T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRİPOTENT VE GRUP TERSİNİR MATRİSLERİN BAZI BİLEŞİMLERİNİN TERSİNİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sedat ÜLKER

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN

OCAK 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRİPOTENT VE GRUP TERSİNİR MATRİSLERİN BAZI BİLEŞİMLERİNİN TERSİNİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sedat ÜLKER

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN

Bu tez 09 / 01 / 2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR	Yrd.Doç.Dr. Murat SARDUVAN	Yrd.Doç.Dr. Nesrin GÜLER
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Tez konusu seçiminde ve bu konunun seçiminden sonra çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Matematik bölümündeki değerli hocalarıma, Dr. Julio Benítez LÓPEZ' e ve beni bu günlerime getiren sevgili aileme teşekkür ederim.

Ve özellikle, tezin yazımında çok büyük emeği olan, hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen sevgili eşim Emel ÜLKER' e de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu kompleks vektör uzayı
$\mathbb{C}^{mxn}$	: mxn boyutlu kompleks elemanlı matrislerin kümesi
$\mathbb{R}^{mxn}$	: mxn boyutlu reel elemanlı matrislerin kümesi
a, b, c,...	: Skalerler
$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$,...	: Vektörler; $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^n$
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$,...	: Matrisler; $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{mxn}$
$\mathbf{0}$	: Elemanları sıfır olan vektör veya matris
$\in$	: Elemanıdır
$\mathbf{A}^{-1}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin tersi
$\mathbf{A}'$	: $\mathbf{A}$ matrisinin transpozesi
$\mathbf{A}^{-}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\mathbf{A}^{*}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin eşlenik transpozesi
$\mathbf{A}^{+}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin Moore-Penrose tersi
$\mathbf{A}^{\#}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin grup tersi
$\mathbf{A}^{\mathrm{D}}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin Drazin tersi
$\Re(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin sütun uzayı
$\aleph(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin sıfır uzayı
$rank\mathbf{A}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin rankı
$iz(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin izi
$diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$	: Köşegen elemanları $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ olan köşegen matris
$span\mathbf{S}$	: $\mathbf{S}$ alt uzayının elemanlarının lineer kombinasyonu

$sat_i(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin i. satırı
$süt_i(\mathbf{A})$	: $\mathbf{A}$ matrisinin i. sütunu
$ind\mathbf{A}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin indeksi

ÖZET

Anahtar kelimeler: Tersinirlik; İdempotent matris; Tripotent matris; Grup tersinir matris; Köşegenleştirme.

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1' de bu çalışmada bahsedilen kavramların kullanım alanları hakkında bilgi verilmektedir.

Bölüm 2' de, diğer bölümler için temel teşkil edecek olan, bazı kavram, özellik ve teoremler verilmektedir.

Bölüm 3' te, Bölüm 4' te kullanılacak olan grup tersinir matrisler ve tripotent matrisler hakkında temel bilgi ve teoremler verilmektedir.

Bölüm 4' te, c_1, c_2, c_3, c_4 kompleks sayılar ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ $n x n$ boyutlu tripotent matrisler olmak üzere $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ bileşiminin tersinirliği için gerekli ve yeterli koşullar ortaya koyulmuştur. Ayrıca böyle bileşimlerin tersleri için bazı sonuçlar elde edilmektedir. Bu sonuçlardan bazıları grup tersinir matrisler için verilmektedir.

NONSINGULARITY OF SOME COMBINATIONS OF TRIPOTENT MATRICES AND GROUP INVERTIBLE MATRICES

SUMMARY

Keywords: Nonsingularity; Idempotent matrix; Tripotent matrix; Group invertible matrix; Diagonalization.

This study consists of three main parts. In the Chapter 1, about the application areas of the concepts discussed in this study, information are given.

In the Chapter 2, being base for the other chapters, some concepts, properties, and theorems are given.

In the Chapter 3, some basic informations and theorems are given about group invertible matrices and tripotent matrices, which are necessary for the Chapter 4.

In the Chapter 4, it is established necessary and sufficient conditions for the nonsingularity of combinations $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$, where $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ are $n x n$ tripotent matrices and c_1, c_2, c_3, c_4 are complex numbers. Moreover, it is obtained some results for the inverse of such combinations. Some of these results are given in terms of group invertible matrices.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matris teorisinin temel yapı taşlarından olan idempotent matrisler, tripotent matrisler, *k*-potent matrisler, involutif matrisler gibi özel tipli matrisler geniş bir kullanım alanına sahip olduğu için literatürde yaygın olarak üzerinde çalışılmıştır (bkz., örneğin, [2, 3, 5, 14, 18, 22, 33]).

İdempotent veya involutif bir matris her zaman tripotent matris olurken, bunun tersi daima doğru değildir. Bazı özel durumlarda tripotent matrislerin lineer bileşimlerinin idempotent matris olduğu bilinmektedir (bkz., örneğin, [34]). Bununla birlikte tripotent matrislerin idempotent ve involutif ayrışımı da mümkündür [32].

Ayrıca, herhangi bir $\mathbf{Q}$ involutif matrisi için, $½(\mathbf{I}+\mathbf{Q})$, $½(\mathbf{I}-\mathbf{Q})$ matrisleri idempotenttir ve herhangi bir $\mathbf{P}$ idempotent matrisi için, $\mathbf{I}-2\mathbf{P}$, $-(\mathbf{I}-2\mathbf{P})$ matrisleri involutiftir [17]. Dolayısıyla bu özel tipli matrislerden herhangi biri için elde edilen sonuçlar, uygun koşullarda, diğerleri için de elde edilebilir.

İdempotent matrisli kuadratik formlar, istatistik teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, $\mathbf{K}$ bir $n \times n$ boyutlu reel simetrik matris, $\mathbf{x}$ çok değişkenli normal dağılıma sahip bir $n \times 1$ boyutlu reel vektör ise, bu durumda $\mathbf{x}'\mathbf{K}\mathbf{x}$ kuadratik formunun bir ki-kare dağılımına sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathbf{K}$ matrisinin idempotent bir matris olmasıdır [13].

İnvolutif matrisler de istatistik teorisinde kullanılmaktadır. Örneğin, involutif matris köşegenleştirilebilirdir [16, Corollary 3.3.10]. Dolayısıyla, köşegenleştirilebilir matrisler için spektral ayrışım teoremi (bkz., örneğin, [26]) dikkate alındığında eğer $\mathbf{A}$ bir involutif matris ise, $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$, $\mathbf{I}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$ olacak şekilde $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ idempotent matrislerinin varlığından söz edilebilir. Böylece $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$

kuadratik formunun involutifliği, “ iki bağımsız kuadratik formun farkının serbestlik derecelerinin toplamı, istatistiksel teori çerçevesinde ana kuadratik form matrisinin boyutuna eşit olmak zorundadır ” kısıtlamasına götürür.

İnvolutif matrislerin diğer uygulamalı bilimlerde de kullanıldığı bilinmektedir. Örneğin, Pauli spin ve Dirac matrisler sınıfının üyeleri olarak bilinen, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri (reel veya simetrik olmamalarına karşın) involutiftir ve sırasıyla, kuantum mekaniğinde ve kuantum elektrodinamiğinde geniş ölçüde kullanılmaktadır (bkz., [1, p. 495] ve [8, pp. 47–51]). İnvolutif matrisin kullanıldığı farklı uygulama alanlarını görmek için [15, 25, 27] çalışmalarına bakılabilir.

Bu çalışmada tanımı ve bazı özellikleri verilecek olan bir matrisin Moore-Penrose tersi, Drazin tersi ve grup tersi gibi kavramlar da yoğun kullanım alanı olan kavramlardır.

Örneğin, $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ biçimindeki matris denkleminin tutarlı olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathbf{A}$ matrisinin Moore-Penrose tersi $\mathbf{A}^+$ ile gösterilmek üzere,

$$\mathbf{AA}^+\mathbf{CB}^+\mathbf{B} = \mathbf{C}$$

olmasıdır. Ayrıca bu denklem için genel çözüm, $\mathbf{Y}$ matrisi keyfi olmak üzere,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^+\mathbf{CB}^+ + \mathbf{Y} - \mathbf{A}^+\mathbf{AYBB}^+$$

biçiminde Moore-Penrose ters kullanılarak verilir [29]. Yine $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ biçimindeki bir denklemin Moore-Penrose ters kullanılarak elde edilen, en iyi yaklaşık çözümü için [28] çalışmasına bakılabilir.

Drazin tersin kullanımı ile ilgili olarak şu örnek verilebilir. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ $n \mathrm{x} n$ boyutlu tersinir olması gerekmeyen matrisler, f vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere, $\mathbf{Ax}'+\mathbf{Bx}=f$ biçimindeki diferansiyel denklemlerin çözümü Drazin ters kullanılarak yapılabilmektedir [12].

Ayrıca, bu çalışma içerisinde değinilecek olan Grup tersinirliğin kullanıldığı çok ilginç uygulama alanları mevcuttur. Örneğin, Grup tersinirlik, Google tarafından sitelerin birbirleriyle orantılı olarak tercih edilebilirliklerini tespit etmek için kullanılan, PageRank değerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır [19, 20].

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

2.1. Giriş

Bu bölümde bazı temel gösterimler, tanımlar, özellikler ve teoremler verilmektedir. Çalışma içerisinde, matrisler koyu ve büyük harflerle ($\mathbf{A}$ gibi), vektörler koyu ve küçük harflerle ($\mathbf{x}$ gibi), skalerler ise küçük italik harfler ile (c gibi) gösterilmektir.

Tüm çalışma boyunca, $\mathbf{A}'$, $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}^\#$, $\aleph(\mathbf{A})$ ve $\Re(\mathbf{A})$ sırasıyla $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin, transpozesini, eşleniğini, eşlenik transpozesini, grup tersini, sıfır uzayını ve sütün uzayını göstermektedir.

2.2. Bazı Matris Tipleri ve Matrislere Ait Bazı Özellikler

Aşağıda verilen tanımlar, özellikler ve teoremler temel bilgiler olup birçok kaynakta mevcuttur (bkz., örneğin, [4, 7, 9, 11, 16, 21, 26, 29, 30, 31, 35]).

Tanım 2.2.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisine $m = n$ ise kare, diğer durumlarda dikdörtgen denir.

Tanım 2.2.2. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin elemanları a_{ij} veya $\mathbf{A}[i, j]$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ yazılabilir. $\mathbf{A}$ matrisine,

(i) $i \neq j$ için $\mathbf{A}[i, j] = 0$ ise köşegen,

(ii) $i > j$ için $\mathbf{A}[i, j] = 0$ ise üst üçgensel,

(iii) $i < j$ için $\mathbf{A}[i, j] = 0$ ise alt üçgensel denir.

Not 2.2.3. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ köşegen matris ise, $\mathbf{A} = diag\left(a_{11}, \ldots, a_{nn}\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $n_1 + n_2 = n$ ve $i,\ j = 1, 2$ için, $\mathbf{A}_{ij}$ altmatrisleri $n_i \mathrm{x} n_j$ boyutlu olmak üzere, $\mathbf{A}$ matrisinin $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ biçimde gösterimine, $\mathbf{A}$ matrisinin bir parçalanmış veya blok formu denir.

Tanım 2.2.5. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin transpozesi $\mathbf{A}'$ ile gösterilir ve $\mathbf{A}'\left[i, j\right] = \mathbf{A}\left[j, i\right]$ olarak yazılır.

Tanım 2.2.6. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin eşlenik transpozesi, $\mathbf{A}^*$ ile gösterilir ve $\mathbf{A}^* = \left(\overline{\mathbf{A}}\right)'$ olarak yazılır.

Tanım 2.2.7. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için, $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere, $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ koşulunu sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ değerine, $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğeri ve $\mathbf{x}$ vektörüne de $\mathbf{A}$ matrisinin bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü denir.

Tanım 2.2.8. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ koşulunu sağlıyorsa, $\mathbf{A}$ matrisine involutif; $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$ koşulunu sağlıyorsa, $\mathbf{A}$ matrisine yarı involutif denir.

Tanım 2.2.9. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine idempotent denir.

Tanım 2.2.10. $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine tripotent denir.

Tanım 2.2.11. Bazı pozitif q tamsayıları için, $\mathbf{A}^q = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine nilpotent denir. Ayrıca bu koşulu sağlayan en küçük pozitif q tamsayısına $\mathbf{A}$ matrisinin nilpotentlik indeksi denir.

Tanım 2.2.12. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi eşlenik transpozesine eşitse, yani $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ ise, $\mathbf{A}$ matrisine Hermityen denir ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisi $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ koşulunu sağlıyorsa, $\mathbf{A}$ matrisine simetrik denir).

Özellik 2.2.13. $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi Hermityen ise,

(i) özdeğerleri reeldir,

(ii) farklı öz değerlere karşılık gelen özvektörleri dikdir.

Tanım 2.2.14. $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$ koşulunu sağlayan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine normal denir.

Tanım 2.2.15. $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{I}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine üniter denir ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisi $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$ koşulunu sağlıyorsa, $\mathbf{A}$ matrisine dik matris denir).

