T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan İŞBİLİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN

Haziran 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan İŞBİLİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 26/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL Jüri Başkanı	Doç. Dr. Barış Tamer TONGUÇ Üye	Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN Üye

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve çalışmaların yapılması sırasında her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen tez yöneticisi değerli Yrd. Doç. Dr. Metin YAMAN hocama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

α	: Alfa
β	: Beta
ε	: Epsilon
η	: Eta
ξ	: Ksi
ϕ	: Phi
ψ	: Psi
Δ	: Laplasyen
∇	: Nabla operatörü
R_+	: $[0,\infty)$

ÖZET

Anahtar kelimeler: Lineer Olmayan İntegral Eşitsizliği, Lineer Olmayan Dalga Denklemi.

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezde kullanılan notasyonlar ve temel eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca lineer olmayan integral eşitsizliği verilmiş ve ispatlanmıştır.

İkinci bölümde dalga denkleminin düzgün kararlılığı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde lineer olmayan dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

UNIFORM STABILIZATION OF THE SOLUTION TO NONLINEAR WAVE EQUATION

SUMMARY

Key Words: Nonlinear Integral Inequality, Nonlinear Wave Equation.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, notations and main inequlities used in the thesis are given. Furthermore, nonlinear integral inequality is given and proved.

In the second chapter, uniform stabilization of the wave equation is examined.

In the third chapter, uniform stabilization of the solution to nonlinear wave equation is examined.

Finally in the fourth chapter, the results are stated gained through the study of thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Notasyonlar

Bu bölümde işaretler ve semboller tanıtılacaktır.

R^n , n boyutlu Öklit uzayıdır.

$x=(x_1,x_2,...,x_n)$ R^n de bir noktadır.

Ω R^n de sınırlı bir bölgedir.

$\partial\Omega$ Ω bölgesinin düzgün sınırıdır.

u_x ve u_t sembolleri, $\dfrac{du}{dx}$ ve $\dfrac{du}{dt}$ türevleridir.

$L_p(\Omega)$, $(p\geq 1)$ Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyonları içeren Banach uzayıdır ve

$$\|u\|_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

sonlu norma sahiptir.

Genel olarak $L_2(\Omega)$ deki norm $\|.\|$ şeklinde gösterilmiştir. u ve v nin skaler çarpımı

$$(u,v)_\Omega=\int_\Omega uv dx \tag{1.2}$$

şeklinde gösterilir.

$$\|u\|_2=\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

$$\|\nabla u\|_2=\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

Green Formülü: Kısmi integrasyonun genelleştirilmiş hali olan Green formülü $\frac{\partial v}{\partial n}$, n dış normaline göre türevi göstermek üzere

$$\int_{\Omega} u\Delta v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dx \tag{1.5}$$

şeklindedir.

1.2. Temel Eşitsizlikler

1) Cauchy Eşitsizliği:

a, b sabit reel sayıları için

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{1.6}$$

dir.

2) ε - Young Eşitsizliği:

a, b, ε pozitif reel sayılar ve $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$ab \le \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{1}{q}\frac{b^q}{\varepsilon^q} \tag{1.7}$$

şeklindedir.

3) Hölder Eşitsizliği:

$1 \le p, q \le \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ ise bölge üzerinde

$$\int_\Omega |uv|\, dx \le \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.8}$$

dir. Özel olarak $p = q = 2$ alınırsa Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

4) Poincare – Friedrichs Eşitsizliği:

$$\int_\Omega u^2 dx \le c_1(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \tag{1.9}$$

Ω, R^n uzayında sınırlı bir bölgedir ve $c_1(\Omega)$ sabiti Ω bölgesine bağlıdır.

5) Gronwall Eşitsizliği (Türev Formu) :

$\eta(.)$, $[0,T]$ de negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca hemen hemen her t için ,

$$\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \tag{1.10}$$

eşitsizliği sağlansın. Burada $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan ve $[0,T]$de integre edilebilen fonksiyonlardır. Buradan her $0 \le t \le T$ için,

$$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0)+\int_0^t \psi(s)\,ds\right] \tag{1.11}$$

dir.

6) Gronwall Eşitsizliği (İntegral Formu) :

$\xi(t)$, $[0,T]$de negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca hemen hemen her t ve $c_1, c_2 \ge 0$ için,

$$\xi(t) \le c_1\int_0^t \xi(s)\,ds + c_2 \tag{1.12}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda hemen hemen her $0 \le t \le T$ için,

$$\xi(t) \le c_2\left(1+c_1 t e^{c_1 t}\right) \tag{1.13}$$

dir.

1.3. Lineer Olmayan İntegral Eşitsizliği

Lemma 1.1.

$E: R_+ \to R_+$ artmayan fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $T > 0$ sabitler olsun. Eğer

$$\int_t^{\infty} E^{\alpha+1}(s)ds \le TE(0)^{\alpha} E(t), \qquad \forall t \in R_+ \tag{1.14}$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$E(t) \le E(0)\left(\frac{T+\alpha t}{T+\alpha T}\right)^{-1/\alpha}, \qquad \forall t \ge T \tag{1.15}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

Eğer $E(0)=0$ ise $E=0$ olduğundan ispat aşikardır.
Eğer $E(0)=1$ ise,

$$E(t) \le \left(\frac{T+\alpha t}{T+\alpha T}\right)^{-1/\alpha}, \qquad \forall t \ge T$$

eşitsizliğinin ispatlanması gerekir.

$$F: R_+ \to R_+, \qquad F(t) = \int_t^{\infty} E^{\alpha+1}(s)ds \tag{1.16}$$

şeklinde artmayan bir fonksiyon tanımlansın. Buradan türev alınarak

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\int_t^{\infty} E^{\alpha+1}(s)ds = -E^{\alpha+1}(t) \tag{1.17}$$

elde edilir. (1.14) ve (1.16) dan

$$F(t) \le TE(0)^{\alpha} E(t)$$

eşitsizliği elde edilir. $E(0)=1$ olduğu için

$$F(t) \le TE(t) \tag{1.18}$$

veya

$$E(t) \ge \frac{F(t)}{T}$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafının $\alpha+1$ kuvveti alınırsa

$$E^{\alpha+1}(t) \ge \left(\frac{F(t)}{T}\right)^{\alpha+1}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$E^{\alpha+1}(t) \ge T^{-\alpha-1} F^{\alpha+1}(t) \tag{1.19}$$

elde edilir. (1.17) ve (1.19) dan

$$-F'(t) \ge T^{-\alpha-1} F^{\alpha+1}(t) \tag{1.20}$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $F^{-\alpha-1}(t)$ ile çarpılırsa

$$-F'(t)F^{-\alpha-1}(t) \geq T^{-\alpha-1}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı α ile çarpılırsa

$$-\alpha F'(t)F^{-\alpha-1}(t) \geq \alpha T^{-\alpha-1}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sol tarafındaki ifade $-\alpha F'(t)F^{-\alpha-1}(t) = \left(F^{-\alpha}\right)'$ olduğundan dolayı

$$\left(F^{-\alpha}\right)' \geq \alpha T^{-\alpha-1}$$

şeklinde yazılır. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafının $\left(0, s\right)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^s \left(F^{-\alpha}\right)' ds \geq \alpha \int_0^s T^{-\alpha-1} ds$$

$$F^{-\alpha}(s) - F^{-\alpha}(0) \geq \alpha T^{-\alpha-1} s$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$F^{-\alpha}(s) \geq F^{-\alpha}(0) + \alpha T^{-\alpha-1} s$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafının $-1/\alpha$ kuvveti alınırsa

$$F(s) \le \left(F^{-\alpha}(0) + \alpha T^{-\alpha-1} s\right)^{-1/\alpha} \tag{1.21}$$

elde edilir. (1.18) den $F(t) \le TE(t)$ olduğundan dolayı $t = 0$ için

$F(0) \le TE(0)$ ifadesinde $E(0) = 1$ olduğundan dolayı

$F(0) \le T$ elde edilir. F artmayan fonksiyon olduğundan dolayı $F(0) = T$ bulunur.

