T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FIBONACCI VE LUCAS SERİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canan ÖZDOĞAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Refik KESKİN

Ocak 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FIBONACCI VE LUCAS SERİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canan ÖZDOĞAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 17 / 01 /2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Refik KESKİN	Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR	Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞOĞLU
Jüri Başkanı	Üye	Üye

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Refik KESKİN'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Arş. Gör. Dr. Bahar DEMİRTÜRK'e, fikir ve düşüncelerini paylaştığı için teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisans tez dönemi boyunca hep yanımda olan, beni destekleyen eşim Tansu GÜZEL'e teşekkür ederim. Maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme de çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$a \mid b$	: a, b yi böler.
$a \nmid b$	: a, b yi bölmez.
$\prod$	: Çarpım sembolü
$\sum$	: Toplam sembolü
(a,b)	: a ile b nin ortak böleni
$a \equiv b \pmod{m}$	: a nın m ile bölümünden kalan b dir.

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Binet formülü, Fibonacci serileri, Lucas serileri, Fibonacci toplamları, Lucas toplamları.

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren seriler ile Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren toplamlar ele alındı. 1. bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili temel tanım ve teoremler verildi. 2. bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren seriler ele alındı. Son bölümde ise Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren toplamlar ele alındı. Buradaki toplamlar genellikle $\sum_{j=1}^{n} jF_jL_{n-j}$, $\sum_{j=1}^{n} jL_jL_{n-j}$ ve bunlara benzer olan toplamlardır.

FIBONACCI AND LUCAS SERIES

SUMMARY

Key Words: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Binet's Formula, Fibonacci series, Lucas series, Fibonacci sums, Lucas sums.

In this thesis, series and summation involving Fibonacci and Lucas numbers are examined. Fundamental definitions and theorems concerning with the Fibonacci and Lucas numbers are given in the first chapter.

Series involving Fibonacci and Lucas numbers are considered in the second chapter.

The last chapter are devoted to the summations involving Fibonacci and Lucas numbers. The summations considered are usually of the form $\sum_{j=1}^{n} jF_jL_{n-j}$ and $\sum_{j=1}^{n} jL_jL_{n-j}$. Moreover similar summations are examined in this last chapter.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanacağımız temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Birinci Tümevarım İlkesi: Her n doğal sayısı için $P(n)$ bir önerme olsun.

a) $P(1)$ doğru olsun.

b) $P(n)$ doğru iken $P(n+1)$ de doğru olsun.

Bu takdirde her n için $P(n)$ doğrudur.

İkinci Tümevarım İlkesi: Her n doğal sayısı için $P(n)$ bir önerme olsun.

a) $P(1)$ doğru olsun.

b) $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $P(k)$ doğru iken $P(n+1)$ de doğru olsun.

Bu taktirde her n için $P(n)$ doğrudur.

Tanım 1.1: $F_1 = 1$**,** $F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ biçiminde tanımlanan (F_n) dizisine Fibonacci Dizisi ve F_n sayılarına da Fibonacci Sayıları denir. Dizinin terimleri 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … biçimindedir.

Teorem 1.1.1:

$n \geq 1$ ise $(F_n, F_{n+1}) = 1$ dir$[1]$.

İspat: İspatı birinci tümevarım ilkesine göre yapacağız.

$F_1 = F_2 = 1$ olduğundan iddia $n = 1$ için doğrudur. Şimdi iddianın n için doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $(F_{n+1}, F_{n+2}) = d$ olsun. Dolayısıyla

$d|F_{n+1}$ ve $d|F_{n+2}$ yazılabilir. Bu ise $d|F_{n+2}-F_{n+1}$ olduğunu gösterir. $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ olduğu kullanılırsa $d|F_n$ bulunur. Bu ise $d=1$ olduğunu gösterir.

Önerme 1.1.1: Her m ve n doğal sayıları için $F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$ dir$[1]$.

İspat: m herhangi bir doğal sayı olmak üzere her n doğal sayısı için ifadenin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için de ikinci tümevarım ilkesi kullanılacaktır. $F_1=F_2=1$ olduğundan $F_{m+1}=F_{m-1}F_1+F_mF_2$ olduğu açıktır. $1\le k\le n$ için iddia doğru, yani $F_{m+k}=F_{m-1}F_k+F_mF_{k+1}$ olsun. Dolayısıyla,

$$F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$$

ve

$$F_{m+n-1}=F_{m-1}F_{n-1}+F_mF_n$$

olur. Taraf tarafa toplama yapılırsa,

$$F_{m+n+1}=F_{m+n}+F_{m+n-1}=F_{m-1}\left(F_n+F_{n-1}\right)+F_m\left(F_n+F_{n+1}\right)=F_{m-1}F_{n+1}F_mF_{n+2}$$

elde edilir. Şu halde iddia $n+1$ için de doğrudur. İkinci tümevarım ilkesine göre önerme her n doğal sayısı için doğrudur.

Önerme 1.1.2: Herhangi pozitif n ve k tamsayıları için,

$$F_{n-1}F_{n+k}-F_nF_{n+k-1}=\left(-1\right)^n F_k$$

dir$[1]$.

İspat: Birinci tümevarım yöntemi ile gösterelim.

$n=1$ için, $F_{n-1}F_{n+k}-F_nF_{n+k-1}=F_0F_{k+1}-F_1F_k=-F_k$ olduğundan ifade doğrudur. Şimdi $n\ge 1$ olan tamsayılar için,

$F_{n-1}F_{n+k}-F_nF_{n+k-1}=\left(-1\right)^n F_k$ olduğunu farzedelim. Sonra $n+1$ için doğruluğuna bakalım.

$$\begin{aligned}F_nF_{n+1+k}-F_{n+1}F_{n+k}&=F_n\left(F_{n+k}+F_{n+k-1}\right)-F_{n+k}\left(F_n+F_{n-1}\right)\\&=F_nF_{n+k}+F_nF_{n+k-1}-F_{n+k}F_n-F_{n+k}F_{n-1}\\&=F_nF_{n+k-1}-F_{n+k}F_{n-1}\\&=-\left(F_{n+k}F_{n-1}-F_nF_{n+k-1}\right)\\&=-\left(-1\right)^n F_k=\left(-1\right)^{n+1}F_k\end{aligned}$$

dır. Bu durum $n+1$ için de ifadenin doğruluğunu gösterir. Dolayısıyla verilen ifade tüm pozitif n ve k tamsayıları için doğrudur.

Teorem 1.1.2: $m \geq 1$ ve $n \geq 1$ ise $F_m \mid F_{mn}$ dir $[1]$.

İspat: m keyfi fakat sabit bir doğal sayı olmak üzere tümevarımla her n doğal sayısı için $F_m \mid F_{mn}$ olduğunu gösterelim. $n=1$ ise iddia doğrudur. İddia n için doğru, yani $F_m \mid F_{mn}$ olsun. $F_{m(n+1)} = F_{mn+m} = F_{mn-1}F_m + F_{mn}F_{m+1}$ ve $F_m \mid F_{mn}$ olduğu kullanılırsa, $F_m \mid F_{m(n+1)}$ elde edilir. Şu halde $n+1$ için de iddia doğrudur. Dolayısıyla her n doğal sayısı için iddia doğru olur.

Önerme 1.1.3:

a) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

b) $3 \leq m \leq n$ olsun. $F_m \mid F_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ olmasıdır.

İspat: Bakınız $[1]$.

Teorem 1.1.3 (Binet Formülü): F_n Fibonacci sayıları, $n \geq 1$ için,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

şeklindedir $[1]$.

İspat: $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olsun.

$\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ olduğunu görmek kolaydır. Bu denklemler sırayla α^n ve β^n ile çarpılırsa,

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$$

ve

$$\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^n - \beta^n$$

ve böylece,

$$\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}$$

elde edilir.

$$H_n=\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}$$

olsun. Bu durumda, her $n\geq 1$ için $H_{n+2}=H_{n+1}+H_n$ olur. $\alpha+\beta=1$ ve $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ olduğu dikkate alınırsa, $H_1=1$ ve $H_2=\alpha+\beta=1$ elde edilir. Buradan da, $H_{n+2}=H_{n+1}+H_n$ olduğu dikkate alınırsa,

$$F_n=H_n=\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

elde edilir.

Önerme 1.1.4: F_n Fibonacci sayıları olsun.

$$F_{n+2}^2-F_n^2=F_{2n+2}$$

dir$[1]$.

İspat: $\alpha\beta=-1$ olduğu kullanılırsa,

$$F_{n+2}^2-F_n^2=\left(\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}\right)^2-\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)^2=\frac{\alpha^{2(n+2)}+\beta^{2(n+2)}-\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}$$

ve buradan,

$$\begin{aligned}\alpha^{2(n+2)}+\beta^{2(n+2)}-\alpha^{2n}-\beta^{2n}&=\alpha^{2(n+2)}+\beta^{2(n+2)}-(\alpha\beta)^2\alpha^{2n}-(\alpha\beta)^2\beta^{2n}\\&=\alpha^{2n+4}-\beta^2\alpha^{2n+2}-\alpha^2\beta^{2n+2}+\beta^{2n+4}\\&=\alpha^{2n+2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-\beta^{2n+2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)\\&=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}\right)\end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$F_{n+2}^2-F_n^2=\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}\right)}{(\alpha-\beta)^2}=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{\alpha-\beta}\right)=1\times F_{2n+2}=F_{2n+2}$$

elde edilir.

Önerme 1.1.5: F_n Fibonacci sayıları olsun.

$F_{2n}^2 = F_{2n+1}F_{2n-1} - 1$ dir[1].

İspat: $\alpha^2 + \beta^2 = 3$ ve $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
F_{2n+1}F_{2n-1} - 1 &= \left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{5}\left(\alpha^{4n} - \beta^{4n} - (\alpha\beta)^{2n-1}\alpha^2 - (\alpha\beta)^{2n-1}\beta^2 - 5\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(\alpha^{4n} - \beta^{4n} + \alpha^2 + \beta^2 - 5\right) = \frac{1}{5}\left(\alpha^{4n} - \beta^{4n} - 2\right) = \frac{1}{5}\left(\alpha^{4n} - \beta^{4n} - 2(\alpha\beta)^{2n}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\sqrt{5}}\right)^2 = F_{2n}^2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 1.1.4: $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ dir[1].

İspat: Tümevarım ile gösterelim.

$n = 1$ için $F_1 = F_3 - 1$, $F_1 = 1$ ve $F_3 = 2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ eşitliği doğru olsun. Buradan,

$\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} - 1$ bulunur.

Böylece $n+1$ içinde iddia doğru olduğundan ispat biter.

Teorem 1.1.5: $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$ dir[1].

İspat: Tümevarımla yapılacaktır.

$n = 1$ için $F_1 = F_2$ bulunur. Dolayısıyla iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$ olsun.

$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} + F_{2(n+1)-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$ olduğundan ispat biter.

Teorem 1.1.6: $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ dir[1].

İspat: $n=1$ için $F_2 = F_3 - 1$ dir. $F_2 = 1$ ve $F_3 = 2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k} + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 = F_{2n+3} - 1$$

olduğundan ispat biter.

Teorem 1.1.7: $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ dir$[1]$.

İspat: $n=1$ için $F_1^2 = F_1 F_2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ olsun. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) = F_{n+1} F_{n+2}$$

bulunur.

Teorem 1.1.8: Her $n \geq 2$ için $F_n^2 = F_{n+1} F_{n-1} + \left(-1\right)^{n-1}$ eşitliği doğrudur$[1]$.

