(x)u_2 - g(x)u_1$$

elde edilir. Gerekli cebirsel işlemler yapılarak,

$$\left[p(x)\left(u_1'u_2 - u_2'u_1\right)\right]' = f(x)u_2 - g(x)u_1 \tag{4.3}$$

şeklindeki *Lagrange Özdeşliği* elde edilir. Bu özdeşlik, $[a,b]$ aralığında integre edilirse

$$p(x)\left(u_1'u_2 - u_2'u_1\right)\Big|_a^b = \int_a^b \left(f(x)u_2 - g(x)u_1\right)dx \tag{4.4.a}$$

$$p(x)\left(u_1'u_2 - u_2'u_1\right)\Big|_a^b = \int_a^b \left(u_2 Lu_1 - u_1 Lu_2\right)dx \tag{4.4.b}$$

şeklindeki *Green Formülleri* elde edilmiş olur.

u_1^* ve u_1^{**}, (4.1) probleminin homojen kısmının çözümleri olsun. Bu durumda

$$p(x)\left(u_1^{*'}u_1^{**} - u_1^{**'}u_1^*\right) = C$$

$W\left(u_1^*, u_1^{**}; x\right) = u_1^{*'}u_1^{**} - u_1^{**'}u_1^*$ olduğundan

$$W\left(u_1^*, u_1^{**}; x\right) = \frac{C}{p(x)}$$

elde edilir.

Eğer u_1^*, $Lu_1^* = 0$ denkleminin özel bir çözümü ve $u_1(x)$ de bu denklemin herhangi bir u_1^* çözümü ile lineer bağımlı olmayan bir çözümü ise

$$u_1^{*'}u_1 - u_1'u_1^* = \frac{C}{p(x)}$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafını $-\frac{1}{u_1^{*^2}}$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{u_1}{u_1^*}\right)' = -\frac{C}{p(x)u_1^{*^2}}$$

elde edilir. İntegre edilirse de

$$u_1(x) = -Cu_1^*(x)\int \frac{ds}{p(s)u_1^{*^2}(s)} + c_1u_1^*(x)$$

olur. Yani bir sınır değer probleminin diğer çözümleri ile lineer bağımlı olmayan en az bir çözümü biliniyorsa, genel çözüme ulaşılabilir.

4.1. Green Fonksiyonu ve Kullanımları

$p(x) = \exp\left\{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\}$ ve $q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}\exp\left\{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\}$ olmak üzere,

$$Lu = \left(p(x)u'\right)' - q(x)u = f(x) \tag{4.1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0 \\ \beta_{21}u(b) + \beta_{22}u'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1.2}$$

problemini ele alınsın. $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 \neq 0$, $\beta_{21}^2 + \beta_{22}^2 \neq 0$ ve $\xi \in (a,b)$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \xi - \varepsilon \\ f_\varepsilon(x), & \xi - \varepsilon \leq x \leq \xi + \varepsilon \\ 0, & x \geq \xi + \varepsilon \end{cases} \tag{4.1.3}$$

fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.2) probleminin çözümü olsun. Burada $f_\varepsilon(x) \geq 0$ olan sürekli bir fonksiyon olup

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = 1 \tag{4.1.4}$$

sağlanır. (4.1.1)-(4.1.2) probleminin (4.1.4) şeklinde seçilen çözümü $u_\varepsilon(x,\xi)$ ile gösterilsin. (4.1.1) denklemi $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ aralığında integre edilirse

$$p(\xi+\varepsilon)u_\varepsilon^{'}(\xi+\varepsilon) - p(\xi-\varepsilon)u_\varepsilon^{'}(\xi-\varepsilon) - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)u_\varepsilon(x)\,dx = 1 \tag{4.1.5}$$

bulunur. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,\xi) = G(x,\xi)$ olarak alınsın. $\varepsilon \to 0$ iken (4.1.5) eşitliğinde limite geçilirse,

$$p(\xi)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\bigg|_{x=\xi+0} - p(\xi)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\bigg|_{x=\xi-0} = 1$$

elde edilir.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = G(x,\xi)$$

olacak şekilde bir $G(x,\xi)$ var ise bu fonksiyonun ξ noktasında x e göre türevi

$$\frac{d}{dx}G(x,\xi)\bigg|_{x=\xi+0} - \frac{d}{dx}G(x,\xi)\bigg|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)} \tag{4.1.6}$$

şeklinde olmalıdır. Böyle bir $G(x,\xi)$ var ise bu fonksiyonun aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

1. $G(x,\xi)$, x in bir fonksiyonu gibi $Lu=0$ denklemini (a,ξ), (ξ,b) aralıklarında sağlar.
2. $G(x,\xi)$, (4.1.2) koşulunu sağlar.
3. $G(x,\xi)$, $[a,b]$ aralığında süreklidir ve

$$\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}=\frac{1}{p(\xi)} \tag{4.1.6.a}$$

dır.

Bu koşulları sağlayan $G(x,\xi)$ fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.6) probleminin *Green Fonksiyonudur*.

(4.1.1)-(4.1.6) probleminin Green fonksiyonu var olsun. (4.4a,b) Green formülü $[a,\xi-\varepsilon]$ ve $[\xi+\varepsilon,b]$ aralıkları için kullanılırsa

$$p(x)\left[G(x,\xi)u'-u\frac{d}{dx}G(x,\xi)\right]\Bigg|_{a}^{\xi-\varepsilon}=\int_{a}^{\xi-\varepsilon}f(x)G(x,\xi)\,dx$$

$$p(x)\left[G(x,\xi)u'-u\frac{d}{dx}G(x,\xi)\right]\Bigg|_{\xi+\varepsilon}^{b}=\int_{\xi+\varepsilon}^{b}f(x)G(x,\xi)\,dx$$

buradan

$$p(\xi-\varepsilon)\left[G(\xi-\varepsilon,\xi)u'(\xi-\varepsilon)-u(\xi-\varepsilon)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi-\varepsilon}\right]$$

$$-p(a)\left[G(a,\xi)u'(a)-u(a)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=a}\right]+p(b)\left[G(b,\xi)u'(b)-u(b)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=b}\right]$$

$$-p(x+\xi)\left[G(\xi+\varepsilon,\xi)u'(\xi+\varepsilon)-u(\xi+\varepsilon)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi+\varepsilon}\right]$$

$$= \int_{a}^{\xi-\varepsilon} f(x)G(x,\xi)\,dx + \int_{\xi+\varepsilon}^{b} f(x)G(x,\xi)\,dx \tag{*}$$

şeklindedir. Sınır şartları

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}u(a)+\alpha_{12}u'(a)=0 \\ \alpha_{11}G(a,\xi)+\alpha_{12}G'(a,\xi)=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{yardımıyla } \alpha_{12}\neq 0 \text{ olmak üzere}$$

$$G'(a,\xi)=-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}G(a,\xi) \qquad \text{ve} \qquad u'(a)=-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}u(a)$$

elde edilir. Buradan (*) denklemindeki ikinci terim sıfırdır. Benzer şekilde diğer sınır şartı kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} \beta_{21}u(b)+\beta_{22}u'(b)=0 \\ \beta_{21}G(b,\xi)+\beta_{22}G'(b,\xi)=0 \end{aligned}\right\} \quad \beta_{21}\neq 0 \text{ olmak üzere } u(b)=-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}u'(b)$$

elde edilir. Bu ise (*) denkleminin üçüncü terimini sıfır yapar. Son durumda $\varepsilon \to 0$ için limite geçilirse

$$p(\xi)\left[G(\xi,\xi)u'(\xi)-u(\xi)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi+0}\right]$$

$$-p(\xi)\left[G(\xi,\xi)u'(\xi)-u(\xi)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi-0}\right]=\int_a^b f(x)G(x,\xi)\,dx$$

$$u(\xi)\,p(\xi)\left[\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi+0}-\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi-0}\right]=\int_a^b f(x)G(x,\xi)\,dx$$

elde edilir. Green fonksiyonunun tanımından

$$u(\xi)=\int_a^b f(x)G(x,\xi)\,dx$$

sonucuna ulaşılır. Denklemin Green fonksiyonu var ise, çözüm bu şekildedir.

4.2. Green Fonksiyonunun Varlığı ve Kuruluşu

$u_1(x)$ fonksiyonu (4.1.1) denkleminin

$$\left.\begin{aligned} u_1(a)&=-C\alpha_{12} \\ u_1'(a)&=C\alpha_{11} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.1}$$

koşullarını sağlayan çözümü; $u_2(x)$ fonksiyonu da (4.1.1) denkleminin

$$\left.\begin{aligned} u_2(b)&=-C\beta_{22} \\ u_2'(b)&=C\beta_{21} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.2}$$

koşullarını sağlayan çözümü olarak alınsın. C sabit olmak üzere bu iki çözüm lineer bağımsızdır. Bir

$$G(x,\xi)=\begin{cases} Au_1(x), & a\le x\le \xi \\ Bu_2(x), & \xi\le x\le b \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda,

$$\lim_{x\to\xi^-} G(x,\xi)=\lim_{x\to\xi^+} G(x,\xi)$$

olmalıdır. Buradan,

$$Au_1(\xi) - Bu_2(\xi) = 0$$
$$-Au_1^{'}(\xi) + Bu_2^{'}(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}$$

elde edilir. Ortak çözüm yapılırsa da

$$A = \frac{u_2(\xi)}{p(\xi)W(u_1,u_2;\xi)} \qquad \text{ve} \qquad B = \frac{u_1(\xi)}{p(\xi)W(u_1,u_2;\xi)}$$

bulunur. Bu durumda Green fonksiyonu

$$G(x,\xi) = \frac{u_1(x_<)u_2(x_>)}{p(\xi)W(u_1,u_2;\xi)} \tag{4.2.3}$$

şeklinde olur. Burada $x_< = \max(x,\xi)$, $x_> = \min(x,\xi)$ dır.

Green fonksiyonu, Heaviside fonksiyonu yardımı ile

$$G(x,\xi) = H(x-\xi)u_\xi(x) \tag{4.2.4}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $u_\xi(x)$, $Lu = 0$ denkleminin $u(\xi) = 0$, $u^{'}(\xi) = 1/a_2(\xi)$ şartlarını sağlayan çözümüdür. Eğer katsayılar sabit ise Green fonksiyonu,

$$G(x,\xi) = H(x-\xi)u_0(x-\xi)$$

şeklindedir.

4.3. Adjoint Denklem

Katsayıları $C^2(a,b)$ de olan

$$L = a_2(x)D^2 + a_1(x)D' + a_0(x)D, \tag{4.3.1}$$

denklemi ele alınsın. Bu denklem uygun bir çarpan ile çarpılarak

$$b_1(x)D' + b_0(x)D$$

şeklinde bir ifadenin türevine çevrilebilir.

$$\begin{aligned} v\left[a_2(x)D^2 + a_1(x)D' + a_0(x)D\right] &= \left(b_1(x)D' + b_0(x)D\right)' \\ &= b_1(x)D'' + \left[b_1'(x) + b_0(x)\right]D' + b_0'(x)D \end{aligned}$$

Bu durumu elde etmek için

$$\left.\begin{aligned} a_2(x)v &= b_1(x) \\ a_1(x)v &= b_1'(x) + b_0(x) \\ a_0(x)v &= b_0'(x) \end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

eşitlikleri arasında b_1 ve b_0,

$$a_2'(x)v + v'a_2(x) = b_1'(x)$$

$$a_1'(x)v + v'a_1(x) = \left(a_2'(x)v + v'a_2(x)\right) + b_0'(x)$$

şeklinde yok edilirse

$$(a_2v)'' - (a_1v)' + a_0v = 0 \tag{4.3.3a}$$

$$a_2v'' + \left(2a_2' - a_1\right)v' + \left(a_2'' - a_1' + a_0\right)v = 0 \tag{4.3.3b}$$

denklemleri elde edilir. v ile D yer değiştirilirse

$$L^{*} = a_2 D^2 + \left(2a_2^{'} - a_1\right) D + \left(a_2^{''} - a_1^{'} + a_0\right) \tag{4.3.4}$$

olur. Elde edilen bu denklem, (4.3.1) denkleminin *Adjoint denklemidir*.

Bir self-adjoint operatör, $L = L^{*}$ olarak bilinir. Buradan

$$2a_2^{'}(x) - a_1(x) = a_1(x)$$
$$a_2^{''}(x) - a_1^{'}(x) + a_0(x) = a_0(x)$$

yani $a_2^{'} = a_1$ elde edilir. Bu durum sağlanmaz ise, ilk durumdaki gibi denklem $v(x)$ fonksiyonu ile çarpılarak

$$\frac{d}{dx}\left\{v(x)a_2(x)\right\} = v(x)a_1(x)$$

veya

$$v(x) = \exp\int \frac{a_1(x) - a_2^{'}(x)}{a_2(x)} dx$$

self-adjoint hale dönüştürülebilir.

$C^2(a,b)$ de herhangi bir u,v fonksiyon çifti için Green formülü

$$\int_a^b \left(vLu - uL^{*}v\right) dx = J(u,v)\Big|_a^b \tag{4.3.5}$$

şeklindedir. Burada

$$J(u,v) = a_2\left(vu^{'} - uv^{'}\right) + \left(a_1 - a_2^{'}\right)uv \tag{4.3.6}$$

dir.