(1.21) den $F(s) \le \left(F^{-\alpha}(0) + \alpha T^{-\alpha-1} s\right)^{-1/\alpha}$ eşitsizliğinde $F(0) = T$ yazılırsa

$$F(s) \le \left(T^{-\alpha} + \alpha T^{-\alpha-1} s\right)^{-1/\alpha}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğinin sağ tarafındaki parantezin içerisi $T^{-\alpha-1}$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$$F(s) \le \left[T^{-\alpha-1}\left(T + \alpha s\right)\right]^{-1/\alpha}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı düzenlendiğinde

$$F(s) \le T^{(\alpha+1)/\alpha}\left(T + \alpha s\right)^{-1/\alpha} \tag{1.22}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sol tarafı düzenlendiğinde

$$F(s)=\int_s^{\infty} E^{\alpha+1}(t)dt = \int_s^{T+(1+\alpha)s} E^{\alpha+1}(t)dt + \int_{T+(1+\alpha)s}^{\infty} E^{\alpha+1}(t)dt$$

elde edilir. $\int_{T+(1+\alpha)s}^{\infty} E^{\alpha+1}(t)dt \geq 0$ olduğundan dolayı

$$\int_s^{T+(1+\alpha)s} E^{\alpha+1}(t)dt + \int_{T+(1+\alpha)s}^{\infty} E^{\alpha+1}(t)dt \geq \int_s^{T+(1+\alpha)s} E^{\alpha+1}(t)dt$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin sol tarafı $F(s)$ 'ye eşit olduğundan dolayı

$$F(s) \geq \int_s^{T+(1+\alpha)s} E^{\alpha+1}(t)dt \tag{1.23}$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafına integraller için ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\int_s^{T+(1+\alpha)s} E^{\alpha+1}(t)dt = \left[T+(1+\alpha)s-s\right]E^{\alpha+1}(\xi), \qquad s<\xi<T+(1+\alpha)s$$

elde edilir. (1.23) deki eşitsizliğin sağ tarafına bu ifade yazılırsa

$$F(s) \geq \left[T+(1+\alpha)s-s\right]E^{\alpha+1}(\xi)$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$F(s) \geq (T+\alpha s)\,E^{\alpha+1}\left(T+(1+\alpha)s\right) \tag{1.24}$$

bulunur. (1.22) ve (1.24) den

$$(T+\alpha s)\,E^{\alpha+1}\left(T+(1+\alpha)s\right) \leq T^{(\alpha+1)/\alpha}\,(T+\alpha s)^{-1/\alpha}$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $(T+\alpha s)$ ile bölünürse

$$E^{\alpha+1}\left(T+(1+\alpha)s\right) \leq T^{(\alpha+1)/\alpha}\,\frac{(T+\alpha s)^{-1/\alpha}}{(T+\alpha s)}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$E^{\alpha+1}\left(T+(1+\alpha)s\right) \leq T^{(\alpha+1)/\alpha}\,(T+\alpha s)^{(-\alpha-1)/\alpha}$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafının $1/(\alpha+1)$ kuvveti alınırsa

$$E\left(T+(1+\alpha)s\right) \leq T^{1/\alpha}\,(T+\alpha s)^{-1/\alpha}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$E\left(T+(1+\alpha)s\right) \leq \left[T^{-1}(T+\alpha s)\right]^{-1/\alpha}$$

$$E\left(T+\left(1+\alpha\right)s\right)\leq\left[1+\frac{\alpha s}{T}\right]^{-1/\alpha}$$

elde edilir. $T+\left(1+\alpha\right)s=t \quad \Rightarrow \quad s=\dfrac{t-T}{1+\alpha}$ dönüşümü yapılırsa

$$E(t)\leq\left(1+\frac{\alpha\left(\dfrac{t-T}{1+\alpha}\right)}{T}\right)^{-1/\alpha}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik tekrar yazılırsa

$$E(t)\leq\left(\frac{T+\dfrac{\alpha t-\alpha T}{1+\alpha}}{T}\right)^{-1/\alpha}$$

veya

$$E(t)\leq\left(\frac{\dfrac{T+\alpha T+\alpha t-\alpha T}{1+\alpha}}{T}\right)^{-1/\alpha}$$

veya

$$E(t) \le \left(\frac{T + \alpha t}{T + \alpha T} \right)^{-1/\alpha}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 2. DALGA DENKLEMİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

Bu bölümde dalga denkleminin düzgün kararlılığı incelenecektir. Aşağıdaki dalga denklemi ele alınırsa,

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad (x,t) \in (\Omega \times R_+) \tag{2.1}$$

$$u = 0 \qquad (x,t) \in (\Gamma_0 \times R_+) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + (m \cdot \nu)\, g(u_t) = 0 \qquad (x,t) \in (\Gamma_1 \times R_+) \tag{2.3}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{ve} \quad u_t(0) = u_1 \qquad x \in \Omega \tag{2.4}$$

ve $g : R \to R$ fonksiyonu azalmayan, sürekli bir fonksiyon olsun.

$g(0) = 0$ ve

$m(x) = x - x_0, \qquad x \in R^n$

$R = R(x_0) = \sup\left\{ |x - x_0| : x \in \Omega \right\}$

$d\Gamma_m = (m \cdot \nu)\, d\Gamma$

olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

$$n \geq 3 \tag{2.5}$$

$$\Gamma_0 \neq \varnothing \quad \text{ve} \quad \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing \tag{2.6}$$

$$\Gamma_0 \text{ üzerinde } m \cdot \nu \leq 0 \quad \text{ve} \quad \Gamma_1 \text{ üzerinde } m \cdot \nu \geq 0 \tag{2.7}$$

Sistemin enerjisi ise

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.

(2.5) – (2.7) sağlansın. $p>1$ ve $c_1,c_2,c_3,c_4>0$ olmak üzere,

$|x|\le 1$ ise $c_1|x|^p \le |g(x)| \le c_2|x|^{1/p}$ (2.9)

ve

$|x|>1$ ise $c_3|x| \le |g(x)| \le c_4|x|$ (2.10)

dir. Her $(u_0,u_1)\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ için (2.1) – (2.4) problemi

$$E(t)\le ct^{\frac{2}{1-p}}, \qquad \forall t>0 \tag{2.11}$$

kestirimini sağlar. Burada c sabiti sadece $E(0)$ değerine bağlıdır.

Lemma 2.1.

$E:R_+\to R_+$ fonksiyonu artmayan, mutlak sürekli bir fonksiyon ve

$$E'=-\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u_t g(u_t)\,d\Gamma_1 \tag{2.12}$$

dir.

İspat.

