T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK SMARANDACHE EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice PARLATICI

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

Aralık 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK SMARANDACHE EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice PARLATICI

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**GEOMETRİ**

Bu tez 30 / 12 / 2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR	**Prof. Dr. Murat TOSUN**	**Yrd. Doç. Dr. Hakan YAKUT**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her safhasında beni bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren, çalışmamı sürdürmemde ve tamamlamamda en büyük destekçim olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca tezimin hazırlanmasında yardımcı olan Tülay SOYFİDAN'a içtenlikle teşekkür ediyorum.

Çalışmalarım sırasında beni her an destekleyen, bana karşı olan inançlarını hiçbir zaman kaybetmeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: $n-$boyutlu reel iç çarpım uzayı
$\mathbb{E}^n$	: $n-$boyutlu Öklid uzayı
$\Vert \ \Vert$	: Norm
$\langle \ , \ \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: Vektörel çarpım
I	: $\mathbb{R}$ reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\mathbb{Q}$	: Kuaterniyonlar cümlesi
q	: Herhangi bir kuaterniyon
S_q	: q kuaterniyonunun skalar kısmı
$\boldsymbol{V}_q$	: q kuaterniyonunun vektörel kısmı
$h(\ , \ )$	: Kuaterniyonik iç çarpım
$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$	: Uzaysal kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısı
k, r	: Uzaysal kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri
$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2$	: Uzaysal kuaterniyonik eğrinin Bishop çatısı
k_1, k_2	: Uzaysal kuaterniyonik eğrinin doğal eğrilikleri
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_3$	: Kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısı
$\kappa, k, (r-\kappa)$	: Kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3$	: Kuaterniyonik eğrinin paralel transport çatısı
k_1^*, k_2^*, k_3^*	: Kuaterniyonik eğrinin paralel transport eğrilikleri

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Kuaterniyonlar, Uzaysal Kuaterniyonik Eğri, Kuaterniyonik Eğri, Smarandache Eğrileri, Bishop Çatısı, Paralel Transport Çatısı

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid uzayında ve kuaterniyonlar cümlesinde temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca eğriler teorisine yer verilmiş, Frenet ve Bishop çatıları tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet ve Bishop çatısına göre Smarandache eğrilerinin tanımları verilmiştir. Buna ek olarak uzaysal kuaterniyonik eğrilerin Smarandache eğrileri Frenet çatısına göre verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre uzaysal kuaterniyonik eğriler için Smarandache eğrilerinin tanımı verilmiş ve bu eğrilerin Frenet ve Bishop elemanları esas eğrinin Bishop elemanları cinsinden hesaplanmıştır. Ayrıca 4-boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler için paralel transport çatısına göre Smarandache eğrileri tanımlanıp yine bu eğriler için Frenet ve paralel transport elemanları hesaplanmıştır. Son olarak bir örnekle kuaterniyonik ve uzaysal kuaterniyonik eğrilerin Smarandache eğrileri hesaplanıp, bunlar grafiklerle görselleştirilmiştir.

Beşinci bölümde çalışmanın sonuçlarından bahsedilmiş ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

QUATERNIONIC SMARANDACHE CURVES

SUMMARY

Key Words: Quaternions, Spatial Quaternionic Curve, Quaternionic Curve, Smarandache Curves, Bishop Frame, Parallel Transport Frame

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic concepts in the Euclidean space and set of quaternions are introduced. Also the curve theory is mentioned and Frenet, Bishop and parallel transport frames are defined.

In the third chapter, Smarandache curves according to Frenet and Bishop frame are defined in 3-dimensional Euclidean space. In addition Smarandache curves of spatial quatenionic curves are given according to Frenet frame.

The fourth chapter is the original part of this study. In this chapter, the definitions of spatial quaternionic Smarandache curves according to Bishop frame are given and Frenet and Bishop elements of these curves are calculated. Moreover, in 4-dimensional Euclidean space, quaternionic Smarandache curves according to parallel transport frame are defined, Frenet and parallel transport apparatus are calculated. Lastly, an example is given and in this example Smarandache curves of quaternionic and spatial quaternionic curves are calculated. Also, their graphics are illustrated.

In the fifth chapter, the results of this study are mentioned and suggestions are made for future works.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar, kompleks sayıların genelleştirilmiş bir halidir. İlk defa İrlandalı matematikçi W. R. Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmıştır. Hamilton tarafından keşfedilen kuaterniyonlar, baz elemanları imajiner, bileşenleri ise reel sayılar olduğu için "reel kuaterniyonlar" şeklinde adlandırılmıştır. Son yıllarda kuaterniyonların uygulama alanları neredeyse bilimin tüm dallarına dağılmaktadır. Kimyada molekül yapılarının incelenmesinden tıbbi bilimlerde DNA ve protein yapılarına, göz hareketinin tanımlanmasından hidrodinamik, elastik, astronomi ve optikteki uygulamalarına kadar geniş bir spektrumda kuaterniyonların kullanıldığı görülmektedir [1].

$\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet formülleri, uzaysal kuaterniyonlar ve kuaterniyonlar yardımıyla K. Bharathi ve M. Nagaraj tarafından verilmiştir [2]. Sonrasında M. Karadağ ve A.İ. Sivridağ tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonların eğilim çizgilerini ve harmonik eğrilikleri tanımlamışlardır [3]. Bir başka çalışma ise A. Tuna tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada $\mathbb{E}_1^3$ ve $\mathbb{E}_2^4$, yarı Öklid uzaylarındaki kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri, eğilim çizgileri, harmonik eğrilikleri ve kuaterniyonik eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir [4].