(2.9) tipindeki $B_1u=0$ ve $B_2u=0$ iki homojen sınır şartını sağlayan bir u fonksiyonu ve (4.3.1) ile verilen operatör ile v, adjoint sınır şartları olarak bilinen homojen sınır şartlarını sağlarsa, (4.3.5) in sağ tarafı sıfırlanır. M, $C^2(a,b)$ de $B_1u=0$ ve $B_2u=0$ şartlarını sağlayan $u(x)$ fonksiyonlarının kümesi olsun. M bir lineer manifolddur. M^* kümesi $C^2(a,b)$ de $v(x)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlansın. Buradan her $u \in M$ için $J(u,v)\Big|_a^b = 0$ dır. Dolayısıyla M^* da bir lineer manifolddur. M^* kümesindeki fonksiyonlar $B_1^*v=0$ ve $B_2^*v=0$ iki homojen sınır şartı ile belirtilebilir. Burada B_1^* ve B_2^*, B_1 ve B_2 katsayılarından farklıdır. $L=L^*$ ve $M^*=M$ ise (L,B_1,B_2) sınır değer problemi *self-adjointtir*.

4.4. Green Fonksiyonlarının Değişimi

$$-u'' = f,\ \ 0<x<1;\ u'(0)=u'(1)=0 \qquad (4.4.1)$$

self adjoint sınır değer problemi, yanal yüzeyi ve uçları yalıtılmış olan titreşimsiz bir çubuktaki ısı iletimini tanımlamaktadır. $f(x)$ fonksiyonu, $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ şartını sağlarsa, bu denklemin çözümü vardır. Çözüm için uygun bir Green fonksiyonu da araştırılabilir. Örneğin $f=\delta(x-\xi)$ seçildiğinde çözüm yoktur ancak

$$-G'' = \delta(x-\xi)-1,\ \ 0<x,\ \ \xi<1;\ G'(0,\xi)=G'(1,\xi)=0 \qquad (4.4.2)$$

seçiminde problemin biri sabit sayı olan, birbirinden farklı çok sayıda çözümü elde edilir. $x \neq \xi$, $-G''=-1$ için

$$G(x,\xi)=\begin{cases} A+Bx+\dfrac{x^2}{2}, & 0<x<\xi \\ C+Dx+\dfrac{x^2}{2}, & \xi<x<1 \end{cases}$$

şeklindedir. $B=0$, $D=-1$ sınır şartları sağlanır ve $x=\xi$ noktasında sürekliliğe bakılırsa $A=C-\xi$ eşitliği elde edilir, yani

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C-\xi+\dfrac{x^2}{2}, & 0<x<\xi \\ C-x+\dfrac{x^2}{2}, & \xi<x<1 \end{cases} \tag{4.4.3}$$

şeklindedir. Burada C, ξ değişkenine bağlıdır. Fonksiyonun ξ noktasındaki sağ ve sol türevlerine bakılarak $G'(\xi+,\xi)-G'(\xi-,\xi)=-1$ elde edilir. Gerekli olan durumlarda

$$\int_0^1 G(x,\xi)\,dx=0\ ,\ \ \forall\xi\in(a,b) \tag{4.4.4}$$

şeklinde bir G fonksiyonu seçilebilir. Buradan da x ve ξ noktalarına simetrik olarak (4.4.2) denkleminin bir çözümü seçilebilir. (4.4.2) denkleminin simetrik çözümü $G_m(x,\xi)$ ile gösterilir ve *Green fonksiyonunun değişimi* olarak bilinir. (4.4.4), (4.4.3) denkleminde yerine yazılırsa $C=\left(\xi^2/2\right)+1/3$ ve

$$G_m(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}-\xi+\dfrac{x^2\xi^2}{2}, & 0\le x\le\xi \\ \dfrac{1}{3}-x+\dfrac{x^2\xi^2}{2}, & \xi\le x\le 1 \end{cases} \tag{4.4.5}$$

elde edilir. (4.4.3) eşitliğinden seçilen C sayıları, G fonksiyonunu simetrik yapar.

$Cu_1(x)$, $Lu=0$ $B_1u=B_2u=0$ homojen probleminin aşikâr olmayan çözümü olsun. Burada $u_1(x)$,

$$\int_a^b u_1^2(x)\,dx = 1$$

şeklinde normalleştirilmiş bir çözümdür.

$Lg = G(x-\xi)$, $B_1u = B_2u = 0$ problemi şartları sağlamadığından Green fonksiyon değişimi kullanılmaz.

$$LG_m = \delta(x-\xi) - u_1(x)u_1(\xi),\ a < x,\ \ \xi < b\ ;\ B_1G_m = B_2G_m = 0 \tag{4.4.6}$$

$$\int_a^b G_m(x,\xi)u_1(x)\,dx = 0,\ \ \forall\xi \in (a,b) \tag{4.4.7}$$

problemi,

$$\int_a^b \left[\delta(x-\xi) - u_1(x)u_1(\xi)\right]u_1(x)\,dx = 0$$

olduğundan istenilen şartları sağlamış olur.

Green fonksiyonu değişimi kullanılarak

$$Lu = f\ ,\ a < x < b\ ;\ B_1u = B_2u = 0 \tag{4.4.8}$$

probleminin bir $u(x)$ çözümü araştırılsın. Bu problem $\int_a^b fu_1dx = 0$ şartı sağlandığında çözülebilir. (4.4.6) problemi (4.4.8) probleminin u çözümü ile, (4.4.8) problemi de G_m ile çarpılıp çıkarılır ve integre edilirse

$$\int_a^b (uLG_m - G_mLu)\,dx = u(\xi) - \int_a^b u_1(x)u_1(\xi)u(x)\,dx - \int_a^b G_m(x,\xi)f(x)\,dx$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı sınır şartları da yerine yazıldığında $J\left(u,G_m\right)\Big|_a^b=0$ olur. Böylece,

$$u\left(\xi\right)=Cu_1\left(\xi\right)+\int_a^b G_m\left(x,\xi\right)f\left(x\right)dx$$

elde edilir. G_m fonksiyonunun simetriği kullanılarak x ve ξ yer değiştirilirse

$$u\left(x\right)=Cu_1\left(x\right)+\int_a^b G_m\left(x,\xi\right)f\left(\xi\right)d\xi \tag{4.4.9}$$

bulunur. Bu, (4.4.8) probleminin genel çözümüdür. Bu çözümde $C=0$ alınırsa problemin *minimum norm* adı verilen özel bir çözümü elde edilir.

4.5. *p.* Mertebeden Denklemler için Sınır Değer Problemleri

(2.10) denklemi (2.11) sınır şartları ile bir sınır değer problemi oluşturur. Kabul edelim ki

$$Lu=0,\ \ a<x<b\ ;\ B_1u=\cdots=B_pu=0 \tag{4.5.1}$$

homojen problemi sadece aşikar çözüme sahip olsun. $G\left(x,\xi\right)$ Green fonksiyonu

$$LG=\delta\left(x-\xi\right),\ \ a<x,\ \ \xi<b\ ;\ B_1G=\cdots=B_pG=0 \tag{4.5.2}$$

şartları altında denklemi sağlar. Eş olarak

$$LG=0\ \ a<x<\xi,\ \ \xi<x<b\ ;\ B_1G=\cdots=B_pG=0\ ,$$

$$G,G',\ldots,G^{(p-2)}\ \text{sürekli};\ G^{(p-1)}\left(\xi+,\xi\right)-G^{(p-1)}\left(\xi-,\xi\right)=\frac{1}{a_p\left(\xi\right)}$$

şeklindedir. u ve v, C^p de herhangi iki fonksiyon ise

$$J=\sum_{m=1}^{p}\sum_{j+k=m-1}(-1)^k D^k(a_m v)D^j u$$

olmak üzere Green formülünden

$$\int_a^b \left(vLu-uL^*v\right)dx=J(u,v)\Big|_a^b \tag{4.5.3}$$

elde edilir.

L operatörü p. basamaktan lineer diferansiyel operatörü, $Lu=0$ ise bu operatöre karşılık gelen p. basamaktan lineer diferansiyel denklem olmak üzere

$$L^*=(-1)^p\frac{d^p}{dx^p}\left[a_p(x)\right]+(-1)^{p-1}\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left[a_{p-1}(x)\right]+\cdots-\frac{d}{dx}\left[a_1(x)\right]+a_0(x)$$

şeklindeki p. basamaktan lineer operatör L operatörünün adjoint operatörüdür. $L^*u=0$ diferansiyel denklemi ise $Lu=0$ diferansiyel denkleminin adjoint diferansiyel denklemidir.

$J(u,v)\Big|_a^b$ ifadesi $2p$ tane terimin toplamı olarak

$$u(a)A_{2p}v+\cdots+u^{(p-1)}(a)A_{p+1}v+u(b)A_p u+\cdots+u^{(p-1)}(b)A_1 v \tag{4.5.4}$$

şeklinde yazılır. Burada her bir A_k, $2p$ tane $v(a),\ldots,v^{(p-1)}(b)$ nin bir lineer kombinasyonudur. $B_1,\ldots,B_p$ verilirse (4.5.4) ifadesi p terimli $B_1u,\ldots,B_pu$ yerine, $2p$ terimli $u(a),\ldots,u^{(p-1)}(b)$ ile belirtilebilir. Böylece (4.5.4),

$$J\left(u,v\right)\Big|_a^b = \left(B_1 u\right)\left(B_{2p}^* v\right) + \cdots + \left(B_p u\right)\left(B_{p+1}^* v\right) + \left(B_{p+1} u\right)\left(B_p^* v\right) + \cdots + \left(B_{2p} u\right)\left(B_1^* v\right) \tag{4.5.5}$$

şeklinde yeniden yazılır. $B_1^*,\ldots,B_p^*$, $B_1,\ldots,B_p$ nin adjointi olmak üzere $B_1 u = \cdots = B_p u = 0$ şeklindeki p homojen sınır şartı verildiğinde v, $B_1^* v = \cdots = B_p^* v = 0$ şartlarını sağlarsa $J\left(u,v\right)\Big|_a^b = 0$ elde edilir.

Şimdi iki ve üç boyutlu sınır değer problemleri için bir örnek incelensin.

Örnek 4.5.1. Parçalı düzgün bir C eğrisi ile sınırlı, xy düzlemindeki bir R bölgesinde iki boyutlu iki plakadaki veya ince bir tabakadaki sıcaklık dikkate alınsın. Plakanın yüzeylerinin yalıtıldığı ve plakanın xy düzlemine dik yönde sıcaklığı değişmeyecek kadar ince olduğu kabul edilmek üzere değişik koşullar altında, t anında $\left(x,y\right)$ noktasındaki $u\left(x,y,t\right)$ sıcaklığı bulunmak istensin.

Plaka, δ yoğunluklu, belirli ısısı c, termik iletkenliği K olan bir materyalden yapılmış olsun ve bunların tümünün plakanın her yerinde sabit olduğu kabul edilsin. Bu kabuller altında, $u\left(x,y,t\right)$ sıcaklık fonksiyonunun iki boyutlu ısı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{4.5.6}$$

yi sağladığı gösterilebilir. k,

$$k = \frac{K}{c\delta}$$

plaka malzemesinin termik yayılma gücü olmak üzere (4.5.6) denkleminin sağ tarafındaki ikinci türevlerin toplamı, u fonksiyonunun *Laplasyenidir* ve genellikle

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.5.7}$$

ile gösterilir. Böylece iki boyutlu ısı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u \tag{4.5.8}$$

olarak yazılabilir. Denklem (4.5.8), bir boyutlu ısı denklemi $u_t = ku_{xx}$ ile karşılaştırıldığında bir boyuttan iki boyuta geçişte ikinci mertebeden u_{xx} türevinin, $\nabla^2 u$ Laplasyeni ile yer değiştirdiği görülür. Örneğin, esnek olarak gerilmiş bir hücre zarı xy düzlemindeki bir bölgede dengede ise ve dik olarak z yönünde titreşiyorsa zarın yer değiştirme fonksiyonu $z = z(x, y, t)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = a^2\nabla^2 z \tag{4.5.9}$$

iki boyutlu dalga denklemini sağlar. Denklem (4.5.8) in bir boyutlu ısı denklemiyle olan ilişkisi gibi, (4.5.9) denkleminin de bir boyutlu dalga denklemi $z_{tt} = a^2 z_{xx}$ ile aynıdır.

Şimdi u sıcaklığının zamanla değişmediği ve böylece sadece x ve y nin fonksiyonu olduğu, plakanın kararlı durum sıcaklığı incelensin. Bu durumda $u_t = 0$ dır ve (4.5.6) denkleminin iki boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4.5.10}$$

olur. Bu denklem, *potansiyel denklem* olarak da bilinir. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ üç boyutlu Laplace denklemi, elektrik ve yerçekimi potansiyel fonksiyonlar tarafından boş uzayda sağlanır. Ayrıca, sıkıştırılmaz ve yapışkan olmayan bir sıvının düzgün kararlı akışının hız potansiyel fonksiyonu tarafından da sağlanır.

Sınırlı, düzlemsel R bölgesinde Laplace denkleminin özel bir çözümü, uygun sınır koşulları ile belirlenebilir. Örneğin, bir plakadaki $u(x, y)$ kararlı durum sıcaklığı, eğer plakanın sınır eğrisinin her noktasında verilen bir $f(x, y)$ fonksiyonuna karşılık geldiği bilinirse hesaplanabilir.