Tanım 2.2.16. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin lineer bağımsız sütunlarının sayısına, $\mathbf{A}$ matrisinin sütun rankı, $\mathbf{A}$ matrisinin lineer bağımsız satırlarının sayısına ise, $\mathbf{A}$ matrisinin satır rankı denir.

Özellik 2.2.17.

(i) $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisin sütun rankı, satır rankına eşittir ve $rank\mathbf{A}$ ile gösterilir.

(ii) Elementer işlemler bir matrisin rankını değiştirmez.

(iii) Eğer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ ise, $rank\mathbf{A}^* = rank\,\mathbf{A}' = rank\bar{\mathbf{A}} = rank\mathbf{A}$' dır.

(iv) Eğer $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{mxn}$ ise, $rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le rank\mathbf{A} + rank\mathbf{B}$' dir.

Not 2.2.18. $rank\mathbf{A}^k = rank\mathbf{A}^{k+1}$ koşulunu sağlayan en küçük k pozitif tamsayısına, $\mathbf{A}$ matrisinin indeksi denir ve $Ind\mathbf{A}$ ile gösterilir. Özel olarak tersinir bir $\mathbf{A}$ matrisi için $Ind\mathbf{A} = 0$ ve $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.19. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisinin köşegen üzerinde bulunan elemanlarının toplamına, $\mathbf{A}$ matrisinin izi denir ve $iz(\mathbf{A})$ ile gösterilir.

$$iz\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

biçiminde yazılabilir.

Özellik 2.2.20. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere, $f(\mathbf{X}) = iz(\mathbf{X})$ fonksiyonu lineer fonksiyondur.

Özellik 2.2.21. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{nxm}$ olmak üzere, $iz(\mathbf{AB}) = iz(\mathbf{BA})$ ’ dır.

Uyarı 2.2.22. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{nxr}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{rxm}$ olmak üzere, $iz(\mathbf{ABC}) = iz(\mathbf{BCA})$ $= iz(\mathbf{CAB})$ olur.

Teorem 2.2.23. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $\mathbf{A}$ tersinir olmayan matris ve $Ind\mathbf{A} = k$ olmak üzere, $rank\mathbf{A}^k = r$ ise, tersinir bir $\mathbf{Q}$ matrisi için, $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{rxr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{pmatrix}$ yazılabilir. Burada $\mathbf{C}$ tersinir matris ve $\mathbf{N}$ indeksi k olan nilpotent matristir. Bu gösterime, $\mathbf{A}$ matrisinin çekirdek-nilpotent ayrışımı denir.

Tanım 2.2.24. $\mathcal{L}$, $\mathbb{C}^n$ ’ nin altuzayı olmak üzere, $\mathcal{L}$ altuzayının dik tümleyeni $\mathcal{L}^{\perp}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{L}^{\perp} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{x}'\mathbf{y} = \mathbf{0},\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{L} \right\}.$$

Tanım 2.2.25. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{M}$, $\mathbb{C}^n$ ’ nin altuzayları olmak üzere, $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{L} + \mathcal{M} = \left\{ \mathbf{y} + \mathbf{z} \ : \mathbf{y} \in \mathcal{L},\ \mathbf{z} \in \mathcal{M} \right\}.$$

Tanımdan görüldüğü gibi, $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ de $\mathbb{C}^n$ ’ nin altuzayıdır.

Teorem 2.2.26. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{M}$, $\mathbb{C}^n$ ' nin altuzayları olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

(i) $(\mathcal{L} \cap \mathcal{M})^{\perp} = \mathcal{L}^{\perp} + \mathcal{M}^{\perp}$,

(ii) $\mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{M}^{\perp} = (\mathcal{L} + \mathcal{M})^{\perp}$.

Tanım 2.2.27. $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$, $\mathbb{C}^n$ ' nin altuzayları olsun. $\mathbb{C}^n = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ ve $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$, koşullarını sağlayan, $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ altuzaylarına tamamlayıcı altuzaylar denip $\mathbb{C}^n$ ifadesine de $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ ' nin direkt toplamı denir ve $\mathbb{C}^n = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ olarak yazılır.

Teorem 2.2.28. $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$, $\mathbb{C}^n$ ' nin altuzayları, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ ve $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ sırasıyla $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ altuzaylarının baz kümeleri olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\mathbb{C}^n = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$,

(ii) Her bir $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ için $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ olacak şekilde tek bir $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ve $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ vardır,

(iii) $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \phi$ ' dir ve $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$, $\mathbb{C}^n$ için bir bazdır.

2.3. Matrisler İçin Bazı Ters Çeşitleri

Tanım 2.3.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ koşulunu sağlayan $\mathbf{B}$ matrisine, $\mathbf{A}$ matrisinin tersi denir ve $\mathbf{A}^{-1}$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbf{A}$ matrisinin tersi varsa $\mathbf{A}$ matrisine tersinir matris denir.

Teorem 2.3.2. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisinin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul $rank\mathbf{A} = n$ olmasıdır.

Özellik 2.3.3. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\mathbf{A}$ matrisinin tersi varsa tektir,

(ii) $\mathbf{A}$ tersinir ise, $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$,

(iii) $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ tersinir ise, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ olur.

Teorem 2.3.4. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\mathbf{A}$ tersinirdir,

(ii) $\overline{\mathbf{A}}$ tersinirdir,

(iii) $\mathbf{A}'$ tersinirdir,

(iv) $\mathbf{A}^*$ tersinirdir.

Teorem 2.3.5. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ biçiminde parçalanmış olsun. İhtiyaç duyulan terslerin mevcut olması koşuluyla, $\mathbf{S} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ ve $\mathbf{T} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$ olmak üzere, $\mathbf{A}$ matrisinin tersi,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{S}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde verilir.

Tanım 2.3.6. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ olmak üzere, eğer $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{nxm}$ matrisi aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa, $\mathbf{G}$ matrisine $\mathbf{A}$ matrisinin Moore-Penrose tersi denir ve genellikle $\mathbf{A}^+$ ile gösterilir:

$(MP.1)$ $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$,

$(MP.2)$ $\mathbf{GAG} = \mathbf{G}$,

$(MP.3)$ $(\mathbf{AG})^* = \mathbf{AG}$,

$(MP.4)$ $(\mathbf{GA})^* = \mathbf{GA}$.

Teorem 2.3.7. Her $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin Moore-Penrose tersi vardır ve tektir.

Uyarı 2.3.8. Tersinir bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için, $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-1}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.3.9. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ olmak üzere, eğer $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{nxm}$ matrisi $(MP.1)$ koşulunu sağlıyorsa, $\mathbf{G}$ matrisine $\mathbf{A}$ matrisinin bir genelleştirilmiş tersi denir ve genellikle $\mathbf{A}^{-}$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.10. Her $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi vardır ancak tek değildir.

Teorem 2.3.11. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi tersinir ise, $\mathbf{A}^{-}$ tektir ve $\mathbf{A}^{-} = \mathbf{A}^{-1}$ dir.

Tanım 2.3.12. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere, eğer $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa, $\mathbf{X}$ matrisine $\mathbf{A}$ matrisinin Drazin tersi denir ve genellikle $\mathbf{A}^{\mathrm{D}}$ ile gösterilir:

$(D.1)$ $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$ veya $(D.2)$ kullanıldığında denk olarak $\mathbf{AX}^2 = \mathbf{X}$,

$(D.2)$ $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$,

$(D.3)$ $\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{k}$ $\left(k = Ind\mathbf{A}\right)$.

Uyarı 2.3.13. $(D.3)$ maddesi $l \geq k$ olmak üzere tüm l tamsayıları için sağlanır.

Teorem 2.3.14. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ ve $k = Ind\mathbf{A}$ ise $(D.1)$-$(D.3)$ koşullarını sağlayan $\mathbf{X}$ matrisi, yani $\mathbf{A}^{\mathrm{D}}$ matrisi tektir.

Tanım 2.3.15. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere, eğer $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi aşağıda verilen üç koşulu sağlarsa, $\mathbf{X}$ matrisine $\mathbf{A}$ matrisinin grup tersi denir ve genellikle $\mathbf{A}^{\#}$ ile gösterilir:

$(G.1)$ $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$,

$(G.2)$ $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$,

$(G.3)$ $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$.

Uyarı 2.3.16. $Ind\mathbf{A}=1$ veya denk olarak $rank\mathbf{A}=rank\mathbf{A}^2$ ise, $\mathbf{A}$ matrisinin Drazin tersi aynı zamanda grup tersi olur. Yani $Ind\mathbf{A}=1$ olduğunda (G.1)-(G.3) ile (D.1)-(D.3) koşulları birbirine denk olur.

Teorem 2.3.17. $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{nxn}$ matrisinin grup tersi varsa, $\mathbf{A}$ matrisine grup tersinir denir. Bu durumda $\mathbf{A}^{\#}$ tektir.

Not 2.3.18. Grup tersinir matrislere Bölüm 3'te değinilecek ve bir takım sonuçlar verilecektir. Ayrıca grup ters ve grup tersinir matrisler ile ilgili daha fazla bilgi için örneğin, [10, 23, 24] çalışmalarına bakılabilir.

2.4. Bir Matrisin Sütun ve Sıfır Uzayı

Tanım 2.4.1. $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin sütun uzayı ve sıfır uzayı sırasıyla, $\Re(\mathbf{A})$ ve $\aleph(\mathbf{A})$ ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:

(i) $\Re(\mathbf{A})=\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^m : \mathbf{y}=\mathbf{Ax},\ \mathbf{x}\in\mathbb{C}^n\right\}$,

(ii) $\aleph(\mathbf{A})=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n : \mathbf{Ax}=\mathbf{0}\right\}$.

Teorem 2.4.2. Eğer $\mathbf{A}$ $m\text{x}n$ boyutlu bir matris ise,

(i) $\aleph(\mathbf{A})=\{\mathbf{0}\}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $rank\mathbf{A}=n$ olmasıdır,

(ii) $\aleph(\mathbf{A}')=\{\mathbf{0}\}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $rank\mathbf{A}=m$ olmasıdır.

Sonuç 2.4.3. $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere, Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.4.2 beraber kullanıldığında, $\mathbf{A}$ matrisinin tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\aleph(\mathbf{A})=\{\mathbf{0}\}$ olmasıdır.

Uyarı 2.4.4. $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{mxn}$ ise, $\Re(\mathbf{A})=span\left\{süt_1(\mathbf{A}),\ \dots\ ,süt_n(\mathbf{A})\right\}$ biçiminde yazılabilir. Yani $\Re(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}$ matrisinin sütunlarının bir lineer bileşimlerinden oluşur ve $\Re$, $\mathbb{C}^n$ ' den $\mathbb{C}^m$ ' ye bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Buradan görüldüğü gibi $\Re(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m$ ' nin bir altuzayıdır.

Uyarı 2.4.5. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ olmak üzere, $\aleph(\mathbf{A})$ aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

$$\aleph(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{x}'\left[sat_i(\mathbf{A})\right]' = \mathbf{0} \text{ tüm } i = 1, \ldots, m\right\}$$

$$= \left\{\left[sat_i(\mathbf{A})\right]', \ldots, \left[sat_m(\mathbf{A})\right]'\right\}^{\perp},$$

buradan $\aleph(\mathbf{A})$ kümesinin $\mathbb{C}^n$ ' nin bir altuzayı olduğu görülür.

Uyarı 2.4.6. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere, $\mathbf{A}$ tersinir olmayan matris ise, $k = Ind\mathbf{A}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

(i) $\aleph\left(\mathbf{A}^k\right) \cap \Re\left(\mathbf{A}^k\right) = \{\mathbf{0}\}$,

(ii) $\aleph\left(\mathbf{A}^k\right) \oplus \Re\left(\mathbf{A}^k\right) = \mathbb{C}^n$.

Teorem 2.4.7. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mxn}$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

(i) $\aleph(\mathbf{A}) = \Re(\mathbf{A}^*)^{\perp}$,

(ii) $\aleph(\mathbf{A}^*) = \Re(\mathbf{A})^{\perp}$.

BÖLÜM 3. GRUP TERSİNİR MATRİSLER ve TRİPOTENT MATRİSLER

3.1. Giriş

Çalışmanın bu bölümünde, Bölüm 2' de tanımlanan grup tersinir matrisler ve tripotent matrisler ile ilgili bazı teoremler verilmektedir. Ayrıca Bölüm 4' e temel oluşturması bakımından [22] çalışmasına ait teoremler ve sonuçlar ispatsız olarak verilecektir.

3.2. Grup Tersinir Matrisler

Teorem 3.2.1. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\mathbf{A}$ grup tersinirdir.

(ii) $\mathbf{A}^*$ grup tersinirdir.

(iii) $\mathbf{A}'$ grup tersinirdir.

(iv) $\bar{\mathbf{A}}$ grup tersinirdir.

(v) $\aleph(\mathbf{A}) + \Re(\mathbf{A}) = \mathbb{C}^n$ ' dir [7].

Teorem 3.2.2. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\mathbf{A}$ grup tersinirdir.

(ii) $\mathbf{A}^{\#}$ grup tersinirdir.

(iii) $(\mathbf{A}^{\#})^{\#} = \mathbf{A}$.

(iv) $\left(\bar{\mathbf{A}}\right)^{\#} = \overline{\mathbf{A}^{\#}}$.