Smarandache eğrisi, regüler bir eğrinin Frenet vektörleri ile oluşturulan yer vektörüne sahip regüler eğri olarak tanımlanır ve birçok araştırmacı için çalışma konusu olmuştur. A. T. Ali, $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini tanıtmış ve özel bir durumun Serret Frenet elemanlarını çalışmıştır [5]. $\mathbb{E}_1^4$, yarı reel Öklid uzayında $\boldsymbol{TB}_2$ Smarandache eğrileri ise M. Turgut ve S. Yılmaz tarafından tanımlanmıştır [6]. Daha sonra $\mathbb{E}_1^3$ de N. Bayrak, Ö. Bektaş ve S. Yüce, Smarandache eğrileri için bazı karakterizasyonlar elde etmişlerdir [7]. Ayrıca Smarandache eğrileri, Frenet çatısı dışındaki çatılar için de çalışılmıştır. Örneğin [8] de K. Taşköprü Sabban çatısına göre, [9] de Ö. Bektaş ve S. Yüce Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır. M. Çetin, Y. Tunçer ve M. K. Karacan ise Bishop çatısına göre $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında Smarandache eğrileri üzerine çalışmış ve Smarandache eğrilerinin oskülatör kürelerinin merkezleri ile eğrilik kürelerini bulmuşlardır [10]. $\mathbb{E}^3$ de kuaterniyonik eğriler için Smarandache eğrileri ise M. Çetin ve H. Kocayiğit tarafından tanımlanmış ve bu eğrilerin bazı diferansiyel geometrik özellikleri verilmiştir [11].

Bu çalışmada ise $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında Bishop (paralel transport) çatısına göre uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1, \boldsymbol{tm}_2, \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$ ve $\boldsymbol{tm}_1\boldsymbol{m}_2$ Smarandache eğrileri tanımlanmış ve elde edilen uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrilerinin Frenet ve Bishop elemanları araştırılmıştır. Buna ek olarak $4-$boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1$, $\boldsymbol{TM}_2$, $\boldsymbol{TM}_3$, $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{TM}_2\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3$ ve $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3$ Smarandache eğrileri tanıtılmıştır. Bu eğrilerin Frenet ve paralel transport elemanları hesaplanıp bunlara ilişkin bir örnek sunulmuştur.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu reel Öklid uzayındaki temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \to V$ fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir [12].

i. $\forall P,\ Q,\ R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$

ii. $\forall P \in A$ ve $\boldsymbol{\alpha} \in V$ için $f(P,Q)=\boldsymbol{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V vektör uzayında

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ , \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n) \\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n) \end{cases}$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına $n-$boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [12].

Tanım 2.1.3. $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\|\ \|$ olmak üzere,

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}\ , \qquad d(X,Y)=\|\boldsymbol{XY}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\ , \qquad \begin{cases} X=(x_1,x_2,...,x_n) \\ Y=(y_1,y_2,...,y_n) \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyona $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $X, Y \in \mathbb{E}^n$ için $d(X,Y)$ değerine de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir [12].

Teorem 2.1.1. $n-$ boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir [12].

Tanım 2.1.4. $X=\left(x_1,...,x_n\right)$ ve $Y=\left(y_1,...,y_n\right)\in\mathbb{E}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d:\mathbb{E}^n\times\mathbb{E}^n &\to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\to d(X,Y)=\left\|\boldsymbol{XY}\right\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de Öklid metriği denir [12].

Tanım 2.1.5. $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta X, Y, Z olsun. $\boldsymbol{XY}$ ile $\boldsymbol{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta\in\mathbb{R}$ açısı $0\le\theta\le\pi$ olmak üzere,

$$\cos\theta=\frac{\left\langle \boldsymbol{XY},\boldsymbol{XZ}\right\rangle}{\left\|\boldsymbol{XY}\right\|\left\|\boldsymbol{XZ}\right\|}$$

dır [13].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu reel iç çarpım uzayı ile birleşen $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında sıralı bir $\left\{P_0,P_1,...,P_n\right\}$ nokta $(n+1)-$lisi için eğer $\left\{\boldsymbol{P_0P_1},\ \boldsymbol{P_0P_2},\ ...\ ,\ \boldsymbol{P_0P_n}\right\}$ vektör sistemi, $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise bu nokta $(n+1)-$lisine bir dik çatı veya Öklid çatısı denir [12].

2.2. Eğriler Teorisi

Tanım 2.2.1. $I\subset\mathbb{R}$ bir açık aralık ve

$$\begin{aligned} \alpha: I &\to \mathbb{E}^n \\ s &\to \alpha(s)=(\alpha_1(s),...,\alpha_n(s)) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha(I)\subset\mathbb{E}^n$ kümesine $\mathbb{E}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayında (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I\subset\mathbb{R}$

aralığına, α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\alpha(s)$ eğrisinin parametresi denir [12].

Tanım 2.2.2. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I,α) ve (J,β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} o \beta : J \to I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi (M nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir [12].

Tanım 2.2.3. M eğrisi $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s),\, \alpha_2(s),\, \dots ,\, \alpha_n(s))$$

şeklinde olsun. Bu takdirde

$$\left.\frac{d\alpha}{ds}\right|_s = \alpha'(s)\big|_s = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{ds}\right|_s, \left.\frac{d\alpha_2}{ds}\right|_s, \dots , \left.\frac{d\alpha_n}{ds}\right|_s \right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir [12].

Tanım 2.2.4. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi, (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R}$$
$$s \to \|\alpha'\|(s) = \|\alpha'(s)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki skalar hızı denir. Eğer $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise, M eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine de eğrinin yay-parametresi denir [12].

Tanım 2.2.5. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye ($\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$) regüler eğri denir [12].

Tanım 2.2.6. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi=\left\{\alpha',\alpha'',...,\alpha^{(r)}\right\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\alpha^{(k)}$, $k>r$ için; $\alpha^{(k)}\in S_p\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\dots,\boldsymbol{V}_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı, $t\in M$ için $\{\boldsymbol{V}_1(t),\boldsymbol{V}_2(t),\dots,\boldsymbol{V}_r(t)\}$ sistemine $t\in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı ve her bir $\boldsymbol{V}_i$, $1\leq i\leq r$, vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir [12].

Tanım 2.2.7. $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{\boldsymbol{V}_1(s),\boldsymbol{V}_2(s),...,\boldsymbol{V}_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} k_i &: I\to\mathbb{R} \\ s&\to k_i(s)=\left\langle \boldsymbol{V}_i'(s),\boldsymbol{V}_{i+1}(s)\right\rangle \ , 1\leq i<r \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $s\in I$ için $k_i(s)$ sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin $i-$yinci eğriliği denir [12].