Sınır değerleri verilmiş olan bir plakanın kararlı durum sıcaklığını bulmak için,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 && (R \ \ \textit{içinde}) \\ &u(x, y) = f(x, y) && ((x, y), C \ \ \textit{üzerinde}) \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

sınır değer problemi çözülmelidir.

Böyle bir problem, sınır değeri verilmiş olan bir R bölgesindeki Laplace denkleminin bir çözümünü bulma problemidir ve *Dirichlet problemi* olarak adlandırılır. C sınır eğrisi ve f sınır değer fonksiyonu kabul edilen şartları sağlarsa, bu problemin tek çözümü vardır.

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$
$$u(0,y)=u(a,y)=u(x,b)=0$$
$$u(x,0)=f(x)$$

Dirichlet probleminin çözümü için $u(x,y)=X(x)Y(y)$ alınarak $X''Y+XY''=0$ elde edilir. Böylece bazı λ sabiti için

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda \tag{4.5.12}$$

olur. Bu durumda $X(x)$,

$$X''+\lambda X=0$$
$$X(0)=X(a)=0$$

özdeğer problemini sağlamalıdır. Özdeğerler ve ilgili özfonksiyonlar $n=1,2,3,...$ için

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \qquad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{4.5.13}$$

dir. Homojen sınır koşullarının da yardımıyla

$$Y_n''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n=0, \qquad Y_n(b)=0 \tag{4.5.14}$$

elde edilir. (4.5.14) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$Y_n(y)=A_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

dır ve

$$Y_n(b)=A_n\cosh\frac{n\pi b}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}=0$$

koşulu

$$B_n = -\left[A_n \cosh\left(n\pi b/a\right)\right] / \left[\sinh\left(n\pi b/a\right)\right]$$

olduğunu ve böylece

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= A_n \cosh\frac{n\pi y}{a} - \frac{A_n \cosh\left(n\pi b/a\right)}{\sinh\left(n\pi b/a\right)}\sinh\frac{n\pi y}{a} \\ &= \frac{A_n}{\sinh\left(n\pi b/a\right)}\left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a} - \cosh\frac{n\pi b}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Böylece $c_n = A_n \big/ \sinh\left(n\pi b/a\right)$ olmak üzere

$$Y_n(y) = c_n \sinh\frac{n\pi(b-y)}{a} \tag{4.5.15}$$

olur. (4.5.13) ve (4.5.15) den

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a} \tag{4.5.16}$$

seri çözümü elde edilir.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = f(x)$$

homojen olmayan koşulunu sağlamak üzere, $\{c_n\}$ katsayıları seçilsin. Bunun için

$$c_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

ve böylece

$$c_n = \frac{2}{a\sinh\left(n\pi b/a\right)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{4.5.17}$$

olması istenir. Bu katsayı seçimi ile (4.5.16) daki seri, Dirichlet probleminin bir çözümüdür.

BÖLÜM 5. STURM-LİOUVİLLE SINIR DEĞER PROBLEMİ

5.1. Homojen Sturm-Liouville Problemi

(2.13a,b)-(2.14) homojen Sturm-Liouville problemi için $x \in [a,b]$ bölgesinde $p(x) \neq 0$ ve $p^{'}(x)$ türevi varsa, (2.12) ifadesindeki türev hesaplanıp $p(x)$ e bölünerek

$$u^{''} + \frac{p^{'}(x)}{p(x)} u^{'} - \frac{q(x)}{p(x)} u$$

ifadesi bulunur. $a_2(x) \neq 0$ için

$$a_2(x) u^{''} + a_1(x) u^{'} + a_0(x) u = 0 \tag{5.1.1}$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini (2.12) şekline dönüştürmek mümkündür. $a_1(x)$ ve $a_0(x)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere (5.1.1) denkleminin her iki tarafı

$$\mu(x) = \frac{1}{a_2(x)} \exp\left\{ \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx \right\} \neq 0 \tag{5.1.2}$$

ifadesi ile çarpılırsa

$$\exp\left\{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\}u'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\exp\left\{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\}u' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\exp\left\{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\}u = 0 \tag{5.1.3}$$

elde edilir. Burada

$$p(x) = \exp\left\{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\} \text{ ve } q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}\exp\left\{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right\}$$

alınırsa (5.1.3) denklemi

$$p(x)u'' + p'(x)u' + q(x)u = 0 \tag{5.1.4}$$

veya

$$\frac{d\left(p(x)u'\right)}{dx} + q(x)u = 0 \tag{5.1.5}$$

olarak yazılabilir. Bu denklem (2.12) denkleminin $\rho(x) \equiv 0$ özel halidir. (5.1.5) denklemi

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

denkleminin *eşlenik şeklidir.*

u ve v, $a \le x \le b$ aralığında sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere (2.13a) denklemi v ile çarpılıp integre edilirse

$$\int_a^b L[u]v\,dx = \int_a^b \left[-\left(pu'\right)' v + quv\right]dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_a^b L[u]v\,dx = -p(x)u'(x)v(x)\Big|_a^b + p(x)u(x)v'(x)\Big|_a^b + \int_a^b \left[-u\left(pv'\right)' + uqv\right]dx$$

$$= -p(x)\left[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right]\Big|_a^b + \int_a^b uL[v]\,dx$$

bulunur. Sağ taraftaki integrali diğer tarafa alırsak

$$\int_a^b \left\{L[u]v - uL[v]\right\}dx = -p(x)\left[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right]\Big|_a^b \tag{5.1.6}$$

Lagrange özdeşliği elde edilir.

Ayrıca u ve v fonksiyonları (2.14) sınır şartlarını sağlarsa, $\alpha_{12} \neq 0$ ve $\beta_{22} \neq 0$ olmak üzere (5.1.6) denkleminin sağ tarafı

$$-p(x)\left[u'(x)v(x) - v'(x)u(x)\right]\Big|_a^b$$

$$= -p(b)\left[u'(b)v(b) - v'(b)u(b)\right] + p(a)\left[u'(a)v(a) - u(a)v'(a)\right]$$

$$= -p(b)\left[-\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}u(b)v(b) + \frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}u(b)v(b)\right] + p(a)\left[-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}u(a)v(a) + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}u(a)v(a)\right]$$

$$= 0$$

olur. Böylece L diferansiyel operatörü (2.13a) şeklinde tanımlanır ve u ve v fonksiyonları (2.14) sınır şartlarını sağlarsa Lagrange özdeşliği

$$\int_a^b \left\{L[u]v - uL[v]\right\}dx = 0 \tag{5.1.7}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 5.1.1. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $x \in [a,b]$ aralığında tanımlanmış ve ikinci türeve sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle L[u],v\rangle - \langle u,L[v]\rangle &= p(x)\left[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right]\Big|_a^b \\ &= \left[-p(x)W(x)\right]\Big|_a^b \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

dır.

İspat.

$$\langle L[u],v\rangle = \int_a^b \left\{\left[p(x)u'(x)\right]' - q(x)u(x)\right\}v(x)\,dx$$

ve

$$\langle u,L[v]\rangle = \int_a^b \left\{\left[p(x)v'(x)\right]' - q(x)v(x)\right\}u(x)\,dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\langle L[u],v\rangle - \langle u,L[v]\rangle &= \int_a^b \left\{\left[p(x)u'(x)\right]' v(x) - \left[p(x)v'(x)\right]' u(x)\right\}dx \\ &= \int_a^b \left\{\left[p(x)u'(x)v(x)\right]' - p(x)v'(x)u'(x)\right\}dx \\ &\quad + \int_a^b \left\{\left[-p(x)u(x)v'(x)\right]' + p(x)v'(x)u'(x)\right\}dx \\ &= \int_a^b \left[-p(x)W(x)\right]' dx = -\left[p(x)W(x)\right]\Big|_a^b\end{aligned}$$

olduğu görülür.

(5.1.8) bağıntısı *Lagrange Özdeşliğinin* farklı bir gösterimidir. Eğer bu teoremin koşullarına ek olarak (2.14) sınır koşulları sağlanırsa

$$\langle L[u],v\rangle = \langle u, L[v]\rangle$$

yani

$$\langle L[u],v\rangle - \langle u, L[v]\rangle = 0 \tag{5.1.9}$$

elde edilir. Bu özelliğe sahip L diferansiyel operatörü *kendine eşlenik operatördür.*

Örnek 5.1.1. $u''(x)+\lambda u(x)=0$

$u(0)=0,\ \ u'(\pi)=0$

homojen Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özvektörlerini inceleyiniz.

1. $\lambda=0$ ise $u''(x)=0$ olduğundan

$$u(x)=c_1+c_2x$$

bulunur. Sınır şartları yerine yazılırsa

$$u(0)=c_1=0 \qquad \Rightarrow c_1=0$$
$$u'(x)=c_2 \quad \Rightarrow u'(\pi)=c_2=0 \quad \Rightarrow c_2=0$$

dolayısıyla $u(x)=0$ elde edilir.

2. $\lambda<0$ ise $r^2+\lambda r=0 \quad \Rightarrow r=\pm\sqrt{-\lambda}$ olduğundan genel çözüm

$$u(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

şeklindedir. Sınır şartları yardımıyla

$$u(0)=c_1+c_2=0$$
$$u'(x)=\sqrt{-\lambda}\left[c_1e^{\sqrt{\lambda}x}-c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}\right]$$
$$u'(\pi)=\sqrt{-\lambda}\left[c_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}-c_2e^{-\sqrt{\lambda}\pi}\right]=0$$

buradan $c_1=c_2=0$ yani $u(x)=0$ elde edilir.

3. $\lambda>0$ ise $r^2+\lambda r=0 \Rightarrow r=\pm i\sqrt{\lambda}$ olduğundan genel çözüm

$$u(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

şeklindedir. Sınır şartlarını kullanarak

$$u(0)=c_1\cos\sqrt{\lambda}0+c_2\sin\sqrt{\lambda}0=0 \quad \Rightarrow c_1=0$$
$$u'(x)=-\sqrt{\lambda}\left[c_1\sin\sqrt{\lambda}x-c_2\cos\sqrt{\lambda}x\right]$$
$$u'(0)=-\sqrt{\lambda}\left[c_1\sin\sqrt{\lambda}0-c_2\cos\sqrt{\lambda}0\right]=0$$

bulunur. Denklemlerin çözümü ile

$$\sqrt{\lambda}\pi=\left(\frac{2k-1}{2}\right)\pi \qquad \Rightarrow \lambda=\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2$$

özdeğeri elde edilir. Buna karşılık gelen özfonksiyon ise

$$u(x)=c_2\sin\left(\frac{2k-1}{2}\right)x$$

olur.

5.2. Regüler Sturm-Liouville Problemi

Teorem 5.2.1. (2.12)-(2.14) regüler Sturm-Liouville sınır değer probleminin tüm özdeğerleri basittir.

İspat. $\phi(x)$ ve $\psi(x)$, λ özdeğerine karşılık gelen iki özfonksiyon olsun. Böylece bu özfonksiyonlar, diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını sağlar. Buradan

$$\alpha_{11}\phi(a)+\alpha_{12}\phi'(a)=0$$
$$\alpha_{11}\psi(a)+\alpha_{12}\psi'(a)=0$$

olur. $\alpha_{12}\neq 0$ olmak üzere

$$\phi'(a)=\left(-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\right)\phi(a) \qquad \text{ve} \qquad \psi'(a)=\left(-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\right)\psi(a)$$

elde edilir. $x=a$ noktasında $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının Wronskianlarına bakılırsa

$$\begin{aligned} W[\phi,\psi](a) &= \phi(a)\psi'(a)-\phi'(a)\psi(a) \\ &= \phi(a)\left(-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\right)\psi(a)-\left(-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\right)\phi(a)\psi(a)=0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda iki çözüm lineer bağımlıdır. Böylece λ, basit bir özdeğerdir.

Teorem 5.2.2. (2.12)-(2.14) Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri reeldir.

İspat. Kabul edelim ki λ_n, (2.12)-(2.14) probleminin kompleks bir özdeğeri ve $\Phi(x)$, bu özdeğere karşılık gelen kompleks bir özfonksiyon olsun. μ, v, $U(x)$,

$V(x)$ reel olmak üzere $\lambda = \mu + iv$ ve $\Phi(x) = U(x) + iV(x)$ olarak alınsın. (5.1.9) denkleminde $u = \Phi$ ve $v = \Phi$ alınırsa

$$\langle L[\Phi], \Phi \rangle = \langle \Phi, L[\Phi] \rangle \tag{5.2.1}$$

bulunur. $L[\Phi] = \lambda\rho\Phi$ olduğundan (5.2.1) denklemi

$$\langle \lambda\rho\Phi, \Phi \rangle = \langle \Phi, \lambda\rho\Phi \rangle \tag{5.2.2}$$

olur. Bu denklem, (2.15) iç çarpımı tanımı kullanılarak yazılırsa

$$\int_a^b \lambda\rho(x)\Phi(x)\overline{\Phi}(x)\,dx = \int_a^b \Phi(x)\overline{\lambda}\overline{\rho}(x)\overline{\Phi}(x)\,dx \tag{5.2.3}$$

elde edilir. $\rho(x)$ reel olduğundan

$$\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\int_a^b \rho(x)\Phi(x)\overline{\Phi}(x)\,dx = 0$$

veya

$$\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\int_a^b \rho(x)\left[U^2(x) + V^2(x)\right]dx = 0 \tag{5.2.4}$$

bulunur. (5.2.4) denklemindeki integrand negatif olmayandır ve sıfır değerini de alamaz. Ayrıca sürekli olduğundan integral işleminin sonucu pozitiftir. O halde $\lambda - \overline{\lambda} = 2iv$ çarpanı sıfır olmak zorundadır. Böylece $v = 0$ dır ve λ reeldir.