(v) $\left(\mathbf{A}^{\#}\right)' = \left(\mathbf{A}'\right)^{\#}$.

(vi) $\left(\mathbf{A}^{\#}\right)^{*}=\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{\#}$.

(vii) $\mathbf{A}^{\#}=\mathbf{0}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ olmasıdır.

(viii) $rank\mathbf{A}=$ $rank\mathbf{A}^{\#}=$ $rank\mathbf{A}\mathbf{A}^{\#}=$ $rank\mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}$' dır [4].

Teorem 3.2.3. $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{nxn}$ olsun. A tersinir olmayan matris olmak üzere, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\mathbf{A}$ grup tersinirdir.

(ii) $\Re(\mathbf{A})\cap\aleph(\mathbf{A})=\{\mathbf{0}\}$.

(iii) $\Re(\mathbf{A})$ ve $\aleph(\mathbf{A})$ tamamlayıcı altuzaylardır.

(iv) $Ind\mathbf{A}=1$, yani $rank\mathbf{A}=rank\mathbf{A}^2$.

(v) $rank\mathbf{A}=r$, $\mathbf{Q}\in\mathbb{C}^{nxn}$ ve $\mathbf{C}\in\mathbb{C}^{rxr}$ olmak üzere, $\mathbf{A}=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$ olacak şekilde tersinir $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri vardır [26, Exercise 5.10.12].

İspat.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\mathbf{A}$ grup tersinir olduğundan, $(G.1)$ ve $(G.3)$ birlikte kullanıldığında $\mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ yazılabilir. $\mathbf{x}\in\Re(\mathbf{A})\cap\aleph(\mathbf{A})$ olsun. Buradan uygun boyutlu $\mathbf{y}$ vektörleri için $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}^2\mathbf{y}=\mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}\mathbf{x}$ ve $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\mathcal{B}_{\Re}$ ve $\mathcal{B}_{\aleph}$ sırasıyla, $\Re(\mathbf{A})$ ve $\aleph(\mathbf{A})$ için baz kümeleri olsunlar. $\Re(\mathbf{A})\cap\aleph(\mathbf{A})=\{\mathbf{0}\}$ olduğundan $\mathcal{B}_{\Re}\cap\mathcal{B}_{\aleph}=\phi$ dir. Ayrıca bu durumda $\mathcal{B}_{\Re}\cup\mathcal{B}_{\aleph}$, $\mathbb{C}^n$ için bir baz olduğundan Tanım 2.2.27 ve Teorem 2.2.28 yardımıyla $\Re(\mathbf{A})$ ve $\aleph(\mathbf{A})$ tamamlayıcı altuzaylardır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Tanım 2.2.27 ve Uyarı 2.4.6 kullanıldığında, $Ind\mathbf{A}=1$ bulunur.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Tanım 2.2.11 ve Teorem 2.2.23 kullanılırsa, (v) elde edilir.

(v) $\Rightarrow$ (i): $\mathcal{G}=\left\{\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\mathbf{X}_{rxr} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\mid \mathbf{X}\text{ tersinir}\right\}$ kümesinin bir matris grubu olduğu, dolayısıyla $\mathbf{A}\in\mathcal{G}$ olduğu açıktır. ■

Teorem 3.2.4. $\mathcal{G}$ matris grubu olmak üzere, $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ olsun.

(i) $\mathcal{G}$ matris grubunun birim elemanı $\mathbf{E} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{rxr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$ biçiminde yazılabilir,

(ii) $\mathbf{A}$ matrisinin grup tersi $\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{rxr}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$ biçimindedir

[26, Exercise 5.10.13].

İspat.

(i) Teorem 3.2.3 (v) şıkkı kullanılarak, $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ için, $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{rxr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$ biçiminde yazılabilir. Buradan $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$ ve $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ olduğu açıktır.

(ii) $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{A}^{\#}$ matrisleri yerine yazıldığında, $\mathbf{AA}^{\#} = \mathbf{A}^{\#}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ olduğu görülür. ■

3.3. Tripotent Matrisler

Teorem 3.3.1. $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. k, 1' den büyük bir doğal sayı olmak üzere, $\mathbf{T}^k = \mathbf{T}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{T}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması ve özdeğerlerinin kümesinin, $\sqrt[k-1]{1} \cup \{0\}$ kümesi tarafından kapsanmasıdır [6].

Uyarı 3.3.2. $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere, yukarıdaki teoremden $\mathbf{T}$ matrisinin tripotent olması için gerekli ve yeterli koşulun $\mathbf{T}$ matrisinin özdeğerlerinin kümesinin $\{-1, 0, 1\}$ kümesi tarafından kapsanması olduğu görülür.

Teorem 3.3.3. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi idempotent ise, tripotenttir [7].

İspat. $\mathbf{A}$ idempotent ise $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ yazılabilir. Bu ifade soldan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ bulunur, böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3.4. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $\mathbf{A}$ tripotent ise, $\mathbf{A}^2$ idempotenttir [7].

İspat. $\mathbf{A}$ tripotent olduğundan $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$' dır. Bu eşitlik soldan $\mathbf{A}$ ile çarpılırsa $\left(\mathbf{A}^2\right)^2 = \mathbf{A}^2$ bulunur, yani istenen elde edilir. ■

Uyarı 3.3.5. Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.4' ün tersi doğru değildir. Örneğin, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ seçilirse, $\mathbf{A}$ tripotenttir fakat idempotent değildir. Ayrıca $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ seçilirse, $\mathbf{A}^2$ idempotenttir fakat $\mathbf{A}$ tripotent değildir.

Teorem 3.3.6. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ tripotent ise, $\mathbf{A}$ grup tersinirdir ve $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\#}$' dir [7].

İspat. $\mathbf{A}$ matrisi tripotent ise, $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi tersinir ve $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{rxr}$ matrisi involutif olmak üzere,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{rxr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1} \text{ , } r \leq n,$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{B}$ matrisi, $\mathbf{A}$ matrisi için, $(G.1)$-$(G.3)$ koşullarını sağlar. $\mathbf{C}$ matrisi involutif olduğundan $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}$' dir. Dolayısıyla $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{A}^{\#}$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3.8. Eğer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi tripotent ise, $rank\mathbf{A} = iz(\mathbf{A}^2)$' dir [7].

İspat. Yukarıdaki ispata benzer şekilde, $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{rxr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$ biçiminde yazılabilir.

Buradan $\mathbf{A}^2 = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$ olduğu ve Uyarı 2.2.22 beraber kullanılırsa,

$$\begin{aligned} iz(\mathbf{A}^2) &= iz\left[\mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\right] \\ &= iz\left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\right] \\ &= iz\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= r \\ &= rank\mathbf{A} \end{aligned}$$

bulunur. ■

3.4. İki Grup Tersinir Matrisin ve İki Tripotent Matrisin Bazı Bileşimlerinin Tersinirliği

Çalışmanın bu kısmında Bölüm 4’ te incelenecek olan, üç grup tersinir matrisin ve üç tripotent matrisin bazı bileşimlerinin tersinirliği problemi için temel oluşturması bakımından [22] çalışmasına ait esas sonuçlar ispatsız olarak verilmektedir.

Liu ve diğerleri, c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar, c_3 herhangi bir kompleks sayı ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ nxn boyutlu tripotent matrisler olmak üzere, $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ bileşiminin tersinirliği problemini incelemişler ve bazı koşullar altında bu bileşimin tersi için formüller vermişlerdir. Ayrıca $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ matrislerinin grup tersinir matrisler olduğu bazı durumlar üzerinde de çalışmışlardır [22]. Bu çalışmaya ait sonuçlar aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.4.1. $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ değişmeli tripotent matrisler olmak üzere, $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$ matrisinin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1^2 + \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^2\right)\mathbf{T}_2$ matrislerinin tersinir olmasıdır [22, Theorem 2.1].

Sonuç 3.4.2. $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ değişmeli tripotent matrisler olsun. a_{ij} ’ ler kompleks sayılar ve $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$ tersinir olmak üzere, $\mathrm{p}\left(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\right)$ matrisi tersinir olacak şekilde, $\mathbb{C}^2$ den $\mathbb{C}$ ’ ye,

$$\mathrm{p}\left(z,w\right) = a_{1,0}z + a_{2,0}z^2 + a_{0,1}w + a_{1,1}zw + a_{2,1}z^2w + a_{0,2}w^2 + a_{1,2}zw^2 + a_{2,2}z^2w^2$$

biçiminde tanımlanmış bir p polinomu varsa, $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$ tersinirdir [22, Corollary 2.1].

Teorem 3.4.3. $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ grup tersinir matrisleri $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}\mathbf{T}_2$ koşulunu sağlasın. $\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}\mathbf{T}_2$ matrisi tersinir olmak üzere, $\mathrm{p}\left(0, 0\right) = 0$ ve $\mathrm{p}\left(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\right)$ matrisi tersinir olacak şekilde, değişmeli olmayan iki değişkenle oluşturulmuş, bir p polinomu varsa, $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$ matrisi tersinirdir [22, Theorem 2.2].

Teorem 3.4.4. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ grup tersinir matrisler olsun. Eğer $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$ matrisi tersinir ise, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ matrisi tersinirdir ve tersi,

$$\left(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2\right)^{-1} = \left[\left(c_1^{-1} + c_2^{-1}\right)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#} - c_2^{-1}\mathbf{I}_n\right]\left(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2\right)^{-1}$$

biçiminde yazılır [22, Theorem 2.3].

Teorem 3.4.5. $c_1, c_2, r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + \left(r_1c_1 + r_2c_2\right)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ matrisi tersinir ise,

$$\aleph\left[\mathbf{T}_1\left(\mathbf{I}_n + r_1\mathbf{T}_2\right)\right] \cap \aleph\left[\left(\mathbf{I}_n + r_2\mathbf{T}_1\right)\mathbf{T}_2\right] = \{\mathbf{0}\}$$

ve

$$\Re\left[\mathbf{T}_1\left(\mathbf{I}_n + r_1\mathbf{T}_2\right)\right] + \Re\left[\left(\mathbf{I}_n + r_2\mathbf{T}_1\right)\mathbf{T}_2\right] = \mathbb{C}^n$$

olur [22, Theorem 2.4].

Teorem 3.4.6. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $c_3 \in \mathbb{C}$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ sıfırdan farklı tripotent matrisler olmak üzere, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1$ koşulu sağlansın. $\mathbf{T}_1$ veya $\mathbf{T}_2$ matrisinin tersinir olduğunu kabul edelim. Eğer $(c_1 + c_2)^2 = c_3^2$ ise, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ veya $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ tersinir olmayan matristir. Eğer $(c_1 + c_2)^2 \neq c_3^2$ ise, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ matrisi tersinirdir ve bu durumda,

(i) $\mathbf{T}_1$ tersinir ise,

$$\begin{aligned}
&\left[(c_1 + c_2)^2 - c_3^2\right]\left(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\right)^{-1} \\
&= (c_1 + c_2)\mathbf{T}_1 + c_3\mathbf{T}_2^2 + c_1^{-1}c_2c_3(\mathbf{T}_2^2 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2) + c_1^{-1}c_3^2\left(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2\right) \\
&\quad + c_1^{-1}\left(c_2^2 + c_1c_2 - c_3^2\right)\left(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2\right)
\end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{T}_2$ tersinir ise,

$$\begin{aligned}
&\left[(c_1 + c_2)^2 - c_3^2\right]\left(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\right)^{-1} \\
&= (c_1 + c_2)\mathbf{T}_2 - c_3\left(2\mathbf{T}_1^2 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\right) + c_2^{-1}\left(c_1^2 + c_1c_2 - c_3^2\right)\left(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^2\right)
\end{aligned}$$

olur [22, Theorem 2.5].

Eğer Teorem 3.4.6' da $c_3 = 0$ seçilirse, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.7. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ sıfırdan farklı tripotent matrisler olmak üzere, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1$ koşulu sağlansın. Eğer $\mathbf{T}_1$ veya $\mathbf{T}_2$ matrisi tersinir ise,

$c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ matrisinin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul, $c_1 + c_2 \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda,

(i) $\mathbf{T}_1$ tersinir ise, $(c_1 + c_2)(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2)^{-1} = \mathbf{T}_1 + c_2 c_1^{-1}\mathbf{T}_1\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_2^{\,2}\right)$,

(ii) $\mathbf{T}_2$ tersinir ise, $(c_1 + c_2)(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2)^{-1} = \mathbf{T}_2 + c_1 c_2^{-1}\mathbf{T}_2\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\,2}\right)$

olur [22, Corollary 2.2].

Teorem 3.4.8. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}^{nxn}$ tripotent matrisler olmak üzere, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $c_1\mathbf{T}_2^{\,2}\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_1^{\,2}\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_2^{\,2}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ matrisi tersinirdir,

(ii) $c_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^{\,2} + c_2\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{\,2} - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{\,2}$ matrisi tersinirdir,

(iii) $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\,2} - \mathbf{T}_2^{\,2}$ matrisi tersinirdir [22, Theorem 2.6].