(2.1) denklemi u_t ile çarpılır $\Omega\times(S,T)$ bölgesinde integre edilirse

$$0=\int_S^T\int_\Omega u_t(u_{tt}-\Delta u)\,dxdt$$

elde edilir. Green formülü uygulanırsa

$$0=\int_S^T\int_\Omega(u_tu_{tt}+\nabla u\nabla u_t)\,dxdt-\int_S^T\int_\Gamma u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma dt$$

$$0=\int_S^T\int_\Omega(u_tu_{tt}+\nabla u\nabla u_t)\,dxdt-\int_S^T\int_{\Gamma_0} u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0dt+\int_S^T\int_{\Gamma_1}u_t(m\cdot\nu)g(u_t)\,d\Gamma_1dt$$

bulunur. (2.2) den dolayı $\int_S^T \int_{\Gamma_0} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0 dt = 0$ dır. O halde

$$0 = \int_S^T \int_\Omega \left(u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t\right) dxdt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} u_t \left(m \cdot \nu\right) g\left(u_t\right) d\Gamma_1 dt$$

$$0 = \int_S^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\left(\left|u_t\right|^2\right)^2 + \left(\left|\nabla u\right|\right)^2 \right) dxdt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} u_t \left(m \cdot \nu\right) g\left(u_t\right) d\Gamma_1 dt$$

eşitliği yazılabilir. (2.8) de $E\left(t\right) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\left|u_t\right|^2 + \left|\nabla u\right|^2\right) dx$ olduğundan dolayı

$$0 = \int_S^T E'\left(t\right) dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} u_t \left(m \cdot \nu\right) g\left(u_t\right) d\Gamma_1 dt$$

elde edilir. Buradan

$$E'\left(t\right) = -\int_{\Gamma_1} \left(m \cdot \nu\right) u_t g\left(u_t\right) d\Gamma_1 dt \tag{2.13}$$

ve

$$E\left(S\right) - E\left(T\right) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} \left(m \cdot \nu\right) u_t g\left(u_t\right) d\Gamma_1 dt \tag{2.14}$$

bulunur. $m \cdot \nu \geq 0$ ve $xg\left(x\right) \geq 0$ olduğundan dolayı (2.14) eşitliğinin sağ tarafı sıfırdan büyük ya da eşittir. O halde E artmayan bir fonksiyondur.

Lemma 2.2.

$$Mu = 2m \cdot \nabla u + \left(n-1\right) u \tag{2.15}$$

ve $0 \leq S < T < \infty$ için

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2}dt-\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma_m dt=\left(E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t Mudx\right|_T^S$$
$$+\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{(p-3)/2}E'\int_\Omega u_t Mudxdt+\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_1}\left[|u_t|^2-|\nabla u|^2-g(u_t)Mu\right]d\Gamma_m dt \tag{2.16}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

(2.1) denklemi $MuE^{(p-1)/2}$ ile çarpılıp $\Omega\times(S,T)$ bölgesinde integre edilirse

$$0=\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_\Omega Mu(u_{tt}-\Delta u)dxdt$$

$$0=\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_\Omega\left[(u_t Mu)_t-u_t Mu_t-Mu(\Delta u)\right]dxdt$$

$$0=\int_S^T E^{(p-1)/2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(u_t Mu)dxdt-\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_\Omega\left[u_t Mu_t+Mu(\Delta u)\right]dxdt$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$0=\left(E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t Mu\right|_S^T-\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{(p-3)/2}E'\int_\Omega u_t Mudxdt$$
$$-\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_\Omega\left[u_t Mu_t+Mu(\Delta u)\right]dxdt \tag{2.17}$$

bulunur. (2.17) nin sağ tarafındaki $\int_\Omega\left[u_t Mu_t+Mu(\Delta u)\right]dxdt$ ifadesinde (2.15) den $Mu=2m\cdot\nabla u+(n-1)u$ yazılıp Green formülü uygulanırsa

$$\int_\Omega\left[u_t Mu_t+Mu(\Delta u)\right]dxdt=\int_\Omega\left[u_t\left(2m\cdot\nabla u_t+(n-1)u_t\right)-\nabla u\cdot\nabla(Mu)\right]dx$$
$$+\int_\Gamma(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\Big[(n-1)u_t^2+m\cdot\nabla\left(u_t^2\right)-\nabla u\cdot\nabla(Mu)\Big]dx\ +\int_{\Gamma}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\Big[(n-1)u_t^2+m\cdot\nabla\left(u_t^2\right)-\nabla u\cdot\nabla\big(2m\cdot\nabla u+(n-1)u\big)\Big]dx\ +\int_{\Gamma}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\Big[m\cdot\nabla\left(u_t^2\right)+(n-1)u_t^2\ -(n-1)|\nabla u|^2-2|\nabla u|^2-m\cdot\nabla\left(|\nabla u|^2\right)\Big]dx+\int_{\Gamma}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

$$=-\int_{\Omega}u_t^2(\nabla\cdot m)\,dx+\int_{\Gamma}m\cdot\nu u_t^2 d\Gamma+(n-1)\int_{\Omega}u_t^2dx-n\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx$$
$$-2\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Omega}(\nabla\cdot m)|\nabla u|^2\,dx-\int_{\Gamma}m\cdot\nu|\nabla u|^2\,d\Gamma+\int_{\Gamma}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

bulunur. $\nabla\cdot m=n$ olduğundan dolayı üstteki eşitlikte yerine yazılırsa

$$=-\int_{\Omega}u_t^2 n dx+\int_{\Gamma}m\cdot\nu u_t^2 d\Gamma+n\int_{\Omega}u_t^2dx-\int_{\Omega}u_t^2-n\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx$$
$$-2\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+n\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx-\int_{\Gamma}m\cdot\nu|\nabla u|^2\,d\Gamma+\int_{\Gamma}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$=-\int_{\Omega}u_t^2dx-\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Gamma}m\cdot\nu u_t^2 d\Gamma-\int_{\Gamma}m\cdot\nu|\nabla u|^2\,d\Gamma+\int_{\Gamma}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

yazılabilir. Γ sınırı, Γ_0 ve Γ_1 den oluştuğu için

$$=-\int_{\Omega}\left(u_t^2dx+|\nabla u|^2\right)dx+\int_{\Gamma_0}m\cdot\nu u_t^2 d\Gamma-\int_{\Gamma_0}m\cdot\nu|\nabla u|^2\,d\Gamma+\int_{\Gamma_0}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_1}m\cdot\nu u_t^2 d\Gamma-\int_{\Gamma_1}m\cdot\nu|\nabla u|^2\,d\Gamma+\int_{\Gamma_1}(Mu)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma$$

yazılabilir. Üstteki eşitlikte; (2.8) den $E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right)dx$, (2.2) den $\int_{\Gamma_0} m\cdot\nu u_t^2 d\Gamma=0$, (2.15) den $Mu=2m\cdot\nabla u+(n-1)u$ ve (2.3) den $\frac{\partial u}{\partial\nu}+(m\cdot\nu)g(u_t)=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\nu}=-(m\cdot\nu)g(u_t)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&=-2E(t)-\int_{\Gamma_0}\left[-(m\cdot\nu)|\nabla u|^2+\left(2m\cdot\nabla u+(n-1)u\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]d\Gamma\\
&\qquad+\int_{\Gamma_1}\left[m\cdot\nu u_t^2-m\cdot\nu|\nabla u|^2+(Mu)(-m\cdot\nu)g(u_t)\right]d\Gamma
\end{aligned}
$$

bulunur. (2.2) den $\int_{\Gamma_0}(n-1)u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma=0$ olduğundan dolayı üstteki eşitlikte yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&=-2E(t)-\int_{\Gamma_0}\left[-(m\cdot\nu)|\nabla u|^2+(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]d\Gamma\\
&\qquad+\int_{\Gamma_1}\left[m\cdot\nu u_t^2-m\cdot\nu|\nabla u|^2-(Mu)(m\cdot\nu)g(u_t)\right]d\Gamma
\end{aligned}
$$

elde edilir. $d\Gamma_m=(m\cdot\nu)d\Gamma$ olduğu için üstteki eşitliği

$$
=-2E(t)-\int_{\Gamma_0}\left[-(m\cdot\nu)|\nabla u|^2+(2m\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]d\Gamma+\int_{\Gamma_1}\left[u_t^2-|\nabla u|^2-(Mu)g(u_t)\right]d\Gamma_m
$$