Teorem 5.2.3. Özfonksiyonların Dikliği

(2.12) denklemindeki $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve $[a,b]$ aralığının her noktasında $p(x)>0$ ve $\rho(x)>0$ olsun. (2.12)-(2.14) Sturm-Liouville probleminde, $u_i(x)$ ve $u_j(x)$ farklı λ_i ve λ_j $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)\rho(x)\,dx = 0 \tag{5.2.5}$$

dır.

İspat. (2.12)-(2.14) probleminin λ_i ve λ_j özdeğerlerinin ilgili özfonksiyonları $u_i(x)$ ve $u_j(x)$ sırası ile

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du_i}{dx}\right]-q(x)u_i+\lambda_i\rho(x)u_i=0 \\ \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du_j}{dx}\right]-q(x)u_j+\lambda_j\rho(x)u_j=0 \end{array}\right\} \tag{5.2.6}$$

denklemlerini sağlar. Birinci denklem $u_j(x)$ ile, ikinci denklem $u_i(x)$ ile çarpılıp çıkarılırsa

$$u_j\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_i}{dx}\right]-u_i\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_j}{dx}\right]+\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\rho(x)u_iu_j=0$$

elde edilir. Böylece

$$\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\rho(x)u_iu_j=u_i\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_j}{dx}\right]-u_j\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_i}{dx}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(u_i \frac{du_j}{dx} - u_j \frac{du_i}{dx} \right) \right]$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı integre edilirse

$$\left(\lambda_i - \lambda_j\right)\int_a^b u_i(x)u_j(x)\rho(x)\,dx = \left[p(x)\left(u_i(x)u_j'(x) - u_i'(x)u_j(x)\right)\right]\Big|_a^b \qquad (5.2.7)$$

olur. (2.14) sınır koşullarının ilki yardımıyla

$$\alpha_{11}u_i(a) - \alpha_{12}u_i'(a) = 0$$
$$\alpha_{11}u_j(a) - \alpha_{12}u_j'(a) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler lineer denklem sistemi olarak düşünülürse, α_{11} ve α_{12} ikisi aynı anda sıfır olamayacağından bu denklem sisteminin sıfırdan farklı olan bir çözümü vardır. Dolayısıyla bu sistemin katsayılar determinantı sıfırdır. Yani,

$$u_i(a)u_j'(a) - u_i'(a)u_j(a) = 0$$

şeklindedir. Diğer sınır koşulu yardımı ile de

$$u_i(b)u_j'(b) - u_i'(b)u_j(b) = 0$$

olur. Buradan da (5.2.7) eşitliğinin sağ tarafı

$$\left[p(x)\left(u_i(x)u_j'(x) - u_i'(x)u_j(x)\right)\right]\Big|_a^b = 0$$

bulunur. $\lambda_i \neq \lambda_j$ olduğundan $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ dır. Dolayısıyla

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)\rho(x)\,dx = 0$$

elde edilmiş olur.

5.3. Özfonksiyon Açılımları

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ fonksiyonları (2.12)-(2.14) Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları olmak üzere, $u(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(x) \tag{5.3.1}$$

özfonksiyon serisi biçiminde gösterilebilir olsun. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ katsayılarını belirlemek için (5.3.1) eşitliğinin her iki tarafı $u_n(x)\rho(x)$ ile çarpılır ve sağ taraftaki serinin terim terime integrallenebilir olması durumunda a dan b ye integre edilirse

$$\int_a^b u(x)u_n(x)\rho(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b u_m(x)u_n(x)\rho(x)\,dx \tag{5.3.2}$$

elde edilir. Özfonksiyonların diklik özelliğinden, eşitliğin sağ tarafındaki seri $m = n$ için olan terimi dışındaki tüm terimleri sıfırdır. Buradan

$$\int_a^b u(x)u_n(x)\rho(x)\,dx = c_n \int_a^b \left[u_n(x)\right]^2 \rho(x)\,dx$$

olur. Buradan da

$$c_n = \frac{\int_a^b u(x)u_n(x)\rho(x)\,dx}{\int_a^b \left[u_n(x)\right]^2 \rho(x)\,dx} \tag{5.3.4}$$

elde edilir. Böylece, $u(x)$ fonksiyonunu verilen Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları cinsinden ifade eden ve katsayıları (5.3.4) formülü ile belirlenen (5.3.1) özfonksiyon serisi tanımlanmış olur.

(5.3.2) ifadesi δ fonksiyonu ile

$$\int_a^b u(x)u_n(x)\rho(x)\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\int_a^b u_m(x)u_n(x)\rho(x)\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\delta_{mn} \qquad (5.3.5)$$

şeklinde yazılabilirdir. Buradan da

$$c_m=\int_a^b u(x)u_n(x)\rho(x)\,dx=\langle u,\rho u_n\rangle \qquad m=1,2,\ldots \qquad (5.3.6)$$

elde edilir.

Teorem 5.3.1. Özfonksiyon Serisinin Yakınsaklığı

$u_1,u_2,u_3,\ldots$ $[a,b]$ aralığında regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları olsun. Eğer $u(x)$, $[a,b]$ de parçalı düzgün bir fonksiyon ise $a<x<b$ için (5.3.1) özfonksiyon serisi u fonksiyonunun sürekli olduğu x noktalarında $u(x)$ değerine, u fonksiyonunun süreksiz olduğu x noktalarında ise bu süreksizlik noktasındaki sol ve sağ limitlerin $\frac{1}{2}\left[u(x+)+u(x-)\right]$ ortalama değerine yakınsaktır.

5.4. Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonu

(2.12) denkleminde $\rho(x)=1$ ve $p(x)>0$ olsun:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=\lambda u \qquad a\le x\le b \qquad (5.4.1)$$

$u_1(x,\lambda)$ ve $u_2(x,\lambda)$ fonksiyonları bu denklemin

$$\left.\begin{array}{ll} u_1(a,\lambda)=-\alpha_{12}, & u_1'(a,\lambda)=\alpha_{11} \\ u_2(b,\lambda)=-\beta_{22}, & u_2'(b,\lambda)=\beta_{21} \end{array}\right\} \tag{5.4.2}$$

sınır koşularını sağlayan herhangi iki çözümü olsun. Bu çözümler (5.4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_1}{dx}\right)+q(x)u_1=\lambda u_1$$
$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_2}{dx}\right)+q(x)u_2=\lambda u_2$$

olur. Birinci denklem u_2 ile, ikinci denklem u_1 ile çarpılarak taraf tarafa çıkarılır ve gerekli cebirsel işlemler yapılırsa

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)W\left[u_1(x,\lambda),u_2(x,\lambda)\right]\right\}=0$$

elde edilir. Parantezli ifadenin türevi sıfır olduğundan, x değişkenine bağlı değildir. Bu terim

$$\Delta(\lambda)=p(x)W\left[u_1(x,\lambda),u_2(x,\lambda)\right] \tag{5.4.3}$$

olarak tanımlansın. Burada $\Delta(\lambda)$, λ ya bağlı analitik bir fonksiyondur. $\lambda=\lambda_0$, $\Delta(\lambda)=0$ denkleminin bir kökü olsun. O halde (5.4.3) den

$$W\left[u_1(x,\lambda_0),u_2(x,\lambda_0)\right]=0$$

dır. Dolayısıyla $u_1(x,\lambda_0)$ ve $u_2(x,\lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Bu nedenle bu fonksiyonların her biri, (5.4.2) sınır şartlarının yanı sıra (2.14) sınır koşullarını da sağlar. Yani $\lambda=\lambda_0$ sayısı verilen Sturm-Liouville probleminin bir özdeğeri olur.

Teorem 5.4.1. $\lambda=\lambda_0$ sayısının (2.13a,b)-(2.14) Sturm-Liouville probleminin özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta(\lambda_0)=0$$

sağlanmasıdır.

$$G(x,\xi;\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases} u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda), & x\le\xi \\ u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda), & x>\xi \end{cases} \qquad (5.4.4)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Eğer λ bir özdeğer değilse $G(x,\xi;\lambda)$ fonksiyonu $a\le x,\ \xi\le b$ karesel bölgesinde tanımlanmış ve sürekli bir fonksiyondur.
2. $\xi=x$ için bu fonksiyonun x noktasına göre sağ ve sol türevler

$$G'(x+0,x;\lambda)=\lim_{h\to0^+}\frac{G(x+h,x;\lambda)-G(x,x;\lambda)}{h}=\frac{u_1(x,\lambda)u_2'(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$G'(x-0,x;\lambda)=\lim_{h\to0^-}\frac{G(x+h,x;\lambda)-G(x,x;\lambda)}{h}=\frac{u_1'(x,\lambda)u_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

şeklindedir. Buradan da

$$G'(x+0,x;\lambda)-G'(x-0,x;\lambda)=\frac{u_1(x,\lambda)u_2'(x,\lambda)-u_1'(x,\lambda)u_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$=\frac{W\left[u_1(x,\lambda),u_2(x,\lambda)\right]}{\Delta(\lambda)}=\frac{1}{p(x)}$$

elde edilir. Yani $G(x,\xi;\lambda)$ fonksiyonu $x=\xi$ doğrusu üzerinde süreksizdir.

3. λ bir özdeğer değil ise $x\neq\xi$ olduğundan $G(x,\xi;\lambda)$ fonksiyonu, (5.4.1) denklemini ve (2.14) sınır koşullarını sağlar.
4. $G(x,\xi;\lambda)$ fonksiyonu simetriktir: $G(x,\xi;\lambda)=G(\xi,x;\lambda)$
5. Eğer λ bir özdeğer değil ise, $[a,b]$ aralığında sürekli olan keyfi bir $f(x)$ fonksiyonu yardımıyla

$$u(x,\lambda)=\int_a^b G(x,\xi;\lambda)f(\xi)\,d\xi \tag{5.4.5}$$

$$=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[u_2(x,\lambda)\int_a^x u_1(\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi+u_1(x,\lambda)\int_x^b u_2(\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi\right]$$

fonksiyonu

$$L[u]+\lambda u=f \tag{5.4.6}$$

denkleminin, (2.14) sınır şartlarını sağlayan bir çözümüdür.

Buradaki $G(x,\xi;\lambda)$ fonksiyonu Sturm-Liouville probleminin *Green fonksiyonudur.*

Teorem 5.4.2. $G(x,\xi;\lambda)$, regüler bir Sturm-Liouville sınır değer probleminin Green fonksiyonu olsun.

$$u(x,\lambda)=\int_a^b G(x,\xi;\lambda)f(\xi)\,d\xi$$

fonksiyonu, regüler Sturm-Liouville sınır değer probleminin çözümüdür.

İspat. $u(x,\lambda)$ fonksiyonu, problemin bir çözümü olsun. Bu durumda (2.14) sınır şartlarını sağlar.

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)W\left[u_1(x,\lambda),u_2(x,\lambda)\right]\right\}=0$$

eşitliğinden

$$p(x)W\left[u_1(x,\lambda),u_2(x,\lambda)\right]=C$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
u'(x,\lambda) &= u_2'(x,\lambda)\int_a^x \frac{u_1(\xi,\lambda)f(\xi)}{C}d\xi - \frac{u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda)f(x)}{C} \\
&\quad + u_1'(x,\lambda)\int_x^b \frac{u_2(\xi,\lambda)f(\xi)}{C}d\xi + \frac{u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda)f(x)}{C} \\
&= u_2'(x,\lambda)\int_a^x \frac{u_1(\xi,\lambda)f(\xi)}{C}d\xi + u_1'(x,\lambda)\int_x^b \frac{u_2(\xi,\lambda)f(\xi)}{C}d\xi
\end{aligned}$$

olmak üzere $u_1(x,\lambda)$, (2.14) sınır şartını sağladığından

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}u(a,\lambda)+\alpha_{12}u'(a,\lambda) &= \alpha_{11}u_1(a,\lambda)\int_a^b \frac{u_2(\xi,a)f(\xi)}{C}d\xi \\
&\quad + \alpha_{12}u_1'(a,\lambda)\int_a^b \frac{u_2(\xi,a)f(\xi)}{C}d\xi \\
&= \left[\alpha_{11}u_1(a,\lambda)+\alpha_{12}u_1'(a,\lambda)\right]\int_a^b \frac{u_2(\xi,a)f(\xi)}{C}d\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $u(x,\lambda)$ fonksiyonu da (2.14) sınır şartını sağlar. Böylece $u(x,\lambda)$, regüler Sturm-Liouville probleminin çözümüdür.

5.5. Periyodik Sturm-Liouville Problemi

Periyodik Sturm-Liouville problemi, regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi ile benzer özellikler gösterir. Periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri, basit olmak zorunda değildir.