İspat: İddianın $n=1$ için doğru olduğunu görmek kolaydır. Şimdi iddia n için doğru yani $F_n^2 = F_{n+1} F_{n-1} + (-1)^{n-1}$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 - F_{n+2} F_n = F_{n+1}^2 - \left(F_n + F_{n+1}\right) F_n &= F_{n+1}^2 - F_n F_{n+1} - F_n^2 \\ &= F_{n+1}^2 - F_n F_{n+1} - \left(F_{n+1} F_{n-1} + \left(-1\right)^n\right) \\ &= F_{n+1}^2 - F_n F_{n+1} - F_{n+1} F_{n-1} + \left(-1\right)^n \\ &= F_{n+1}\left(F_{n+1} - \left(F_n + F_{n-1}\right)\right) + \left(-1\right)^n \\ &= F_{n+1} \cdot 0 + \left(-1\right)^n \\ &= \left(-1\right)^n \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $F_{n+1}^2 = F_{n+2} F_n + (-1)^n$ olur. Bu ise iddianın $n+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Birinci tümevarım ilkesine göre iddia her $n \geq 2$ doğal sayısı için doğrudur.

Tanım 1.2: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ ve $n \geq 3$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ biçiminde tanımlanan tamsayılara Lucas Sayıları denir. Bu sayılar sırasıyla $1,3,4,7,11,18,29,47,...$ biçimindedir.

Teorem 1.1.9 (Binet Formülü): Her $n \geq 1$, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir$[1]$.

İspat: $K_n = \alpha^n + \beta^n$ olsun. Buradan,

$K_1 = \alpha + \beta = 1$ ve $K_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha + 1 + \beta + 1 = 3$ olur. Ayrıca $n \geq 3$ için $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} K_{n-1} + K_{n-2} &= \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} + \beta^{n-2} \\ &= \alpha^{n-2}(\alpha + 1) + \beta^{n-2}(\beta + 1) \\ &= \alpha^{n-2}\alpha^2 + \beta^{n-2}\beta^2 \\ &= \alpha^n + \beta^n \\ &= K_n \end{aligned}$$

elde edilir. $L_1 = 1 = K_1$ ve $L_2 = 3 = K_2$ olduğundan L_n ve K_n dizilerinin tanımı da dikkate alınırsa, her $n \geq 1$ için,

$$L_n = K_n = \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

elde edilir.

Önerme 1.1.6: Her $n \geq 2$ için $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ bağıntısı doğrudur$[1]$.

İspat: $1 + \alpha^2 = \sqrt{5}\alpha$ ve $1 + \beta^2 = -\sqrt{5}\beta$ olduğundan,

$$\begin{aligned}F_{n-1}+F_{n+1}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1}\left(1+\alpha^{2}\right)-\beta^{n-1}\left(1+\beta^{2}\right)\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1}\left(\sqrt{5}\alpha\right)-\beta^{n-1}\left(-\sqrt{5}\beta\right)\right)\\&=\alpha^{n}+\beta^{n}\\&=L_{n}\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.1.10: Aşağıdakiler doğrudur.

a) $2F_{m+n}=F_mL_n+F_nL_m$

b) $L_n^2-5F_n^2=4(-1)^n$

c) $n\geq 2$ ise $L_n^2-L_{n-1}L_{n+1}=5(-1)^n$

d) F_n ile L_n aynı anda çift tamsayıdır veya aynı anda tek tamsayıdır. Ayrıca n tek ise $(F_n,L_n)=1$ ve n çift ise $(F_n,L_n)=2$

e) $5F_jF_{n+1-j}=L_{n+1}-(-1)^jL_{n+1-2j}$ dir[1].

Teorem 1.1.11: $F_{2n}=F_nL_n$ dir[1].

İspat: $F_nL_n=\left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^n+\beta^n\right)=\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}=F_{2n}$

bulunur.

Teorem 1.1.12: $n\geq 2$ için $L_{n+1}+L_{n-1}=5F_n$ dir[1].

İspat: $L_{n+1}+L_{n-1}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}=\alpha^{n-1}\left(\alpha^2+1\right)+\beta^{n-1}\left(\beta^2+1\right)$ dir.

Buradan, $\alpha^2+1=\alpha\sqrt{5}$ ve $\beta^2+1=-\beta\sqrt{5}$ olduğu kullanılırsa,

$$L_{n+1}+L_{n-1}=\alpha^{n-1}\alpha\sqrt{5}-\beta^{n-1}\beta\sqrt{5}=\sqrt{5}\left(\alpha^n-\beta^n\right)=\frac{5\left(\alpha^n-\beta^n\right)}{\sqrt{5}}=5F_n$$

bulunur.

BÖLÜM 2. FIBONACCI VE LUCAS SERİLERİ

Aşağıdaki bazı teoremlerde şu toplam formülleri kullanılacaktır. Bu formüllerin ispatı birinci tümevarım ilkesiyle yapılır.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+1}\right) = a_1 - a_{n+1} \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+2}\right) = \left(a_1 + a_2\right) - \left(a_{n+1} + a_{n+2}\right) \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+3}\right) = \left(a_1 + a_2 + a_3\right) - \left(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}\right) \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k+4}\right) = \left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right) - \left(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}\right) \tag{2.4}$$

Teorem 2.1.1: (a_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin.

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

olsun. Eğer,

1) $|r| < 1$ ise seri yakınsaktır.

2) $|r| > 1$ ise seri ıraksaktır.

3) $|r| = 1$ ise serinin karakteri hakkında bir şey söylenemez $[4]$.

Teorem 2.1.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi verilsin. Bu takdirde,

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ise kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı r dir. Eğer

1) $|x| < r$ ise seri yakınsaktır.

2) $|x| > r$ ise seri ıraksaktır.

3) $|x| = r$ ise seri yakınsak veya ıraksak olabilir$[4]$.

Teorem 2.1.3: F_n ve L_n Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. O zaman,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} F_{2n+2}}{L_n^2 L_{n+2}^2} = \frac{8}{45}$$

dir$[7]$.

İspat: $(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(F_n L_{n+2} - F_{n+2} L_n)$ ve $m = 2n+2$ için Teorem 1.1.10'dan $L_n F_{n+2} + L_{n+2} F_n = 2F_{2n+2}$ dır. Buradan,

$$\frac{(-1)^{n-1} F_{2n+2}}{L_n^2 L_{n+2}^2} = \frac{(-1)^{n-1} \frac{1}{2}(L_n F_{n+2} + L_{n+2} F_n)}{L_n^2 L_{n+2}^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(F_n L_{n+2} - F_{n+2} L_n)\frac{1}{2}(L_n F_{n+2} + L_{n+2} F_n)}{L_n^2 L_{n+2}^2}$$

$$= \frac{F_n^2 L_{n+2}^2 - F_{n+2}^2 L_n^2}{4 L_n^2 L_{n+2}^2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{F_n}{L_n}\right)^2 - \left(\frac{F_{n+2}}{L_{n+2}}\right)^2\right]$$

elde edilir. Şimdi, bu serinin kısmi toplamlar dizisini yazalım. Yani,

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} F_{2k+2}}{L_k^2 L_{k+2}^2}$ olsun. Buradan,

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{F_k}{L_k}\right)^2 - \left(\frac{F_{k+2}}{L_{k+2}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2})$$

olur. Burada $a_k = \frac{F_k^2}{L_k^2}$, $a_{k+2} = \frac{F_{k+2}^2}{L_{k+2}^2}$ dir. (2.2) kullanılırsa,

$$S_n = \frac{1}{4}\left[(a_1 + a_2) - (a_{n+1} + a_{n+2})\right]$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$S_n = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{F_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{L_2}\right)^2 - \left(\frac{F_{n+1}}{L_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{F_{n+2}}{L_{n+2}}\right)^2\right]$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{F_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{L_2}\right)^2 - \left(\frac{F_{n+1}}{L_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{F_{n+2}}{L_{n+2}}\right)^2\right]$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{F_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n+\beta^n}{\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^n-\beta^n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\left(\frac{1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}\right)\\ &= \sqrt{5}\left(\frac{1+0}{1-0}\right)\end{aligned}$$

dır. Böylece,

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$ olduğuna dikkat etmek gerekir.

Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{9}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right] = \frac{8}{45}$$

olur.

Lemma 2.1.1: F_n Fibonacci sayısı olsun. O zaman herhangi pozitif n ve k tamsayıları için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1$$

dir.

İspat: İspat Binet formülü ile yapılır $[1]$.

Teorem 2.1.4: F_n bir Fibonacci sayısı olsun. O zaman herhangi pozitif n ve k tamsayıları için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{F_k}{F_nF_{n+k}}-\frac{F_{k+2}}{F_nF_{n+k+2}}\right)=(-1)^k\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{F_mF_{m+2}}-1\right)$$

dir $[7]$.

İspat: Önerme 1.1.1'de verilen $F_{n+k}=F_kF_{n+1}+F_{k-1}F_n$ ifadesinde k yerine $k+2$ yazalım. Dolayısıyla,

$$F_{n+k+2}=F_{k+2}F_{n+1}+F_{k+1}F_n$$

olur. Buradan, Önerme 1.1.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{F_k}{F_nF_{n+k}}-\frac{F_{k+2}}{F_nF_{n+k+2}}&=\frac{F_kF_{n+k+2}-F_{k+2}F_{n+k}}{F_nF_{n+k}F_{n+k+2}}\\&=\frac{F_k\left(F_{k+2}F_{n+1}+F_{k+1}F_n\right)-F_{k+2}\left(F_kF_{n+1}+F_{k-1}F_n\right)}{F_nF_{n+k}F_{n+k+2}}\\&=\frac{F_kF_{k+1}F_n-F_{k+2}F_{k-1}F_n}{F_nF_{n+k}F_{n+k+2}}\\&=\frac{-F_n\left(F_{k+2}F_{k-1}-F_kF_{k+1}\right)}{F_nF_{n+k}F_{n+k+2}}\\&=\frac{-\left(F_{k+2}F_{k-1}-F_{k+1}F_k\right)}{F_{n+k}F_{n+k+2}}\\&=\frac{(-1)^{k+1}}{F_{n+k}F_{n+k+2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{F_k}{F_nF_{n+k}}-\frac{F_{k+2}}{F_nF_{n+k+2}}\right]=(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{n+k}F_{n+k+2}}$$

ifadesine eşittir. Diğer taraftan $m=n+k$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{n+k}F_{n+k+2}}&=\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{F_mF_{m+2}}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{F_mF_{m+2}}-\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{F_mF_{m+2}}\\&=1-\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{F_mF_{m+2}}\end{aligned}$$

olur. Buradan da, $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{F_mF_{m+2}}=1$ olduğu için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{F_k}{F_nF_{n+k}}-\frac{F_{k+2}}{F_nF_{n+k+2}}\right]=(-1)^{k+1}\left(1-\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{F_mF_{m+2}}\right)$$
$$=(-1)^{k}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{F_mF_{m+2}}-1\right)$$

bulunur.

Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+k}}$, $k\geq 0$ serilerinin k ya bağlı ardışık bağıntısını tanımlamak için Teorem 2.1.2'yi kullanalım.

Eğer k çift sayı yani $k=2r$ ise, seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2r}}$ biçiminde olur. Burada $r\geq 1$ olan herhangi bir tamsayıdır.

$T_r=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2r}}$,$r\geq 1$ olsun. Bu durumda Lemma 2.1.1'den dolayı,

$$T_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}=1$$

$$T_{r+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2r+2}}$$

dir. Ayrıca $A_0=0$ ve $A_r=\sum_{m=1}^{2r}\frac{1}{F_mF_{m+2}}$, $r\geq 1$ olsun. Bu durumda,

$$A_r=A_{r-1}+\frac{1}{F_{2r-1}F_{2r+1}}+\frac{1}{F_{2r}F_{2r+2}},r\geq 1$$

olduğunu görmek kolaydır.

Bu tanımlamalarla beraber, Teorem 2.1.2 ile aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$A_r-A_{r-1}=\frac{1}{F_{2r-1}F_{2r+1}}+\frac{1}{F_{2r}F_{2r+2}}$$
$$=\frac{1}{F_1F_3}+\frac{1}{F_2F_4}+\ldots+\frac{1}{F_{2r}F_{2r+2}}-\frac{1}{F_1F_3}-\frac{1}{F_2F_4}-\frac{1}{F_{r-1}F_{r+1}}$$

dir. Buradan,

$$F_{2r}T_r-F_{2(r+1)}T_{r+1}=(-1)^{2r}\left(A_r-1\right)$$

veya

$$F_{2r}T_r-F_{2(r+1)}T_{r+1}=A_r-1$$

elde edilir.