BÖLÜM 4. ÜÇ GRUP TERSİNİR MATRİSİN ve ÜÇ TRİPOTENT MATRİSİN BAZI BİLEŞİMLERİNİN TERSİNİRLİĞİ

4.1. Giriş

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ $n \times n$ boyutlu değişmeli tripotent matrisler olmak üzere, $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ lineer bileşiminin tersinirliği problemi Sarduvan ve Özdemir [33] tarafından ele alınmıştır . Ayrıca bazı koşullar altında $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ idempotent matrisler olmak üzere, $c_1\mathbf{P} + c_2\mathbf{Q} - c_3\mathbf{PQ}$ ve $a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} - c\mathbf{PQ} - d\mathbf{QP} - e\mathbf{PQP}$ bileşimlerinin tersinirliği problemi sırasıyla [36] ve [37] çalışmalarında ele alınmıştır.

Bu çalışmalardan önce de bir çok çalışmada, idempotent matrisler, tripotent matrisler ve k-potent matrislerin lineer bileşimlerinin tersinirliği üzerine çalışılmıştır (bkz., örneğin, [2, 3, 5, 14, 18]). Ayrıca Bölüm 3' te bahsedildiği üzere, Liu ve diğerleri iki grup tersinir matrisin ve iki tripotent matrisin bazı bileşimlerinin tersinirliği problemini bir takım özel koşullar altında incelemiştir [22].

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan esinlenilerek elde edilen esas sonuçlar aşağıda verilmektedir.

4.2. Esas Sonuçlar

Bu kısımda verilen sonuçlar ve onların ispatları, özellikle [22] çalışmasından esinlenilerek ortaya konulmaktadır. Ancak [22] ve diğer bahsi geçen çalışmalar iki özel tipli matris için yapılmıştır. Bu çalışmada ise üç grup tersinir matrisin ve üç tripotent matrisin bazı bileşimlerinin tersinirliği ile ilgili sonuçlar verilmektedir. Ayrıca, c_1, c_2 ve c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ $n \times n$ boyutlu tripotent matrisler olmak üzere, bazı özel koşullar altında, $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3$ $- c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ bileşiminin tersi için formüller verilmektedir.

Liu ve diğerleri, iki tripotent matris için, Teorem 3.4.1' i vermiştir. Bu teoremden yola çıkarak elde edilen benzer bir sonuç üç tripotent matris için aşağıda yer almaktadır.

Teorem 4.2.1. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ karşılıklı değişmeli tripotent matrisler olsun. $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3$ matrisinin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathbf{I}_n - \left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right) + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ ve $\left(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3\right)^2 + \left(\mathbf{I}_n - \left(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3\right)^2\right)\left(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\right) + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ matrislerinin tersinir olmasıdır.

İspat. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ tripotent matrislerinin karşılıklı değişmeli olması kabulünden,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)\mathbf{S}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}diag\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right)\mathbf{S}^{-1}$$

ve

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{S}diag\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_n\right)\mathbf{S}^{-1}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi vardır (bkz., örneğin, [16, p. 52]). Burada $\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{n}$, $\left\{\mu_i\right\}_{i=1}^{n}$ ve $\left\{\gamma_i\right\}_{i=1}^{n}$ sırasıyla, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrislerinin özdeğerleridir. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrisleri tripotent olduğundan, Uyarı 3.3.2 kullanıldığında, $i,\ j,\ k = 1, 2, \ldots, n$ için, $\lambda_i, \mu_j, \gamma_k \in \left\{-1, 0, 1\right\}$ olur. Böylece,

$$\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3 = \mathbf{S}diag\left(\lambda_1 - \mu_1 - \gamma_1, \ldots, \lambda_n - \mu_n - \gamma_n\right)\mathbf{S}^{-1},$$

$$\mathbf{I}_n - \left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right) + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$$
$$= \mathbf{S}diag\left(1 - \left(\lambda_1\mu_1 + \gamma_1\lambda_1 - \mu_1\gamma_1\right) + \lambda_1\mu_1\gamma_1, \ldots, 1 - \left(\lambda_n\mu_n + \gamma_n\lambda_n - \mu_n\gamma_n\right) + \lambda_n\mu_n\gamma_n\right)\mathbf{S}^{-1}$$

ve

$$\left(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3\right)^2 + \left[\mathbf{I}_n - \left(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3\right)^2\right]\left(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\right) + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$$
$$= \mathbf{S}diag\begin{pmatrix} \left(\lambda_1 + \gamma_1\right)^2 + \left[1 - \left(\lambda_1 + \gamma_1\right)^2\right]\left(\mu_1 + \gamma_1\right) + \lambda_1\mu_1\gamma_1, \ldots, \left(\lambda_n + \gamma_n\right)^2 \\ + \left[1 - \left(\lambda_n + \gamma_n\right)^2\right]\left(\mu_n + \gamma_n\right) + \lambda_n\mu_n\gamma_n \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \qquad (4.1)$$

elde edilir.

Gerekliliğin ispatı için, $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3$ matrisi tersinir olsun. O halde,

$$\lambda_i \neq \mu_i + \gamma_i, \; i = 1, \ldots, n,$$

olur. Buradan,

$$\left(\lambda_i, \mu_i, \gamma_i\right) \in \Phi^3 \setminus \left\{ \begin{matrix} (-1, -1, 0), (0, -1, 1), (-1, 0, -1), (0, 0, 0), (1, 0, 1), \\ (0, 1, -1), (1, 1, 0) \end{matrix} \right\},$$

bulunur. Burada $\Phi = \{-1, 0, 1\}$ ve $i = 1, \ldots, n$ dir. Bulunan bu değerler için,

$$1 - \left(\lambda_i\mu_i + \gamma_i\lambda_i - \mu_i\gamma_i\right) + \lambda_i\mu_i\gamma_i \neq 0$$

ve

$$\left(\lambda_i + \gamma_i\right)^2 + \left[1 - \left(\lambda_i + \gamma_i\right)^2\right]\left(\mu_i + \gamma_i\right) + \lambda_i\mu_i\gamma_i \neq 0$$

koşulları sağlandığından, $\mathbf{I}_n-\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ ve $\left(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_3\right)^2+\left[\mathbf{I}_n-\left(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_3\right)^2\right]\left(\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\right)+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ matrisleri tersinir olur. Böylece gerekliliğin ispatı tamamlanır.

Şimdi de
$\mathbf{I}_n-\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ ve $\left(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_3\right)^2+\left[\mathbf{I}_n-\left(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_3\right)^2\right]\left(\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\right)+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ matrisleri tersinir olsun. İlk matrisin tersinirliğinden,

$$1\neq\lambda_i\mu_i+\gamma_i\lambda_i-\mu_i\gamma_i-\lambda_i\mu_i\gamma_i\,,\ \ i=1,\ldots,\,n,$$

elde edilir. $\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3$ matrisi tersinir olmayan matris olsaydı, en az bir, $j=1,\ldots,n$ için,

$$\lambda_j=\mu_j+\gamma_j$$

olurdu. Ancak bu durumda yukarıdaki denklemleri eşanlı sağlayan tek çözüm, $\lambda_i=\mu_i=\gamma_i=0$ olur. Bu çözüm için,

$$\left(\lambda_i+\gamma_i\right)^2+\left[1-\left(\lambda_i+\gamma_i\right)^2\right]\left(\mu_i+\gamma_i\right)+\lambda_i\mu_i\gamma_i=0$$

elde edilir. Bu ise, $\left(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_3\right)^2+\left[\mathbf{I}_n-\left(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_3\right)^2\right]\left(\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\right)+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ matrisinin tersinir olması ile çelişir. Dolayısıyla $\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3$ matrisi tersinir olmak zorundadır. Bu da ispatı bitirir. ■

Liu ve diğerleri, değişmeli iki tripotent matris için, Sonuç 3.4.2’ yi vermiştir. Bu sonuçta tanımlanan polinoma benzer bir polinom ve bu polinom kullanılarak elde edilen bir sonuç sırasıyla aşağıda verilmektedir.

Uyarı 4.2.2 $c_{i,j,k} \in \mathbb{C}$ ve m pozitif tamsayı olmak üzere, $\mathrm{p}:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ kompeks polinomu,

$$\mathrm{p}(z,\, w,\, t) = \sum_{\substack{i,\,j,\,k=0 \\ (i,\,j,k)\neq 0}}^{m} c_{i,\,j,\,k} z^i w^j t^k \tag{4.2}$$

biçiminde tanımlansın. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ karşılıklı değişmeli tripotent matrisler olmak üzere,

$$\mathrm{p}(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3) = \mathbf{S}diag\left[\mathrm{p}(\lambda_1,\, \mu_1,\, \gamma_1),\ldots,\mathrm{p}(\lambda_n,\, \mu_n,\, \gamma_n)\right]\mathbf{S}^{-1}$$

yazılabilir. Eğer $(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3)^2 + \left[\mathbf{I}_n - (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3)^2\right](\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3) + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ tersinir olmayan matris ise, (4.1) eşitliğinden, en az bir, $j = 1, \ldots, n$ için,

$$(\lambda_j + \gamma_j)^2 + \left[1 - (\lambda_j + \gamma_j)^2\right](\mu_j + \gamma_j) + \lambda_j \mu_j \gamma_j = 0 \tag{4.3}$$

denklemi sağlanmalıdır. Bu denklem (sadece) $\lambda_j = \mu_j = \gamma_j = 0$ için sağlanır. O halde bu ortak çözüm için, $\mathrm{p}(0,\, 0,\, 0) = 0$ olduğundan, $\mathrm{p}(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3)$ tersinir olmayan matristir.

Sonuç 4.2.3. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ karşılıklı değişmeli tripotent matrisler olsun. $\mathbf{I}_n - (\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3) + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ matrisi tersinir ve (4.2) ifadesindeki gibi tanımlanmış bir p polinomu için $\mathrm{p}(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3)$ matrisi de tersinir ise, bu durumda $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3$ matrisi tersinirdir.

Aşağıdaki teoremde, Teorem 4.2.1' de matrisler üzerindeki karşılıklı değişmelilik ve tripotentlik koşulu değiştirilmekte ve yeni koşullar altında Teorem 3.4.3' te verilen sonuca benzer bir sonuç**,** üç grup tersinir matris için verilmektedir.

Teorem 4.2.4. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ grup tersinir matrisler olmak üzere, $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#} = \mathbf{T}_3$ koşulları sağlansın. $\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1^{\#}\mathbf{T}_3$ matrisi tersinir olmak üzere, $\mathrm{p}(0, 0, 0) = 0$ ve $\mathrm{p}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)$ matrisi tersinir olacak şekilde, değişmeli olması gerekmeyen üç değişkenle oluşturulmuş, bir p polinomu varsa, bu durumda $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3$ matrisi tersinirdir.

İspat. $\mathbf{x} \in \aleph(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3)$, yani $\mathbf{T}_1\mathbf{x} = (\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\mathbf{x}$ olsun. Bu ifade soldan sırasıyla $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}$, $\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1^{\#}$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{\#}$ ifadeleri ile çarpılırsa,

$$\mathbf{T}_1\mathbf{x} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\mathbf{x}, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{T}_3\mathbf{x} = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\mathbf{x}, \;\; \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{x} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\mathbf{x} \tag{4.5}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada (4.5) ifadesindeki eşitlikler elde edilirken $\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#} = \mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}\mathbf{T}_2$ koşulları kullanılmıştır. (4.4) ve (4.5) ifadeleri düzenlendiğinde sırasıyla,

$$\mathbf{T}_1\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\right]\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{T}_3\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\right]\mathbf{x} = \mathbf{0}, \;\; \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\right]\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.7}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\mathrm{p}(0, 0, 0) = 0$ olduğundan,

$$\mathrm{p}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3) = \mathrm{p}_1(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)\mathbf{T}_1 + \mathrm{p}_2(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathrm{p}_3(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)\mathbf{T}_3$$

olacak şekilde değişmeli olması gerekmeyen değişkenlerle oluşmuş p_1, p_2 ve p_3 polinomları bulunabilir. Böylece (4.6) ve (4.7) eşitlikleri de kullanılarak,

$$\mathrm{p}(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3)\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3)\right]\mathbf{x}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3)\mathbf{T}_1 + \mathrm{p}_2(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 \\ +\mathrm{p}_3(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3)\mathbf{T}_3 \end{bmatrix}\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3)\right]\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{0}$$

bulunur. Hipotezde $\mathrm{p}(\mathbf{T}_1,\, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2,\, \mathbf{T}_3)$ ve $\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^{\#}(\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3)$ matrisleri tersinir kabul edildiğinden, yukarıdaki eşitlik kullanılırsa $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ dolayısıyla $\aleph(\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3)=\{\mathbf{0}\}$ elde edilir. Böylece Sonuç 2.4.3' ten dolayı, $\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3$ matrisi tersinir olur. Bu ise istenen sonuçtur. ■

$\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ karşılıklı değişmeli grup tersinir matrisler olsun. $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_1$ koşulu altında, Teorem 4.2.4' ün bir çeşit tersi verilebilir. $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_2$ koşulları beraber kullandığında $(\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ ve $(\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{0}$ elde edilir. Burada $\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3$ matrisinin tersinir olması, $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{0}$ olmasına götürür. Bu koşullar altında ise, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3)$ matrisi $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3$ matrisine dönüşür.