Bir periyodik Sturm-Liouville problemi

$$\left.\begin{array}{c}\left(p(x)u'(x)\right)'+q(x)u(x)+\lambda\rho(x)u(x)=0\\ u(0)=u(2T)\\ u'(0)=u'(2T)\end{array}\right\} \tag{5.5.1}$$

şeklindedir. Burada $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonları $2T$ periyotlu sürekli fonksiyonlar ve $p(x)>0$, $q(x)>0$ dır.

Teorem 5.5.1. (5.5.1) periyodik Sturm-Liouville problemi için

1. Özdeğerler reeldir, sayılabilir formda ve ıraksaktır,

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3\ldots \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$$

2. Özfonksiyonlar reel değerli seçilebilir.
3. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, $[0,2T]$ aralığında $\rho(x)$ fonksiyonuna göre ortogonaldir.
4. ϕ_n, $n=1,2,\ldots$ ortonormal özfonksiyonlar dizisi; u, $2T$ periyotlu peryodik ve sürekli bir fonksiyon; $u'(x)$ parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Böylece

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x) \tag{5.5.2}$$

şeklindedir. Burada

$$a_n = \int_0^{2T} u(x)\phi_n(x)\rho(x)\,dx$$

dir. (5.5.2) çözümündeki seri, $[0,2T]$ aralığında yakınsaktır.

5.6. Homojen Olmayan Regüler Sturm-Liouville Problemi

μ sabit bir sayı ve $f(x)$, $a \le x \le b$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$L[u] = -\left[p(x)u'\right]' + q(x)u = \mu\rho(x)u + f(x) \tag{5.6.1}$$

şeklindeki regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0 \\ \beta_{21}u(b) + \beta_{22}u'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.6.2}$$

sınır şartları ile birlikte ele alınsın. Bu denklem,

$$L[u] = \lambda\rho(x)u \tag{5.6.3}$$

şeklindeki diferansiyel denkleminin içerdiği homojen problemin özfonksiyonlarını ve (5.6.2) sınır şartlarını kullanarak çözülür. $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ problemin özdeğerleri, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ ise bu özdeğerlere karşılık gelen normalleştirilmiş özfonksiyonlar olarak alınsın.

(5.6.1)–(5.6.2) probleminin bir $u = \phi(x)$ çözümü

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \tag{5.6.4}$$

şeklindeki gibi seriler ile ifade edilebilsin. (5.3.6) denkleminden

$$c_n = \int_a^b \phi(x)\phi_n(x)\rho(x)\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5.6.5}$$

şeklindedir. (5.6.1) denkleminde u ile ϕ yer değiştirilirse

$$L[\phi](x) = \mu\rho(x)\phi(x) + f(x) \tag{5.6.6}$$

olur. (5.6.4) seri çözümü (5.6.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L[\phi](x) &= L\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n\right](x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L[\phi_n](x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n\rho(x)\phi_n(x) \end{aligned} \tag{5.6.7}$$

elde edilir. (5.6.6) denklemindeki homojen olmayan kısmın terimi, $\rho(x)$ cinsinden $\rho(x)\left[f(x)/\rho(x)\right]$ olarak yazılabilir. $f(x)/\rho(x)$ fonksiyonu, teorem 5.3.1 deki şartları sağlarsa

$$\frac{f(x)}{\rho(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x) \tag{5.6.8}$$

elde edilir. (5.6.5) denkleminden ϕ ve f/ρ yer değiştirilir ise

$$b_n = \int_a^b \rho(x)\frac{f(x)}{\rho(x)}\phi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5.6.9}$$

bulunur. (5.6.6) denkleminde $\phi(x)$, $L[\phi](x)$ ve $f(x)$ yerine (5.6.4), (5.6.7) ve (5.6.8) denklemlerindeki değerler yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \rho(x)\phi_n(x) = \mu\rho(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) + \rho(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x)$$

elde edilir. $\rho(x) \neq 0$ çarpanı sadeleştirilir ve toplam alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\lambda_n - \mu)c_n\right]\phi_n(x) = 0 \qquad (5.6.10)$$

bulunur. (5.6.10) denklemi $a \leq x \leq b$ aralığındaki $\forall x$ için incelendiğinde $\phi_n(x)$ katsayıları $\forall n$ için sıfır olmalıdır. Buradan da

$$(\lambda_n - \mu)c_n - b_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (5.6.11)$$

elde edilmiş olur.

- $\mu \neq \lambda_n$ $n = 1, 2, \ldots$ olsun. Bu durumda

$$c_n = \frac{b_n}{\lambda_n - \mu} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (5.6.12)$$

ve

$$u = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n - \mu}\phi_n(x) \qquad (5.6.13)$$

elde edilmiş olur. (5.6.13) denklemi, (5.6.9) eşitliğindeki verilen b_n ile birlikte (5.6.1)-(5.6.2) homojen olmayan sınır değer probleminin genel çözümüdür.

- $\mu = \lambda_n$ ise bu durumda $n = m$ için (5.6.11) denklemi

$$0c_m - b_m = 0$$

olur. Buradan da $\mu=\lambda_n$ ve $b_m \neq 0$ ise (5.6.11) denklemini çözmek mümkün değildir. Dolayısıyla (5.6.1)-(5.6.2) probleminin çözümü yoktur.

$\mu=\lambda_n$ ve $b_m=0$ ise (5.6.11) denklemi c_m değeri önemsenmeden çözülür. Yani c_m keyfidir. Bu durumda (5.6.1)-(5.6.2) probleminin çözümü vardır fakat ϕ_m özfonksiyonu keyfi bir katsayı içerdiğinden, tek değildir.

(5.6.9) denkleminde $c_m=0$ alınırsa

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\,dx=0 \qquad (5.6.14)$$

elde edilir. Böylece $\mu=\lambda_n$ ise (5.6.1)-(5.6.2) homojen olmayan sınır değer problemi, f fonksiyonunun λ_m özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlara dik olması şartı ile çözülebilir.

Teorem 5.6.1. (5.6.1)-(5.6.2) homojen olmayan sınır değer problemi için μ, homojen problemin bütün özdeğerlerinden farklı olduğunda, her bir f fonksiyonu için tek çözüme sahiptir ve çözüm, serinin $\forall x$ için yakınsak olması koşulu ile (5.6.13) şeklindedir. μ, homojen problemin herhangi bir özdeğerine eşit ise, homojen olmayan sınır değer probleminin f fonksiyonu ile ϕ_m ortogonal olmadıkça çözümü yoktur. Bu durumda çözüm tek değildir ve ϕ_m özfonksiyonunun keyfi bir katsayısını içerir.

Teorem 5.6.2 Fredholm Alternatif Teoremi

μ nün verilen bir değeri için (5.6.1)-(5.6.2) homojen olmayan problemi her f sürekli fonksiyonu için ya tek çözüme sahiptir ya da (5.6.3)-(5.6.2) homojen problemi aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

5.7. Singüler Sturm-Liouville Problemi

(2.16) tanımı ile verilen singüler Sturm-Liouville denklemi için üç önemli örnek: Bessel diferansiyel denklemi, Legendre diferansiyel denklemi ve Hermit diferansiyel denklemidir.

$$t^2u''(t)+tu'(t)+(t^2-\upsilon^2)u=0, \qquad 0<t<\sqrt{\lambda}b$$

υ. mertebeden Bessel diferansiyel denkleminde $t=\sqrt{\lambda}x$ alınır ve her taraf x ile bölünürse

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)-\frac{\upsilon^2}{x}u+\lambda xu=0, \qquad 0<x<b$$

singüler Sturm-Liouville denklemi elde edilir. Burada $p(x)=x\to 0$ ve $x\to 0^+$ iken $q(x)=-\upsilon^2/x$ sınırsızdır.

$$(1-x^2)u''-2xu'+n(n+1)u=0, \qquad -1<x<1$$

Legendre denkleminde $\lambda=n(n+1)$ alınarak

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0, \qquad -1<x<1$$

singüler Sturm-Liouville denklemi elde edilir. Burada $p(x)=1-x^2$ fonksiyonunun değeri ± 1 bitiş noktalarında sıfırdır.

$$u''-2xu'+2nu=0, \qquad -\infty<x<\infty$$

Hermite diferansiyel denklemi, e^{-x^2} ile çarpılırsa $\lambda=2n$ olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right]+\lambda e^{-x^2}u=0, \qquad -\infty<x<\infty$$

singüler Sturm-Liouville denklemi elde edilir. Burada $(-\infty,\infty)$ aralığı sınırsızdır.

Bir regüler Sturm-Liouville problemine karşılık gelen lineer operatör self-adjoint idi. Singüler Sturm-Liouville probleminin ise sınır şartları, self adjoint problem yardımıyla oluşturulur. Green formülü incelenirse, tek farkın integralin sınırlarında olduğu görülür. $p(x)$ ve $q(x)$, (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_a^b \left(uL[v]-vL[u]\right)dx=\lim_{x\to b^-}p(x)W[u,v;x]-\lim_{x\to a^+}p(x)W[u,v;x] \qquad (5.7.1)$$

elde edilir. Eğer bu denklemin sağ tarafı sıfır ise, L operatörü *self adjointtir*. Bunun için parçalanmış olan limit ifadesi sıfır olmalıdır. Bu durumda,

$$\lim_{x\to a^+}p(x)\left[u(x)v'(x)-u'(x)v(x)\right]=0 \qquad (5.7.2)$$

halini, hangi sınır şartlarının sağladığını görmek için şimdiki lemma verilebilir.

Lemma 5.7.1. Singüler Sınır Şartları

(5.7.2) denklemini, aşağıdaki üç şartın herhangi biri gerçekler.

i. $\lim_{x\to a^+}p(x)=p(a)$ dır ve $y(x)$, $z(x)$ fonksiyon çifti

$$\alpha_{11}u(a)+\alpha_{12}u'(a)=0, \qquad \alpha_{11}^{\;2}+\alpha_{12}^{\;2}\neq 0$$

sınır şartını sağlar.

ii. $\lim_{x\to a^+}p(x)=0$ ve $y(x)$, $z(x)$ fonksiyon çifti

$$x \to a^{+} \text{ iken } u(x) \text{ ve } u^{'}(x)$$

kalan sınır şartını sağlar.

iii. $y(x)$, $z(x)$ fonksiyon çifti

$$\lim_{x\to a^{+}} \sqrt{p(x)}u(x) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a^{+}} \sqrt{p(x)}u^{'}(x) = 0$$

şartlarını sağlar.

İspat.

i. $\alpha_{11} \neq 0$ ise $y^{'}(a) = z^{'}(a) = 0$ olur ve (5.7.2) sağlanır. Diğer taraftan fonksiyonlar, sınır şartını sağladığından

$$y(a) = -(\alpha_{12}/\alpha_{11})\,y^{'}(a)$$
$$z(a) = -(\alpha_{12}/\alpha_{11})\,z^{'}(a)$$

şeklindedir. Bunlar (5.7.2) denkleminin sol tarafında yerine yazılırsa

$$p(a)\left[y(a)z^{'}(a) - z(a)y^{'}(a)\right]$$
$$= p(a)\left[-(\alpha_{12}/\alpha_{11})\,y^{'}(a)z^{'}(a) + -(\alpha_{12}/\alpha_{11})\,z^{'}(a)y^{'}(a)\right] = 0$$

işleminin sonucunda (5.7.2) sağlanır.

ii. $x \to a^{+}$ iken y, $y^{'}$, z, $z^{'}$ kalan sınırlardan ise, (5.7.2) denkleminin sol tarafındaki köşeli parantezli çarpan sınırlı olur. $\lim_{x\to a^{+}} p(x) = 0$ olduğundan sol taraftaki terimin her bir çarpanı sınırlıdır ve buradan da sol taraf sıfır olur. Dolayısıyla (5.7.2) sağlanır.

iii. $y(x)$, $z(x)$ fonksiyon çiftinin sınırları sağladığını kabul edelim. Bu durumda (5.7.2) denkleminde yerine yazıldığında

$$\lim_{x\to a^+} p(x)\left[u(x)v'(x)-u'(x)v(x)\right]=\left(\lim_{x\to a^+}\sqrt{p(x)}y(x)\right)\left(\lim_{x\to a^+}\sqrt{p(x)}z'(x)\right)$$
$$-\left(\lim_{x\to a^+}\sqrt{p(x)}y'(x)\right)\left(\lim_{x\to a^+}\sqrt{p(x)}z(x)\right)=0-0=0$$

elde edilir. Böylece (5.7.2) sağlanır.

Bu lemma, diğer bitiş şartı için de geçerlidir;

$$\lim_{x\to b^-} p(x)\left[u(x)v'(x)-u'(x)v(x)\right]=0 \tag{5.7.3}$$

(5.7.2) ve (5.7.3) şartları sağlanırsa L operatörü self-adjointtir.

Singüler Sturm-Liouville denkleminin sınır şartları yardımıyla verilen bir lineer operatörü, self-adjointtir. Regüler ve singüler Sturm-Liouville problemleri arasındaki en önemli fark, singüler problemin özdeğerlerinin farklı olmaması durumudur. Yani problemin, her λ değeri için veya herhangi bir aralıktaki λ değerlerinin aşikâr olmayan çözümü vardır. Bu durumdaki problemin bir *sürekli spektrumu* vardır. Buradan anlaşıldığı gibi singüler bir problemde, farklı özdeğerler veya sürekli bir spektrum bulunur. Sürekli spektruma sahip değil fakat sonsuz sayıda farklı özdeğeri varsa, regüler durumun genişletilmesiyle özdeğerlerin reel olduğu ve farklı özdeğerlerin özfonksiyonları (a,b) aralığında $\rho(x)$ fonksiyonuna göre ortogonal olduğu görülür.