Teorem 2.2.1. $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki M nin $i-$yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet $r-$ayaklısı $\{\boldsymbol{V}_1(s),\boldsymbol{V}_2(s),...,\boldsymbol{V}_r(s)\}$ ise

i. $\boldsymbol{V}_1'(s)=k_1(s)\boldsymbol{V}_2(s)$

ii. $\boldsymbol{V}_i'(s)=-k_{i-1}(s)\boldsymbol{V}_{i-1}(s)+k_i(s)\boldsymbol{V}_{i+1}(s),\quad 1<i<r$

iii. $\boldsymbol{V}_r'(s)=-k_{r-1}(s)\boldsymbol{V}_{r-1}(s)$

şeklindedir. Bu eşitliklere Frenet formülleri denir [12].

Teorem 2.2.2. $M\subset\mathbb{E}^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in I$ yay parametresi olmak üzere, M eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \alpha'(s) \\ \boldsymbol{n}(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \\ \boldsymbol{b}(s) &= \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

şeklindedir [12].

Teorem 2.2.3. $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{t}(s),\ \boldsymbol{n}(s),\ \boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \\ \boldsymbol{n}(s) &= \boldsymbol{b}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s) \\ \boldsymbol{b}(s) &= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

şeklinde hesaplanır [12].

Teorem 2.2.4. $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre ve M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s),\ \tau(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} \\ \tau(s) &= \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

biçimindedir [14].

Teorem 2.2.5. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi cinsinden verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s),\ \boldsymbol{n}(s),\ \boldsymbol{b}(s)\}$; eğrilik ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s),\ \tau(s)$ olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \\
\boldsymbol{n}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\
\boldsymbol{b}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{n}(s)
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

dir. Frenet formüllerinin matrisel ifadesi ise

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

şeklindedir [14].

Tanım 2.2.8 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}\}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \boldsymbol{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ \boldsymbol{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan çarpıma $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörel çarpım veya dış çarpım denir [12].

Teorem 2.2.6. $M \subset \mathbb{E}^4$ eğrisi (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{E}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= \frac{1}{\|\beta'(s)\|}\beta'(s) \\
\boldsymbol{N}(s) &= \frac{\|\beta'(s)\|^2 \beta''(s) - \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle \beta'(s)}{\left\| \|\beta'(s)\|^2 \beta''(s) - \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle \beta'(s) \right\|} \\
\boldsymbol{B}(s) &= \eta \boldsymbol{E}(s) \wedge \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \\
\boldsymbol{E}(s) &= \eta \frac{\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \beta'''(s)}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \beta'''(s)\|}, \qquad \eta = \pm 1
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

şeklinde hesaplanır [15].

Teorem 2.2.7. $\beta : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s),\ \boldsymbol{E}(s),\ \kappa(s),\ \tau(s),\ \sigma(s)\}$ olmak üzere $\beta(s)$ eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \\
\boldsymbol{N}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{T}(s) + \tau(s)\boldsymbol{B}(s) \\
\boldsymbol{B}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{N}(s) + \sigma(s)\boldsymbol{E}(s) \\
\boldsymbol{E}'(s) &= -\sigma(s)\boldsymbol{B}(s)
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

şeklindedir. Bu formüllerin matrisel ifadesi ise

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{E}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

şeklindedir [15].

Tanım 2.2.9. Bir eğri boyunca $\boldsymbol{N}_1$ normal vektör alanının türevi teğetsel ise $\boldsymbol{N}_1$ e relatif paralel vektör alanı denir [16].

Tanım 2.2.10. α**,** $3-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de C^2 sınıfından regüler bir eğri olsun. α eğrisinin relatif paralel vektör alanları, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde yönlendirilmiş iki boyutlu normal bileşeni ve bir boyutlu tanjant bileşeni olan $3-$boyutlu bir vektör uzayı meydana getirir. Bu vektör uzayının bir bazına relatif paralel adapte edilmiş çatı ya da Bishop çatısı denir.

$\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{N}_1$ olmak üzere $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2\}$, C^2 sınıfından regüler bir eğrinin Bishop çatısı olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} \rangle &= \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 1 \\
\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{N}_1 \rangle &= \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{N}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0
\end{aligned}$$

olduğundan çatının s yay parametresine göre türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{N}_1' \\ \boldsymbol{N}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{N}_2 \end{pmatrix}$$

biçiminde verilir. Böylece $\forall s \in I$ için

$$\kappa = \|\boldsymbol{t}'\| = \|k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\| = \sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}} \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

dır. Burada κ, α eğrisinin eğrilik fonksiyonudur. θ, α eğrisinin Bishop çatısının $\boldsymbol{N}_1$ normal vektör alanı ile Frenet çatısının $\boldsymbol{n}$ asli normal vektör alanı arasındaki açı olmak üzere Bishop çatısının doğal eğrilikleri k_1 ve k_2

$$k_1 = \kappa\cos\theta \text{ ve } k_2 = \kappa\sin\theta \qquad \textbf{(2.2.8)}$$

biçiminde yazılabilir. O halde

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}_1\cos\theta + \boldsymbol{N}_2\sin\theta \qquad \textbf{(2.2.9)}$$

şeklindedir. Buna göre

$$\tan\theta = \frac{k_2}{k_1}$$

olmak üzere

$$\theta = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \qquad \textbf{(2.2.10)}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}' &= -\boldsymbol{N}_1\sin\theta\frac{d\theta}{ds} + \boldsymbol{N}_1'\cos\theta + \boldsymbol{N}_2\cos\theta\frac{d\theta}{ds} + \boldsymbol{N}_2'\sin\theta \\ &= -\kappa\boldsymbol{t} + (-\boldsymbol{N}_1\sin\theta + \boldsymbol{N}_2\cos\theta)\frac{d\theta}{ds} \end{aligned}$$

ve son formülde $\boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}$ Frenet formülü kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{N}_1 \sin\theta + \boldsymbol{N}_2 \cos\theta \\
&\tau = \frac{d\theta}{ds},\ \theta = \int \tau ds
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

elde edilir [16].