Teorem 3.4.4' te Liu ve diğerlerinin, iki grup tersinir matris için verdikleri sonuca benzer bir sonuç, üç grup tersinir matris için aşağıda verilmektedir.

Teorem 4.2.5. c_1, c_2 ve $c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ grup tersinir matrisler olsun. Eğer $\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3$ matrisi tersinir ve $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{0}$ ise, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3$ matrisi tersinirdir ve

$$(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3)^{-1} = \left[(c_1^{-1} + c_2^{-1})\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#} + (c_2^{-1} - c_3^{-1})\mathbf{T}_3\mathbf{T}_3^{\#} - c_2^{-1}\mathbf{I}_n\right](\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3)^{-1}$$

biçiminde yazılır.

İspat. Aşağıdaki eşitlikten ispat direkt görülür:

$$\begin{aligned}
&(c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3)\left[\left(c_1^{-1}+c_2^{-1}\right)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}+\left(c_2^{-1}-c_3^{-1}\right)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_3^{\#}-c_2^{-1}\mathbf{I}_n\right]\\
&=\left(1+c_1c_2^{-1}\right)\mathbf{T}_1+\left(c_1c_2^{-1}-c_1c_3^{-1}\right)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3\mathbf{T}_3^{\#}-c_1c_2^{-1}\mathbf{T}_1+\left(c_2c_1^{-1}+1\right)\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}\\
&\quad+\left(1-c_2c_3^{-1}\right)\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\mathbf{T}_3^{\#}-\mathbf{T}_2+\left(c_3c_1^{-1}+c_3c_2^{-1}\right)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{\#}+\left(c_3c_2^{-1}-1\right)\mathbf{T}_3-c_3c_2^{-1}\mathbf{T}_3\\
&=\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_3.
\end{aligned}$$

■

Uyarı 4.2.6. Yukarıdaki teoremde $c_1+c_2=0$ ve $c_2-c_3=0$ ise, hipoteze $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3=\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3=\mathbf{0}$ koşulunu koymaya gerek yoktur.

Liu ve diğerlerinin [36, Theorem 2.3]' ten esinlenerek verdikleri, Teorem 3.4.5' teki sonuca benzer bir sonuç aşağıda verilecektir.

Teorem 4.2.7. $c_1, c_2, c_3, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ ve $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3=\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1$ olsun. Eğer $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3+(r_1c_1+r_2c_2)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+(r_1c_1+r_3c_3)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+(r_2c_2+r_3c_3)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2$ matrisi tersinir ise,

$$\aleph\left[\mathbf{T}_1(\mathbf{I}_n+r_1\mathbf{T}_2+r_1\mathbf{T}_3)\right]\cap\aleph\left[(\mathbf{I}_n+r_2\mathbf{T}_1+r_2\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2\right]\cap\aleph\left[\mathbf{T}_3(\mathbf{I}_n+r_3\mathbf{T}_1+r_3\mathbf{T}_2)\right]=\{\mathbf{0}\} \tag{4.8}$$

ve

$$\Re\left[\mathbf{T}_1(\mathbf{I}_n+r_1\mathbf{T}_2+r_1\mathbf{T}_3)\right]+\Re\left[(\mathbf{I}_n+r_2\mathbf{T}_1+r_2\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2\right]+\Re\left[\mathbf{T}_3(\mathbf{I}_n+r_3\mathbf{T}_1+r_3\mathbf{T}_2)\right]=\mathbb{C}^n \tag{4.9}$$

olur.

İspat. $r_1c_1+r_2c_2$, $r_1c_1+r_3c_3$ ve $r_2c_2+r_3c_3$ ifadeleri sırasıyla, α_1, α_2 ve α_3 ile gösterilsin. $\mathbf{x}\in\aleph\left[\mathbf{T}_1(\mathbf{I}_n+r_1\mathbf{T}_2+r_1\mathbf{T}_3)\right]\cap\aleph\left[(\mathbf{I}_n+r_2\mathbf{T}_1+r_2\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2\right]\cap\aleph\left[\mathbf{T}_3(\mathbf{I}_n+r_3\mathbf{T}_1\right.$

$+r_3\mathbf{T}_2)\big]$ olsun. Buradan $\mathbf{T}_1(\mathbf{I}_n + r_1\mathbf{T}_2 + r_1\mathbf{T}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{I}_n + r_2\mathbf{T}_1 + r_2\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{T}_3(\mathbf{I}_n + r_3\mathbf{T}_1 + r_3\mathbf{T}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bulunur. Eğer hipotezde tersinir olarak kabul edilen, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + \alpha_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \alpha_2\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \alpha_3\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2$ matrisi sağdan $\mathbf{x}$ ile çarpılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + \alpha_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \alpha_2\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \alpha_3\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2)\mathbf{x} \\
&= (c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + r_1c_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + r_2c_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + r_1c_1\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + r_3c_3\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + r_2c_2\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2 + r_3c_3\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2)\mathbf{x} \\
&= c_1\mathbf{T}_1(\mathbf{I}_n + r_1\mathbf{T}_2 + r_1\mathbf{T}_3)\mathbf{x} + c_2(\mathbf{I}_n + r_2\mathbf{T}_1 + r_2\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2\mathbf{x} + c_3\mathbf{T}_3(\mathbf{I}_n + r_3\mathbf{T}_1 + r_3\mathbf{T}_2)\mathbf{x} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + \alpha_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \alpha_2\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \alpha_3\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2$ matrisinin tersinir olmasının bir sonucu olarak $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bulunur. Dolayısıyla (4.8) ifadesinin ispatı tamamlanır.

$c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + \alpha_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \alpha_2\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \alpha_3\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2$ matrisi tersinir olduğundan Teorem 2.3.4 kullanıldığında, bu matrisin kompleks eşlenik transpozesi, yani $\bar{c}_1\mathbf{T}_1^* + \bar{c}_2\mathbf{T}_2^* + \bar{c}_3\mathbf{T}_3^* + \bar{\alpha}_1\mathbf{T}_2^*\mathbf{T}_1^* + \bar{\alpha}_2\mathbf{T}_1^*\mathbf{T}_3^* + \bar{\alpha}_3\mathbf{T}_2^*\mathbf{T}_3^*$ matrisi de tersinirdir. (4.8) ifadesinin ispatında kullanılan yöntem bu matrise uygulanırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
&\aleph\left[\left(\mathbf{I}_n + \bar{r}_3\mathbf{T}_1^* + \bar{r}_3\mathbf{T}_2^*\right)\mathbf{T}_3^*\right] \cap \aleph\left[\mathbf{T}_2^*\left(\mathbf{I}_n + \bar{r}_2\mathbf{T}_1^* + \bar{r}_2\mathbf{T}_3^*\right)\right] \cap \aleph\left[\left(\mathbf{I}_n + \bar{r}_1\mathbf{T}_2^* + \bar{r}_1\mathbf{T}_3^*\right)\mathbf{T}_1^*\right] \\
&= \{\mathbf{0}\}. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

(4.10) ifadesi sırasıyla Teorem 2.4.7 (ii) şıkkı ve Teorem 2.2.26 (ii) şıkkı kullanılarak düzenlenirse,

$$
\left\{\Re\left[\mathbf{T}_1(\mathbf{I}_n + r_1\mathbf{T}_2 + r_1\mathbf{T}_3)\right] + \Re\left[(\mathbf{I}_n + r_2\mathbf{T}_1 + r_2\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2\right] + \Re\left[\mathbf{T}_3(\mathbf{I}_n + r_3\mathbf{T}_1 + r_3\mathbf{T}_2)\right]\right\}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}
$$

elde edilir. Buradan da (4.9) ifadesinin doğruluğu görülür. ■

Aşağıdaki sonuçta Liu ve diğerlerinin Teorem 3.4.6' da verdikleri formüller kullanılarak bazı koşullar altında, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrisinin tersi verilecektir.

Teorem 4.2.8. $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^*$, $c_4 \in \mathbb{C}$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ sıfırdan farklı tripotent matrisler, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. Ayrıca $(c_1+c_3)^2 - c_4^2$, $(c_1+c_2)^2 - c_4^2$ ve $(c_2-c_3)^2 - c_4^2$ sırasıyla, α, β ve γ ile gösterilsin.

(i) $\mathbf{T}_1$ tersinir ve $\alpha \neq 0$ olsun. Eğer $\beta = 0$ ise $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ veya $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ tersinir olmayan matristir. Eğer $\beta \neq 0$ ise, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrisi tersinirdir ve

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta\left[c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\right]^{-1} \\
&= \alpha\left[(c_1+c_2)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 + c_4\mathbf{T}_2^2 - c_1^{-1}c_2c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^2\right) - c_1^{-1}c_4^2\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 - \mathbf{T}_2\right)\right] \\
&\quad + \beta\left[\alpha c_1^{-1}\left(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2\right) + c_4\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3 + \left(c_1 + c_3 - \alpha c_1^{-1}\right)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3^2\right] \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

ile verilir.

(ii) $\mathbf{T}_2$ tersinir ve $\beta \neq 0$ olsun. Eğer $\gamma = 0$ ise $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ veya $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ tersinir olmayan matristir. Eğer $\gamma \neq 0$ ise, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrisi tersinirdir ve

$$\begin{aligned}
&\beta\gamma\left[c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\right]^{-1} \\
&= \beta\left[(c_2-c_3)\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3^2 - c_4\mathbf{T}_3^2 + c_2^{-1}c_3c_4\left(\mathbf{T}_3^2 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right) - c_2^{-1}c_4^2\left(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3^2\right)\right]
\end{aligned}$$

$$+\gamma\left[\beta c_2^{-1}\left(\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3^{2}\right)+c_4\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1+\left(c_1+c_2-\beta c_2^{-1}\right)\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{2}\right] \quad (4.12)$$

ile verilir.

(iii) $\mathbf{T}_3$ tersinir ve $\alpha\neq 0$ olsun. Eğer $\gamma=0$ ise $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ veya $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3+c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ tersinir olmayan matristir. Eğer $\gamma\neq 0$ ise, $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrisi tersinirdir ve

$$\begin{aligned}
&\alpha\gamma\left[c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\right]^{-1}\\
&=\alpha\left[\left(c_3-c_2\right)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2^{2}+c_4\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\right]+\gamma c_3^{-1}\left[\alpha\left(\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2^{2}\right)+c_4\left(c_1+c_3\right)\mathbf{T}_1^{2}-c_1c_4\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\right.\\
&\quad\left.-c_1\left(c_1+c_3\right)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1^{2}+c_4^{2}\mathbf{T}_1\right] \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat.

(i) $\mathbf{T}_1$ tersinir ve $\alpha\neq 0$ olmak üzere, önce $\beta=0$ olsun. $\mathbf{T}_1$ tersinir kabul edildiğinden, $\mathbf{T}_1^2=\mathbf{I}_n$ olur. Böylece, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_1=\mathbf{0}$ koşulu, $\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_1=\mathbf{0}$ halini alır. $\mathbf{T}_2$ matrisi tripotent olduğundan, Teorem 3.3.6 göz önüne alındığında, tersinir bir $\mathbf{S}\in\mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{F}\in\mathbb{C}^{rxr}$ ve $rank\mathbf{A}=r$ olmak üzere,

$$\mathbf{T}_2=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{T}_1=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{C}\\\mathbf{D}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\ \text{ ve }\ \mathbf{T}_3=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{T}_2$ tripotent ve $\mathbf{A}$ tersinir olduğundan, $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}_r$ olur. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrisleri, $\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_1=\mathbf{0}$ koşulunda yerlerine yazılırsa,

$$\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_2{}^2\mathbf{T}_1=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{C}\\\mathbf{D}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{C}\\\mathbf{D}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{C}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

olduğundan $\mathbf{B}=\mathbf{A}$, $\mathbf{C}=\mathbf{0}$ bulunur.

$$\mathbf{T}_2{}^2\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_2=\left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{FA}&\mathbf{0}\\\mathbf{HA}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}^2\mathbf{A}+\mathbf{GHA}&\mathbf{0}\\\mathbf{HFA}+\mathbf{KHA}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{0}$$

olduğundan $\mathbf{G}=\mathbf{0}$, $\mathbf{F}=-\mathbf{F}^2\mathbf{A}$, $\mathbf{HFA}+\mathbf{KHA}=\mathbf{0}$ elde edilir.

$$\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_1=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{G}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{C}\\\mathbf{D}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{0}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}^2&\mathbf{0}\\\mathbf{HF}+\mathbf{KH}&\mathbf{K}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{D}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}&\mathbf{0}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}^2\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{HFA}+\mathbf{KHA}+\mathbf{K}^2\mathbf{D}&\mathbf{K}^2\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{0}$$

olduğundan $\mathbf{F}=\mathbf{F}^2\mathbf{A}$, $\mathbf{H}=\mathbf{HFA}+\mathbf{KHA}+\mathbf{K}^2\mathbf{D}$, $\mathbf{K}=\mathbf{K}^2\mathbf{E}$ bulunur.