şeklinde yazabiliriz. (2.2) den Γ_0 üzerinde $\nabla u=\nu\frac{\partial u}{\partial\nu}$ olduğundan dolayı

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left[u_t Mu_t+Mu(\Delta u)\right]dxdt&=-2E(t)-\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma_m\\
&\qquad+\int_{\Gamma_1}\left[u_t^2-|\nabla u|^2-(Mu)g(u_t)\right]d\Gamma_m
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu elde ettiğimiz son eşitlik (2.17) de yerine yazılırsa

$$0=\left(E^{(p-1)/2}\int_{\Omega}u_t Mu\Big|_S^T-\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{(p-3)/2}E'\int_{\Omega}u_t Mudxdt\right.$$
$$-\int_S^T E^{(p-1)/2}\left[-2E(t)-\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma_m+\int_{\Gamma_1}\left[u_t^2-|\nabla u|^2-(Mu)\,g(u_t)\right]d\Gamma_m\right]dt$$

yazılabilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2}dt-\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma_m dt=\left(E^{(p-1)/2}\int_{\Omega}u_t Mu\Big|_T^S\right.$$
$$+\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{(p-3)/2}E'\int_{\Omega}u_t Mudxdt+\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_1}\left[u_t^2-|\nabla u|^2-(Mu)\,g(u_t)\right]d\Gamma_m dt \tag{2.18}$$

elde edilerek (2.16) eşitliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.3.

$$\left|\int_{\Omega}u_t Mudx\right|\le cE(t) \tag{2.19}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

(2.15) den $Mu=2m\cdot\nabla u+(n-1)u$ olduğundan dolayı

$$\left|\int_{\Omega}u_t Mudx\right|\le\left|\int_{\Omega}u_t\left(2m\cdot\nabla u+(n-1)u\right)dx\right|$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\left|\int_{\Omega}u_t Mudx\right|\le\left|2\int_{\Omega}u_t m\cdot\nabla udx+(n-1)\int_{\Omega}u_t udx\right|$$

$$\left|\int_\Omega u_t M u dx\right| \le 2\left|\int_\Omega u_t m\cdot\nabla u dx\right| + (n-1)\left|\int_\Omega u_t u dx\right|$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere Cauchy eşitsizliği uygulanır ve $|m| < R$ alınırsa

$$\left|\int_\Omega u_t M u dx\right| \le 2\left(\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{(n-1)^2}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki $\frac{(n-1)^2}{2}\int_\Omega u^2 dx$ ifadesine Poincare – Friedrichs eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_\Omega u_t M u dx\right| \le \frac{3}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + \left(R^2 + \frac{(n-1)^2}{2}c_0(\Omega)\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\left|\int_\Omega u_t M u dx\right| \le \max\left\{\frac{3}{2}, R^2 + \frac{(n-1)^2}{2}c_0(\Omega)\right\}\left(\int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafında $c_1 = \max\left\{\frac{3}{2}, R^2 + \frac{(n-1)^2}{2}c_0(\Omega)\right\}$ yazılırsa

$$\left|\int_\Omega u_t M u dx\right| \le c_1\left(\int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)$$

$$\left|\int_\Omega u_t M u dx\right| \le c_1\left(\int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dx\right)$$

bulunur. (2.8) den $E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right)dx$ olduğundan dolayı üstteki eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\left|\int_\Omega u_t Mudx\right|\le c_1 2E(t)$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizlikte $c=2c_1$ yazılırsa

$$\left|\int_\Omega u_t Mudx\right|\le cE(t)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

İspat (Teorem 2.1.)

Teorem (2.1) in ispatı; Lemma 2.1. , Lemma 2.2. ve Lemma 2.3.'ün sonuçları kullanılarak yapılır. (2.18) in sağ tarafındaki birinci terim için

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t Mudx\right|\le E^{(p-1)/2}\left|\int_\Omega u_t Mudx\right|$$

yazılabilir. (2.19) dan dolayı

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t Mudx\right|\le E^{(p-1)/2}cE$$

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t Mudx\right|\le cE^{(p+1)/2}$$

elde edilir ve E artmayan bir fonksiyon olduğu için

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t Mudx\right|\le cE \tag{2.20}$$

bulunur. (2.18) in sağ tarafındaki ikinci terim için

$$\left|E^{(p-3)/2}E' u_t M u dx\right| \le \left|E^{(p-3)/2}E'\right|\left|u_t M u dx\right|$$

yazılabilir. (2.19) dan dolayı

$$\left|E^{(p-3)/2}E' u_t M u dx\right| \le -cE^{(p-3)/2}EE'$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\left|E^{(p-3)/2}E' u_t M u dx\right| \le -cE^{(p-1)/2}E'$$

$$\left|E^{(p-3)/2}E' u_t M u dx\right| \le -\frac{2c}{p+1}\left(E^{(p+1)/2}\right)'$$

elde edilir. $\frac{2}{p+1} < 1$ olduğundan dolayı

$$\left|E^{(p-3)/2}E' u_t M u dx\right| \le -c\left(E^{(p+1)/2}\right)' \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) den dolayı

$$\left(E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t M u\right|_T^S \le cE\Big|_T^S = c\left(E(S)-E(T)\right) \le cE(S) \tag{2.22}$$

bulunur. (2.21) den dolayı

$$\int_S^T \left|E^{(p-3)/2}E' u_t M u dx\right| dt \le -c\int_S^T \left(E^{(p+1)/2}\right)' dt = c\left(E^{(p+1)/2}(S) - E^{(p+1)/2}(T)\right)$$

yazılabilir. E artmayan bir fonksiyon olduğu için

$$\int_S^T \left|E^{(p-3)/2} E' u_t M u dx\right| dt \le cE^{(p+1)/2}(S)$$

$$\int_S^T \left|E^{(p-3)/2} E' u_t M u dx\right| dt \le cE(S) \tag{2.23}$$

elde edilir. Böylece (2.18) in sağ tarafındaki ilk iki terim $cE(S)$ ile sınırlanmış olur. (2.18) in sol tarafındaki ikinci integral, (2.7) den dolayı pozitif olur ve eşitsizlikten atılabilir. Böylece

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2} dt \le cE(S) + \int_S^T E^{(p-1)/2} \int_{\Gamma_1} \left[u_t^2 - |\nabla u|^2 - (Mu)\, g(u_t)\right] d\Gamma_m dt \tag{2.24}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.15) den $Mu = 2m\cdot\nabla u + (n-1)u$, $|m| < R$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2} dt \le cE(S) + \int_S^T E^{(p-1)/2} \int_{\Gamma_1} \left[u_t^2 - |\nabla u|^2 - \left(2m\cdot\nabla u + (n-1)u\right) g(u_t)\right] d\Gamma_m dt$$