Şimdi yukarıdaki eşitlikleri birleştirelim.

$$
\begin{aligned}
&T_{r+1}=\left(\frac{F_{2r}}{F_{2(r+1)}}\right)T_r+\frac{1}{F_{2(r+1)}}\left(1-A_r\right),\ r\geq 1,\\
&T_1=1, A_0=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.5)\\
&A_r=A_{r-1}+\frac{1}{F_{2r-1}F_{2r+1}}+\frac{1}{F_{2r}F_{2r+2}}
\end{aligned}
$$

dir. Şimdi T_r 'nin bazı değerleri için yukarıdaki formülleri kullanalım.

Örneğin $r=1$ için,

$$
\begin{aligned}
A_1&=A_0+\frac{1}{F_1F_3}+\frac{1}{F_2F_4}=\frac{5}{6},\\
T_2&=\left(\frac{F_2}{F_4}\right)T_1+\frac{1}{F_4}\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{7}{18},
\end{aligned}
$$

yani

$$T_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+4}}=\frac{7}{18}$$

dir.

$r=2$ için,

$$
\begin{aligned}
A_2&=A_1+\frac{1}{F_3F_5}+\frac{1}{F_4F_6}=\frac{5}{6}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 8}=\frac{39}{40},\\
T_3&=\left(\frac{F_4}{F_6}\right)T_2+\frac{1}{F_6}\left(1-A_2\right)=\frac{3}{8}\frac{7}{18}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{39}{40}\right)=\frac{143}{960},
\end{aligned}
$$

yani

$$T_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+6}}=\frac{143}{960}$$

dır. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2r}}$ biçimindeki her serinin değerini kesinlikle hesaplayabiliriz.

Eğer k tek sayı yani $k=2r-1$ ise seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2r-1}}$ biçiminde olur. Burada $r\geq 1$ olan herhangi bir tamsayıdır.

$P_r=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2r-1}}$ olsun. Bu durumda,

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+1}} \text{ ve } P_{r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2r+1}}$$

olur. Ayrıca,

$B_r = \sum_{m=1}^{2r-1} \frac{1}{F_m F_{m+2}}, r \geq 1$ olsun. Bu durumda,

$$B_1 = \frac{1}{F_1 F_3} = \frac{1}{2} \text{ ve } B_{r+1} = B_r + \frac{1}{F_{2r} F_{2r+2}} + \frac{1}{F_{2r+1} F_{2r+3}}$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu tanımlamalarla beraber Teorem 2.1.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B_{r+1} - B_r &= \sum_{m=1}^{2r+1} \frac{1}{F_m F_{m+2}} - \sum_{m=1}^{2r-1} \frac{1}{F_m F_{m+2}} \\
&= \frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_2 F_4} + \ldots + \frac{1}{F_{2r} F_{2r+2}} + \frac{1}{F_{2r+1} F_{2r+3}} - \frac{1}{F_1 F_3} - \frac{1}{F_2 F_4} - \ldots - \frac{1}{F_{2r-1} F_{2r+1}} \\
&= \frac{1}{F_{2r} F_{2r+2}} + \frac{1}{F_{2r+1} F_{2r+3}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
F_{2r-1} P_r - F_{2r+1} P_{r+1} &= (-1)^{2r-1} (B_r - 1), \\
F_{2r-1} P_r - F_{2r+1} P_{r+1} &= -(B_r - 1)
\end{aligned}$$

olur. Yine bulduğumuz bu ifadeleri bir araya getirelim.

$$\begin{aligned}
P_{r+1} &= \left(\frac{F_{2r-1}}{F_{2r+1}} \right) P_r + \frac{1}{F_{2r+1}} (B_r - 1), r \geq 1 \\
B_1 &= \frac{1}{2}, P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+1}} \\
B_{r+1} &= B_r + \frac{1}{F_{2r} F_{2r+2}} + \frac{1}{F_{2r+1} F_{2r+3}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

dir. Şimdi bu formüllere göre bazı değerler hesaplayalım.

$r = 1$ için,

$$P_2 = \frac{F_1}{F_3} P_1 + \frac{1}{F_3} (B_1 - 1) = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} P_1 - \frac{1}{4}$$

dir. Yani,

$$P_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+3}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+1}} - \frac{1}{4}$$

dir.

$r = 2$ için,

$$B_2 = B_1 + \frac{1}{F_2F_4} + \frac{1}{F_3F_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{14}{15},$$

$$P_3 = \left(\frac{F_3}{F_5}\right)P_2 + \frac{1}{F_5}\left(B_2 - 1\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{14}{15} - 1\right) = \frac{1}{5}P_1 - \frac{17}{150}$$

olur. Yani,

$$P_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_nF_{n+5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_nF_{n+1}} = \frac{17}{50}$$

dir.

2.2. İkinci Dereceden Alterne Seriler:

Tanım 2.2.1: k herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_nF_{n+k}}$$

biçimindeki serilere ikinci dereceden alterne seriler denir.

Teorem 2.2.1: F_n bir Fibonacci sayısı olsun. O zaman herhangi pozitif k tamsayısı için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_nF_{n+k}} = \frac{1}{F_k}\left(\sum_{m=1}^{k} \frac{F_{m-1}}{F_m} - \frac{k}{\alpha}\right)$$

dir. Burada $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir$[7]$.

İspat: Önerme 1.1.2'ye göre,

$$\frac{(-1)^n F_k}{F_nF_{n+k}} = \frac{F_{n-1}F_{n+k} - F_nF_{n+k-1}}{F_nF_{n+k}} = \frac{F_{n-1}}{F_n} - \frac{F_{n+k-1}}{F_{n+k}}$$

dır. Şimdi serinin kısmi toplamını yazalım.

$S_n = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m F_k}{F_mF_{m+k}}$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{F_{m-1}}{F_m}-\frac{F_{m+k-1}}{F_{m+k}}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{n}\frac{F_{m-1}}{F_m}-\sum_{m=1}^{n}\frac{F_{m+k-1}}{F_{m+k}}\\
&= \left(\frac{F_0}{F_1}+\ldots+\frac{F_{k-1}}{F_k}+\ldots+\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)-\left(\frac{F_k}{F_{k+1}}+\ldots+\frac{F_{n-1}}{F_n}+\frac{F_n}{F_{n+1}}+\ldots+\frac{F_{n+k-1}}{F_{n+k}}\right)\\
&= \left(\frac{F_0}{F_1}+\ldots+\frac{F_{k-1}}{F_k}\right)-\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}+\ldots+\frac{F_{n+k-1}}{F_{n+k}}\right)
\end{aligned}$$

olur. Birinci parantezin son kısmı ile ikinci parantezin ilk kısmının sadeleştiğine dikkat ediniz.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+k}}{F_n}=\alpha^k$ olduğu dikkate alınarak limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}=\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+k-1}}{F_{n+k}}=\frac{1}{\alpha}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{F_0}{F_1}+\ldots+\frac{F_{k-1}}{F_k}\right]-\left[\frac{F_n}{F_{n+1}}+\ldots+\frac{F_{n+k-1}}{F_{n+k}}\right]\right)\\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{k}\frac{F_{m-1}}{F_m}\right)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\ldots+\frac{1}{\alpha}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{k}\frac{F_{m-1}}{F_m}-\frac{k}{\alpha}
\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n F_k}{F_nF_{n+k}}=\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{F_{m-1}}{F_m}\right)-\frac{k}{\alpha}$$

ya da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+k}}=\frac{1}{F_k}\left[\sum_{m=1}^{k}\frac{F_{m-1}}{F_m}-\frac{k}{\alpha}\right]$$

elde edilir.

2.3. Üçüncü Dereceden Seriler:

Tanım 2.3.1: a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+a} F_{n+b}}$$

biçimindeki serilere üçüncü dereceden seriler denir.

Bu kısımda üçüncü dereceden serilerin bazı özel durumlarını inceleceğiz.

Teorem 2.3.1: F_n bir Fibonacci sayısı olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2} F_{n+3}} = \frac{1}{4}$$

dir $[1]$.

İspat: $2F_{n+1} = F_{n+3} - F_n$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n F_{n+2} F_{n+3}} &= \frac{2F_{n+1}}{2F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}} \\
&= \frac{F_{n+3} - F_n}{2F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_n F_{n+1} F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}} \right)
\end{aligned}$$

olur. (S_n) serinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k F_{k+2} F_{k+3}}$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{F_k F_{k+1} F_{k+2}} - \frac{1}{F_{k+1} F_{k+2} F_{k+3}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})
\end{aligned}$$

dir. Burada $a_k = \dfrac{1}{F_k F_{k+1} F_{k+2}}$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}(a_1 - a_{n+1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_1 F_2 F_3} - \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}} \right)
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \frac{1}{F_1 F_2 F_3} = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Teorem 2.3.2: F_n bir Fibonacci sayısı olsun. O zaman,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}F_{n+4}}=\frac{7}{18}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

dir $[1]$.

İspat: Önerme 1.1.1'den dolayı

$$F_{n+3}=F_3F_{n+1}+F_2F_n$$

ve

$$F_{n+4}=F_4F_{n+1}+F_3F_n$$

olduğunu biliyoruz. O zaman,

$$\begin{aligned}\frac{F_3}{F_nF_{n+2}F_{n+3}}-\frac{F_4}{F_nF_{n+2}F_{n+4}}&=\frac{F_3F_{n+4}-F_4F_{n+3}}{F_nF_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}\\&=\frac{F_3\left(F_4F_{n+1}+F_3F_n\right)-F_4\left(F_3F_{n+1}+F_2F_n\right)}{F_nF_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}\\&=\frac{\left(F_3^2-F_4F_2\right)F_n}{F_nF_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}\\&=\frac{F_3^2-F_4F_2}{F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}\\&=\frac{2^2-3-1}{F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}\\&=\frac{1}{F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_3}{F_nF_{n+2}F_{n+3}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_4}{F_nF_{n+2}F_{n+4}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $k=n+2$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}&=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{F_kF_{k+1}F_{k+2}}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{F_kF_{k+1}F_{k+2}}-\frac{1}{F_1F_2F_3}-\frac{1}{F_2F_3F_4}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{F_kF_{k+1}F_{k+2}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_3}{F_nF_{n+2}F_{n+3}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_4}{F_nF_{n+2}F_{n+4}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}-\frac{2}{3}$$

dir. Böylece, Teorem 2.3.1 kullanılarak Teorem 2.3.2'ye ulaşılır.

2.4. Fibonacci ve Lucas Serileri:

Bu kısımda, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{F_n}{10^{n+1}}\right)=\frac{1}{F_{11}}$ olduğu gösterilecektir. Bu ifadenin doğruluğunu görebilmek için, öncelikle bazı Fibonacci serilerinin yakınsaklığını incelemeliyiz.

k pozitif tamsayı olmak üzere,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{k^{n+1}},k\geq 2$$

olsun. Bu serinin yakınsak olduğunu farzedelim. O zaman Teorem 1.1.3'den $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},n=1,2,3,...,$ olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{k^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{1}{k^{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}k}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2k}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2k}\right)^n\right]$$

olur. Bu seri bir geometrik seri olduğundan,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{k^{n+1}}&=\frac{1}{\sqrt{5}k}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2k}\right)}-\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2k}\right)}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}k}\frac{2k}{2k-1-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}k}\frac{2k}{2k-1+\sqrt{5}}\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2k-1-\sqrt{5}}-\frac{1}{2k-1+\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$S=\frac{1}{k^2-k-1}$ elde edilir. Eğer $k^2-k-1=F_t$, yani $k(k-1)=1+F_t$ ise

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{F_i}{k^{i+1}}=\frac{1}{F_t}$ olur. Örneğin,

$k=2$ ise $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F_i}{2^{i+1}}=1=\frac{1}{F_1}$,

$k=3$ ise $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F_i}{3^{i+1}}=\frac{1}{5}=\frac{1}{F_5}$,

$k=8$ ise $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F_i}{8^{i+1}}=\frac{1}{55}=\frac{1}{F_{10}}$,

$k=10$ ise $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F_i}{10^{i+1}}=\frac{1}{89}=\frac{1}{F_{11}}$

dir.