Teorem 2.2.8. Birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ eğrisinin $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{E}\}$ Frenet çatısı, $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3\}$ ise paralel transport çatısı olmak üzere bu iki çatı arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{T}(s) \\
\boldsymbol{N} &= \cos\theta(s)\cos\psi(s)\boldsymbol{M}_1 + \left(-\cos\phi(s)\sin\psi(s) + \sin\phi(s)\sin\theta(s)\cos\psi(s)\right)\boldsymbol{M}_2 \\
&\quad + \left(\sin\phi(s)\sin\psi(s) + \cos\phi(s)\sin\theta(s)\cos\psi(s)\right)\boldsymbol{M}_3 \\
\boldsymbol{B} &= \cos\theta(s)\sin\psi(s)\boldsymbol{M}_1 + \left(\cos\phi(s)\cos\psi(s) + \sin\phi(s)\sin\theta(s)\sin\psi(s)\right)\boldsymbol{M}_2 \\
&\quad + \left(-\sin\phi(s)\cos\psi(s) + \cos\phi(s)\sin\theta(s)\sin\phi(s)\right)\boldsymbol{M}_3 \\
\boldsymbol{E} &= -\sin\theta(s)\boldsymbol{M}_1 + \sin\phi(s)\cos\theta(s)\boldsymbol{M}_2 + \cos\phi(s)\cos\theta(s)\boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

ile verilir. Burada ψ; $\boldsymbol{N}$ ile $\boldsymbol{M}_1$ arasındaki, θ; $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{M}_3$ arasındaki açı, ϕ ise $\boldsymbol{B}$ ile $\boldsymbol{M}_2$ arasındaki Euler açılarıdır.

Alternatif paralel çatı denklemleri

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{M}_1' \\ \boldsymbol{M}_2' \\ \boldsymbol{M}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ -k_1^* & 0 & 0 & 0 \\ -k_2^* & 0 & 0 & 0 \\ -k_3^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{M}_1 \\ \boldsymbol{M}_2 \\ \boldsymbol{M}_3 \end{pmatrix}
$$

şeklindedir. Burada k_1^*, k_2^* ve k_3^*, α eğrisinin paralel transport çatısına göre asli eğrilikleridir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$
\begin{aligned}
k_1^* &= \kappa\cos\theta\cos\psi, \\
k_2^* &= \kappa\left(-\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi\right), \\
k_3^* &= \kappa\left(\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi\right).
\end{aligned}
$$

Ayrıca

$$\theta' = \frac{\sigma}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}},\ \psi' = -\tau - \sigma\frac{\sqrt{\sigma^2-(\theta')^2}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}},\ \phi' = -\frac{\sqrt{\sigma^2-(\theta')^2}}{\cos\theta}$$

dır ve

$$\kappa(s) = \sqrt{\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2}$$
$$\tau(s) = -\psi' + \phi'\sin\theta$$
$$\sigma(s) = \frac{\theta'}{\sin\psi}$$
$$\phi'\cos\theta + \theta'\cot\psi = 0$$

eşitlikleri geçerlidir [17].

2.3. Kuaterniyonlar

Tanım 2.3.1. Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Bu dört birim

i) $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{e}_4,\qquad (\boldsymbol{e}_4 = +1,\ \ 1 \le i \le 3)$

ii) $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i \qquad (1 \le i, j \le 3)$

olmak üzere,

$\times$	$+1$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$+1$	$+1$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	-1	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1

şeklindedir. Bu durumda bir reel kuaterniyon

$$q = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

biçiminde ifade edilir. Burada $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ birimleri $3-$boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilirler ve dolayısıyla q kuaterniyonu, S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\boldsymbol{V}_q$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir:

$$S_q = d, \qquad \boldsymbol{V}_q = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3 \ .$$

O halde

$$q = S_q + \boldsymbol{V}_q$$

yazılabilir. Kısaca reel kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \,\middle|\, q = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3,\ d,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

şeklinde gösterilir [18].

Tanım 2.3.2. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar cümlesi üzerinde toplama işlemi,

$$S_{q_1} + S_{q_2} = S_{q_1+q_2} \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{V}_{q_1} \oplus \boldsymbol{V}_{q_2} = \boldsymbol{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ &\quad (q_1, q_2) \to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + \boldsymbol{V}_{q_1 \oplus q_2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $S_{q_1},\ S_{q_2} \in \mathbb{R}$ dir ve $+$ işlemi $\mathbb{R}$ reel Öklid uzayındaki toplama işlemidir. $\boldsymbol{V}_{q_1}$ ve $\boldsymbol{V}_{q_2}$ vektörleri de birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde $(\mathbb{Q}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyon adını alır ve $(0,0,0,0)$ şeklindedir [18].

Tanım 2.3.3. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde çarpma işlemi,

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \boldsymbol{V}_q$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = (\lambda \odot q_1) \oplus (\lambda \odot q_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$,

ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in \mathbb{Q}$,

iii) $(\lambda_1 \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in \mathbb{Q}$,

iv) $1 \odot q = q$.

O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzay $\mathbb{Q}$, kuaterniyonlardaki toplama ve çarpma işlemleri, sırasıyla, "+" ve "." ile gösterilecektir [18].

Tanım 2.3.4. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar cümlesinde kuaterniyonik çarpma işlemi,

$$q_1 = d_1 + a_1\boldsymbol{e}_1 + b_1\boldsymbol{e}_2 + c_1\boldsymbol{e}_3$$
$$q_2 = d_2 + a_2\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + c_2\boldsymbol{e}_3$$

olmak üzere

$$\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(q_1, q_2) \to q_1 \times q_2$$

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1\boldsymbol{e}_1 + b_1\boldsymbol{e}_2 + c_1\boldsymbol{e}_3) \times (d_2 + a_2\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + c_2\boldsymbol{e}_3) \\ &= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (d_1b_2 + b_1d_2 + b_1a_2 - a_1c_2)\boldsymbol{e}_2 + (d_1c_2 + d_2c_1 + a_1b_2 - b_1a_2)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1}S_{q_2} - \left\langle \boldsymbol{V}_{q_1}, \boldsymbol{V}_{q_2} \right\rangle + S_{q_1}\boldsymbol{V}_{q_2} + S_{q_2}\boldsymbol{V}_{q_1} + \boldsymbol{V}_{q_1} \wedge \boldsymbol{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece kuaterniyon çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) İki kuaterniyonun çarpımı bir kuaterniyondur.