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E^{(p+1)/2} dt &\le cE(S) \\ &+ \int_S^T E^{(p-1)/2} \int_{\Gamma_1} \left[u_t^2 - |\nabla u|^2 - 2m\cdot\nabla u g(u_t) + (n-1)u g(u_t)\right] d\Gamma_m dt \end{aligned} \tag{2.25}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.25) in sağ tarafındaki ikinci integral içindeki $(n-1)ug(u_t)$ ifadesine ε - Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$(n-1)ug(u_t) \le \varepsilon u^2 + \frac{(n-1)^2}{4\varepsilon} g^2(u_t) \tag{2.26}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.25) in sağ tarafındaki ikinci integral içindeki $2m\cdot\nabla u g(u_t)$ ifadesine Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$2|m|\cdot\nabla u g(u_t) \le 2R\nabla u g(u_t)$$

$$2|m|\cdot\nabla u g(u_t)\le\frac{\left(\sqrt{2}|\nabla u|\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{2}R^2g^2(u_t)\right)^2}{2}$$

$$2|m|\cdot\nabla u g(u_t)\le|\nabla u|^2+R^2g^2(u_t) \tag{2.27}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.26) ve (2.27) eşitsizlikleri (2.25) de yerlerine yazılırsa

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2}dt\le cE(S)$$
$$+\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_1}\left[u_t^2-|\nabla u|^2+|\nabla u|^2+R^2g^2(u_t)+\varepsilon u^2+\frac{(n-1)^2}{4\varepsilon}g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt$$

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2}dt\le cE(S)$$
$$+\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_1}\left[u_t^2+R^2g^2(u_t)+\varepsilon u^2+\frac{(n-1)^2}{4\varepsilon}g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon=\varepsilon(\Omega)$

$$\varepsilon\int_{\Gamma_1}u^2d\Gamma_m\le\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx(\le E)$$

olacak şekilde seçilirse

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2}dt\le cE(S)+\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_1}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt \tag{2.28}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\Gamma_2=\left\{x\in\Gamma_1:|u'(x)|\le 1\right\}\quad\text{ve}\quad\Gamma_3=\left\{x\in\Gamma_1:|u'(x)|>1\right\} \tag{2.29}$$

tanımlanırsa (2.28) ifadesi

$$2\int_S^T E^{(p+1)/2}dt \le cE(S) + \int_S^T E^{(p-1)/2}\left[\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m + \int_{\Gamma_3}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m\right]dt \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.30) daki $\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_3}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt$ ifadesi ele alınırsa

$$\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_3}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt \le -c\int_S^T E^{(p-1)/2}E'dt$$

$$\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_3}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt \le cE^{(p+1)/2}(S)$$

$$\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_3}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt \le cE(S) \tag{2.31}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.30) daki $\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt$ ifadesi ele alınırsa

$$\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m \le c\int_{\Gamma_2}\left[u_t g(u_t)\right]^{2/(p+1)}d\Gamma_m$$

$$\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m \le c\left(\int_{\Gamma_2}u_t g(u_t)d\Gamma_m\right)^{2/(p+1)}$$

$$\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m \le c(-E')^{2/(p+1)}$$

bulunur. O halde

$$\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2(u_t)\right]d\Gamma_m dt \le c\int_S^T E^{(p-1)/2}(-E')^{2/(p+1)}dt$$

eşitsizliği elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafına Young Eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2\left(u_t\right)\right]d\Gamma_m dt\le\int_S^T\left[\varepsilon E^{(p+1)/2}-c\left(\varepsilon\right)E'\right]dt$$

$$\int_S^T E^{(p-1)/2}\int_{\Gamma_2}\left[u_t^2+g^2\left(u_t\right)\right]d\Gamma_m dt\le\varepsilon\int_S^T E^{(p+1)/2}dt+c\left(\varepsilon\right)E\left(S\right) \tag{2.32}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.31) ve (2.32) eşitsizlikleri (2.30) da uygulanacak olursa

$$\int_S^T E^{(p+1)/2}dt\le c\left(\varepsilon\right)E\left(S\right)+\varepsilon c\int_S^T E^{(p+1)/2}dt$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon c<1$ seçilirse

$$\int_S^T E^{(p+1)/2}dt\le cE\left(S\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $T\to\infty$ için

$$\int_S^\infty E^{(p+1)/2}dt\le cE\left(S\right),\qquad \forall S\ge 0$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 1.1. in kullanılmasıyla $\alpha=\dfrac{p-1}{2}$ ve $T=cE\left(0\right)^{-\alpha}$ alınarak ispat tamamlanır.

BÖLÜM 3. LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DÜZGÜN KARARLILIĞI

Bu bölümde lineer olmayan dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığı incelenecektir.

Aşağıdaki dalga denklemi için başlangıç sınır değer problemi ele alınsın.

$$u_{tt} - \Delta u + h\left(u_t\right) = 0 \qquad \left(x,t\right) \in \Omega \times R_+ \tag{3.1}$$

$$u = 0 \qquad \left(x,t\right) \in \partial\Omega \times R_+ \tag{3.2}$$

$$u\left(0\right) = 0 \;\; ve \;\; u_t\left(0\right) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{3.3}$$

Burada Ω, $R^N\left(N \geq 1\right)$ de sınırlı bir bölgedir. $\partial\Omega$ ise C^2 sınıfından olup Ω bölgesinin sınırıdır ve h fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

$h : R \to R$

$$h(y) = \begin{cases} y, & -1 \leq y \leq 1 \\ \dfrac{y^2 - y + 1}{\left(y-1\right)^2 + 1}, & y \geq 1 \\ \dfrac{-y^2 - y - 1}{\left(y+1\right)^2 + 1}, & y \leq -1 \end{cases} \tag{3.4}$$

(3.1) eşitliğinin her iki tarafı u_t ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega u_t u_{tt}dx - \int_\Omega u_t u_{xx}dx + \int_\Omega u_t h(u_t)\,dx = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terim düzenlenirse

$$\int_\Omega u_t u_{tt}dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t)^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx \tag{3.6}$$

bulunur. (3.5) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terime Green formülü uygulanırsa

$$-\int_\Omega u_t u_{xx}dx = -\left[-\int_\Omega u_{tx}u_x dx + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n}\,dx\right]$$

yazılabilir. (3.3) sınır koşulundan dolayı $\int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n}\,dx = 0$ dır. O halde

$$-\int_\Omega u_t u_{xx}dx = \int_\Omega u_{tx}u_x dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_x^2 dx \tag{3.7}$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) ifadeleri , (3.5) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_x^2 dx + \int_\Omega u_t h(u_t)\,dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t^2 + u_x^2\right)dx\right] + \int_\Omega u_t h(u_t)\,dx = 0 \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) de çözümlerin enerjisi olarak

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |u_x|^2\right)dx \tag{3.9}$$

şeklinde bir $E(t)$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.8) ifadesi

$$\frac{d}{dt}\left[E(t)\right]+\int_{\Omega}u_t h(u_t)\,dx=0 \tag{3.10}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$E'(t)=-\int_{\Omega}u_t h(u_t)\,dx\leq 0 \tag{3.11}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.