Teorem 2.4.1: a,b,c ve d tamsayılar olsun.

$U_{n+2}=aU_{n+1}+bU_n$ alalım. Buradan,

$$U_0=c, U_1=d \text{ ve } n\geq 2$$

dir. m ve N tamsayıları için,

$B^2=m+aB+b$ ve $N=cm+db+bc$ olsun. O zaman tüm $n\geq 0$ tamsayıları için,

$$B^nN=m\sum_{i=1}^{n+1}B^{n-i+1}U_{i-1}+BU_{n+1}+bU_n$$

dir[1].

Teorem 2.4.2: a,b,c,d,m,B ve N Teorem 2.4.1'deki gibi tamsayılar olsun. Ayrıca,

$r=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ ve $S=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$ diyelim. Burada $|r|<|B|$ ve $|s|<|B|$ dir. O zaman,

$$\frac{N}{mB}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_{n-1}}{B^n}$$

dir[1].

Sonuç 2.4.1: $a=b=d=1$ ve $c=0$ için, $U_n=F_n$ olur.

1) Eğer $B=10^h$ ise $\frac{1}{10^{2h}-10^h-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n-1}}{10^{nh}}$

2) Eğer $B=(-10)^h$ ise $\frac{1}{10^{2h}-(-10)^h-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n-1}}{(-10)^{nh}}$ dir[1].

İspat: Eğer $B=10^h$ ise

$$m = 10^{2h} - 10^h - 1 \qquad \left(B^2 = m + aB + b, 10^{2h} = m + 1 \times 10^h + 1\right)$$

ve

$$N = 10^h \qquad \left(N = cm + db + bc, N = 0 + 10^h + 0\right)$$

dir. Eğer $B = (-10)^h$ ise benzer şekilde,

$$m = 10^{2h} - (-10)^h - 1 \text{ ve } N = (-10)^h$$

dir. Formüllerle birlikte şimdi aşağıdaki açılımlara bakalım.

$$\frac{1}{89} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{10^n} = 0,0112359350557...,$$

$$\frac{1}{9899} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{10^{2n}} = 0,000101020305081321...,$$

$$\frac{1}{989999} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{10^{3n}} = 0,000001001002003005008013...,$$

$$\frac{1}{109} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{(-10)^n}$$

ve

$$\frac{1}{10099} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{(-100)^n}$$

dır. Şimdi Fibonacci kuvvet serilerinin yakınsaklığını inceleyelim.

$T = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ olsun. Burada, yakınsaklık yarıçapı $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\alpha}$ ve

$$\begin{aligned} T &= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n \\ &= x + x^2 + x\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\ &= x + x^2 + x(T - x) + x^2 T \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$T = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

dir. Şimdi T 'yi basit kesirlere ayıralım.

$$T = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{A}{(1-\alpha x)} + \frac{B}{(1-\beta x)} = \frac{A + B - (\alpha B + \beta A)x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

dir. Buradan,

$$A+B=0,\quad B=-A,$$
$$\alpha B+\beta A=-1$$
$$-\alpha A+\beta A=-1$$
$$A(\beta-\alpha)=-1$$
$$A\left(-\sqrt{5}\right)=-1$$
$$A=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}T&=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}x^n\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right)\end{aligned}$$

olarak da yazılabilir.

Teorem 2.4.3: $k\geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}\right)^n=F_{2k}F_{2k+1}$$

dir[1].

Şimdi de Lucas kuvvet serisi ile ilgili benzer bir inceleme yapalım.

$T=\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r olsun. Buradan,

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{\beta^n}{\alpha^{n+1}}}{1+\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\alpha}=-\beta$$

olur.

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$ dir. Çünkü $-\beta=|\beta|=-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\alpha=|\alpha|$

dir. Şu halde $(-r,r)=(\beta,-\beta)$ dir.

$|x|=-\beta$, yani $x=-\beta$ veya $x=\beta$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n$ serisi yakınsak değildir.

$|x|<-\beta$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n \neq 0$ dir. O zaman,

$$
\begin{aligned}
T &= L_0 + L_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(L_{n-1}+L_{n-2}\right)x^n \\
&= 2 + x + x\sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n \\
\left(1-x-x^2\right)T &= 2-x \\
T &= \frac{2-x}{1-x-x^2}
\end{aligned}
$$

dir. $\left(1-x-x^2\right)=\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)$ olduğu kullanılarak, T'yi basit kesirlerine ayıralım. Bu durumda, A ve B sabitler olmak üzere, $T=\dfrac{A}{1-\alpha x}+\dfrac{B}{1-\beta x}$ biçiminde yazılabilir,

$$A\left(1-\beta x\right)+B\left(1-\alpha x\right)=2-x$$

eşitliği düzenlenerek,

$$A=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ve } B=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bulunur. Şimdi T'yi düzenlersek,

$$T=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha x\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\beta x\right)^n$$

elde edilir. Örneğin,

$$x=\frac{1}{3} \text{ ise } T=\frac{2-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=3=3\times 1,$$

$$x=\frac{4}{7} \text{ ise } T=\frac{2-\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}-\left(\frac{4}{7}\right)^2}=14=7\times 2,$$

$$x=\frac{11}{18} \text{ ise } T=\frac{2-\frac{11}{18}}{1-\frac{11}{18}-\left(\frac{11}{18}\right)^2}=90=18\times 5$$

şeklindedir.

Lemma 2.4.1: $n\geq 2$ ise

$$L_n+L_{n-2}=5F_{n-1}$$

dir $[1]$.

İspat: $n\geq 1$ ise $L_{n+1}+L_{n-1}=5F_n$ olduğundan,

$$\begin{aligned}L_n+L_{n-2}&=F_{n+1}+F_{n-1}+F_{n-1}+F_{n-3}\\&=F_n+F_{n-1}+F_{n-1}+F_{n-1}+F_{n-3}\\&=3F_{n-1}+F_n+F_{n-3}\\&=3F_{n-1}+F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}\\&=3F_{n-1}+F_{n-1}+F_{n-1}\\&=5F_{n-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.2: $n\geq 2$ olmak üzere, $L_n+L_{n-2}\equiv 0\pmod 5$ dır $[1]$.

Örneğin;

$$\begin{aligned}&L_{19}+L_{17}=9349+3571=12\cdot 920\equiv 0 \pmod 5,\\&L_{26}+L_{24}\equiv 0 \pmod 5\end{aligned}$$

dır.

Lemma 2.4.2: $k\geq 1$ olsun. O zaman

$$L_{2k}^2-L_{2k}L_{2k-1}-L_{2k-1}^2=5$$

dir $[1]$.

İspat: $L_n^2-L_nL_{n-1}-L_{n-1}^2=5(-1)^n$ özdeşliği kullanıldığında ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.4: k bir pozitif tamsayı olsun. O zaman,

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(\frac{L_{2k-1}}{L_{2k}}\right)^n=L_{2k}L_{2k-1}$$

dir $[1]$.

İspat: İlk olarak $\beta < \frac{L_{2k-1}}{L_{2k}} < -\beta$ olduğunu gösterelim. Teorem 1.1.3'den,

$$\frac{L_{2k-1}}{L_{2k}} = \frac{\alpha^{2k-1}+\beta^{2k-1}}{\alpha^{2k}+\beta^{2k}} < \frac{\alpha^{2k-1}+\beta^{2k-1}}{\alpha^{2k}} < \frac{\alpha^{2k-1}}{\alpha^{2k}} = \frac{1}{\alpha} = -\beta$$

olur. Böylece,

$$0 < \frac{L_{2k-1}}{L_{2k}} < -\beta,$$
$$-\beta < \frac{L_{2k-1}}{L_{2k}} < \beta$$

elde edilir.

$x = \frac{L_{2k-1}}{L_{2k}} \in (\beta, -\beta)$ ve $T = \frac{2-x}{1-x-x^2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{L_{2k-1}}{L_{2k}}\right)^n &= \frac{2-\frac{L_{2k-1}}{L_{2k}}}{1-\frac{L_{2k-1}}{L_{2k}}-\left(\frac{L_{2k-1}}{L_{2k}}\right)^2} \\
&= \frac{L_{2k}\left(2L_{2k}-L_{2k-1}\right)}{L_{2k}^2 - L_{2k}L_{2k-1} - L_{2k-1}^2} \\
&= \frac{L_{2k}\left(2L_{2k}-L_{2k-1}\right)}{(-1)^2 5} \\
&= \frac{L_{2k}\left(2L_{2k}-L_{2k-1}\right)}{5} \\
&= \frac{L_{2k}+\left(L_{2k}-L_{2k-1}\right)}{5} \\
&= \frac{L_{2k}+L_{2k-1}}{5} \\
&= \frac{L_{2k}\left(5F_{2k-1}\right)}{5} \\
&= L_{2k}F_{2k-1}
\end{aligned}$$

olur. Örneğin, $k=5$ olsun. O zaman,

$$x = \frac{L_9}{L_{10}} = \frac{76}{123},$$

$$F_9 = 34$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{76}{123}\right)^n = 123 \times 34 = 4182$$

dir.

$x = \frac{L_{2k-1}}{L_{2k}}$ ise Fibonacci kuvvet serileri sonlu toplam için yakınsaktır ve tamsayı değildir.

$L_{2k}L_{2k-1} \not\equiv 0 \pmod 5$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \left(\frac{L_{2k-1}}{L_{2k}}\right)^n = \frac{L_{2k}L_{2k-1}}{5}$$

dir. Şimdi $L_{2k}L_{2k-1} \not\equiv 0 \pmod 5$ ifadesinin doğruluğunu gösterelim. Bunun için $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ özdeşliğini kullanalım. Bu durumda $5 \nmid L_n$ dir. Aksini kabul edelim.

$5 \mid L_n$ olsun. Bu durumda $L_n = 5k, k \in Z$ olur. $L_n = 5k$ ise $L_n^2 = 25k^2$ dir. Yani $5 \mid L_n^2$ dir. Aynı zamanda $5 \mid F_n^2$ dir. İki sayı 5 e tam bölünürse farkı da 5 e tam bölünür. Dolayısıyla $L_n^2 - 5F_n^2$ ifadesi 5 e tam bölünür. Fakat $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ olduğundan, bu bir çelişkidir. Bu durumda $5 \nmid L_n$ elde edilir. Dolayısıyla $5 \nmid L_{2k}$ ve $5 \nmid L_{2k-1}$ dir. Şu halde,

$$5 \nmid L_{2k}L_{2k-1}$$

yani

$$L_{2k}L_{2-1} \not\equiv 0 \pmod 5$$

olur. Örneğin,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \left(\frac{L_9}{L_{10}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \left(\frac{76}{123}\right)^n = \frac{123 \times 76}{5} = 1869,6$$

dır.

Teorem 2.4.5: k bir pozitif tamsayı olsun. O zaman,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}\right)^n = L_{2k}F_{2k+1}$$

dir $[1]$.

İspat: Teorem 2.4.4 ifadesinin ispatındaki gibi, $\beta < \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} < -\beta$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece, $T = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n$ Lucas serileri $k \geq 0$ olmak üzere $x = \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}$ için yakınsaktır. O zaman,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} \right)^n = \frac{2 - \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}}{1 - \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} - \left(\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} \right)^2} = \frac{F_{2k+1}\left(2F_{2k+1} - F_{2k}\right)}{F_{2k+1}^2 - F_{2k}F_{2k+1} - F_{2k}^2}$$
$$= \frac{F_{2k+1}\left(F_{2k+1} + F_{2k-1}\right)}{1} = F_{2k+1}L_{2k}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+1}^2 F_{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}^2 F_{n+3}} = \frac{1}{2}$$

dir $[1]$.