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyonlar cümlesi üzerindeki kuaterniyon çarpımının değişme özelliği yoktur. Bu özellikleriyle $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir ve kısaca $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{+1,\, \boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3\}$ olmak üzere, $\mathbb{Q}$ cebirinin boyutu 4 dür. Özel olarak q_1 ve q_2 birer skalar iseler veya vektör kısımları orantılı $(\boldsymbol{V}_{q_2} = \lambda \boldsymbol{V}_{q_1})$ ise

$$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1$$

olur [18].

Tanım 2.3.5. $q = S_q + \boldsymbol{V}_q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonunun eşleniği

$$\begin{aligned} \hat{\ } &: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ q &\to \hat{q} = S_q - \boldsymbol{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve $\hat{q}$ kuaterniyonuna q kuaterniyonunun eşleniği denir. $\boldsymbol{V}_{\hat{q}} = -\boldsymbol{V}_q$ olduğundan

$$\begin{aligned} q \times \hat{q} &= (d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3) \times (d - a\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 - c\boldsymbol{e}_3) \\ &= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$q \times \hat{q} = \hat{q} \times q \geq 0$$

dır ve

$$q \times \hat{q} = \hat{q} \times q = 0 \iff q = 0$$

dır. Ayrıca eşlenik işlemi:

i) $\widehat{(aq_1 + bq_2)} = a\widehat{q_1} + b\widehat{q_2}$,

ii) $\widehat{(q_1 \times q_2)} = \widehat{q_2} \times \widehat{q_1}$,

iii) $\hat{\hat{q}} = q$

özelliklerine sahiptir [18].

Tanım 2.3.6. $q_1,\, q_2 \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları için

$$h:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$$
$$(q_1,q_2)\to h(q_1,q_2)=\frac{1}{2}(q_1\times\hat{q}_2+q_2\times\hat{q}_1) \quad \textbf{(2.3.1)}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna kuaterniyonik iç çarpım denir. Reel değerli, simetrik, bilineer h fonksiyonu iç çarpım aksiyomlarını sağlar [19].

Tanım 2.3.7. Bir $q\in\mathbb{Q}$ kuaterniyonunun normu

$$[N(q)]^2=h(q,q)=q\times\hat{q}=d^2+a^2+b^2+c^2 \quad \textbf{(2.3.2)}$$

eşitliğini sağlayan $N(q)$ reel sayısına denir [18].

Tanım 2.3.8. Bir $q\in\mathbb{Q}$ kuaterniyonunun tersi

$$(\ )^{-1}:\mathbb{Q}-\{0\}\to\mathbb{Q}-\{0\}$$
$$q\to q^{-1}=\frac{\hat{q}}{N(q)}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $\mathbb{Q}$ cebirinde bölme işlemi tanımlanabilir [18].

Tanım 2.3.9. $q_2\neq 0$ olmak üzere, q_1 kuaterniyonunu q_2 kuaterniyonu ile bölmek için, kuaterniyon çarpımının değişme özelliği olmadığından, q_1, q_2^{-1} ile sağdan ve soldan çarpılırsa

$$r_1=q_1\times q_2^{-1}$$
$$r_2=q_2^{-1}\times q_1$$

elde edilir. Burada r_1 kuaterniyonuna q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile sağdan bölümü ve r_2 kuaterniyonuna da q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ve r_2 farklıdır [18].

Tanım 2.3.9. Normu birim olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q_0 birim kuaterniyonu, $[N(q)]^2=h(q,q)=q\times\hat{q}=d^2+a^2+b^2+c^2$ olmak üzere,

$$q_0 = \frac{q}{N(q)} = \frac{d + ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

biçiminde ifade edilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu

$$q_0 = \cos\omega + \boldsymbol{S}_0 \sin\omega$$

formunda da yazılabilir. Burada

$$\cos\omega = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\sin\omega = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

biçimindedir. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman

$$\boldsymbol{S}_0 = \frac{a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir [18].

Tanım 2.3.10. Eğer $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu için

$$q + \hat{q} = 0$$

ise q kuaterniyonuna bir uzaysal kuaterniyon denir. Uzaysal kuaterniyonların kümesi $3-$boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorftur.

Ayrıca, q_1, q_2 gibi iki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyonik çarpımı

$$q_1 \times q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \wedge q_2 \qquad \textbf{(2.3.3)}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, iki uzaysal kuaterniyon birbirine dikse kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına, paralel ise kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skalar çarpımının ters işaretlisine eşit olur [18].

Tanım 2.3.11. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$
$$s \to \gamma(s) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i(s)\boldsymbol{e}_i, \qquad (1 \le i \le 3)$$

olarak tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir [2].

Teorem 2.3.1. $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay-parametresi ile verilsin. $\gamma(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s),\ \boldsymbol{n}_1(s),\ \boldsymbol{n}_2(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{t}(s) = \gamma'(s) \\ &\boldsymbol{n}_1(s) = \frac{1}{N\left(\gamma''(s)\right)}\gamma''(s) \\ &\boldsymbol{n}_2(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3.4)}$$

şeklinde hesaplanır. Bu vektörler arasında

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{n}_1(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) = \boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{n}_2(s) = -1 \\ &\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) = \boldsymbol{n}_2(s) = -\boldsymbol{n}_1(s) \times \boldsymbol{t}(s) \\ &\boldsymbol{n}_1(s) \times \boldsymbol{n}_2(s) = \boldsymbol{t}(s) = -\boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) \\ &\boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{n}_1(s) = -\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}_2(s) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3.5)}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır [3].

Teorem 2.3.2. $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $s \in [0,1]$ herhangi bir parametre olmak üzere, $\gamma(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s),\ \boldsymbol{n}_1(s),\ \boldsymbol{n}_2(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{t}(s) = \frac{1}{v(s)}\gamma'(s) \qquad\qquad N\left(\gamma'(s)\right) = v(s) \\ &\boldsymbol{n}_1(s) = \boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{t}(s) \\ &\boldsymbol{n}_2(s) = \frac{\gamma'(s) \times \gamma''(s) + v(s)v'(s)}{N\left(\gamma'(s) \times \gamma''(s) + v(s)v'(s)\right)} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3.6)}$$

şeklindedir [15].