5.7.1. Bessel Diferansiyel Denklemi

(2.18)-(2.19) ile beraber

$$u(0)=u(b)=0 \tag{5.7.1.1}$$

sınır koşullarının oluşturduğu singüler Sturm-Liouville probleminde

$$x = \sqrt{\lambda}x \qquad (5.7.1.2)$$

dönüşümü yapılırsa

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\upsilon^2}{x^2}\right)u = 0 \qquad (5.7.1.3)$$

Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Kuvvet serileri yardımıyla, bu denklemin

$$u(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0 \qquad (5.7.1.4)$$

şeklinde bir seri çözümü vardır. Bu çözüm (5.7.1.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (r^2 - \upsilon^2)a_0 &= 0 \\ \left[(r+1)^2 - \upsilon^2\right]a_1 &= 0 \\ \left[(r+2)^2 - \upsilon^2\right]a_2 &= -a_0 \\ &\cdots \\ \left[(r+n)^2 - \upsilon^2\right]a_n &= -a_{n-2} \end{aligned} \qquad (5.7.1.5)$$

denklem sistemi oluşur. $a_0 \neq 0$ olduğundan ilk denklemden $r_1 = \upsilon$ ve $r_2 = -\upsilon$ bulunur.

1. $r_1 - r_2 = 2\upsilon$ sayısı pozitif bir tamsayı olmasın. O halde Frobenius teoreminden verilmiş denklemin (5.7.1.4) serisi şeklinde iki lineer bağımsız çözümü vardır.

$r = \upsilon$ için (5.7.1.5) sistemi çözülürse

$$a_1 = 0 \quad \text{ve} \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2\upsilon + n)}, \qquad n = 2,3,4,\ldots$$

bulunur. Buradan da tek indisli katsayılar

$$a_{2n+1} = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

çift indisli katsayılar ise

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}(\upsilon+1)(\upsilon+2)\cdots(\upsilon+n)n!} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

bulunur. Burada a_0 keyfi bir sabittir. Özel olarak a_0,

$$\Gamma(\upsilon) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\upsilon-1} dx, \qquad \upsilon > 0$$

gamma fonksiyonu yardımı ile

$$a_0 = \frac{1}{2^\upsilon \Gamma(\upsilon+1)}$$

şeklinde seçilsin. Kısmi integrasyon ile

$$\Gamma(\upsilon+n+1) = (\upsilon+1)(\upsilon+2)\cdots(\upsilon+n)\Gamma(\upsilon+1)$$

olduğundan

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\upsilon} n!\Gamma(\upsilon+n+1)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

elde edilir. (5.7.1.4) serisinde yerine yazılırsa Bessel denkleminin

$$u_1(x) \equiv J_\upsilon(x) = x^\upsilon \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2^{2n+\upsilon} n!\Gamma(\upsilon+n+1)} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\upsilon+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\upsilon} \qquad (5.7.1.6)$$

tipindeki bir özel çözümü elde edilir.

$r = -\upsilon$ için benzer şekilde

$$u_2(x) \equiv J_{-\upsilon}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\upsilon+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\upsilon} \qquad (5.7.1.7)$$

ikinci özel çözüm bulunur. Buradan genel çözüm

$$u(x) = C_1 J_\upsilon(x) + C_2 J_{-\upsilon}(x), \qquad x > 0 \qquad (5.7.1.8)$$

biçimindedir.

Buradaki $J_\upsilon(x)$ fonksiyonuna birinici tipten ve υ 'üncü mertebeden *Bessel fonksiyonudur.*

2. $r_1 - r_2 = 2\upsilon$ sayısı tek pozitif bir tamsayıya eşit olsun. Bu durumda

$$\upsilon = \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2}$$

şeklinde, tek olan bir tamsayının yarısına eşittir. (5.7.1.5) sisteminde $r = -\upsilon$ için tek indisli katsayılar

$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{(2n+1)(-2\upsilon+2n+1)} \qquad (5.7.1.9)$$

elde edilir. Buradan, $n = k$ için

$$0 \cdot a_{2k+1} = a_{2k-1}$$

belirsizliği oluşur. Bütün tek indisli terimlerin katsayıları sıfır ve

$$-\upsilon = -k - \frac{1}{2}$$

alınarak

$$J_{-k-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(-k+n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k-\frac{1}{2}} \qquad (5.7.1.10)$$

özel çözümü bulunur.

$$\upsilon = k + \frac{1}{2}$$

alınarak ikinci özel çözüm

$$J_{k+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k+\frac{1}{2}} \qquad (5.7.1.11)$$

elde edilir. Buradan da genel çözüm

$$u(x) = C_1 J_\upsilon(x) + C_2 J_{-\upsilon}(x), \qquad \upsilon = k + \frac{1}{2}, \quad x > 0 \quad (5.7.1.12)$$

bulunur.

3. $r_1 - r_2 = 2\upsilon$ olmak üzere $\upsilon = k$ pozitif bir tamsayıya eşit olsun. Bu durumda $r_1 = k$, $r_2 = -k$ kökleri

$$u_1(x) = J_k(x), \qquad u_2(x) = J_{-k}(x) \qquad (5.7.1.13)$$

şeklinde iki çözüm verir. Fakat

$$\Gamma(-k+n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-k+n}dx=\infty, \qquad n=0,1,\ldots,k-1$$

olduğundan $J_{-k}(x)$ fonksiyonunun açılımındaki ilk n terim 0 olur ve

$$J_{-k}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \tag{5.7.1.14}$$

şekline girer. $n=k+m$ için

$$J_{-k}(x)=(-1)^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2m}=(-1)^k J_k(x) \tag{5.7.1.15}$$

olduğundan $J_{-k}(x)$ ve $J_k(x)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır.

Bu durumda $J_k(x)$ fonksiyonu ile birlikte lineer bağımsız ikinci çözüm

$$\begin{aligned}Y_k(x)=&\frac{2}{\pi}J_k(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-k+2n}\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+k)!}\left[\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}+\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n}\end{aligned} \tag{5.7.1.16}$$

fonksiyonu alınabilir. Buradan da genel çözüm

$$u(x)=C_1J_\upsilon(x)+C_2Y_\upsilon(x) \tag{5.7.1.17}$$

bulunur.

Burada ki $Y_k(x)$ fonksiyonu ikinci tipten ve k'ıncı mertebeden *Bessel fonksiyonu* veya *Weber fonksiyonudur*. Genel halde, keyfi υ değerleri için Weber fonksiyonları

$$Y_\upsilon(x)=\frac{J_\upsilon(x)\cos\upsilon\pi-J_{-\upsilon}(x)}{\sin\upsilon\pi}$$

olarak tanımlanmaktadır.

4. İndisler birbirine eşit ise $r_1-r_2=2\upsilon=0$ veya $\upsilon=0$ olur. Bu durumda (5.7.1.17) de $k=\upsilon=0$ alınarak

$$u(x)=C_1J_0(x)+C_2Y_0(x)$$

genel çözümü elde edilir.

$$\left(xu^{'}\right)^{'}+\left(\lambda x-\frac{\upsilon^2}{x}\right)u=0,\quad x\in(0,\infty) \tag{5.7.1.18}$$

$$u(0)=u(b)=0 \tag{5.7.1.19}$$

Bessel sınır değer probleminin (5.7.1.2) dönüşümü yardımıyla genel çözümü

$$u(x)=C_1J_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2Y_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

olarak elde edilir. (5.7.1.19) sınır koşulları genel çözümde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}u(0)&=C_1J_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}0\right)+C_2Y_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}0\right)=0\\ u(b)&=C_1J_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}b\right)+C_2Y_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}b\right)=0\end{aligned} \tag{5.7.1.20}$$

olur. $Y_\upsilon(0)=\infty$ olduğundan $C_2=0$ bulunur. $u(b)=0$ için

$$u(b)=C_1J_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}b\right)=0 \quad \text{veya} \quad J_\upsilon\left(\sqrt{\lambda}b\right)=0$$

sağlanmalıdır. Bu denklemin kökleri

$$\mu_1^{(\upsilon)}, \mu_2^{(\upsilon)}, \ldots, \mu_n^{(\upsilon)}, \ldots \tag{5.7.1.21}$$

olmak üzere (5.7.1.18)-(5.7.1.19) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\lambda_i^{(\upsilon)} = \left(\frac{\mu_i^{(\upsilon)}}{b} \right)^2 \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{5.7.1.22}$$

şeklindedir. Her bir özdeğere karşı gelen özfonksiyon ise

$$u_i^{(\upsilon)}(x) = C_1 J_\upsilon \left(\frac{\mu_i^{(\upsilon)}}{b} x \right) \tag{5.7.1.23}$$

olur.

Bessel denklemi için kullanılan Sturm-Liouville problemi singüler olmasına rağmen

1. Özdeğerleri negatif değildir.
2. Özdeğerler sonsuz sayıdadır ve

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

şeklinde sıralıdır.

3. Farklı λ_n ve λ_m özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $u_n(x)$ ve $u_m(x)$ olmak üzere

$$\langle u_m, u_n \rangle = \int_0^b u_m(x) u_n(x) \, dx = 0$$

elde edildiğinden birbirine diktirler.

4. $[0, a]$ aralığında

$$u(0) = u(b) = 0$$

başlangıç koşulunu sağlayan ve ikinci türeve sahip her $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\upsilon\left(\frac{\mu_n^{(\upsilon)}}{b}x\right) \tag{5.7.1.24}$$

şeklinde yakınsak bir *Fourier-Bessel serisi* şeklinde göstermek mümkündür. Burada

$$c_n=\frac{\int_0^b f(x)J_\upsilon\left(\frac{\mu_n^{(\upsilon)}}{b}x\right)xdx}{\|J_n\|^2}, \qquad \|J_n\|^2=\frac{b^2}{2}\left[J_\upsilon'\left(\mu_n^{(\upsilon)}\right)\right]^2$$

katsayıları *Fourier-Bessel katsayılarıdır.*

5.7.2. Legendre Diferansiyel Denklemi

(2.20)-(2.21) Legendre denkleminin ilgili Sturm-Liouville probleminin sınır koşulları

$$\lim_{x\to\pm1}|u(x)|<\infty \tag{5.7.2.1}$$

şeklindedir. $p(\pm1)=0$ olduğundan problem singülerdir.

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}=1+x^2+x^4+\cdots$$

serisi $|x|<1$ civarında yakınsak bir seri olduğundan (2.21) denkleminin bu civarda yakınsak

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

kuvvet serisi şeklinde bir çözümü bulunabilir. Bu seriyi ve türevlerini (2.21) denkleminde yerine yazarsak

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

buradan da ifadeyi düzenlersek

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \lambda a_n\right]x^n = 0$$

şeklinde bir seri bulunur. Katsayıları sıfıra eşitleyerek

$$\begin{gathered} 2a_2 + \lambda a_0 = 0 \\ 6a_3 - [2-\lambda]a_1 = 0 \\ \cdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - \left[n(n+1)-\lambda\right]a_n = 0 \end{gathered} \qquad (5.7.2.2)$$

a_n 'ler için

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (5.7.2.3)$$

rekürans formülü bulunur. Bu bağıntılarda $a_0 = c_1$, $a_1 = c_2$ alınarak Legendre diferansiyel denkleminin iki keyfi sabite bağlı genel çözümü bulunabilir. (5.7.2.1) sınır koşullarının sağlanması için $\lambda = n(n+1)$ ile birlikte, n tek sayı olduğunda $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$; n çift sayı olduğunda $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ alınsın. Bu durumda $u(x)$ çözümü, (5.7.2.3) ile $n.$ dereceden bir polinoma dönüşür ve (5.7.2.1) sınır şartları da sağlanır. Böylece (2.21)-(5.7.2.1) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n = n(n+1)$$

sayıları, özfonksiyonları ile $n.$ dereceden bir polinomlardır. $2n.$ dereceden

$$z=\left(x^2-1\right)^n \tag{5.7.2.4}$$

polinomu ele alınsın. Bu polinomun türevi alınırsa

$$\left(x^2-1\right)\frac{dz}{dx}-2nxz=0$$

denklemini sağlar. Buradan türev almaya devam edilirse

$$\left(x^2-1\right)^{(n)}=0$$

Leibniz formülüne göre de

$$\left(x^2-1\right)z^{(n+1)}+n\left(2x\right)z^{(n)}+2\frac{n\left(n-1\right)}{2}z^{(n-1)}-2n\left(xz^{(n)}+nz^{(n-1)}\right)=0$$

veya

$$\left(x^2-1\right)\frac{dz^n}{dz}+n\left(n+1\right)z^{(n-1)}=0$$

olur. Son denklemin tekrar türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-1\right)\frac{dz^{(n)}}{dx}\right]+n\left(n+1\right)z^{(n)}=0 \tag{5.7.2.5}$$

denklemi bulunur. Buradan da keyfi C sabiti için

$$u=C\frac{d^nz}{dx^n}=C\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n} \tag{5.7.2.6}$$

polinomunun $\lambda_n = n(n+1)$ olduğunda (2.20) denklemini sağladığı görülür.

$$C = \frac{1}{2^n n!}$$

alınarak elde edilen $n.$ dereceden

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (5.7.2.7)$$

polinomu *Legendre polinomu*, (5.7.2.6) formülü ise *Rodrigues formülüdür.*

Teorem 5.7.2.1. Legendre polinomları aşağıdaki durumda diktir:

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

İspat. $m \neq n$ için $P_n(x)$ ve $P_m(x)$ Legendre denkleminin birer çözümü olduğundan

$$\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + \lambda_m P_m(x) = 0$$
$$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + \lambda_n P_n(x) = 0$$

sağlanır. İlk denklem $P_n(x)$ ile, ikinci denklem de $P_m(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve $(-1,1)$ aralığında integre edilirse

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left\{ P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' - P_n(x)\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' \right\} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\left[P_m(x)P_n^{'}(x)-P_n(x)P_m^{'}(x)\right]\right\}dx$$

$$= \left(1-x^2\right)\left[P_m(x)P_n^{'}(x)-P_n(x)P_m^{'}(x)\right]\Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

elde edilir. Böylece $m \neq n$ olduğundan

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$$

olur. $m = n$ olduğunda ise Rodrigues formülüne göre

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}\,dx$$

yazılır. Buradan n kez kısmi integrasyon uygulanarak

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^{2n}\left(x^2-1\right)^n}{dx^{2n}}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx$$

elde edilir.