Çözüm: Kolaylık olması için, $a = F_n$, $b = F_{n+1}$, $c = F_{n+2}$ ve $d = F_{n+3}$ alalım. Eşitliğin sol tarafını kısmi toplamlar olarak yazalım. $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1}\right) = a_n - a_0$ olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1}\right) = \frac{1}{F_1 F_2^2 F_3} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = 1$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = 2$ dir.

Şimdi de $\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n-1}$ kuvvet serisinde $x = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2$ dir. Bu kuvvet serisinin başka bir şekli,

$$\frac{1+2x}{\left(1-x-x^2\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n-1\right) F_n x^{n-2}$$

dir. Yine $x = \frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$8=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nF_n}{2^n}-2$$

yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nF_n}{2^n}=10$$

elde edilir.

Örnek 2.4.2:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}=4-\alpha=3+\beta$$

dir $[1]$.

Çözüm: Birinci tümevarım ilkesine göre ispat yapalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}=3-\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}$$

dir. $n=1$ için ifade doğrudur. Denklem tüm n değerleri için doğru olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{F_{2^i}}&=3-\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}+\frac{1}{F_{2^{n+1}}}\\&=3-\frac{L_{2^n}F_{2^n-1}}{L_{2^n}F_{2^n}}+\frac{1}{F_{2^{n+1}}}\\&=3-\frac{L_{2^n}F_{2^n-1}-1}{F_{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

elde edilir. $m=2^n$ ve $k=2^n-1$ alınır ve $F_{2^{n+1}-1}+F_{-1}=L_{2^n}F_{2^{n-1}}$ olduğu kullanılırsa, $L_{2^n}F_{2^n-1}-1=F_{2^{n+1}-1}$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{F_{2^i}}=3-\frac{F_{2^{n+1}-1}}{F_{2^{n+1}}}$$

elde edilir. Böylece birinci tümevarım ilkesine göre her $n\geq 1$ için $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^i}}=3-\frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}$ olur. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{F_{2^i}}=3-\lim_{n\to\infty}\frac{F_{2^{n+1}-1}}{F_{2^{n+1}}}$$

olup

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^i}} = 3-(-\beta) = 3+\beta = 4-\alpha$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 2.4.3:

$$\frac{x(1-x)}{1-2x-2x^2+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n$$

dir.

Çözüm: Binet Formülü'ne göre,

$$F_n^2 = \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}\right) = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n}-2(-1)^n+\beta^{2n}\right)$$

dir. Kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapı formülünden,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha^2} = \beta^2 \text{ ve } R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}^2}{F_n^2} = \alpha^2$$

dir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^{2n}-2(-1)^n+\beta^{2n}\right)x^n = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^2 x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\beta^2 x)^n\right)$$

dir. Geometrik seri açılımından,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\alpha^2 x} - 2\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-\beta^2 x}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\alpha^2 x} + \frac{1}{1-\beta^2 x} - \frac{2}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1-\beta^2 x + 1 - \alpha^2 x}{(1-\alpha^2 x)(1-\beta^2 x)} - \frac{2}{1+x}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|\alpha^2 x| < 1$ ve $|\beta^2 x| < 1$ dir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\frac{1}{5}\left(\frac{2-x\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{1-\beta^2 x-\alpha^2 x+\alpha^2\beta^2 x^2}-\frac{2}{1+x}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{2-3x}{x^2-3x+1}-\frac{2}{1+x}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{(2-3x)(1+x)2\left(x^2-3x+1\right)}{\left(x^2-3x+1\right)(1+x)}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{2+2x-3x-3x^2-2x^2+6x-2}{x^2+x^3-3x-3x^2+1+x}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{-5x^2+5x}{x^3-2x^2-2x+1}\right)$$

$$=\frac{x(x+1)}{x^3-2x^2-2x+1}$$

eşitliği elde edilir. Yani ifade doğrudur.

BÖLÜM 3. FIBONACCI VE LUCAS TOPLAMLARI

Bu bölümde $[3]$ de verilen

$$x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(F_1 x^{n-2} + F_2 x^{n-3} + \ldots + F_{n-2}x + F_{n-1}\right) + F_n x + F_{n-1} \tag{3.1}$$

özdeşliği ele alınarak, daha önce $[1]$ ve $[2]$ de bulunan $\sum_{i=1}^{n} F_i$, $\sum_{i=1}^{n} iF_i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 F_i$ formüllerine benzer formüller elde edilmektedir. Ayrıca (3.1) özdeşliğinde verilen polinomun birinci ve ikinci mertebeden türevi kullanılarak farklı formüller elde edilmektedir. Bunlara ek olarak, burada

$$2x^{n+1} - x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^{n-1-j}\right) + L_n x + L_{n-1} \tag{3.2}$$

özdeşliği ele alınarak bu özdeşliğin birinci ve ikinci mertebeden türevi kullanılarak farklı formüller elde edilmektedir.

İlk olarak (3.1) özdeşliğinde verilen polinomun birinci mertebeden türevi alınarak elde edilen özdeşlikler aşağıdaki teoremlerle verilsin.

Teorem 3.1.1: F_n, L_n Fibonacci ve Lucas sayıları olmak üzere,

$$\frac{(n+1)L_n - 2F_{n+1}}{5} = \sum_{j=1}^{n} F_j F_{n-j}$$

dir.

İspat: $x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(F_1 x^{n-2} + F_2 x^{n-3} + \ldots + F_{n-2}x + F_{n-1}\right) + F_n x + F_{n-1}$

ve toplam sembolü kullanılarak,

$$x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^{n-1-j}\right) + F_n x + F_{n-1}$$

olsun.

$$\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^{n-1-j} = Q(x)$$

diyelim. Bu durumda (3.1) özdeşliğinin son hali,

$$x^n = \left(x^2 - x - 1\right)Q(x) + F_n x + F_{n-1}$$

dir. Şimdi, her iki tarafın türevini alalım.

Bu durumda,

$$nx^{n-1} - F_n = \left(2x - 1\right)Q(x) + \left(x^2 - x - 1\right)Q'(x)$$

olur. Eğer $x = \alpha$ alınırsa, $n\alpha^{n-1} - F_n = \left(2\alpha - 1\right)Q(\alpha) + Q'(\alpha) \times 0$ bulunur. Ayrıca,

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan, $2\alpha - 1 = \sqrt{5}$ elde edilir ve denklemin son hali;

$$n\alpha^{n-1} - F_n = \sqrt{5}Q(\alpha) \qquad (3.3)$$

olur.

Eğer $x = \beta$ alınırsa, $n\beta^{n-1} - F_n = \left(2\beta - 1\right)Q(\beta) + Q'(\beta) \times 0$ bulunur. Ayrıca

$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğundan, $2\beta - 1 = -\sqrt{5}$ elde edilir ve denklemin son hali,

$$n\beta^{n-1} - F_n = -\sqrt{5}Q(\beta) \qquad (3.4)$$

olur.

(3.3) ve (3.4) denklemlerini taraf tarafa toplarsak,

$$n\alpha^{n-1} - F_n + n\beta^{n-1} - F_n = \sqrt{5}Q(\alpha) - \sqrt{5}Q(\beta)$$

buradan,

$$n\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) - 2F_n = \sqrt{5}\left(Q(\alpha) - Q(\beta)\right)$$

ve böylece,

$$nL_{n-1} - 2F_n = \sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1} F_j \left(\alpha^{n-1-j} - \beta^{n-1-j}\right)$$

elde edilir. Bu denklemi $\sqrt{5}$ ile çarpıp ve bölersek,

$$\frac{nL_{n-1} - 2F_n}{5} = \sum_{j=1}^{n-1} F_j F_{n-1-j}$$

olur. Buradan,

$$\frac{\left(n+1\right)L_n - 2F_{n+1}}{5} = \sum_{j=1}^{n} F_j F_{n-j}$$

bulunur.

Teorem 3.1.2: F_n, L_n Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. Bu durumda,

$$(n+1)F_n = \sum_{j=1}^{n} F_j L_{n-j}$$

dir.

İspat: (3.3) ve (3.4) denklemleri taraf tarafa çıkartılırsa,

$$n\alpha^{n-1} - F_n - n\beta^{n-1} + F_n = \sqrt{5}Q(\alpha) + \sqrt{5}Q(\beta)$$

ve

$$n\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) = \sqrt{5}\left(Q(\alpha) + Q(\beta)\right)$$

elde edilir. Denklemi $\sqrt{5}$ ile çarpıp ve bölersek,

$$\sqrt{5}n\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}\left(Q(\alpha) + Q(\beta)\right)$$

buradan,

$$nF_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} F_j \left(\alpha^{n-1-j} + \beta^{n-1-j}\right)$$

böylece,

$$nF_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} F_j L_{n-1-j}$$

elde edilir ve

$$(n+1)F_n = \sum_{j=1}^{n} F_j L_{n-j}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.1: F_n, Fibonacci sayısı olsun. Bu durumda,

$$\frac{n+1-\alpha^{-n}F_{n+1}}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j \alpha^{-j}$$

dir.

İspat: (3.3) özdeşliğinin her iki tarafını β^{n-1} ile çarpalım. Buradan,

$$\beta^{n-1}\left(n\alpha^{n-1} - F_n\right) = \beta^{n-1}\sqrt{5}Q(\alpha)$$

olup

$$n(\alpha\beta)^{n-1} - \beta^{n-1}F_n = \sqrt{5}\beta^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} F_j\alpha^{n-1-j}$$

elde edilir. $\alpha\beta = -1$ olduğundan,

$$n(-1)^{n-1} - \beta^{n-1}F_n = \sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1} F_j\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\alpha^{-j} = \sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1} F_j(-1)^{n-1}\alpha^{-j} = (-1)^{n-1}\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1} F_j\alpha^{-j}$$

olur. $\alpha^{-1} = -\beta$ olduğundan,

$$\frac{n(-1)^{n-1} - \beta^{n-1}F_n}{(-1)^{n-1}\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n-1} F_j\alpha^{-j} = \sum_{j=1}^{n-1} F_j(-\beta)^j = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j F_j\beta^j$$

ve

$$\frac{n-(-1)^{n-1}\beta^{n-1}F_n}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j F_j\beta^j$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{n+1-(-\beta)^n F_{n+1}}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j(-\beta)^j$$

dir. $-\beta = \alpha^{-1}$ olduğu kullanılırsa denklem,

$$\frac{n+1-\alpha^{-n}F_{n+1}}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j\alpha^{-j}$$

halini alır.

Sonuç 3.1.2: F_n, Fibonacci sayısı olsun.

$$\frac{\beta^{-n}F_{n+1} - (n+1)}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j\beta^{-j}$$

dir.

İspat: (3.4) denkleminin her iki tarafını α^{n-1} ile çarpalım. Buradan,

$$\alpha^{n-1}\left(n\beta^{n-1} - F_n\right) = -\sqrt{5}\alpha^{n-1}Q(\beta)$$

olup, $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa,

$$n(-1)^{n-1} - \alpha^{n-1}F_n = -\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1} F_j(-1)^{n-1}\beta^{-j}$$

$$= -\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1} F_j(-1)^{n-1}\beta^{-j}$$

bulunur. Şu halde,

$$\frac{(-1)^{n+1}\alpha^{n-1}F_n - n}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n-1} F_j \beta^{-j}$$

ve buradan,

$$\frac{(-1)^{n}\alpha^{n}F_{n+1} - (n+1)}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j \beta^{-j}$$

eşitliği elde edilir. $-\alpha = \beta^{-1}$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{\beta^{-n}F_{n+1} - (n+1)}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j \beta^{-j}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.3: F_n, Fibonacci sayısı olsun.

$$(-1)^n F_n F_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j F_{2j}$$

dir.