Teorem 2.3.3. $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $s \in [0,1]$ herhangi bir parametresi ve $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği ile burulması, sırasıyla, $k(s)$, $r(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{N\left(\gamma'(s) \times \gamma''(s) + v(s)v'(s)\right)}{v^3(s)} \qquad N\left(\gamma'(s)\right) = v(s) \\ r(s) &= \frac{h(\gamma'(s) \times \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\left[N\left(\gamma'(s) \times \gamma''(s) + v(s)v'(s)\right)\right]^2} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3.7)}$$

şeklinde hesaplanır [15].

Teorem 2.3.4. $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay-parametresi ile verilsin. γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet $3-$ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)\}$ ve eğrilikleri de $k(s)$, $r(s)$ olmak üzere $\gamma(s)$ eğrisi boyunca $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)\}$ vektörlerinin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= k(s)\boldsymbol{n}_1(s) \\ \boldsymbol{n}_1'(s) &= -k(s)\boldsymbol{t}(s) + r(s)\boldsymbol{n}_2(s) \\ \boldsymbol{n}_2'(s) &= -r(s)\boldsymbol{n}_1(s) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3.8)}$$

biçimindedir. Bu formüllere Frenet formülleri denir. Frenet formüllerinin matrisel ifadesi ise

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}_1' \\ \boldsymbol{n}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_1 \\ \boldsymbol{n}_2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.3.12. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$$\delta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$

$$s \to \delta(s) = \sum_{i=1}^{4} \delta_i(s)\boldsymbol{e}_i \qquad (1 \le i \le 4), \quad (e_4 = 1)$$

şeklinde tanımlanan eğriye kuaterniyonik eğri denir [2].

Tanım 2.3.13. $\delta : I \to \mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. δ kuaterniyonik eğrisinin $\delta(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}_1(s),\ \boldsymbol{N}_2(s),\ \boldsymbol{N}_3(s)\}$ Frenet vektörleri

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= \frac{1}{N\left(\delta'(s)\right)}\delta'(s) \\
\boldsymbol{N}_1(s) &= \frac{\left[N\left(\delta'(s)\right)\right]^2 \delta''(s) - h(\delta'(s), \delta''(s))\delta'(s)}{N\left(\left[N\left(\delta'(s)\right)\right]^2 \delta''(s) - h(\delta'(s), \delta''(s))\delta'(s)\right)} \\
\boldsymbol{N}_2(s) &= \eta \boldsymbol{N}_3(s) \wedge \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \\
\boldsymbol{N}_3(s) &= \eta \frac{\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \delta'''(s)}{N\left(\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \delta'''(s)\right)}, \qquad (\eta = \pm 1)
\end{aligned}
\tag{2.3.9}
$$

şeklindedir [15].

Teorem 2.3.5. $\delta : I \to \mathbb{Q}$, kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. δ kuaterniyonik eğrisinin $\delta(s)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri, sırasıyla, $\kappa(s)$, $k(s)$ ve $(r(s) - \kappa(s))$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{N\left(\left(N\left(\delta'(s)\right)\right)^2 \delta''(s) - h(\delta'(s), \delta''(s))\delta'(s)\right)}{N\left(\delta'(s)\right)^4} \\
k(s) &= \frac{N\left(\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \delta'''(s)\right) N\left(\delta'(s)\right)}{N\left(\left(N\left(\delta'(s)\right)\right)^2 \delta''(s) - h(\delta'(s), \delta''(s))\delta'(s)\right)} \\
r(s) - \kappa(s) &= \frac{h(\delta^{(iv)}(s), \boldsymbol{N}_3(s))}{N\left(\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \delta'''(s)\right) N\left(\delta'(s)\right)}
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

şeklinde hesaplanır [15].

Teorem 2.3.6. $\delta : I \to \mathbb{Q}$, kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. $\delta(s)$ noktasındaki Frenet $4-$ayaklısı $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}_1(s),\ \boldsymbol{N}_2(s),\ \boldsymbol{N}_3(s)\}$ ve eğrilikleri de $\kappa(s)$, $k(s)$ ve $(r(s) - \kappa(s))$ olmak üzere, $\delta(s)$ kuaterniyonik eğrisi boyunca Frenet vektörleri ile eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{N}_1(s)\,, \qquad \kappa(s)=N\left(\boldsymbol{T}'(s)\right), \qquad \boldsymbol{N}_1(s)=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}(s)\\
&\boldsymbol{N}_1'(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{T}(s)+k(s)\boldsymbol{N}_2(s)\,, \qquad \boldsymbol{N}_2(s)=\boldsymbol{n}_1(s)\times\boldsymbol{T}(s)\\
&\boldsymbol{N}_2'(s)=-k(s)\boldsymbol{N}_1(s)+(r(s)-\kappa(s))\boldsymbol{N}_3(s)\,, \qquad \boldsymbol{N}_3(s)=\boldsymbol{n}_2(s)\times\boldsymbol{T}(s)\\
&\boldsymbol{N}_3'(s)=-(r(s)-\kappa(s))\boldsymbol{N}_2(s).
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Bu formüllere Frenet formülleri denir ve matrisel ifadesi

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}'\\ \boldsymbol{N}_1'\\ \boldsymbol{N}_2'\\ \boldsymbol{N}_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa & 0 & 0\\ -\kappa & 0 & k & 0\\ 0 & -k & 0 & (r-\kappa)\\ 0 & 0 & -(r-\kappa) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{N}_1\\ \boldsymbol{N}_2\\ \boldsymbol{N}_3\end{pmatrix}$$

şeklindedir [4]. Burada $\delta(s)$ kuaterniyonik eğrisi öyle seçildi ki kuaterniyonik eğrinin birim teğet vektörü olan $\boldsymbol{T}(s)$ vektörü, $\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{N}(s)\times\widehat{\boldsymbol{T}}(s)$ bağıntısı ile verildi. O halde $\delta(s)$ kuaterniyonik eğrisinin burulması, $\gamma(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliğidir. Ayrıca, $\gamma(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin burulması $r(s)$ ve $\delta(s)$ kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliği $\kappa(s)$ olmak üzere, $\delta(s)$ kuaterniyonik eğrisinin 3. eğriliği $(r(s)-\kappa(s))$ dır [4].