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx = (-1)^n\, 2\,\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

olduğundan

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^n\, 2\,\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}$$

bulunur.

Legendre diferansiyel denklemi için kullanılan Sturm-Liouville problemi singüler olmasına rağmen

1. Özdeğerleri negatif değildir.
2. Özdeğerler sonsuz sayıdadır ve

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

şeklinde sıralıdır.

3. Farklı λ_n ve λ_m özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $u_n(x)$ ve $u_m(x)$ olmak üzere

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$$

elde edildiğinden birbirine diktirler.

4. $[-1,1]$ aralığında kısmi sürekli türeve sahip her $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \qquad (5.7.2.8)$$

şeklinde yakınsak bir seri şeklinde göstermek mümkündür. Burada

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

katsayıları *Fourier-Legendre katsayılarıdır.*

5.7.3. Hermite Diferansiyel Denklemi

(2.22)-(2.23) Hermite diferansiyel denkleminin (2.24) sınır koşulları ile bir çözümü

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{5.7.3.1}$$

fonksiyonu olmak üzere fonksiyon ve türevleri (7.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n-\lambda)a_n\right]x^n=0$$

şeklindeki kuvvet serisi bulunur. Buradan katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n \tag{5.7.3.2}$$

rekürans bağıntısı bulunur. $a_0=c_1$, $a_1=c_2$ alınarak $a_2,a_3,\ldots$ katsayıları bulunduktan sonra Hermite denkleminin genel çözümü

$$u(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x) \tag{5.7.3.3}$$

şeklinde yazılır. Burada $u_1(x)$, x değişkeninin yalnızca çift dereceli terimlerini, $u_2(x)$ ise tek dereceli terimlerini içeren kuvvet serileridir.

$\lambda\neq 2n$ ise $c_1^2+c_2^2\neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x\to\pm\infty}e^{-x^2}u(x)=\infty$$

olduğundan (2.24) sınır koşullarını sağlamak için

$$\lambda=2n \tag{5.7.3.4}$$

seçilmelidir. Bu durumda (5.7.3.2) formülüne göre n değerinin tek veya çift olmasına bağlı olarak $c_1\neq 0$, $c_2=0$ veya $c_1=0$, $c_2\neq 0$ alınırsa $u(x)$ çözümü *n.*

dereceden bir polinom olacaktır. $a_n = 2^n$ alınarak elde edilen $H_n(x)$ polinomları *Hermite polinomlarıdır.*

Teorem 5.7.3.1. Hermite polinomları e^{-x^2} ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty,\infty)$ aralığında birbirine diktir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

İspat. (2.22) ve (5.7.3.4) eşitliklerinden

$$\left[e^{-x^2} H_n^{'}(x)\right]^{'} + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0$$
$$\left[e^{-x^2} H_m^{'}(x)\right]^{'} + 2me^{-x^2} H_m(x) = 0$$

sağlanır. İlk denklem $H_m(x)$ ile ikinci denklem ise $H_n(x)$ ile çarpıp çıkarılırsa

$$\left[e^{-x^2}\left(H_m H_n^{'} - H_n H_m^{'}\right)\right]^{'} + 2(n-m)e^{-x^2} H_n H_m = 0$$

ve $(-\infty,\infty)$ aralığında integre edilirse, istenilen $Q(x)$ polinomu için

$$e^{-x^2} Q(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

olduğu dikkate alınarak

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0$$

bulunur. $m \neq n$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0 \tag{5.7.3.5}$$

$$H'_{n+1}(x) = 2(n+1) H_n(x) \tag{*}$$

rekürans bağıntısında $n \to n-1$ alarak ifade $e^{-x^2} H_n(x)$ ile çarpılırsa

$$e^{-x^2} H_n^2(x) - 2xe^{-x^2} H_n(x) H_{n-1}(x) + 2(n-1) e^{-x^2} H_n(x) H_{n-2}(x) = 0$$

ve $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edilirse (5.7.3.5) ile birlikte

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_{n-1}(x)\, dx = 0 \tag{5.7.3.6}$$

elde edilir. (*) bağıntısı bu kez $e^{-x^2} H_{n-1}(x)$ ile çarpılır ve integre edilirse

$$-2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_{n-1}(x)\, dx + 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)\, dx = 0 \tag{5.7.3.7}$$

bulunur. (5.7.3.6) ve (5.7.3.7) den

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)\, dx$$

rekürans bağıntısı elde edilir. $n = 1, 2, \ldots$ ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi} \tag{5.7.3.8}$$

eşitliği bulunur. Bu da (5.7.3.5) ile birlikte teoremi ispatlar.

Hermite diferansiyel denklemi için kullanılan Sturm-Liouville problemi singüler olmasına rağmen

1. Özdeğerleri negatif değildir.
2. Özdeğerler sonsuz sayıdadır ve

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

şeklinde sıralıdır.

3. Farklı λ_n ve λ_m özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $u_n(x)$ ve $u_m(x)$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

elde edildiğinden birbirine diktirler.

4. $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \tag{5.7.3.9}$$

şeklinde yakınsak bir seri şeklinde göstermek mümkündür. Burada

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\,dx$$

katsayıları *Fourier-Hermite katsayılarıdır.*

5.8. Salınım ve Karşılaştırma Teorisi

Tanım 2.32 den anlaşıldığı gibi salınım hali, köklerin sayısı ve yerlerinin incelenmesidir.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=0, \qquad a<x<b \tag{5.8.1}$$

Sturm-Liouville denkleminin çözümlerinin kökleri ele alınsın. Burada $p(x)$, $p'(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve $p(x)>0$ şeklindedir. Ayrıca $(0,\infty)$ şeklindeki bir aralık üzerinde incelendiğinde aynı şartlar geçerlidir.

Bir fonksiyonun herhangi bir aralık üzerinde sonsuz sayıda kökü var mıdır? Bu sorunun cevabı için şimdiki teorem incelenirse görülür ki sonsuz sayıda kök varsa sadece aşikar çözüm vardır.

Teorem 5.8.1. $\phi(x)$, (5.8.1) denkleminin (a,b) aralığında bir çözümü olsun. $\phi(x)$ çözümünün herhangi bir kapalı aralıkta sonsuz sayıda kökü varsa, $\left[a',b'\right]\subset(a,b)$ olmak üzere (a,b) aralığında $\phi(x)\equiv 0$ olur.

İspat. Bolzano-Weierstrass teoremi yardımı ile sınırlı sonsuz bir kümenin en az bir limit noktası vardır. Bu durumda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ kümesinin yakınsak olduğu nokta x_0 ise $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ olur. $\phi(x)$ çözümünün sonsuz sayıdaki kökleri bir $\left[a',b'\right]$ aralığında olsun. Yani $\phi(x)$ fonksiyonunun köklerinin x_0 noktasına yakınsayan bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizi vardır. $\left[a',b'\right]$ kapalı bir aralık olduğundan $x_0\in\left[a',b'\right]$ olmalıdır. x_n, $\phi(x)$ fonksiyonunun bir kökü olduğundan $\phi(x_n)=0$, $n=1,2,\ldots$ şeklindedir ve $\phi(x)$ fonksiyonunun sürekliliği ile

$$\phi(x_0)=\lim_{n\to\infty}\phi(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

olur. Dolayısıyla x_0 noktası $\phi(x)$ fonksiyonunun bir köküdür. Kabulden $\phi'(x) \in [a', b']$ ve

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0}$$

dir. Bu limit, herhangi bir noktanın x_0 noktasına olan limitini verdiğinden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\phi(x)$ fonksiyonunun kökleri olarak seçilebilir. Bu durumda

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$$

elde edilir. $\phi(x_0) = 0$ ve $\phi'(x_0) = 0$ olduğundan ikinci mertebeden lineer denklemin varlık ve teklik teoremi yardımıyla (a,b) aralığında $\phi(x) \equiv 0$ dır.

Bir denklemin iki çözümü genel bir köke sahip midir? Bu sorunun cevabı için şimdiki teorem incelenirse görülür ki böyle bir kök ancak iki fonksiyon linner bağımlı ise vardır.

Teorem 5.8.2. Genel Kökler

$\phi(x)$ ve $\psi(x)$, (5.8.1) denkleminin iki çözümü ve $x_0 \in [a,b]$ noktasında $\phi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ ise bu aralıkta $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır.

İspat. $\phi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ olmak üzere $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının Wronskianı

$$W[\phi, \psi](x_0) = \phi(x_0)\psi'(x_0) - \phi'(x_0)\psi(x_0) = 0$$

elde edilir. $[a,b]$ aralığının bazı noktalarında iki çözümün Wronskianı sıfır olduğunda bu çözümler aynı aralıkta linner bağımlı olacağından $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır.

İki fonksiyon lineer bağımsız ise farklı kökleri olmalıdır. Bu kökler arasında herhangi bir komşuluk var mıdır? Bu sorunun cevabı için şimdiki teorem incelenirse görülür ki lineer bağımsız fonksiyonların kökleri bağlantılıdır.

Teorem 5.8.3. Sturm Ayırma Teoremi

$\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları (5.8.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olmak üzere $[a,b]$ aralığında $\phi(x)$ fonksiyonunun herhangi ardışık iki kökü arasında $\psi(x)$ fonksiyonunun kesinlikle bir kökü vardır.

İspat. $[a,b]$ aralığında $\phi(x)$ fonksiyonunun herhangi ardışık iki kökü x_1 ve x_2 $(a \le x_1 < x_2 \le b)$ olsun. $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan $\phi(x_1) \ne 0$ ve $\phi(x_2) \ne 0$ dır. (x_1, x_2) aralığında $\phi(x)$ çözümünün kökü olmadığı kabul edilsin. $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığında sürekli, türevlenebilir olduğundan $\dfrac{\phi}{\psi}$ fonksiyonu da $x_1 \le x \le x_2$ aralığında sürekli ve türevlenebilir olup aralığın uç noktalarında sıfır değerini alır. Rolle teoreminden öyle bir $\xi \in (x_1, x_2)$ vardır ki

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right]\Bigg|_{x=\xi} = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right]=\frac{W(\phi,\psi;x)}{\left[\psi(x)\right]^2}$$

olup $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında lineer bağımsız olduğundan $x\in(x_1,x_2)$ için

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right]\neq 0$$

olacaktır. Bu ise çelişki olup burada $\phi(x)$ fonksiyonunun $x_1<x<x_2$ aralığında en az bir kökünün var olduğu sonucu çıkar. Bu kökün tek olup olmadığına bakılsın. $\psi(x)$ fonksiyonunun $x_1<x<x_2$ aralığında x_3 ve x_4 gibi ardışık iki kökü olsun. Bu durumda önceki halde kullanılan $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının yerleri değiştirilirse $\phi(x)$ fonksiyonunun $x_3<x<x_4$ aralığında en az bir x_5 kökü olması gerekir. Buradan $x_1<x_5<x_2$ olacağından x_1 ve x_2, $\phi(x)$ fonksiyonunun ardışık iki kökü olamaz. O halde $x_1<x<x_2$ aralığında $\psi(x)$ fonksiyonunun tek bir kökü vardır.

Bu teoremin bir sonucu olarak, birinci tip J_υ Bessel fonksiyonunun ardışık iki kökü arasında ikinci tip Y_υ Bessel fonksiyonunun bir kökü vardır. Bu yüzden bu iki fonksiyon

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\left(\lambda x-\frac{\upsilon^2}{x}\right)u=0$$

Sturm-Liouville denkleminin lineer bağımsız iki çözümüdür. J_υ fonksiyonunun $(0,\infty)$ aralığında sonsuz sayıda kökü olduğundan, Y_υ fonksiyonunun da sonsuz sayıda kökü vardır.

Sonuç 5.8.1. Salınımlı Çözümler

Teorem 5.8.3 ün kabulündeki aralık $[a,\infty)$ alındığında, (5.8.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü salınımlı ise tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat. $\phi(x)$, $[a,\infty)$ alındığında sonsuz sayıda köke sahip, (5.8.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun. Sturm ayırma teoremi ile herhangi bir diğer çözüm, $\phi(x)$ fonksiyonunun her bir sıralı kök çiftini içerir ve dolayısıyla o da $[a,\infty)$ alındığında sonsuz sayıda köke sahiptir.