İspat: Sonuç 3.1.1 ve Sonuç 3.1.2 taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{n+1-\alpha^{-n}F_{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\beta^{-n}F_{n+1} - (n+1)}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j \alpha^{-j} + \sum_{j=1}^{n} F_j \beta^{-j}$$

olur. Buradan,

$$\frac{-\left(\alpha^{-n} - \beta^{-n}\right)F_{n+1}}{\sqrt{5}} = \sum_{j=1}^{n} F_j \left(\alpha^{-j} + \beta^{-j}\right) - F_{-n}F_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} F_j L_{-j}$$

elde edilir. $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ ve $F_j L_j = F_{2j}$ olduğundan,

$$-(-1)^{n+1} F_n F_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} F_j (-1)^j L_j$$

ve böylece

$$(-1)^n F_n F_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j F_{2j}$$

dir.

Sonuç 3.1.4: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun.

$$\frac{(-1)^n L_n F_{n+1} - 2(n+1)}{5} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j F_j^2$$

dir.

İspat: Sonuç 3.1.1 ve Sonuç 3.1.2 taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\frac{n+1-\alpha^{-n}F_{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{\beta^{-n}F_{n+1}-(n+1)}{\sqrt{5}}=\sum_{j=1}^{n}F_j\alpha^{-j}-\sum_{j=1}^{n}F_j\beta^{-j}$$

dir. Buradan,

$$\frac{2(n+1)-\left(\alpha^{-n}+\beta^{-n}\right)F_{n+1}}{\sqrt{5}}=\sum_{j=1}^{n}F_j\left(\alpha^{-j}-\beta^{-j}\right)$$

$$\frac{2(n+1)-L_{-n}F_{n+1}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n}F_jF_{-j}=\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n}F_j\left(-1\right)^{j+1}F_j$$

ve

$$\frac{\left(-1\right)^{n}L_nF_{n+1}-2(n+1)}{5}=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j}F_j^{\,2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.5: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun.

$$2F_n=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j+1}L_{n+1-2j}$$

dir.

İspat: $\dfrac{(n+1)L_n-2F_{n+1}}{5}=\sum_{j=1}^{n}F_jF_{n-j}$ ve $(n+1)F_n=\sum_{j=1}^{n}F_jL_{n-j}$ denklemlerini taraf tarafa toplayalım. Buradan,

$$\frac{(n+1)L_n-2F_{n+1}+5(n+1)F_n}{5}=\sum_{j=1}^{n}F_j\left(F_{n-j}+L_{n-j}\right)$$

olup, $F_n+L_n=2F_{n+1}$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}F_j2F_{n-j+1}&=\frac{nL_n+L_n-(L_n+F_n)+5nF_n+5F_n}{5}\\&=\frac{nL_n+5nF_n+4F_n}{5}\\&=\frac{n(L_n+5F_n)+4F_n}{5}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\frac{n\left(L_n+L_{n-1}+L_{n+1}\right)+4F_n}{5}=\sum_{j=1}^{n}5F_jF_{n+1-j}$$

elde edilir. Teorem 1.1.10’daki $5F_jF_{n+1-j}=L_{n+1}-\left(-1\right)^j L_{n+1-2j}$ özdeşliği kullanılırsa,

$$\frac{2nL_{n+1}+4F_n}{2}=\sum_{j=1}^{n}\left(L_{n+1}-\left(-1\right)^j L_{n+1-2j}\right)$$

ve buradan

$$\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j+1}L_{n+1-2j}=nL_{n+1}+2F_n-nL_{n+1}=2F_n$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.6: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j+1}L_{n-1-2j}=3F_n$$

dir.

İspat: $\frac{\left(n+1\right)L_n-2F_{n+1}}{5}=\sum_{j=1}^{n}F_jF_{n-j}$ ve $\left(n+1\right)F_n=\sum_{j=1}^{n}F_jL_{n-j}$ denklemleri taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\frac{5\left(n+1\right)F_n-\left(n+1\right)L_n+2F_{n+1}}{5}=\sum_{j=1}^{n}F_j\left(L_{n-j}-F_{n-j}\right)$$

olur. Buradan Önerme 1.1.6’daki $F_{n+1-j}+F_{n-1-j}=L_{n-j}$ eşitliği kullanılarak,

$$\sum_{j=1}^{n}5F_jF_{n-1-j}=\frac{\left(n+1\right)\left(5F_n-L_n\right)+2F_{n+1}}{2}=\frac{\left(n+1\right)\left(L_{n+1}+L_{n-1}-L_n\right)+2F_{n+1}}{2}$$

bulunur. Teorem 1.1.10’daki $5F_jF_{n-1-j}=L_{n-1}-\left(-1\right)^j L_{n-1-2j}$ özdeşliği kullanılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(L_{n-1}-\left(-1\right)^j L_{n-1-2j}\right)=\frac{2\left(n+1\right)L_{n-1}+2F_{n+1}}{2}=\left(n+1\right)L_{n-1}+F_{n+1}$$

bulunur. Buradan da

$$\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j+1}L_{n-1-2j}=L_{n-1}+F_{n+1}=F_{n-2}+F_n+F_{n+1}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j+1}L_{n-1-2j}=F_{n-2}+F_{n+2}$$

olur. Ayrıca $F_{n+2}+F_{n-2}=3F_n$ olduğundan, $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}L_{n-1-2j}=3F_n$ bulunur.

Sonuç 3.1.7: F_n, Fibonacci sayısı olsun.

$$F_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}F_{n-2j}$$

dir.

İspat: $2F_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}L_{n+1-2j}$ ve $3F_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}L_{n-1-2j}$ denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$5F_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left(L_{n-2j+1}+L_{n-2j-1}\right)$$

olur. Buradan $L_{n-1}+L_{n+1}=5F_n$ olduğu kullanılırsa,

$$5F_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}5F_{n-2j}$$

olup

$$F_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}F_{n-2j}$$

elde edilir.

Şimdi de (3.1) özdeşliğinde ikinci mertebeden türev alarak devam edelim.

Teorem 3.1.3: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. Bu durumda,

$$\sum_{j=1}^{n}jF_jL_{n-j}=-\frac{(n+2)\left(5(n+1)F_n-2L_{n+1}\right)+4F_{n+2}}{10}+(n+1)^2F_n$$

dir.

İspat: $x^n-F_nx-F_{n-1}=\left(x^2-x-1\right)Q(x)$ özdeşliğinin birinci mertebeden türevi

$$nx^{n-1}-F_n=(2x-1)Q(x)+Q'(x)\left(x^2-x-1\right)$$

ve ikinci mertebeden türevi

$$\begin{aligned}n(n-1)x^{n-2}&=2Q(x)+Q'(x)(2x-1)+Q''(x)\left(x^2-x-1\right)+Q'(x)(2x-1)\\&=\left(x^2-x-1\right)Q''(x)+2(2x-1)Q'(x)+2Q(x)\end{aligned}$$

olur. Burada $x=\alpha$ alınırsa,

$$\begin{aligned}n(n-1)\alpha^{n-2} &= 2(2\alpha-1)Q'(\alpha)+2Q(\alpha)\\ &= 2\sqrt{5}Q'(\alpha)+2Q(\alpha)\\ &= 2\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}(n-1-j)F_j\alpha^{n-2-j}+2\sum_{j=1}^{n-1}F_j\alpha^{n-1-j}\\ &= 2\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sqrt{5}(n-1-j)+\alpha\right]F_j\alpha^{n-2-j}\end{aligned}$$

olup

$$n(n-1)\alpha^{n-2}=2\alpha^{n-2}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sqrt{5}(n-1-j)+\alpha\right]F_j\alpha^{-j} \tag{3.5}$$

bulunur. Ayrıca $x=\beta$ alınırsa,

$$\begin{aligned}n(n-1)\beta^{n-2} &= 2(2\beta-1)Q'(\beta)+2Q(\beta)\\ &= -2\sqrt{5}Q'(\beta)+2Q(\beta)\\ &= -2\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}(n-1-j)F_j\beta^{n-2-j}+2\sum_{j=1}^{n-1}F_j\beta^{n-1-j}\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$n(n-1)\left(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\right)=2\sqrt{5}\left(Q'(\alpha)+Q'(\beta)\right)+2\left(Q(\alpha)-Q(\beta)\right)$$

olur. Denklemi $\sqrt{5}$ ile çarpıp ve bölersek,

$$\begin{aligned}\sqrt{5}n(n-1)F_{n-2} &= 2\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_j\left(\alpha^{n-2-j}+\beta^{n-2-j}\right)+2\sum_{j=1}^{n}F_j\left(\alpha^{n-1-j}-\beta^{n-1-j}\right)\\ &= 2\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_jL_{n-2-j}+2\sqrt{5}\sum_{j=1}^{n-1}F_jF_{n-1-j}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{n(n-1)F_{n-2}}{2}=\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_jL_{n-2-j}+\frac{nL_{n-1}-2F_n}{5}$$

olup

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_jL_{n-2-j} &= \frac{5n(n-1)F_{n+1}-2nL_{n-1}+4F_n}{10}\\ &= \frac{5n^2F_{n-2}-n\left(5F_{n-2}+2L_{n-1}\right)+4F_n}{10}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)F_jL_{n-1-j}=\frac{5n(n+1)F_{n-1}-2(n+1)L_n+4F_{n+1}}{10}$$

$$=\frac{(n+1)(5nF_{n-1}-2L_n)+4F_{n+1}}{10}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)F_jL_{n-j}=\frac{(n+2)(5(n+1)F_n-2L_{n+1})+4F_{n+2}}{10}$$

elde edilir. Burada, $\sum_{j=1}^{n} jF_jL_{n-j}$ yalnız bırakılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n} jF_jL_{n-j}=-\frac{(n+2)(5(n+1)F_n-2L_{n+1})+4F_{n+2}}{10}+(n+1)\sum_{j=1}^{n}F_jL_{n-j}$$

$$=-\frac{(n+2)(5(n+1)F_n-2L_{n+1})+4F_{n+2}}{10}+(n+1)^2F_n$$

bulunur.

Sonuç 3.1.8: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. Bu durumda,

$$\sum_{j=1}^{n} jF_jF_{n-j}=\frac{2L_{n+2}F_{n+1}-(n+2)(n+1)-10(n+1)^2F_n}{10}$$

dir.

İspat: (3.5) ve (3.6) denklemleri taraf tarafa toplanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$n(n-1)(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=2[Q(\alpha)+Q(\beta)]+2\sqrt{5}(Q'(\alpha)-Q'(\beta)),$$

$$n(n+1)L_{n-2}=2\left(\sum_{j=1}^{n-1}F_jL_{n-1-j}\right)+10\left(\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_jF_{n-2-j}\right),$$

$$\frac{n(n+1)L_{n-2}-2nF_{n-1}}{10}=\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_jF_{n-2-j},$$

$$\frac{(n+2)(n+1)L_n-2(n+2)F_{n+1}}{10}=\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)F_jF_{n-j},$$

$$\sum_{j=1}^{n} jF_jF_{n-j}=\frac{2(n+2)F_{n+1}-(n+2)(n+1)}{10}-(n+1)$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n} F_j F_{n-j} = \frac{2L_{n+2}F_{n+1} - (n+2)(n+1) - 10(n+1)^2 F_n}{10}$$

elde edilir.

Lemma 3.1.1: L_n, Lucas sayıları olsun. Bu durumda,

$$2x^{n+1} - x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^{n-1-j}\right) + L_n x + L_{n-1}$$

dir.

İspat: Önce $x = 0$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim,

$$2x^{n+1} - x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(L_0 x^{n-1} + L_1 x^{n-2} + ... + L_{n-1} x^0\right) + L_n x + L_{n-1}$$

olduğu kolaylıkla görülmektedir. Şimdi $x = 0$ yazılırsa,

$$0 = -L_{n-1} + L_{n-1}$$

olur. Dolayısıyla $x = 0$ için ifade doğrudur.