$N=1$ ve $(u_0,u_1)\in\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\right)$ için (3.1) – (3.3) probleminin çözümü c ve w pozitif sabitler olmak üzere

$$E(t)\leq ce^{-wt} \qquad \forall t>0 \tag{3.12}$$

kestirimini sağlar.

İspat.

c_i ler pozitif sabitler olmak üzere (3.4) ile verilen h fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$$c_1|y|\leq|h(y)|\leq c_2|y| \qquad |y|\leq 1 \tag{3.13}$$

$$c_3\leq|h(y)|\leq c_4|y| \qquad |y|>1 \tag{3.14}$$

(3.1) eşitliğinin her iki tarafı u ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_{\Omega}uu_{tt}dx-\int_{\Omega}uu_{xx}dx+\int_{\Omega}uh(u_t)\,dx=0 \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terim düzenlenirse

$$\int_\Omega uu_{tt}dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}(uu_t)\,dx - \int_\Omega u_t^2dx = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega uu_tdx\right) - \int_\Omega u_t^2dx \qquad (3.16)$$

yazılabilir. (3.15) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terim düzenlenirse

$$-\int_\Omega uu_{xx}dx = -\left[uu_x\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega u_xu_xdx \right]$$

yazılabilir. (3.2) sınır koşulundan dolayı $uu_x\Big|_{\partial\Omega} = 0$ dır. Buradan

$$-\int_\Omega uu_{xx}dx = \int_\Omega u_x^2dx \qquad (3.17)$$

bulunur. (3.16) ve (3.17) ifadeleri (3.15) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega uu_tdx\right) - \int_\Omega u_t^2dx + \int_\Omega u_x^2dx + \int_\Omega uh(u_t)\,dx = 0$$

elde edilir. Üstteki eşitliğin her iki tarafına $2\int_\Omega u_t^2dx$ eklenir ve düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega uu_tdx\right) - \int_\Omega u_t^2dx + \int_\Omega u_x^2dx + \int_\Omega uh(u_t)\,dx + 2\int_\Omega u_t^2dx = 2\int_\Omega u_t^2dx$$

$$\int_\Omega u_t^2dx + \int_\Omega u_x^2dx = -\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega uu_tdx\right) + 2\int_\Omega u_t^2dx - \int_\Omega uh(u_t)\,dx$$

$$\int_\Omega \left(u_t^2 + u_x^2\right)dx = -\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega uu_tdx\right) + \int_\Omega \left[2u_t^2 - uh(u_t)\right]dx \qquad (3.18)$$

bulunur. (3.9) dan dolayı (3.18) ifadesinde $\int_\Omega \left(u_t^2 + u_x^2\right)dx = 2E(t)$ yazılırsa

$$2E(t) = -\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega uu_t dx\right) + \int_\Omega \left[2u_t^2 - uh(u_t)\right] dx$$

elde edilir. Üstteki eşitliğin her iki tarafı $(0,T)$ aralığında integre edilirse

$$2\int_0^T E(t)\,dt = \int_0^T \left[-\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega uu_t dx\right)\right] dt + \int_0^T \int_\Omega \left[2u_t^2 - uh(u_t)\right] dxdt$$

$$2\int_0^T E(t)\,dt = -\int_\Omega uu_t \Big|_0^T + \int_0^T \int_\Omega \left[2u_t^2 - uh(u_t)\right] dxdt \qquad (3.19)$$

bulunur. (3.19) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim için

$$-\int_\Omega uu_t dx \le \left|\int_\Omega uu_t dx\right| \le \int_\Omega |u||u_t|\, dx$$

yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeye Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_\Omega uu_t dx\right| \le \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_t|^2\, dx\right)^{1/2}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeye Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_\Omega uu_t dx\right| \le \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\, dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin birinci terimine Poincare – Friedrichs eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_\Omega uu_t dx\right| \le \frac{1}{2} c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\, dx$$

$$\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right| \le \max\{1, c_0\} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + |u_t|^2\right) dx$$

$$\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right| \le \max\{1, c_0\} E(t)$$

$$\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right| \le cE(t) \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) deki eşitsizliğin her iki tarafının $(0,T)$ aralığında değeri bulunursa

$$\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right|\Big|_0^T \le cE(t)\Big|_0^T$$

$$\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right|\Big|_0^T \le c\left[E(T) - E(0)\right]$$

yazılabilir. E artmayan bir fonksiyon olduğundan dolayı

$$\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right|\Big|_0^T \le cE(0) \tag{3.21}$$

bulunur. (3.21) ifadesi (3.19) da uygulanırsa

$$2\int_0^T E(t)\,dt \le cE(0) + \int_0^T \int_{\Omega} \left[2u_t^2 - uh(u_t)\right] dxdt$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14) den dolayı

$$\int_{|u_t|\le 1} u_t^2 dx \le c\int_{|u_t|\le 1} u_t h(u_t)\,dx \le c(-E')$$

$$\int_{|u_t|\le 1} h(u_t)^2\,dx \le c\int_{|u_t|\le 1} u_t h(u_t)\,dx \le c(-E')$$

yazılabilir. Böylece

$$2\int_0^T E(t)\,dt \le cE(0) + \int_0^T \int_{|u_t|\le 1} \left[2u_t^2 - uh(u_t)\right] dx\,dt$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_{|u_t|>1} u_t^2\,dx \le c\int_{|u_t|>1} |u_t|\left|u_t h(u_t)\right| dx$$

$$\int_{|u_t|>1} u_t^2\,dx \le c\|u_t\|_{L_\infty} \int_{|u_t|>1} \left|u_t h(u_t)\right| dx$$

$$\int_{|u_t|>1} u_t^2\,dx \le c(-E')$$

ve

$$\int_{|u_t|>1} \left|uh(u_t)\right| dx \le c\|u\|_{L_\infty} \int_{|u_t|>1} \left|h(u_t)\right| dx$$

$$\int_{|u_t|>1} \left|uh(u_t)\right| dx \le c\|u\|_{L_\infty} \int_{|u_t|>1} \left|u_t h(u_t)\right| dx$$

$$\int_{|u_t|>1} \left|uh(u_t)\right| dx \le c(-E')$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^T E(t) \le cE(0)$$

yazılabilir. Lemma 1.1. den dolayı

$$E(t) \le ce^{-wt} \qquad \forall t > 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.

$N \geq 2$ ve $(u_0, u_1) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$ için (3.1) – (3.3) probleminin çözümü c pozitif sabit olmak üzere

$$N > 2 \qquad ise \qquad E(t) \leq \frac{c}{t^{4/(N-2)}} \tag{3.22}$$

ve

$$N = 2 \qquad ise \qquad E(t) \leq \frac{c}{t^m} \qquad \forall m \in N \tag{3.23}$$

kestirimlerini sağlar.

İspat.