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere Hermite diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right)+2ne^{-x^2}u=0$$

şeklinde Sturm-Liouville formunda alındığında denklemin çözümü olarak, n reel kökü olduğu bilinen n. dereceden $H_n(x)$ Hermite polinomu bulunur. Diğer çözümün ise en az $n-1$ kökü olan $H_n(x)$ polinomunun ardışık köklerinin arasında sadece bir kökü olmalıdır. Hiçbir aşikar olmayan çözüm $n+1$ kökten fazlasını içeremez. Aksi halde derecesinden daha fazla kök içermiş olur.

Teorem 5.8.4. Sturm Karşılaştırma Teoremi (Sturm Temel Teoremi)

$[a,b]$ aralığında $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ sırasıyla

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q_1(x)u=0$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q_2(x)u=0$$

denklemlerinin aşikar olmayan birer çözümü olsunlar. $p(x)>0$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $p(x)$ aynı aralıkta sürekli ve $q_2(x)>q_1(x)$ olmak üzere x_1 ve x_2, $\phi_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki kökü ise bu durumda $\phi_2(x)$ çözümünün $x_1<x<x_2$ aralığında ez az bir kökü vardır.

İspat. $\phi_2(x)$ çözümünün $x_1<x<x_2$ aralığında bir kökü olmadığı kabul edilsin. Bu durumda genelliği bozmadan $\phi_1(x)>0$ ve $\phi_2(x)>0$ alınırsa teoremin hipotezinden

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\phi_1^{'}(x)\right]+q_1(x)\phi_1(x)=0$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\phi_2^{'}(x)\right]+q_2(x)\phi_2(x)=0$$

şeklindedir. Buradan ilk denklem $\phi_2(x)$, ikinci denklem $\phi_1(x)$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$\phi_2(x)\left[p(x)\phi_1(x)\right]^{'}-\phi_1(x)\left[p(x)\phi_2(x)\right]^{'}=\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\phi_1(x)\phi_2(x) \qquad (5.8.2)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki ifade

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left[\phi_1^{'}(x)\phi_2(x)-\phi_1(x)\phi_2^{'}(x)\right]\right\}$$

olarak yazılabildiğinden (5.8.2) eşitliği

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left[\phi_1^{'}(x)\phi_2(x)-\phi_1(x)\phi_2^{'}(x)\right]\right\}=\left[q_2(x)-q_1(x)\right]\phi_1(x)\phi_2(x)$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitlik (x_1,x_2) aralığında integre edilirse

$$p(x)\left[\phi_1^{'}(x)\phi_2(x)-\phi_1(x)\phi_2^{'}(x)\right]\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}=\int_{x_1}^{x_2}\left[q_2(x)-q_1(x)\right]\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx \qquad (5.8.3)$$

elde edilir. $\phi_1(x_1)=\phi_1(x_2)=0$ olduğundan (5.8.3) eşitliği

$$p(x_2)\phi_1^{'}(x_2)\phi_2(x_2)-p(x_1)\phi_1^{'}(x_1)\phi_2(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}\left[q_2(x)-q_1(x)\right]\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx$$

(5.8.4)

şeklini alır. Hipotezden dolayı $p(x_2)>0$ dır. $x_1<x<x_2$ için $\phi_1(x)>0$ ve $\phi_1(x_2)=0$ olduğundan $\phi_1^{'}(x_2)<0$ dır. $x_1<x<x_2$ için $\phi_2(x)>0$ olduğundan $\phi_2(x_2)\geq 0$ dır. Böylece $p(x_2)\phi_1^{'}(x_2)\phi_2(x_2)\leq 0$ olur. Benzer bir inceleme ile

$$p(x_1)\phi_1^{'}(x_1)\phi_2(x_1)\geq 0$$

olur. O halde (5.8.4) eşitliğinin ilk yanı pozitif değildir. $q_2(x)-q_1(x)>0$ olduğundan ikinci yan ise pozitiftir. Bu durum, $x_1<x<x_2$ aralığında $\phi_2(x)$ çözümünün bir kökünün var olduğu kabulü ile çelişilmiş olur. Dolayısıyla (x_1,x_2) aralığının bazı noktalarında $\phi_2(x)$ çözümünün kökleri vardır.

Sonuç 5.8.2. $[a,b]$ aralığında $q(x)\leq 0$ ise

$$u^{''}+q(x)u=0, \qquad a<x<b$$

denkleminin aşikar olmayan bir çözümünün $[a,b]$ aralığında en az bir kökü vardır.

İspat. $\psi(x)\equiv 1$,

$$u'' + 0 \cdot u = 0$$

denkleminin bir çözümü ve $q(x) \leq 0$ olduğundan Sturm temel teoreminde $q_1(x) = q(x)$ ve $q_2(x) \equiv 0$ alınmak üzere $\phi(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında iki yada daha fazla kökü varsa $\psi(x)$ fonksiyonunun, bu kökler arasında en az bir kökü vardır. $\psi(x)$ bir kök olamayacağından, $\phi(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında en az bir kökü vardır.

Teorem 5.8.5. Picone Karşılaştırma Teoremi

$[a,b]$ aralığında $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ sırasıyla

$$\frac{d}{dx}\left[p_1(x)\frac{du}{dx}\right] + q_1(x)u = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left[p_2(x)\frac{du}{dx}\right] + q_2(x)u = 0$$

denklemlerinin aşikar olmayan birer çözümü olsunlar. $a \leq x \leq b$ için $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$ ve $q_1(x) \leq q_2(x)$ olmak üzere $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı olmadıkça, $\phi_1(x)$ çözümünün herhangi ardışık iki x_1 ve x_2 kökü arasında $\phi_2(x)$ çözümünün bir kökü vardır. Bu durumda $[x_1, x_2]$ aralığında $q_1(x) \equiv q_2(x)$ olur.

Sonuç 5.8.3. Kökler Arasındaki Uzaklık

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0, \qquad a < x < b \tag{5.8.5}$$

bir Sturm-Liouville problemi olsun. Burada $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve aynı aralıkta $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ dır. $\phi(x)$

fonksiyonu (5.8.5) denkleminin aynı aralık üzerinde x_1 ve x_2 ardışık köklerine sahip aşikar olmayan bir çözümü olmak üzere

$$\lambda > \max\left\{\frac{-q_M(x)}{\rho_M(x)}, \frac{-q_m(x)}{\rho_m(x)}, 0\right\}$$

ise $\phi(x)$ fonksiyonunun kökleri arasındaki $x_2 - x_1$ uzaklığı

$$\sqrt[\pi]{\frac{p_m(x)}{q_M(x)+\lambda\rho_M(x)}} \le x_2 - x_1 \le \sqrt[\pi]{\frac{p_M(x)}{q_m(x)+\lambda\rho_m(x)}} \qquad (5.8.6)$$

ile sınırlıdır.

(Burada $u_M(x)$ ve $u_m(x)$, sırasıyla $u(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki en büyük ve en küçük değerleridir).

İspat. Sabit katsayılı

$$p_M(x)u'' + \left(q_m(x)+\lambda\rho_m(x)\right)u = 0 \qquad (5.8.7)$$

denkleminin çözümü $\psi(x) = \sin\left[K(x-x_1)\right]$ şeklindedir. Burada

$$\lambda > -q_m(x)/\rho_m(x) \quad \text{yani} \quad q_m(x)+\lambda\rho_m(x) > 0$$

olduğundan $K^2 = \left(q_m(x)+\lambda\rho_m(x)\right)/p_M(x)$ dir. Hatta $\psi(x)$ çözümünün, $x = x_1$ noktasında bir kökü vardır. Bir sonraki kök ise $x_1 + (\pi/K)$ şeklindedir. Buradan da iki kök arasındaki uzaklık

$$\sqrt[\pi]{\frac{p_M(x)}{q_m(x)+\lambda\rho_m(x)}}$$

olur. Her $x \in (a,b)$ için $p_M(x) \geq p(x)$, $\lambda > 0$ ve $q_m(x) + \lambda\rho_m(x) \leq q(x) + \lambda\rho(x)$ olduğundan Picone karşılaştırma teoremi ile $\phi(x)$ çözümü, $\psi(x)$ çözümünün herhangi iki sıralı kökleri arasında bir köke sahiptir veya $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ lineer bağımlı ise $\phi(x_1 + \pi/K) = 0$ dır. Böylece $x_2 \leq x_1 + (\pi/K)$ yani

$$x_2 - x_1 \leq \pi\sqrt{\frac{p_M(x)}{q_m(x) + \lambda\rho_m(x)}} \tag{5.8.8}$$

bulunur. Diğer taraf için, sabit katsayılı

$$p_m(x)u'' + \left(q_M(x) + \lambda\rho_M(x)\right)u = 0 \tag{5.8.9}$$

denklemi incelensin. Bu denklemin çözümü $\sigma(x) = \sin\left[L(x - x_1)\right]$ şeklindedir ve burada $L^2 = \left(q_M(x) + \lambda\rho_M(x)\right)/p_m(x)$ dir. Sonuç olarak $\sigma(x)$ çözümünün x_1 ve $x_1 + (\pi/L)$ ardışık kökleri vardır. $x \in (a,b)$ için $p(x) \geq p_m(x)$ ve

$$q(x) + \lambda\rho(x) \leq q_M(x) + \lambda\rho_M(x)$$

olduğundan Picone karşılaştırma teoremi ile $\phi(x)$ çözümünün herhangi iki sıralı kökü arasında, $\sigma(x)$ çözümünün bir kökü veya diğer çözümle aynı olan kökleri vardır. Böylece $x_1 + (\pi/L) \leq x_1$ yani

$$\pi\sqrt{\frac{p_m(x)}{q_M(x) + \lambda\rho_M(x)}} \leq x_2 - x_1 \tag{5.8.10}$$

olur. (5.8.8) ve (5.8.10) eşitsizliklerinden teorem ispatlanmış olur.

Buradan görülür ki, $\lambda \to \infty$ durumunda Sturm-Liouville denkleminin herhangi bir çözümünün kökleri arasındaki uzaklık sıfırdır. Yani, regüler bir Sturm-Liouville probleminin λ_n özdeğerleri sonsuza gittikçe artar ve $\phi_n(x)$ özfonksiyonlarının (a,b) aralığındaki köklerinin sayısı n arttıkça artar.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde sınır değer problemleri incelenmiştir. Farklı fonksiyonlar kullanılarak elde edilebilecek olan çeşitli çözüm yöntemleri gösterilmiş, tek noktalı sınır değer problemleri ile çözümleri incelenip örneklendirilmiştir. Ayrıca iki noktalı sınır değer problemlerinde çözüm aranmış, bu çözüm için kullanılan Green fonksiyonunun elde edilişinin yanı sıra çözümlerde nasıl kullanılacağı belirtilmiştir. Bununla birlikte adjoint operatör ve adjoint denklem üzerinde durularak yüksek mertebeden denklemler için sınır değer problemlerinin çözüm yöntemleri incelenmiş, iki ve üç boyutlu problemler için örnek verilmiştir. Sonrasında ise sınır değer problemlerinin en yaygını olan Sturm-Liouville Probleminin, homojen veya homojen olmaması, singüler veya regülerliği ile problemin Green fonksiyonuna sahip olması durumlarında çözümleri incelerek çözüm yöntemleri verilmiş ve örneklendirilmiştir. Son olarak ise çözümlerin varlığı durumunda köklerinin sayısı ve yerleri incelenmiştir. Ayrıca konunun teorik temelleri ispatlı olarak belirtilmiştir.

Bu inceleme, sınır değer problemleri ile ilgili yapılacak bilimsel çalışmalarda, araştırmacıların yararlanabileceği bir ek kaynak olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] STAKGOLD, I., Green's Functions and Boundary Value Problems, John Wiley&Sons, ınc., 1998.

[2] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley&Sons, ınc., 2000.

[3] MACKIE, A. G., Boundary Value Problems, Oliver&Boyd, 1968.

[4] NAGLE, R. K., SAFF, E. B., SNIDER, A. D., Fundamental of Differential Equations and Boundary Value Problems, Pearson Education, ınc., 2004.

[5] EDWARDS, C. H., PENNEY, D. E., Differential Equations and Boundary Value Problems, Pearson Education, ınc., 2004.

[6] EDWARDS, C. H., PENNEY, D. E., Bilgisayar Destekli, Matematiksel Modellemeli Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, Palme Yayıncılık, Ankara, 2008.

[7] BALCI, M., Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Eylül 1997.

[8] HASANOV, E., UZGÖREN, G., BÜYÜKAKSOY, A., Diferansiyel Denklemler Teorisi, Mart 2002.

[9] DEMİRTAŞ, A., Ansiklopedik Matematik Sözlüğü, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[10] AYDIN, M., KURYEL, B., GÜNDÜZ, G., Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, E.Ü. Müh. Fakültesi, İzmir, 2001.

[11] BROWN, J. W., CHURCHILL, R. V., Fourier Series and Boundary Value Problems, McGrew-Hill, ınc., 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Işıl ARDA, 1986 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Küçükçekmece'de tamamladı. 2004 yılında girdiği Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2008 yılında mezun oldu. 2008 yılından beri çeşitli özel kurumlarda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.