Şimdi de $x = \alpha$ için doğruluğuna bakalım. Yani,

$$2\alpha^{n+1} - \alpha^n = \left(\alpha^2 - \alpha - 1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^{n-1-j}\right) + L_n \alpha + L_{n-1}$$

olduğunu gösterelim. $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ olduğundan $2\alpha^{n+1} - \alpha^n = L_n \alpha + L_{n-1}$ olduğu gösterilmelidir. Burada $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\alpha\beta = -1$, $\alpha + \beta = 1$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
L_n \alpha + L_{n-1} &= \left(\alpha^n + \beta^n\right)\alpha + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\
&= \alpha^{n+1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\
&= \alpha^n \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \alpha^n (\alpha - \beta) \\
&= \sqrt{5}\alpha^n \\
&= (\alpha - \beta)\alpha^n \\
&= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^n \\
&= \alpha^{n+1} + \alpha^{n-1} \;\; = 2\alpha^{n+1} - \alpha^{n+1} + \alpha^{n-1}
\end{aligned}$$

$$= 2\alpha^{n+1} + \alpha^n \left(-\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$= 2\alpha^{n+1} - \alpha^n$$

elde edilir. Dolayısıyla $x = \alpha$ için de doğru olur.

Benzer şekilde $x = \beta$ için de doğru olduğu gösterilebilir.

Şimdi $x \neq \alpha$, $x \neq \beta$ ve $x \neq 0$ durumuna bakalım.

$$\left(x^2 - x - 1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^{n-1-j} \right) + L_n x + L_{n-1} = 2x^{n+1} - x^n$$

$$= \left(x^2 - x - 1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j x^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j x^{n-1-j} \right) + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \left(x^2 - x - 1\right) x^{n-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{x} \right)^j + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\beta}{x} \right)^j \right] + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \left(x^2 - x - 1\right) x^{n-1} \left[\frac{\left(\frac{\alpha}{x} \right)^n - 1}{\frac{\alpha}{x} - 1} + \frac{\left(\frac{\beta}{x} \right)^n - 1}{\frac{\beta}{x} - 1} \right] + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \left(x^2 - x - 1\right) x^{n-1} \left[\frac{\alpha^n - x^n}{x^n} \cdot \frac{x}{\alpha - x} + \frac{\beta^n - x^n}{x^n} \cdot \frac{x}{\beta - x} \right] + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \left(x^2 - x - 1\right) x^{n-1} \left[\frac{\alpha^n - x^n}{x^{n-1}(\alpha - x)} + \frac{\beta^n - x^n}{x^{n-1}(\beta - x)} \right] + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \left(x^2 - x - 1\right) \left[\frac{\alpha^n - x^n}{\alpha - x} + \frac{\beta^n - x^n}{\beta - x} \right] + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \left(x^2 - x - 1\right) \left[\frac{\left(\alpha^n - x^n\right)(\beta - x) + (\alpha - x)\left(\beta^n - x^n\right)}{(\alpha - x)(\beta - x)} \right] + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \left(\alpha^n - x^n\right)(\beta - x) + \left(\beta^n - x^n\right)(\alpha - x) + L_n x + L_{n-1}$$

$$= \alpha^2 \beta - \alpha^n x - x^n \beta + x^{n+1} + \beta^n \alpha - \beta^n x - x^n \alpha + x^{n+1} + L_n x + L_{n-1}$$

$$= 2x^{n+1} - (\alpha + \beta) x^n - \left(\alpha^n + \beta^n\right) x + \alpha^n \beta + \beta^n \alpha + L_n x + L_{n-1}$$

$$= 2x^{n+1} - x^n - L_n x + \alpha\beta\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) + L_n x + L_{n-1}$$

$$= 2x^{n+1} - x^n - L_{n-1} + L_{n-1}$$

$$= 2x^{n+1} - x^n$$

elde edilir.

Benzer şekilde aynı işlem Fibonacci ile de yapılabilir. Yani,

$$x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j x^{n-1-j}\right) + F_n x + F_{n-1}$$

dir.

Sonuç 3.1.9: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. Bu durumda,

$$\left(n+1\right)F_n = \sum_{j=0}^{n} L_j F_{n-j}$$

dir.

İspat: $2x^{n+1} - x^n = \left(x^2 - x - 1\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^{n-1-j}\right) + L_n x + L_{n-1}$ olduğu biliniyor. Burada,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j x^{n-1-j} = Q(x)$$

olduğu kullanılıp birinci mertebeden türev ile ifadenin doğruluğunu gösterelim.

Bu durumda,

$$2x^{n+1} - x^n = \left(x^2 - x - 1\right)Q(x) + L_n x + L_{n-1}$$

$$2\left(n+1\right)x^n - nx^{n-1} = \left(2x-1\right)Q(x) + Q'(x)\left(x^2 - x - 1\right) + L_n$$

yani

$$2\left(n+1\right)x^n - nx^{n-1} - L_n = \left(2x-1\right)Q(x) + Q'(x)\left(x^2 - x - 1\right)$$

elde edilir. Böylece,

$x = \alpha$ için $2\left(n+1\right)\alpha^n - n\alpha^{n-1} - L_n = \sqrt{5}Q(\alpha)$ (3.7)

ve

$x = \beta$ için $2\left(n+1\right)\beta^n - n\beta^{n-1} - L_n = -\sqrt{5}Q(\beta)$ (3.8)

olup, (3.7) ve (3.8) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$5\sum_{j=0}^{n-1} L_j F_{n-1-j} = 2\left(n+1\right)L_n - nL_{n-1} - 2L_n$$

ve böylece,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j F_{n-1-j} = \frac{2(n+1)L_n - nL_{n-1} - 2L_n}{5}$$

$$= \frac{2nL_n - nL_{n-1}}{5}$$

elde edilir. Buradan $L_n + L_n - L_{n-1} = L_n + L_{n-2} = 5F_{n-1}$ olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j F_{n-1-j} = \frac{n(2L_n - L_{n-1})}{5} = nF_{n-1}$$

bulunur. Burada n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n} L_j F_{n-j} = (n+1)F_n$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.10: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. Buradan,

$$\sum_{j=0}^{n} L_j L_{n-j} = (n+1)L_n + 2F_{n+1}$$

dir.

İspat: (3.7) ve (3.8) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$2(n+1)\left(\alpha^n - \beta^n\right) - n\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) = \sqrt{5}\left(Q(\alpha) - Q(\beta)\right)$$

ve böylece,

$$\sqrt{5}\sum_{j=0}^{n-1} L_j L_{n-1-j} = 2\sqrt{5}(n+1)F_n - n\sqrt{5}F_{n-1}$$

olup,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j L_{n-1-j} = 2(n+1)F_n - nF_{n-1}$$

$$= 2nF_n + 2F_n - nF_{n-1}$$

$$= n(2F_n - F_{n-1}) + 2F_n$$

$$= n(F_n + F_n - F_{n-1}) + 2F_n$$

$$= n(F_n + F_{n-2}) + 2F_n$$

$$= nL_{n-1} + 2F_n$$

bulunur. Burada n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n} L_j L_{n-j} = (n+1)L_n + 2F_{n+1}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.11: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun. Buradan,

$$\frac{2\alpha(n+1) - n - \alpha^{1-n}L_n}{\sqrt{5}} = \sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^{-j}$$

dir.

İspat: (3.7) denklemi β^n ile çarpılırsa,

$$2(n+1)\alpha^n\beta^n - n\alpha^{n-1}\beta^n - L_n\beta^n = \sqrt{5}\beta^n Q(\alpha)$$

$$\Rightarrow\ 2(n+1)(-1)^n - n(-1)^{n-1}\beta - L_n\beta^n = \sqrt{5}\beta^n \sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^{n-1-j}$$

$$\Rightarrow\ 2(n+1)(-1)^n - n(-1)^{n-1}\beta - L_n\beta^n = \sqrt{5}(-1)^n \alpha^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^{-j}$$

$$\Rightarrow\ 2\alpha(n+1)(-1)^n - n(-1)^n + L_n\beta^{n-1} = \sqrt{5}(-1)^n \sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^{-j}$$

bulunur. Burada $\beta^{-n-1} = \left(\beta^{-1}\right)^{1-n} = (-\alpha)^{1-n} = (-1)^{1-n}\alpha^{1-n} = -(-1)^n\alpha^{1-n}$ olduğu kullanılırsa,

$$\sqrt{5}(-1)^n \sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^{-j} = 2\alpha(n+1)(-1)^n - n(-1)^{n-1} + L_n\left(-\alpha^{-1}\right)^{n-1}$$

$$= 2\alpha(n+1)(-1)^n - n(-1)^{n-1} - (-1)^n \alpha^{1-n} L_n$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j \alpha^{-j} = \frac{2\alpha(n+1) - n - \alpha^{1-n}L_n}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.12: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun.

$$\frac{n - 2\beta(n+1)\beta^{1-n}L_n}{\sqrt{5}} = \sum_{j=0}^{n-1} L_j \beta^{-j}$$

dir.

İspat: (3.8) özdeşliği $\left(\alpha^{n}\right)$ ile çarpılırsa,

$$2(n+1)(-1)^{n}-n(-1)^{n-1}\alpha-\alpha^{n}L_{n}=-\sqrt{5}\sum_{j=0}^{n-1}L_{j}\alpha^{n}\beta^{n-1-j}=-\sqrt{5}(-1)^{n}\beta^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}L_{j}\beta^{-j}$$

olur. Burada, $\alpha^{n-1}=\left(\alpha^{-1}\right)^{1-n}=(-\beta)^{1-n}=(-1)^{n-1}\beta^{1-n}=-(-1)^{n}\beta^{1-n}$ olduğu kullanılırsa,

$$2\beta(n+1)(-1)^{n}-n(-1)^{n}+\alpha^{n-1}L_{n}=-\sqrt{5}(-1)^{n}\sum_{j=0}^{n-1}L_{j}\beta^{-j}$$

$$\frac{n-2\beta(n+1)+\beta^{1-n}L_{n}}{\sqrt{5}}=\sum_{j=0}^{n-1}L_{j}\beta^{-j}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.13: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun.

$$2(n+2)-(-1)^{n+1}L_{n+1}F_{n}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}L_{j}^{2}$$

dir.

İspat: Sonuç 3.1.11 ve Sonuç 3.1.12 özdeşlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{j=0}^{n-1}L_{j}\left(\alpha^{-j}+\beta^{-j}\right)=\frac{2\alpha(n+1)-n-\alpha^{1-n}L_{n}}{\sqrt{5}}+\frac{n-2\beta(n+1)+\beta^{1-n}L_{n}}{\sqrt{5}},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}L_{j}L_{-j}=\frac{2(n+1)(\alpha-\beta)-L_{n}\left(\alpha^{1-n}-\beta^{1-n}\right)}{\sqrt{5}}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j}L_{j}^{2}=2(n+1)-L_{n}F_{1-n}$$

$$=2(n+1)-(-1)^{n}L_{n}F_{n-1}$$

bulunur. Şimdi n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}L_{j}^{2}=2(n+2)-(-1)^{n+1}L_{n+1}F_{n}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.14: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun.

$$\frac{(-1)^n L_n L_{n+1} - 2}{5} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F_{2j}$$

dir.

İspat: Sonuç 3.1.11 ve Sonuç 3.1.12 özdeşlikleri taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j \left(\alpha^{-j} - \beta^{-j}\right) = \frac{2\alpha(n+1) - n - \alpha^{1-n} L_n - n + 2\beta(n+1) - \beta^{1-n} L_n}{\sqrt{5}},$$

$$\sqrt{5}\sum_{j=0}^{n-1} L_j F_{-j} = \frac{2(n+1)(\alpha+\beta) - L_n\left(\alpha^{1-n} - \beta^{1-n}\right) - 2n}{\sqrt{5}},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} L_j F_j = \frac{2(n+1) - L_n L_{1-n} - 2n}{5}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j F_{2j} = -\left(\frac{2 - (-1)^{1-n} L_n L_{n-1}}{5}\right)$$

$$= -\left(\frac{2 + (-1)^n L_n L_{n-1}}{5}\right)$$

olup n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j F_{2j} = -\left(\frac{2 + (-1)^{n+1} L_{n+1} L_n}{5}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n L_n L_{n+1} - 2}{5}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4: F_n, L_n, Fibonacci ve Lucas sayıları olsun.

$$\frac{5n^2 F_n - nL_n - 4F_n}{10} = \sum_{j=1}^{n} jL_j F_{n-j}$$

dir.