Teorem 2.3.7. $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{E}^3$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. $\forall s\in I$ için $\{\boldsymbol{t}(s),\, \boldsymbol{m}_1(s),\, \boldsymbol{m}_2(s)\}$, γ eğrisinin Bishop (paralel transport) çatısı ve $\{k_1,\, k_2\}$ bu çatıya göre eğrilikler olsun. γ eğrisi boyunca Bishop formülleri

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{t}'(s)=k_1(s)\boldsymbol{m}_1(s)+k_2(s)\boldsymbol{m}_2(s)\,,\\
&\boldsymbol{m}_1'(s)=-k_1(s)\boldsymbol{t}(s)\,,\\
&\boldsymbol{m}_2'(s)=-k_2(s)\boldsymbol{t}(s)
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

şeklindedir. Bu formüllerin matrisel ifadesi

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}'(s)\\ \boldsymbol{m}_1'(s)\\ \boldsymbol{m}_2'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_1 & k_2\\ -k_1 & 0 & 0\\ -k_2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{m}_1\\ \boldsymbol{m}_2\end{pmatrix}$$

ile gösterilir. Burada

$$k(s)=\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}},$$
$$\psi(s)=\arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \quad \textbf{(2.3.13)}$$
$$r(s)=\frac{d\psi}{ds},\ \ \psi=\int r(s)ds$$

bağıntıları geçerlidir [19].

Teorem 2.3.8. $\delta : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi s yay parametresi ile verilsin. $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}_1(s),\ \boldsymbol{N}_2(s),\ \boldsymbol{N}_3(s)\}$, δ kuaterniyonik eğrisinin Frenet çatısı ve $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{M}_1(s),\ \boldsymbol{M}_2(s),\ \boldsymbol{M}_3(s)\}$ kuaterniyonik eğrinin paralel transport (Bishop) çatısı olsun. Bu iki çatı arasında

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{N}_1\\ \boldsymbol{N}_2\\ \boldsymbol{N}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi\\ 0 & \cos\psi\sin\theta\sin\phi+\sin\psi\cos\psi & \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi\\ 0 & -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta & \cos\theta\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2\\ \boldsymbol{M}_3\end{pmatrix}$$

ilişkisi mevcuttur. Burada $\phi,\ \theta$ ve ψ Euler açıları olarak adlandırılır. ϕ, $\boldsymbol{N}_1$ ile $\boldsymbol{M}_1$ arasındaki açı, θ, $\boldsymbol{N}_2$ ile $\boldsymbol{M}_2$ arasındaki açı, ψ, $\boldsymbol{N}_3$ ile $\boldsymbol{M}_3$ arasındaki açıdır. δ kuaterniyonik eğrisinin paralel transport formülleri, $k_1^{\,*}, k_2^{\,*}, k_3^{\,*}$ bu çatıya göre doğal eğrilikler olmak üzere

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}'\\ \boldsymbol{M}_1'\\ \boldsymbol{M}_2'\\ \boldsymbol{M}_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_1^{\,*} & k_2^{\,*} & k_3^{\,*}\\ -k_1^{\,*} & 0 & 0 & 0\\ -k_2^{\,*} & 0 & 0 & 0\\ -k_3^{\,*} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2\\ \boldsymbol{M}_3\end{pmatrix} \quad \textbf{(2.3.14)}$$

dir. Ayrıca $\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3$ ile $\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2,\ \boldsymbol{N}_3$ arasındaki ilişki

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(s)\ \ ,$$
$$\boldsymbol{M}_1=(\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{N}_1+(\cos\psi\sin\theta\sin\phi+\sin\psi\cos\phi)\boldsymbol{N}_2-\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{N}_3\ ,$$
$$\boldsymbol{M}_2=-\sin\psi\cos\theta\boldsymbol{N}_1+\cos\psi\cos\theta\boldsymbol{N}_2+\sin\theta\boldsymbol{N}_3\,,$$
$$\boldsymbol{M}_3=(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{N}_1+(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)\boldsymbol{N}_2+\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{N}_3$$

(2.3.15)

ile verilir. (2.3.11) ve (2.3.15) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_1' =& -\kappa(\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{T} \\
&+(-k(\cos\psi\sin\theta\sin\phi+\sin\psi\sin\phi)+\psi'(-\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\sin\theta\sin\phi) \\
&+\phi'(-\cos\psi\sin\phi-\sin\psi\sin\theta\cos\phi)-\theta'\sin\psi\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{N}_1 \\
&+(k(\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi)+(r-\kappa)\cos\theta\sin\phi+\psi'(-\sin\psi\sin\theta\sin\phi+\cos\psi\sin\phi) \\
&+\phi'(\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\cos\phi)+\theta'\cos\psi\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{N}_2 \\
&+((r-\kappa)(\cos\psi\sin\theta\sin\phi+\sin\psi\sin\phi)+\theta'\sin\theta\sin\phi-\phi'\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{N}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_2' =& \kappa\sin\psi\cos\theta\boldsymbol{T} \\
&+(-k\cos\psi\cos\theta-\psi'\cos\psi\cos\theta+\theta'\sin\psi\sin\theta)\boldsymbol{N}_1 \\
&+[-k\sin\psi\cos\theta-(r-\kappa)\sin\theta-\psi'\sin\psi\cos\theta-\theta'\cos\psi\sin\theta]\boldsymbol{N}_2 \\
&+[(r-\kappa)\cos\psi\cos\theta+\theta'\cos\theta]\boldsymbol{N}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_3' =& -\kappa(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{T} \\
&+[-k(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)+\psi'(-\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\sin\theta\cos\phi)] \\
&+\phi'(\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi)+\theta'\sin\psi\cos\theta\cos\phi]\boldsymbol{N}_1 \\
&+[-(r-\kappa)\cos\theta\cos\phi+k(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi)+\phi'(\cos\psi\sin\theta\sin\phi+\sin\psi\cos\phi) \\
&+\psi'(\sin\psi\sin\theta\cos\phi+\cos\psi\sin\phi)-\theta'\cos\psi\cos\theta\cos\phi]\boldsymbol{N}_2 \\
&+[(r-\kappa)(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)-\theta'\cos\phi\sin\theta-\phi'\cos\theta\sin\phi]\boldsymbol{N}_3
\end{aligned}
$$