$\mathbf{F}=\mathbf{F}^2\mathbf{A}=-\mathbf{F}^2\mathbf{A}=\mathbf{0},\ \mathbf{G}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{T}_3$ tripotent olduğundan $\mathbf{K}$ matrisi de tripotent olur. Sonuç olarak yukarıdaki eşitlikler düzenlendiğinde,

$$\mathbf{B}=\mathbf{A},\ \mathbf{C}=\mathbf{0},\ \mathbf{F}=\mathbf{0},\ \mathbf{G}=\mathbf{0},\ \mathbf{H}=\mathbf{0},\ \mathbf{KD}=\mathbf{0},\ \mathbf{K}=\mathbf{K}^2\mathbf{E} \tag{4.14}$$

bulunur. Buradan

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{T}_2=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_3=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.15}$$

elde edilir. $\mathbf{T}_3$ sıfırdan farklı olduğundan $\mathbf{K}$ matrisi de sıfırdan farklı olur. Ayrıca $\mathbf{T}_1^2=\mathbf{I}_n$ olduğundan, $\mathbf{DA}=-\mathbf{ED}$, yani $\mathbf{D}=-\mathbf{EDA}$, $\mathbf{E}^2=\mathbf{I}_{n\text{-}r}$ ve dolayısıyla $\mathbf{E}$ tersinir bulunur. Bununla birlikte (4.14) kullanıldığında, $\mathbf{E}^2\mathbf{K}=\mathbf{K}^2\mathbf{E}$ yazılabilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.6 (ii) şıkkından dolayı $c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}$ matrisi tersinirdir ve

$$\begin{aligned}
&\left(c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\right)^{-1}\\
&=\alpha^{-1}\left[\left(c_3+c_1\right)\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+c_1^{-1}\left(c_3^2+c_3c_1-c_4^2\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)\right]\\
&=\alpha^{-1}\left\{\left(c_3+c_1\right)\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+c_1^{-1}\left[\alpha-c_1\left(c_3+c_1\right)\right]\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)\right\}\\
&=\alpha^{-1}\left[\left(c_3+c_1\right)\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\alpha c_1^{-1}\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)-\left(c_3+c_1\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)\right]\\
&=\alpha^{-1}\left[\alpha c_1^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_3-\alpha c_1^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrislerinin (4.15) ifadesinde elde edilen değerleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ c_1\mathbf{D}-c_4\mathbf{DA} & c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

eşitliği yazılabilir. (4.17) ifadesindeki, $c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}$ matrisinin tersinir olduğu ve tersi (4.16) ifadesinde verildiğinden, $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrisinin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul, $\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r$ matrisinin tersinir olmasıdır. Ayrıca,

$$\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right]\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]=\beta\mathbf{I}_r \tag{4.18}$$

olduğundan, eğer $\beta=0$ ise, $\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r$ veya $\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r$ tersinir olmayan matristir. Böylelikle (4.17) eşitliğinden, $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\right.$ $\left.+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ veya $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3+c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrislerinin tersinir olmadığı görülür. Böylece $\beta=0$ durumu için ispat tamamlanır.

Şimdi $\beta\neq 0$ olsun. (4.18) ifadesinden görüldüğü gibi $\beta\neq 0$ olması, $\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r$ matrisinin tersinir olmasını sağlar ve

$$\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1}=\beta^{-1}\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right] \tag{4.19}$$

bulunur. (4.17), Teorem 2.3.5, (4.14), (4.16), (4.19) ve $\mathbf{D}=-\mathbf{EDA}$ birlikte kullanılırsa,

$$\alpha\beta\left[c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\right]^{-1}$$

$$=\alpha\beta\,\mathbf{S}\begin{pmatrix}\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1} & \mathbf{0}\\ -\left(c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\right)^{-1}\left(c_1\mathbf{D}-c_4\mathbf{DA}\right)\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1} & \left(c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\right)^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\alpha\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]\\ -\left[\alpha c_1^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_3-\alpha c_1^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]\left(c_1\mathbf{D}-c_4\mathbf{DA}\right)\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{0} \\ \beta\left[\alpha c_1^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_3-\alpha c_1^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]\end{matrix}\right)\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\left(\begin{matrix} \alpha\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+\alpha c_4\mathbf{I}_r \\ -\alpha\left(\mathbf{ED}+c_1^{-1}c_4\mathbf{D}\right)\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{0} \\ \beta\left[\alpha c_1^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_3-\alpha c_1^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]\end{matrix}\right)\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\left(\begin{matrix} \alpha\left(c_1+c_2\right)\mathbf{A}+\alpha c_4\mathbf{I}_r \\ \alpha\left(\left(c_1+c_2\right)\mathbf{D}-c_1^{-1}c_2c_4\mathbf{DA}-c_1^{-1}c_4^{2}\mathbf{D}\right)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{0} \\ \beta\left[\alpha c_1^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_3-\alpha c_1^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]\end{matrix}\right)\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\left\{\alpha\left[\left(c_1+c_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{0}\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}-c_1^{-1}c_2c_4\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{DA} & \mathbf{0}\end{pmatrix}-c_1^{-1}c_4^{2}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\right]\right.$$

$$\left.+\beta\left[\alpha c_1^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E}\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{EK}\end{pmatrix}+\left(c_1+c_3-\alpha c_1^{-1}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{EK}^2\end{pmatrix}\right]\right\}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.20}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^{2}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.21}$$

$$\mathbf{T}_2^{2}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_2^{2}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{DA} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.23}$$

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^{2}-\mathbf{T}_2=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.24}$$

$$\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2{}^2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.25}$$

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{EK} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.26}$$

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_3{}^2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{EK}^2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.27}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.21)–(4.27) ifadeleri (4.20) ifadesinde yerlerine yazılırsa, (4.11) elde edilir. Böylece (i) şıkkının ispatı tamamlanır.

(ii) $\mathbf{T}_2$ tersinir ve $\beta \neq 0$ olmak üzere, önce $\gamma = 0$ olsun. $\mathbf{T}_2$ tersinir kabul edildiğinden, $\mathbf{T}_2{}^2 = \mathbf{I}_n$ olur. Böylece, $\mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2{}^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2{}^2\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ koşulu, $\mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ halini alır. $\mathbf{T}_3$ tripotent olduğundan, Teorem 3.3.6 göz önüne alındığında, tersinir bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F} \in \mathbb{C}^{rxr}$ ve $rank\mathbf{A} = r$ olmak üzere,

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{K} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{T}_3$ tripotent ve $\mathbf{A}$ tersinir olduğundan, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_r$ olur. Dikkat edilirse (i) şıkkındaki $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrisleri rolleri kendi aralarında değiştirmektedir.

$\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrisleri, $\mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ koşulunda yerlerine yazılırsa,

$$\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} + \left[\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2 \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{C}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{0}$$

olduğundan $\mathbf{B}=-\mathbf{A},\ \mathbf{C}=\mathbf{0}$ bulunur.

$$\mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_3{}^2\mathbf{T}_1=\left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{FA} & \mathbf{0}\\ \mathbf{HA} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}^2\mathbf{A}+\mathbf{GHA} & \mathbf{0}\\ \mathbf{HFA}+\mathbf{KHA} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{0}$$

olduğundan $\mathbf{F}=\mathbf{F}^2\mathbf{A},\ \mathbf{G}=\mathbf{0},\ \mathbf{HF}+\mathbf{KH}=\mathbf{0}$ elde edilir.

$$\mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_1=\left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{0}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}-\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{0}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F}^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{0}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix}-\mathbf{F}^2\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{K}^2\mathbf{D} & \mathbf{K}^2\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{0}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

$$=\mathbf{0}$$

olduğundan $\mathbf{F}=-\mathbf{F}^2\mathbf{A},\ \mathbf{H}=\mathbf{K}^2\mathbf{D},\ \mathbf{K}=\mathbf{K}^2\mathbf{E}$ bulunur.

$\mathbf{F}=\mathbf{F}^2\mathbf{A}=-\mathbf{F}^2\mathbf{A}=\mathbf{0},\ \mathbf{G}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{T}_1$ tripotent olduğundan $\mathbf{K}$ matrisi de tripotent olur. Sonuç olarak yukarıdaki eşitlikler düzenlendiğinde,

$$\mathbf{B}=-\mathbf{A},\ \mathbf{C}=\mathbf{0},\ \mathbf{F}=\mathbf{0},\ \mathbf{G}=\mathbf{0},\ \mathbf{H}=\mathbf{0},\ \mathbf{KD}=\mathbf{0},\ \mathbf{K}=\mathbf{K}^2\mathbf{E} \tag{4.28}$$

bulunur. Buradan

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{T}_2=\mathbf{S}\begin{pmatrix}-\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\ \text{ ve }\ \mathbf{T}_3=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.29}$$

elde edilir. $\mathbf{T}_1$ sıfırdan farklı olduğundan, $\mathbf{K}$ matrisi de sıfırdan farklı olur. Ayrıca $\mathbf{T}_2{}^2=\mathbf{I}_n$ olduğundan, $\mathbf{DA}=\mathbf{ED}$, yani $\mathbf{D}=\mathbf{EDA}$, $\mathbf{E}^2=\mathbf{I}_{n\text{-}r}$ ve dolayısıyla $\mathbf{E}$ tersinir bulunur. Bununla birlikte (4.28) kullanıldığında, $\mathbf{E}^2\mathbf{K}=\mathbf{K}^2\mathbf{E}$ yazılabilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.6 (ii) şıkkına göre, $c_1\mathbf{K}+c_2\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}$ matrisi tersinirdir ve

$$\begin{aligned}
&\left(c_1\mathbf{K}+c_2\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\right)^{-1}\\
&=\beta^{-1}\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+c_2{}^{-1}\left(c_1{}^2+c_1c_2-c_4{}^2\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)\right]\\
&=\beta^{-1}\left[\left(c_1+c_2\right)\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\beta c_2{}^{-1}\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)-\left(c_1+c_2\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)\right]\\
&=\beta^{-1}\left\{\left(c_1+c_2\right)\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+c_2{}^{-1}\left[\beta-c_2\left(c_1+c_2\right)\right]\left(\mathbf{E}-\mathbf{EK}^2\right)\right\}\\
&=\beta^{-1}\left[\beta c_2{}^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_2-\beta c_2{}^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrislerinin (4.29) ifadesinde elde edilen değerleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ c_2\mathbf{D}-c_4\mathbf{DA} & c_1\mathbf{K}+c_2\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

eşitliği yazılabilir. (4.31) ifadesindeki $c_1\mathbf{K}+c_2\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}$ matrisinin tersinir olduğu ve tersi (4.30) ifadesinde verildiğinden, $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$

matrisinin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul, $\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r$ matrisinin tersinir olmasıdır. Ayrıca,

$$\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right]=\gamma\mathbf{I}_r \tag{4.32}$$

olduğundan, eğer $\gamma=0$ ise, $\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r$ veya $\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r$ tersinir olmayan matristir. Böylelikle (4.31) eşitliğinden, $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ veya $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3+c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrislerinin tersinir olmadığı görülür. Böylece $\gamma=0$ durumu için ispat tamamlanır.

Şimdi $\gamma\neq 0$ olsun. (4.32) ifadesinden görüldüğü gibi $\gamma\neq 0$ olması, $\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r$ matrisinin tersinir olmasını sağlar ve

$$\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1}=\gamma^{-1}\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right] \tag{4.33}$$

bulunur. (4.31), Teorem 2.3.5, (4.28), (4.30), (4.33) ve $\mathbf{D}=\mathbf{EDA}$ birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\beta\gamma\left[c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\right]^{-1}\\
&=\beta\gamma\mathbf{S}\begin{pmatrix}\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1} & \mathbf{0}\\ -\left(c_1\mathbf{K}+c_2\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\right)^{-1}\left(c_2\mathbf{D}-c_4\mathbf{DA}\right)\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1} & \left(c_1\mathbf{K}+c_2\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\right)^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\beta\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right] & \mathbf{0}\\ -\left[\beta c_2^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_2-\beta c_2^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]\left(c_2\mathbf{D}-c_4\mathbf{DA}\right)\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right] & \gamma\left[\beta c_2^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_2-\beta c_2^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right]\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}
\end{aligned}$$

$$
= \mathbf{S}\begin{pmatrix} \beta\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right] & \mathbf{0} \\ -\beta\left(\mathbf{ED}-c_2{}^{-1}c_4\mathbf{D}\right)\left[\left(-c_2+c_3\right)\mathbf{A}-c_4\mathbf{I}_r\right] & \gamma\left[\beta c_2{}^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_2-\beta c_2{}^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right] \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}
$$

$$
= \mathbf{S}\begin{pmatrix} -\beta\left(c_2-c_3\right)\mathbf{A}-\beta c_4\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \beta\left[\left(c_2-c_3\right)\mathbf{D}-c_2{}^{-1}c_4{}^2\mathbf{D}+c_2{}^{-1}c_3c_4\mathbf{DA}\right] & \gamma\left[\beta c_2{}^{-1}\mathbf{E}+c_4\mathbf{EK}+\left(c_1+c_2-\beta c_2{}^{-1}\right)\mathbf{EK}^2\right] \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}
$$

$$
= \mathbf{S}\left\{\beta\left[\left(c_2-c_3\right)\begin{pmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}-c_4\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}+c_2{}^{-1}c_3c_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{DA} & \mathbf{0} \end{pmatrix}-c_2{}^{-1}c_4{}^2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right]\right.
$$

$$
\left.+\gamma\left[\beta c_2{}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{EK} \end{pmatrix}+\left(c_1+c_2-\beta c_2{}^{-1}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{EK}^2 \end{pmatrix}\right]\right\}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.34}
$$

bulunur. Ayrıca,

$$
\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3{}^2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.35}
$$

$$
\mathbf{T}_3{}^2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.36}
$$

$$
\mathbf{T}_3{}^2 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{DA} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.37}
$$

$$
\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3{}^2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.38}
$$

$$
\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3{}^2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.39}
$$

$$\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{EK} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.40}$$

$$\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{\;2} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{EK}^2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.41}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.35)–(4.41) ifadeleri (4.34) ifadesinde yerlerine yazılırsa, (4.12) elde edilir. Böylece (ii) şıkkının ispatı tamamlanır.