$p > 1$ ve $p \geq \dfrac{N}{2}$ olmak üzere,

$$|y| \leq 1 \qquad \text{ise} \qquad c_1 |y|^p \leq |h(y)| \leq c_2 |y|^{1/p} \tag{3.24}$$

ve

$$|y| > 1 \qquad \text{ise} \qquad c_3 \leq |h(y)| \leq c_4 |y| \tag{3.25}$$

dır. (3.1) denklemi $E^{(p-1)/2}u$ ile çarpılır ve Ω bölgesinde integre edilirse

$$E^{(p-1)/2} \int_\Omega u u_{tt} dx - E^{(p-1)/2} \int_\Omega u \Delta u dx + E^{(p-1)/2} \int_\Omega u h(u_t) dx = 0 \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.26) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terim düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\left(E^{(p-1)/2} \int_\Omega u u_t dx\right) = \frac{p-1}{2} E^{(p-3)/2} E'(t) \int_\Omega u u_t dx + E^{(p-1)/2} \int_\Omega \left(u_t^2 + u u_{tt}\right) dx$$

$$E^{(p-1)/2}\int_\Omega uu_{tt}dx=\frac{d}{dt}\left(E^{(p-1)/2}\int_\Omega uu_t dx\right)-\frac{p-1}{2}E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dx \\ -E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t^2 dx \tag{3.27}$$

bulunur. (3.26) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terime Green formülü uygulanırsa

$$-E^{(p-1)/2}\int_\Omega u\Delta u dx=E^{(p-1)/2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx-E^{(p-1)/2}\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma$$

elde edilir. (3.2) den dolayı üstteki eşitlikte $E^{(p-1)/2}\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma=0$ olur. Böylece

$$-E^{(p-1)/2}\int_\Omega u\Delta u dx=E^{(p-1)/2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \tag{3.28}$$

bulunur. (3.27) ve (3.28) de bulunan eşitlikler (3.26) da yerlerine yazılırsa

$$0=\frac{d}{dt}\left(E^{(p-1)/2}\int_\Omega uu_t dx\right)-\frac{p-1}{2}E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dx-E^{(p-1)/2}\int_\Omega u_t^2 dx \\ +E^{(p-1)/2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx+E^{(p-1)/2}\int_\Omega uh(u_t)dx$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenip $(0,T)$ aralığında integre edilirse

$$0=E^{(p-1)/2}\int_\Omega uu_t dx\Big|_0^T-\frac{p-1}{2}\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt \\ +\int_0^T E^{(p-1)/2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-u_t^2+uh(u_t)\right)dxdt \tag{3.29}$$

bulunur. (3.20) den $\left|\int_\Omega uu_t dx\right|\le cE(t)$ olduğundan dolayı (3.29) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim için

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_\Omega uu_t dx\right|\le cE^{(p-1)/2}E$$

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_{\Omega} uu_t dx\right| \le cE^{(p+1)/2}$$

eşitsizliği yazılabilir. E artmayan bir fonksiyon olduğu için üstteki eşitsizlikten

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_{\Omega} uu_t dx\right| \le cE$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafının $(0,T)$ aralığında değeri bulunursa

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_{\Omega} uu_t dx\right|\Big|_0^T \le cE(t)\Big|_0^T$$

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_{\Omega} uu_t dx\right|\Big|_0^T \le c\left[E(T)-E(0)\right]$$

$$\left|E^{(p-1)/2}\int_{\Omega} uu_t dx\right|\Big|_0^T \le cE(0) \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.20) den $\left|\int_{\Omega} uu_t dx\right| \le cE(t)$ olduğundan dolayı (3.29) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için

$$\left|\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_{\Omega} uu_t dxdt\right| \le \int_0^T E^{(p-3)/2}E'(-cE)dt$$

$$\left|\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_{\Omega} uu_t dxdt\right| \le -c\int_0^T E^{(p-1)/2}E'dt$$

eşitsizliği yazılabilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\left|\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_{\Omega} uu_t dxdt\right| \le -c\int_0^T \frac{d}{dt}\left(E^{(p+1)/2}\right)dt$$

$$\left|\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt\right| \le -c\left[E^{(p+1)/2}(T)-E^{(p+1)/2}(0)\right]$$

elde edilir. E artmayan bir fonksiyon olduğu için üstteki eşitsizlikten

$$\left|\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt\right| \le cE^{(p+1)/2}(0)$$

$$\left|\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt\right| \le cE(0) \tag{3.31}$$

bulunur. (3.29) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} 0 = -E^{(p-1)/2}\int_\Omega uu_t dx\Big|_0^T + \frac{p-1}{2}\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt \\ + \int_0^T E^{(p-1)/2}\int_\Omega\left(u_t^2-|\nabla u|^2-uh(u_t)\right)dxdt \end{aligned}$$

elde edilir. (3.29) eşitliğinin her iki tarafına $2\int_0^T E^{(p+1)/2}dt$ eklenirse

$$\begin{aligned} 2\int_0^T E^{(p+1)/2}dt = -E^{(p-1)/2}\int_\Omega uu_t dx\Big|_0^T + \frac{p-1}{2}\int_0^T E^{(p-3)/2}E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt \\ + \int_0^T E^{(p-1)/2}\int_\Omega\left(u_t^2-|\nabla u|^2-uh(u_t)\right)dxdt + 2\int_0^T E^{(p+1)/2}dt \end{aligned} \tag{3.32}$$

bulunur. $2\int_0^T E^{(p+1)/2}dt$ ifadesi düzenlenirse

$$2\int_0^T E^{(p+1)/2}dt = 2\int_0^T E^{(p-1)/2}Edt$$

yazılabilir. (3.9) da $E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2\right)dx$ olduğu için üstteki eşitlik

$$2\int_0^T E^{(p+1)/2} dt = \int_0^T E^{(p-1)/2} \int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dxdt \tag{3.33}$$

şeklinde yazılabilir. (3.33) eşitliği (3.32) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}2\int_0^T E^{(p+1)/2} dt = &-E^{(p-1)/2} \int_\Omega u u_t dx\Big|_0^T + \frac{p-1}{2}\int_0^T E^{(p-3)/2} E'(t) \int_\Omega u u_t dxdt \\ &+ \int_0^T E^{(p-1)/2} \int_\Omega \left(u_t^2 - |\nabla u|^2 - uh(u_t)\right) dxdt + \int_0^T E^{(p-1)/2} \int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dxdt\end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}2\int_0^T E^{(p+1)/2} dt = &-E^{(p-1)/2} \int_\Omega u u_t dx\Big|_0^T + \frac{p-1}{2}\int_0^T E^{(p-3)/2} E'(t) \int_\Omega u u_t dxdt \\ &+ \int_0^T E^{(p-1)/2} \int_\Omega \left(2u_t^2 - uh(u_t)\right) dxdt\end{aligned} \tag{3.34}$$

bulunur. (3.30), (3.31) ve (3.34) den dolayı

$$2\int_0^T E^{(p+1)/2} dt \le cE(0) + \int_0^T E^{(p-1)/2} \int_\Omega \left(2u_t^2 - uh(u_t)\right) dxdt \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.24) den dolayı

$$\int_{|u_t|\le 1} u_t^2 dx \le c\int_{|u_t|\le 1} \left(u_t h(u_t)\right)^{2/(p+1)} dx$$

$$\int_{|u_t|\le 1} u_t^2 dx \le c\left(-E'\right)^{2/(p+1)} \tag{3.36}$$

ve

$$\int_{|u_t|\le 1} h(u_t)^2 \, dx \le c\int_{|u_t|\le 1} \left(u_t h(u_t)\right)^{2/(p+1)} dx$$

$$\int_{|u_t|\le 1} h(u_t)^2\,dx \le c(-E')^{2/(p+1)} \tag{3.37}$$

yazılabilir. (3.36) ve (3.37) den dolayı

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|\le 1}\left(2u_t^2 - uh(u_t)\right)dx \le cE^{(p-1)/2}(-E')^{2/(p+1)} + cE^{p/2}(-E')^{1/(p+1)}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim için $\overline{p} = (p+1)/(p-1)$, $\overline{q} = (p+1)/2$ ve ikinci terim için $\overline{p} = (p+1)/p$, $\overline{q} = p+1$ seçilerek $\varepsilon > 0$ olmak üzere Young Eşitsizliği uygulanırsa