İspat: $Q(x) = \sum_{j=0}^{n-1} L_j x^{n-1-j}$ olduğundan $Q'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (n-1-j) L_j x^{n-2-j}$ olur.

(3.2) özdeşliğinin ikinci mertebeden türevi alınırsa,

$$2n(n+1)x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} = 2Q(x) + (2x-1)Q'(x) + (2x-1)Q'(x) + \left(x^2 - x - 1\right)Q''(x)$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$2n(n+1)x^{n-1}-n(n-1)x^{n-2}=2Q(x)+2(2x-1)Q'(x)+(x^2-x-1)Q''(x)$$

şeklini alır. Daha sonra, $x=\alpha$ alınırsa,

$$2n(n+1)\alpha^{n-1}-n(n-1)\alpha^{n-2}=2Q(\alpha)+2(2\alpha-1)Q'(\alpha) \qquad (3.9)$$

ve $x=\beta$ alınırsa,

$$2n(n+1)\beta^{n-1}-n(n-1)\beta^{n-2}=2Q(\beta)+2(2\beta-1)Q'(\beta) \qquad (3.10)$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) özdeşlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2n(n+1)L_{n-1}-n(n-1)L_{n-2}=2\big(Q(\alpha)+Q(\beta)\big)+2\sqrt{5}\big(Q'(\alpha)-Q'(\beta)\big)$$

bulunur. Burada $Q'(\alpha)$ ve $Q'(\beta)$ için $Q'(x)=\sum_{j=0}^{n-1}(n-1-j)L_jx^{n-2-j}$ olduğu kullanılırsa,

$$2n(n+1)L_{n-1}-n(n-1)L_{n-2}=2(nL_{n-1}+2F_n)+10\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)L_jF_{n-2-j}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{2n(n+1)L_{n-1}-n(n-1)L_{n-2}-2(nL_{n-1}+2F_n)}{10}=\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)L_jF_{n-2-j} \qquad (3.11)$$

bulunur. (3.11) denkleminin sağ tarafı düzenlenirse,

$$\frac{2n^2L_{n-1}+2nL_{n-1}-n^2L_{n-1}+nL_{n-2}-2nL_{n-1}-4F_n}{10}=(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}L_jF_{n-2-j}-\sum_{j=0}^{n-2}jL_jF_{n-2-j}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{n^2(2L_{n-1}-L_{n-2})+nL_{n-2}-4F_n}{10}=(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}L_jF_{n-2-j}-\sum_{j=0}^{n-2}jL_jF_{n-2-j} \qquad (3.12)$$

olur. Burada, $L_{n-1}+L_{n-1}-L_{n-2}=L_{n-1}+L_{n-3}=5F_{n-2}$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{5n^2F_{n-2}+nL_{n-2}-4F_n}{10}=(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}L_jF_{n-2-j}-\sum_{j=0}^{n-2}jL_jF_{n-2-j} \qquad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) denkleminde n yerine $(n+2)$ alınırsa,

$$\frac{5(n+2)^2F_n-(n+2)L_n-4F_{n+2}}{10}=(n+1)\sum_{j=0}^{n}L_jF_{n-j}-\sum_{j=0}^{n}jL_jF_{n-j}$$

bulunur. Burada $\sum_{j=0}^{n} jL_jF_{n-j}$ ifadesi yalnız bırakılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n} jL_jF_{n-j} = (n+1)(n+1)F_n - \frac{5(n+2)^2 F_n + (n+2)L_n - 4F_{n+2}}{10}$$

$$= \frac{10(n+1)^2 F_n - 5(n+2)^2 F_n + (n+2)L_n + 4F_{n+2}}{10}$$

$$= \frac{\left(10n^2 + 20n + 10 - 5n^2 - 20n - 20 + 4\right)F_n - nL_n - 2\left(L_n - 2F_{n+1}\right)}{10}$$

$$= \frac{\left(5n^2 - 6\right)F_n - nL_n + 2F_n}{10}$$

$$= \frac{5n^2F_n - 4F_n - nL_n}{10}$$

$$= \frac{\left(5n^2 - 4\right)F_n - nL_n}{10}$$

bulunur.

Teorem 3.1.5: $\sum_{j=1}^{n} jL_jL_{n-j} = \frac{n\left((n+1)L_n + 2F_{n+1}\right)}{2}$

dir.

İspat: (3.9) ve (3.10) özdeşlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$2\sqrt{5}n(n+1)F_{n-1} - \sqrt{5}n(n-1)F_{n-2} = 2\left(P(\alpha) - P(\beta)\right) + 2\sqrt{5}\left(P'(\alpha) + P'(\beta)\right)$$

elde edilir.

$$P(\alpha) - P(\beta) = \sqrt{5}\sum_{j=0}^{n-1} L_J F_{n-1-j}$$

ve

$$P'(\alpha) + P'(\beta) = \sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)L_jL_{n-2-j}$$

özdeşlikleri yukarıdaki denklemde kullanılırsa,

$$\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)L_jL_{n-2-j} = \frac{n^2L_{n-2} + nF_{n-2}}{2}$$

bulunur. Burada, n yerine $n+2$ yazılır ve $\sum_{j=0}^{n-1} L_jF_{n-1-j} = nF_{n-1}$ kullanılırsa,

$$\left(n+1\right)\sum_{j=0}^{n} L_j L_{n-j} - \sum_{j=0}^{n} jL_j L_{n-j} = \frac{\left(n+2\right)^2 L_n + \left(n+2\right)F_n}{2}$$

özdeşliği elde edilir.

Sonuç 3.1.15:

$$\sum_{j=0}^{n} L_j L_{n-j} = \left(n+1\right)L_n + 2F_{n+1}$$

dir.

İspat: Özdeşlik (3.2) de, birinci mertebeden türev alınırsa,

$$2\left(n+1\right)x^n - nx^{n-1} = \left(2x-1\right)Q(x) + Q'(x)\left(x^2 - x - 1\right) + L_n \qquad (3.14)$$

ve (3.14) de x yerine sırasıyla α ve β yazılırsa,

$$2\left(n+1\right)\alpha^n - n\alpha^{n-1} = \sqrt{5}Q(\alpha) + L_n \qquad (3.15)$$

ve

$$2\left(n+1\right)\beta^n - n\beta^{n-1} = -\sqrt{5}Q(\beta) + L_n \qquad (3.16)$$

elde edilir. (3.15) ve (3.16) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2\left(n+1\right)L_n - nL_{n-1} - 2L_n = \sqrt{5}\left(Q(\alpha) - Q(\beta)\right)$$

bulunur. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{n-1} L_j F_{n-1-j} = nF_{n-1} \qquad (3.17)$$

dir. Buradan,

$$\sum_{j=0}^{n} L_j F_{n-j} = \left(n+1\right)F_n \qquad (3.18)$$

olduğu görülür. Bu toplam da

$$\sum_{j=0}^{n-1} L_j L_{n-1-j} = nL_{n-1} + 2F_n \qquad (3.19)$$

halini alır. Bu ise

$$\sum_{j=0}^{n} L_j L_{n-j} = \left(n+1\right)L_n + 2F_{n+1} \qquad (3.20)$$

şeklindedir.

Sonuç 3.1.16: $n \in N$ olsun. O zaman,

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j} jF_{2j} = \frac{(-1)^{n}(5nF_nF_{n+1}+F_{2n})+n}{5}$$

dir.

İspat: (3.5) eşitliği β^{n-1} ile çarpılırsa,

$$n(n-1)(-1)^{n-1}\alpha^{-1} = 2\sqrt{5}\beta^{n-1}Q'(\alpha)+2\beta^{n-1}Q(\alpha)$$

olur. Burada, $Q'(\alpha)=\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_jx^{n-2-j}$ olduğundan,

$$n(n-1)\alpha^{-1} = 2\sqrt{5}\alpha^{-1}\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_j\alpha^{-j}+2\sum_{j=1}^{n-1}F_j\alpha^{-j}$$

elde edilir. Bu denklem Sonuç 3.1.1 de kullanılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_j\alpha^{-j} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[n(n-1)-2\left(\frac{n\alpha-\alpha^{-n+2}F_n}{\sqrt{5}}\right)\right]$$

formülüne ulaşılır. Benzer şekilde (3.6) ifadesi α^{n-1} ile çarpılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_j\beta^{-j} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[2\left(\frac{\beta^{-n+2}F_n-n\beta}{\sqrt{5}}\right)-n(n-1)\right]$$

olduğu görülür. Son iki denklem birbirinden çıkarılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n-2}(n-1-j)F_jL_{-j} = \frac{(-1)^{n}F_nL_{n-2}-n}{5}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$L_{-j}=(-1)^{j}L_j, F_{2j=}F_jL_j$$

olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n}(n-1-j)F_{2j} = \frac{(-1)^{n}F_nL_{n-2}-n}{5}$$

ve buradan,

$$(n+1)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}F_{2j}-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}jF_{2j} = \frac{(-1)^{n}F_{n+2}L_n-n-2}{5}$$

olduğu görülür. Bulunan denklemde, Sonuç 3.1.3 özdeşliği kullanılırsa,

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j} jF_{2j} = \frac{(-1)^{n}(5nF_nF_{n+1}+F_{2n})+n}{5}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren seriler ile Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren $\sum_{j=1}^{n} jF_jL_{n-j}$, $\sum_{j=1}^{n} jF_jF_{n-j}$ türünden toplamlar ele alınıp incelendi. Benzer çalışmalar $k-$Fibonacci ve $k-$Lucas sayıları için yapılabilir. Burada $k-$Fibonacci sayıları, $k \geq 1$ ve k tamsayı olmak üzere, $U_0 = 0, U_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $U_n = kU_n + U_{n-1}$ bağıntısı ile tanımlanan sayılardır. Ayrıca, benzer biçimde $k-$Lucas sayıları $V_0 = 2, V_1 = k$ ve $n \geq 2$ için, $V_n = kV_n + V_{n-1}$ ile tanımlanan sayılardır. Bu şekilde tanımlanan U_n ve V_n sayıları için $\sum_{j=1}^{n} jU_jV_{n-j}, \sum_{j=1}^{n} jU_jU_{n-j}$ toplamları ve bunlara benzer toplamların değeri hesaplanabilir. Bu toplamlar literatürde henüz yapılmamış gözüküyor.

KAYNAKLAR

[1] KOSHY, T., Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, John Wiley, New York, 2001

[2] VAJDA, S., Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Sections, Ellis Horwood Limited Publ., England, 1989

[3] AMINI, A. R., Fibonacci Numbers From a Long Division Formula, Mathematical Spectrum 40, 59-61, 2008

[4] BALCI, M., Matematik Analiz 2, Balcı Yayınları, Ankara, 1997

[5] YÜCEL, G., Aspect Of Fibonacci Numbers, In Partial Fulfillment Of the Requirements For The Degree Masters Of Science, Bilkent University, 1994

[6] ADLER, A., COURY J. E., The Theory Of Numbers, Jones and Bertlett Publishers, 1995

[7] NGUYEN, T., Fibonacci and Lucas Series With Elliptic Functions, In Partial Fulfillment Of the Requirements For The Degree Masters Of Arts, San Jose State University, August 2005

[8] VOROBIEV, N., Fibonacci Numbers, Translated From The Russian By Mircea Martin, Birkhauser Basel, 2003

ÖZGEÇMİŞ

Canan ÖZDOĞAN, 13.11.1982’ de Erzurum’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzincan’da, lise öğrenimini İzmit’te tamamladı. 1999 yılında Derince Lisesi’nden mezun oldu. 1999 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü’nü 2004 yılında bitirdi. 2005 yılında Sakarya Üniversitesi’nde tezsiz yüksek lisans programına başladı. 2006 yılında tezsiz yüksek lisans programını tamamladıktan sonra, Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisansa başladı.