(iii) $\mathbf{T}_3$ tersinir ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere, önce $\gamma = 0$ olsun. $\mathbf{T}_3$ tersinir kabul edildiğinden, $\mathbf{T}_3^{\;2} = \mathbf{I}_n$ olur. Böylece, $\mathbf{T}_1^{\;2}\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^{\;2}\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^{\;2}\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3^{\;2}\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^{\;2}\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3^{\;2}\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ koşulu, $\mathbf{T}_1^{\;2}\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^{\;2}\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^{\;2}\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^{\;2}\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ halini alır. $\mathbf{T}_2$ tripotent olduğundan, Teorem 3.3.6 göz önüne alındığında, tersinir bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{rxr}$ ve $rank\mathbf{A} = r$ olmak üzere,

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{T}_1 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathbf{T}_3 = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{K} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. Dikkat edilirse, buradaki $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrisleri (i) şıkkının ispatında kullanılan matrisler ile aynı biçimdedir, fakat burada tersinir olan $\mathbf{T}_3$ matrisidir. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrisleri, $\mathbf{T}_1^{\;2}\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^{\;2}\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^{\;2}\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^{\;2}\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ koşulunda yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1^{\;2}\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^{\;2}\mathbf{T}_1 &= \left[\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2 \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} - \left[\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2 \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \\
&= \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{BA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{DA} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} - \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{AC} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \\
&= \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{B}^2\mathbf{A} + \mathbf{CDA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{DBA} + \mathbf{EDA} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} - \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbf{C}=\mathbf{0}$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}^2\mathbf{A}$, $\mathbf{DB}+\mathbf{ED}=\mathbf{0}$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_2{}^2\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_2 &= \left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2 \mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\\
&=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbf{F}=-\mathbf{A}$, $\mathbf{G}=\mathbf{0}$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1{}^2\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_1 &= \left[\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{C}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\right]^2 \mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{C}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B}^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{H} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}-\mathbf{B}^2\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{E}^2\mathbf{H} & \mathbf{E}^2\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}-\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\\
&=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbf{B}=-\mathbf{B}^2\mathbf{A}$, $\mathbf{E}^2\mathbf{H}=\mathbf{D}$, $\mathbf{E}^2\mathbf{K}=\mathbf{E}$ bulunur.

$\mathbf{B}=\mathbf{B}^2\mathbf{A}=-\mathbf{B}^2\mathbf{A}=\mathbf{0}$, $\mathbf{C}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{T}_1$ tripotent olduğundan $\mathbf{E}$ matrisi de tripotent olur. Sonuç olarak yukarıdaki eşitlikler düzenlendiğinde,

$$\mathbf{B}=\mathbf{0},\ \mathbf{C}=\mathbf{0},\ \mathbf{D}=\mathbf{0},\ \mathbf{F}=-\mathbf{A},\ \mathbf{G}=\mathbf{0},\ \mathbf{EH}=\mathbf{0},\ \mathbf{E}^2\mathbf{K}=\mathbf{E} \tag{4.42}$$

bulunur. Buradan

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1},\mathbf{T}_2=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\ \text{ve}\ \mathbf{T}_3=\mathbf{S}\begin{pmatrix}-\mathbf{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{H}&\mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \qquad (4.43)$$

elde edilir. $\mathbf{T}_1$ sıfırdan farklı olduğundan $\mathbf{E}$ matrisi de sıfırdan farklı olur. Ayrıca $\mathbf{T}_3^{\,2}=\mathbf{I}_n$ olduğundan, $\mathbf{HA}=\mathbf{KH}$, yani $\mathbf{H}=\mathbf{KHA}$, $\mathbf{K}^2=\mathbf{I}_{n\text{-}r}$ ve dolayısıyla $\mathbf{K}$ tersinir bulunur. Bununla birlikte (4.42) kullanıldığında, $\mathbf{E}^2\mathbf{K}=\mathbf{K}^2\mathbf{E}$ yazılabilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.6 (i) şıkkı kullanıldığında, $c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}$ matrisinin tersinir olduğu ve

$$\begin{aligned}
&\left(c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\right)^{-1}\\
&=\alpha^{-1}\Big[\left(c_3+c_1\right)\mathbf{K}+c_4\mathbf{E}^2+c_3^{\,-1}c_1c_4\left(\mathbf{E}^2-\mathbf{KE}\right)+c_3^{\,-1}c_4^{\,2}\left(\mathbf{E}-\mathbf{KE}^2\right)+c_3^{\,-1}\big(c_1^{\,2}+c_3c_1\\
&\quad -c_4^{\,2}\big)\left(\mathbf{K}-\mathbf{KE}^2\right)\Big]\\
&=\alpha^{-1}c_3^{\,-1}\Big[c_3^{\,2}\mathbf{K}+c_3c_1\mathbf{K}+c_3c_4\mathbf{E}^2+c_1c_4\mathbf{E}^2-c_1c_4\mathbf{KE}+c_4^{\,2}\mathbf{E}-c_4^{\,2}\mathbf{KE}^2+c_1^{\,2}\mathbf{K}\\
&\quad +c_3c_1\mathbf{K}-c_4^{\,2}\mathbf{K}-c_1^{\,2}\mathbf{KE}^2-c_3c_1\mathbf{KE}^2+c_4^{\,2}\mathbf{KE}^2\Big]\\
&=\alpha^{-1}c_3^{\,-1}\begin{bmatrix}\left(c_3^{\,2}+2c_3c_1+c_1^{\,2}-c_4^{\,2}\right)\mathbf{K}+c_4\left(c_3+c_1\right)\mathbf{E}^2-c_1c_4\mathbf{KE}-c_1\left(c_3+c_1\right)\mathbf{KE}^2\\+c_4^{\,2}\mathbf{E}\end{bmatrix}\\
&=\alpha^{-1}c_3^{\,-1}\left[\alpha\mathbf{K}+c_4\left(c_3+c_1\right)\mathbf{E}^2-c_1c_4\mathbf{KE}-c_1\left(c_3+c_1\right)\mathbf{KE}^2+c_4^{\,2}\mathbf{E}\right] \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ matrislerinin (4.43) ifadesinde elde edilen değerleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\\
&=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\left(c_2-c_3\right)\mathbf{A}+c_4\mathbf{I}_r&\mathbf{0}\\c_3\mathbf{H}&c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. (4.45) ifadesindeki $c_3\mathbf{K}+c_1\mathbf{E}-c_4\mathbf{KE}$ matrisinin tersinir olduğu ve tersi (4.44) ifadesinde verildiğinden, $c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3+c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$

matrisinin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul, $(c_2 - c_3)\mathbf{A} + c_4\mathbf{I}_r$ matrisinin tersinir olmasıdır. Ayrıca,

$$\left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} + c_4\mathbf{I}_r\right]\left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} - c_4\mathbf{I}_r\right] = \gamma\mathbf{I}_r \tag{4.46}$$

olduğundan, eğer $\gamma = 0$ ise, $(c_2 - c_3)\mathbf{A} + c_4\mathbf{I}_r$ veya $(c_2 - c_3)\mathbf{A} - c_4\mathbf{I}_r$ tersinir olmayan matristir. Böylelikle (4.45) eşitliğinden, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3)$ veya $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 + c_4(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3)$ matrislerinin tersinir olmadığı görülür. Böylece $\gamma = 0$ durumu için ispat tamamlanır.

Şimdi $\gamma \neq 0$ olsun. (4.46) ifadesinden görüldüğü gibi $\gamma \neq 0$ olması, $(c_2 - c_3)\mathbf{A} + c_4\mathbf{I}_r$ matrisinin tersinir olmasını sağlar ve

$$\left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} + c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1} = \gamma^{-1}\left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} - c_4\mathbf{I}_r\right] \tag{4.47}$$

bulunur. (4.45), Teorem 2.3.5, (4.42), (4.44), (4.47) ve $\mathbf{H} = \mathbf{KHA}$ birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\alpha\gamma\left[c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3)\right]^{-1} \\
&= \alpha\gamma\mathbf{S}\begin{pmatrix} \left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} + c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1} & \mathbf{0} \\ -(c_3\mathbf{K} + c_1\mathbf{E} - c_4\mathbf{KE})^{-1} c_3\mathbf{H}\left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} + c_4\mathbf{I}_r\right]^{-1} & (c_3\mathbf{K} + c_1\mathbf{E} - c_4\mathbf{KE})^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}. \\
&= \mathbf{S}\begin{pmatrix} \alpha\left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} - c_4\mathbf{I}_r\right] & \mathbf{0} \\ -\left[\alpha\mathbf{K} + c_4(c_3 + c_1)\mathbf{E}^2 - c_1c_4\mathbf{KE} - c_1(c_3 + c_1)\mathbf{KE}^2 + c_4{}^2\mathbf{E}\right]\mathbf{H}\left[(c_2 - c_3)\mathbf{A} - c_4\mathbf{I}_r\right] & \gamma c_3{}^{-1}\left[\alpha\mathbf{K} + c_4(c_3 + c_1)\mathbf{E}^2 - c_1c_4\mathbf{KE} - c_1(c_3 + c_1)\mathbf{KE}^2 + c_4{}^2\mathbf{E}\right] \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}.
\end{aligned}$$

$$=\mathbf{S}\begin{pmatrix} \alpha(c_2-c_3)\mathbf{A}-\alpha c_4\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ -\alpha(c_2-c_3)\mathbf{H}+\alpha c_4\mathbf{HA} & \gamma c_3^{-1}\begin{bmatrix} \alpha\mathbf{K}+c_4(c_3+c_1)\mathbf{E}^2-c_1c_4\mathbf{KE} \\ -c_1(c_3+c_1)\mathbf{KE}^2+c_4^{\;2}\mathbf{E} \end{bmatrix} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}.$$

$$=\mathbf{S}\left\{\alpha\left[(c_3-c_2)\begin{pmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix} -\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{HA} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\right]+\gamma c_3^{-1}\left[\alpha\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}\end{pmatrix}+c_4(c_1+c_3)\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^2\end{pmatrix}\right.\right.$$

$$\left.\left.-c_1c_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{KE}\end{pmatrix}-c_1(c_1+c_3)\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{KE}^2\end{pmatrix}+c_4^{\;2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}\end{pmatrix}\right]\right\}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.48}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2^{\;2}=\mathbf{S}\begin{pmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.49}$$

$$\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2=\mathbf{S}\begin{pmatrix} -\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{HA} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.50}$$

$$\mathbf{T}_3-\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2^{\;2}=\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.51}$$

$$\mathbf{T}_1^{\;2}=\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^2\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.52}$$

$$\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1=\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{KE}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.53}$$

$$\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1^{\;2}=\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{KE}^2\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \tag{4.54}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.49)–(4.54) ifadeleri (4.48) ifadesinde yerlerine yazılırsa (4.13) elde edilir. Böylece Teorem 4.2.8’ in ispatı tamamlanmıştır. ■

Not 4.2.9. Liu ve diğerlerinin, Teorem 3.4.6 (ii) şıkkında,

$$\left[(c_1 + c_2)^2 - c_3^2\right](c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)^{-1}$$
$$= (c_1 + c_2)\mathbf{T}_2 - c_3\left(2\mathbf{T}_1^2 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\right) + c_2^{-1}\left(c_1^2 + c_1c_2 - c_3^2\right)\left(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^2\right)$$

olarak verdikleri formülde hata vardır. Yukarıdaki teoremde bu formül

$$\left[(c_1 + c_2)^2 - c_3^2\right](c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)^{-1}$$
$$= (c_1 + c_2)\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 + c_2^{-1}\left(c_1^2 + c_1c_2 - c_3^2\right)\left(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^2\right)$$

şeklinde düzeltilerek kullanılmıştır.

Eğer yukarıdaki teoremde $c_4 = 0$ seçilirse, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.10. c_1, c_2 ve $c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ sıfırdan farklı tripotent matrisleri, $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^2\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın.