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|\le 1}\left(2u_t^2 - uh(u_t)\right)dx \le \varepsilon E^{(p+1)/2} - c(\varepsilon)E' \tag{3.38}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\int_0^T E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|\le 1}\left(2u_t^2 - uh(u_t)\right)dxdt \le \varepsilon\int_0^T E^{(p+1)/2}(t)\,dt + c(\varepsilon)E(0) \tag{3.39}$$

yazılabilir. (3.39) ifadesi (3.35) de yerine yazılarak düzenlenirse

$$(2-\varepsilon)\int_0^T E^{(p+1)/2}(t)\,dt \le c(\varepsilon)E(0) + \int_0^T E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}\left(2u_t^2 - uh(u_t)\right)dxdt \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terimde $\alpha = (2-s)/(1-s)$, $s \ne 1$ seçilerek düzenleme yapılırsa

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} u_t^2\,dx \le cE^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} |u_t|^{\alpha(1-s)}\,|u_t h(u_t)|^s\,dx$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} u_t^2\,dx \le cE^{(p-1)/2}\left\||u_t|^{\alpha(1-s)}\right\|_{1/(1-s)}\left\||u_t h(u_t)|^s\right\|_{1/s}$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} u_t^2 dx \le cE^{(p-1)/2}\|u_t\|_\alpha^{\alpha(1-s)}(-E')^s$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} u_t^2 dx \le \varepsilon' E^{(p-1)/2(1-s)}\|u_t\|_\alpha^{\alpha} - c(\varepsilon')E'$$

elde edilir. $s = 2/(p+1)$ seçilerek üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} u_t^2 dx \le \varepsilon' E^{(p+1)/2}\|u_t\|_{2p/(p-1)}^{2p/(p-1)} - c(\varepsilon')E'$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terime Poincare – Friedrichs eşitsizliği uygulanırsa

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} u_t^2 dx \le c\varepsilon' E^{(p+1)/2} - c(\varepsilon')E'$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlikte $\varepsilon' = \varepsilon/c$ seçilerek düzenlenirse

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} u_t^2 dx \le \varepsilon E^{(p+1)/2} - c(\varepsilon)E' \tag{3.41}$$

bulunur. (3.41) e ilave olarak

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} |uh(u_t)|\, dx \le \varepsilon E^{(p+1)/2} - c(\varepsilon)E'$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Gerçekten $N \le 3$ için

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} |uh(u_t)|\, dx \le cE^{(p-1)/2}\|u\|_\infty \|h(u_t)\|_{L^1(|u_t|>1)}$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1} |uh(u_t)|\, dx \le cE^{(p-1)/2}\|u\|_\infty \|u_t h(u_t)\|_{L^1(|u_t|>1)}$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le cE^{(p-1)/2}\|u\|_{\infty}(-E')$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le cE^{(p-1)/2}\|u\|_{\infty}(-E')$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le -cE'$$

elde edilir. $N \ge 4$ için

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le cE^{(p-1)/2}\|u\|_{L^2}\|h(u_t)\|_{L^2(|u_t|>1)}$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le cE^{(p-1)/2}\|u\|_{L^2}\left\|\left(u_t h(u_t)\right)^{1/2}\right\|_{L^2(|u_t|>1)}$$

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le cE^{(p-1)/2}\|u\|_{L^2}(-E')^{1/2}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafına Young Eşitsizliği uygulanırsa

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le c\varepsilon' E^{p} + c(\varepsilon')(-E')$$

bulunur. E artmayan bir fonksiyon olduğu için üstteki eşitsizlik

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le c\varepsilon' E^{(p+1)/2} + c(\varepsilon')(-E')$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon' = \varepsilon/c$ seçilirse

$$E^{(p-1)/2}\int_{|u_t|>1}|uh(u_t)|\,dx \le \varepsilon E^{(p+1)/2} + c(\varepsilon)(-E') \tag{3.42}$$

bulunur. (3.41) ve (3.42) den (3.40) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terim

$$\int_0^T E^{(p-1)/2} \int_{|u_t|>1} \left(2u_t^2 - uh(u_t)\right) dxdt \leq 2\varepsilon \int_0^T E^{(p+1)/2}(t)\, dt + c(\varepsilon) E(0) \tag{3.43}$$

şeklinde yazılabilir. (3.43) ifadesi (3.40) da yerine yazılarak düzenlenirse

$$(2-3\varepsilon)\int_0^T E^{(p+1)/2}(t)\, dt \leq c(\varepsilon) E(0) \tag{3.44}$$

elde edilir. $\varepsilon = 1/3$ ve $A = c(1/3)$ seçilerek (3.44) ifadesinden

$$\int_0^T E^{(p+1)/2}(t)\, dt \leq AE(0)$$

bulunur. $T \to +\infty$ ve Lemma 1.1. kullanılarak

$$E(t) \leq \frac{c}{t^{2/(p-1)}}$$

yazılabilir. $N \geq 3$ için $p = N/2$ seçilirse üstteki eşitsizlik ($N/2 \leq p$ ve $1 < p$)

$$E(t) \leq \frac{c}{t^{4/(N-2)}}$$

şeklinde yazılabilir veya $N = 2$ için $p = 1 + 2/m$ seçilirse ($N/2 \leq p$ ve $1 < p$)

$$E(t) \leq \frac{c}{t^m}$$

şeklinde yazılabilir ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer olmayan dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığına ilişkin çeşitli makalelerde yer alan problemler ele alınmış ve çözüm basamakları açık şekilde incelenmiştir. İlk olarak integral eşitsizliği ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra ise dalga denklemi ele alınarak; Green formülü, Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Cauchy eşitsizliği, Poincare – Friedrichs eşitsizliği, Young eşitsizliği ve çeşitli işlemler kullanılarak kestirimler elde edilmiştir. En sonunda integral eşitsizliği yardımıyla dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlı olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışma lineer olmayan dalga denkleminin çözümlerinin düzgün kararlılığına ilişkin çeşitli makalelerden bir derleme olup ek kaynak olarak kullanılabilir. Daha fazla araştırmacının gelişen bilimsel koşullar altında daha fazla problem ve çözüm ortaya koyacağını umut ediyoruz.

KAYNAKLAR

[1] KOMORNIK, V., Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method , Masson-John Wiley , Paris, 1994.

[2] BALL, J.M., On the asymptotic behavior of generalized processes with applications to nonlinear evolution equations, J. diff. equa., 27;224-265, 1978

[3] HARAUX, A., ZUAZUA, E., Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. Ratio Mech. Anal., 100;191-206, 1988

[4] ZUAZUA, E., Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Analysis, 1;161-185, 1988

[5] A.ASSILA, M., Decay estimates for the wave equation with a nonlinear nonmonotone weak damping, Applicable Analysis, 69;3-4, 1998

ÖZGEÇMİŞ

Ramazan İŞBİLİR, 15.08.1977 de Bursa’ da doğdu. İlk ve orta eğitimini Bursa’da, lise eğitimini ise İstanbul’da tamamladı. 1996 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2000 yılında mezun oldu. Şu anda Kocaeli’ de matematik öğretmenliği yapmaktadır.