(i) $\mathbf{T}_1$ matrisi tersinir, $c_1 + c_3 \neq 0$ ve $c_1 + c_2 \neq 0$ ise,

$$(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3)^{-1} = \frac{1}{c_1}\mathbf{T}_1\left(\mathbf{I}_n - \frac{c_2}{c_1 + c_2}\mathbf{T}_2^2 - \frac{c_3}{c_1 + c_3}\mathbf{T}_3^2\right),$$

(ii) $\mathbf{T}_2$ matrisi tersinir, $c_1 + c_2 \neq 0$ ve $c_2 - c_3 \neq 0$ ise,

$$(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3)^{-1} = \frac{1}{c_2}\mathbf{T}_2\left(\mathbf{I}_n - \frac{c_1}{c_1 + c_2}\mathbf{T}_1^2 + \frac{c_3}{c_2 - c_3}\mathbf{T}_3^2\right),$$

(iii) $\mathbf{T}_3$ matrisi tersinir, $c_1 + c_3 \neq 0$ ve $c_2 - c_3 \neq 0$ ise,

$$\left(c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3\right)^{-1} = \frac{1}{c_3}\mathbf{T}_3\left(\mathbf{I}_n - \frac{c_1}{c_1 + c_3}\mathbf{T}_1^2 - \frac{c_2}{c_2 - c_3}\mathbf{T}_2^2\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

Aşağıdaki teorem, $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ matrisinin tersinin $(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2)\mathbf{T}_1$, $(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_3^2)\mathbf{T}_2$ ve $(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2)\mathbf{T}_3$ matrislerinin veya $\mathbf{T}_1(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2)$, $\mathbf{T}_2(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_3^2)$ ve $\mathbf{T}_3(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2)$ matrislerinin benzer bileşimleriyle ilişkili olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.2.12. c_1, c_2 ve $c_3 \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3 \in \mathbb{C}^{nxn}$ tripotent matrisler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $c_1\left(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2\right)\mathbf{T}_1 + c_2\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_3^2\right)\mathbf{T}_2 + c_3\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2\right)\mathbf{T}_3 - c_4\Big[\left(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2\right)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$
$+\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_3^2\right)\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 + \left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2\right)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\Big]$ tersinirdir,

(ii) $c_1\mathbf{T}_1\left(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2\right) + c_2\mathbf{T}_2\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_3^2\right) + c_3\mathbf{T}_3\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2\right) - c_4\Big[\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\left(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2\right)$
$+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_3^2\right) + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2\right)\Big]$ tersinirdir,

(iii) $c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ ve $\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^2 - \mathbf{T}_2^2 - \mathbf{T}_3^2$ tersinirdir.

İspat. İfadeler aşağıdaki hesaplamalardan kolayca görülür:

$$\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{T}_1^2 - \mathbf{T}_2^2 - \mathbf{T}_3^2\right)\left[c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\right]$$
$$= -\Big\{c_1\left(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2\right)\mathbf{T}_1 + c_2\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_3^2\right)\mathbf{T}_2 + c_3\left(\mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2\right)\mathbf{T}_3 - c_4\Big[\left(\mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2\right)\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$$

$$+\left(\mathbf{T}_1^{\,2}+\mathbf{T}_3^{\,2}\right)\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3+\left(\mathbf{T}_1^{\,2}+\mathbf{T}_2^{\,2}\right)\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\Big]\Big\}$$

ve

$$\left[c_1\mathbf{T}_1+c_2\mathbf{T}_2+c_3\mathbf{T}_3-c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)\right]\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{T}_1^{\,2}-\mathbf{T}_2^{\,2}-\mathbf{T}_3^{\,2}\right)$$

$$=-\Big\{c_1\mathbf{T}_1\left(\mathbf{T}_2^{\,2}+\mathbf{T}_3^{\,2}\right)+c_2\mathbf{T}_2\left(\mathbf{T}_1^{\,2}+\mathbf{T}_3^{\,2}\right)+c_3\mathbf{T}_3\left(\mathbf{T}_1^{\,2}+\mathbf{T}_2^{\,2}\right)-c_4\Big[\mathbf{T}_3\mathbf{T}_1\left(\mathbf{T}_2^{\,2}+\mathbf{T}_3^{\,2}\right)$$

$$+\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\left(\mathbf{T}_1^{\,2}+\mathbf{T}_3^{\,2}\right)+\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\left(\mathbf{T}_1^{\,2}+\mathbf{T}_2^{\,2}\right)\Big]\Big\}. \qquad \blacksquare$$

BÖLÜM 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1' de çalışmanın içerdiği kavramların kullanım alanları hakkında bilgi verilmektedir. Bölüm 2' de, çalışmada kullanılacak olan temel bazı gösterimler, tanımlar, özellikler ve ispatı olmaksızın bazı teoremler verilmektedir.

Bölüm 3' te, grup tersinir matrisler ve tripotent matrisler üzerinde durulmaktadır. Ayrıca, Bölüm 3' te c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar, $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ nxn boyutlu tripotent matrisler olmak üzere, $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 - c_3\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ bileşiminin tersinirliği problemi ile ilgili Liu ve diğerlerinin yaptığı çalışmadaki [22] sonuçlara ispatsız olarak yer verilmektedir.

Bölüm 4' te, Liu ve diğerlerinin [22] çalışmasından esinlenerek, onların iki grup tersinir ve iki tripotent matrisin bazı bileşimlerinin tersinirliği için vermiş oldukları teoremlere benzer şekilde, üç grup tersinir ve üç tripotent matris için sonuçlar verilmektedir. Verilen sonuçlar bu bağlamda [22] çalışmasının tüm teorem ve sonuçlarını genişletmektedir.

Örneğin, başka herhangi bir ön şartı bozmaksızın $\mathbf{T}_3 = \mathbf{0}$ alındığında, Teorem 4.2.1, Teorem 3.4.12' e; Teorem 4.2.5, Teorem 3.4.4' e; Teorem 4.2.7, Teorem 3.4.5' e; Teorem 4.2.8, Teorem 3.4.6' ya; Sonuç 4.2.10, Sonuç 3.4.7' ye; Teorem 4.2.12, Teorem 3.4.8' e dönüşür.

Sonuç olarak, bu çalışmada üç grup tersinir matrisin ve üç tripotent matrisin bazı bileşimlerinin tersinirliği ile ilgili sonuçlar ortaya koyulmaktadır. Ayrıca c_1, c_2 ve c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_3$ $n \times n$ boyutlu tripotent matrisler olmak üzere, bazı özel koşullar altında,

$\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2 + c_3\mathbf{T}_3 - c_4\left(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\right)$ bileşiminin tersi için formüller verilmektedir.

Dikkat edilirse, bu çalışmada belirli sayıda grup tersinir matrisin ve belirli sayıda tripotent matrisin belli tipteki bileşiminin tersinirliği üzerinde durulmakta ve bazı sonuçlar elde edilmektedir. Bundan sonra bu sonuçları bahsi geçen tipte; *k*-potent matrisler için nasıl şekilleneceği, *n* adet matris için genelleştirme veya bu bileşimin hangi koşullar altında yine özel tipli bir matris olacağı problemleri v.b. üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] ADLER, S. L., Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press Inc., New York, 1995.

[2] BAKSALARY, J. K. and BAKSALARY, O. M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 25–29, 2004.

[3] BAKSALARY, J. K., BAKSALARY, O. M., and ÖZDEMİR, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 45–51, 2004.

[4] BEN-ISRAEL, A. and GREVILLE, T. N. E., Generalized Inverses: Theory and Applications, 2nd ed, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] BENÍTEZ, J., LIU, X., and ZHU, T., Nonsingularity and group invertibility of linear combination of two *k*-potent matrices, Linear Multilinear Alg., 58, 1023–1035, 2010.

[6] BENÍTEZ, J. and THOME, N., *k*-Group periodic matrices, SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 28, 9–25, 2006.

[7] BERNSTEIN, D. S., Matrix Mathematics: Theory, Facts and Formulas, 2nd ed, Princeton U. P., Princeton, 2009.

[8] BETHE, H. A. and SALPETER, E. E., Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms, Academic Press, New York, 1957.

[9] BRONSON, R., Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrix Operations, USA, 1989.

[10] BRU, R. and THOME, N., Group inverse and group involutory matrices , Linear and Multilinear Algebra, 45:2-3, 207-218, 1998.

[11] CAMPBELL, S. L. and MEYER, C. D., Generalized Inverses of Linear Transformations, SIAM Publishers, Philadelphia, PA, 2009.

[12] CAMPBELL, S. L., MEYER, JR. C. D., and ROSE, N. J., Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J. Appl. Math. Vol. 31, No. 3, 1976.

[13] GRAYBILL, F. A., Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company inc., California, 1969.

[14] GROß, J. and TRENKLER, G., Nonsingularity of the difference of two oblique projectors, SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 21, 390–395, 1999.

[15] GROMOV, N. A., The matrix quantum unitary Cayley-Klein groups, J. Phys., A, Vol. 26, L5-L8, 1993.

[16] HORN, R. A. and JOHNSON, C. R., Matrix Analysis, Cambridge U. P., Cambridge, 1990.

[17] HOUSEHOLDER, A. S. and CARPENTER, J.A., The singular values of involutory and of idempotent matrices, Numerische Mathematik, 5, 234-237, 1963.

[18] KOLIHA, J. J., RAKOČEVIĆ, V., and STRAŠKRABA, I., The difference and sum of projectors, Linear Algebra Appl., 388, 279–288, 2004.

[19] LANGVILLE, A. N. and MEYER, C. D., Updating PageRank using the group inverse and stochastic complementation, Technical Report crsc02-tr32, North Carolina State University, Mathematics Department, CRSC, 2002.

[20] LANGVILLE, A. N. and MEYER, C. D., Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings. Princeton U. P., Princeton, New Jersey, 2006.

[21] LAUB, A. J., Matrix Analysis for Scientists and Engineers, Philadelphia, PA: SIAM., 2005.

[22] LIU, X., WU, S., and BENÍTEZ, J., On nonsingularity of combinations of two group invertible matrices and two tripotent matrices, Linear Multilinear Alg., Vol. 59, No. 12, 1409-1417, 2011.

[23] LIU, X., WU, L., and BENÍTEZ, J., On the group inverse of linear combinations of two group invertible matrices, Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 22, 490-503, 2011.

[24] LIU, X., WU, L., and YU, Y., The group inverse of the combinations of two idempotent matrices, Linear and Multilinear Algebra, 59:1, 101-115, 2011.

[25] MESTECHKIN, M. M., Restricted Hartree-Fock method instability, Int. J. Quant. Chem., 13, 469-481, 1978.

[26] MEYER, C. D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Philadelphia, PA: SIAM, 2000.

[27] OVCHINNIKOV, M. A., Properties of Viro-Turaev representations of the mapping class group of a torus, J. Math. Sci., Vol. 113, No. 6, 856-867, 2003.

[28] ÖZDEMİR, H. and SARDUVAN, M., On the best approximate solutions of the matrix equation AXB = C, arXiv: 1103.3945v1 [math.NA], 2011.

[29] PENROSE, R., A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Phil. Soc. 51, 406-413, 1955.

[30] RAO, C. R. and MITRA, S. K., Generalized inverse of a matrix and its applications, Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., Vol. 1, 601-620, California U. P., 1972.

[31] RAO, K. P. S. B., The Theory of Generalized Inverses Over Commutative Rings, Algebra, Logic and Applications Series, Vol. 17, Taylor & Francis, New York, 2002.

[32] SARDUVAN, M. and ÖZDEMİR, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent and involutive matrices, Appl. Math. Comput., 200, 401–406, 2008.

[33] SARDUVAN, M. and ÖZDEMİR, H., On nonsingularity of linear combinations of tripotent matrices, Acta Universitatis Apulensis 25, 159–164, 2011.

[34] SINGTHONG, U. and WANICHARPICHAT, W., Idempotency of linear combinations of commuting three tripotent matrices, NU Science Journal, 4(S1), 33 - 39, 2007.

[35] ZHANG, F., Matrix Theory: Basic Results and Techniques, Springer-Verlag, New York, 1999.

[36] ZUO, K., Nonsingularity of the difference and the sum of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 433, 476–482, 2010.

[37] ZUO, K. and XIE, T., Nonsingularity of combinations of idempotent matrices, J. Math. (PRC), 29, 285–288, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Sedat ÜLKER, 01.10.1980 tarihinde Çorum’ da doğdu. İlkokulu Ankara Cengiz Topel İlköğretim Okulu’ nda 1991’ de, ortaokulu Ankara Şehit Nuri Pamir Lisesi’ nde 1994’ te ve lise eğitimini 1998 yılında Ankara Başkent Lisesi’ nde tamamladı. 1998 yılında başladığı Marmara Üniversitesi O.Ö. Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü’ ndeki lisans eğitimini 2003 yılında derece ile bitirdi. 2003-2005 yılları arasında İstanbul’un Üsküdar, Ümraniye ve Kadıköy ilçelerinde özel öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2005 yılında Erzurum’ da askerliğini tamamladı. 2005-2009 yılları arasında İstanbul’ un Üsküdar ve Kadıköy ilçelerinde, 2009-2011 yılları arasında Sakarya’ nın Akyazı ilçesinde, özel öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü’ nde yüksek lisans öğrencisi oldu. 2011 yılında Hitit Üniversitesi, Osmancık Ömer Derindere Meslek Yüksek Okulu’ nda Öğretim Görevlisi olarak göreve başladı ve halen bu görevine devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.

S. ÜLKER

TRİPOTENT VE GRUP TERSİNİR MATRİSLERİN BAZI BİLEŞİMLERİNİN TERSİNİRLİĞİ

OCAK 2012