(2.3.16)

elde edilir. (2.3.15) denklemlerinin $\boldsymbol{T}'=\kappa\boldsymbol{N}_1$ ile kuaterniyonik iç çarpımı alınırsa

$$
\begin{aligned}
k_1^* &= h(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{M}_1)=\kappa(\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi), \\
k_2^* &= h(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{M}_2)=-\kappa\sin\psi\cos\theta, \qquad \textbf{(2.3.17)} \\
k_3^* &= h(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{M}_3)=\kappa(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2=\left[\kappa(\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi)\right]^2+\left[\kappa\sin\psi\cos\theta\right]^2$$
$$+\left[\kappa(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi)\right]^2$$
$$=\kappa^2\begin{bmatrix}\cos^2\psi\cos^2\phi+\sin^2\psi\sin^2\theta\sin^2\phi-2\cos\psi\cos\phi\sin\psi\sin\theta\sin\phi+\sin^2\psi\cos^2\theta\\+\cos^2\psi\sin^2\phi+\sin^2\psi\sin^2\theta\cos^2\phi+2\cos\psi\sin\phi\sin\psi\sin\theta\cos\phi\end{bmatrix}$$
$$=\kappa^2$$

olduğundan

$$\kappa=\sqrt{\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2}$$

elde edilir.

$\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ ve $\boldsymbol{M}_3$ relatif paralel vektör alanları olduğundan $\boldsymbol{M}_1'$, $\boldsymbol{M}_2'$ ve $\boldsymbol{M}_3'$ ifadelerinin normal bileşenleri sıfırdır. Dolayısıyla

$$h(\boldsymbol{M}_2',\boldsymbol{N}_1)=h(\boldsymbol{M}_2',\boldsymbol{N}_3)=h(\boldsymbol{M}_3',\boldsymbol{N}_3)=0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{M}_2',\boldsymbol{N}_1)&=h(\kappa\sin\psi\cos\theta\boldsymbol{T}+(-k\cos\psi\cos\theta-\psi'\cos\psi\cos\theta+\theta'\sin\psi\sin\theta)\boldsymbol{N}_1\\&\quad+[-k\sin\psi\cos\theta-(r-\kappa)\sin\theta-\psi'\sin\psi\cos\theta-\theta'\cos\psi\sin\theta]\boldsymbol{N}_2\\&\quad+[(r-\kappa)\cos\psi\cos\theta+\theta'\cos\theta]\boldsymbol{N}_3,\boldsymbol{N}_1)\\&=0\end{aligned}$$

olur. $\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}_1(s),\ \boldsymbol{N}_2(s),\ \boldsymbol{N}_3(s)\}$ dik çatı belirttiğinden

$$\begin{aligned}&-k\cos\psi\cos\theta-\psi'\cos\psi\cos\theta+\theta'\sin\psi\sin\theta=0\\&k=-\psi'+\theta'\tan\psi\tan\theta\end{aligned}\qquad\textbf{(2.3.18)}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{M}_2',\boldsymbol{N}_3)&=h(\kappa\sin\psi\cos\theta\boldsymbol{T}+(-k\cos\psi\cos\theta-\psi'\cos\psi\cos\theta+\theta'\sin\psi\sin\theta)\boldsymbol{N}_1\\&\quad+[-k\sin\psi\cos\theta-(r-\kappa)\sin\theta-\psi'\sin\psi\cos\theta-\theta'\cos\psi\sin\theta]\boldsymbol{N}_2\\&\quad+[(r-\kappa)\cos\psi\cos\theta+\theta'\cos\theta]\boldsymbol{N}_3,\boldsymbol{N}_3)\\&=0\end{aligned}$$

ve $\boldsymbol{T}(s)$, $\boldsymbol{N}_1(s)$, $\boldsymbol{N}_2(s)$ ve $\boldsymbol{N}_3(s)$ ortonormal sistem oluşturduğundan dolayı

$$(r-\kappa)\cos\psi\cos\theta+\theta'\cos\theta=0$$
$$r-\kappa=-\frac{\theta'}{\cos\psi} \qquad \textbf{(2.3.19)}$$

sonucuna ulaşılır. Aynı işlem $\boldsymbol{M}_3'$ ve $\boldsymbol{N}_3$ için uygulanırsa

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{M}_2', \boldsymbol{N}_3) = {} & h(-\kappa(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{T} \\ & +[-k(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)+\psi'(-\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\sin\theta\cos\phi)] \\ & +\phi'(\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\theta\sin\phi)+\theta'\sin\psi\cos\theta\cos\phi]\boldsymbol{N}_1 \\ & +[-(r-\kappa)\cos\theta\cos\phi+k(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi) \\ & +\phi'(\cos\psi\sin\theta\sin\phi+\sin\psi\cos\phi)+\psi'(\sin\psi\sin\theta\cos\phi+\cos\psi\sin\phi) \\ & -\theta'\cos\psi\cos\theta\cos\phi]\boldsymbol{N}_2+[(r-\kappa)(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi) \\ & -\theta'\cos\phi\sin\theta-\phi'\cos\theta\sin\phi]\boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{N}_3) \\ = {} & 0 \end{aligned}$$

ifadesinden

$$(r-\kappa)(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)-\theta'\cos\phi\sin\theta-\phi'\cos\theta\sin\phi=0 \qquad \textbf{(2.3.20)}$$

elde edilir. (2.3.19) sonucu (2.3.20) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (r-\kappa)(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)-\theta'\cos\phi\sin\theta-\phi'\cos\theta\sin\phi=0 \\ & -\frac{\theta'}{\cos\psi}(-\cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi)-\theta'\cos\phi\sin\theta-\phi'\cos\theta\sin\phi=0 \\ & \theta'\sin\theta\cos\phi-\theta'\tan\psi\sin\phi-\theta'\cos\phi\sin\theta-\phi'\cos\theta\sin\phi=0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$\theta'\tan\psi+\phi'\cos\theta=0 \qquad \textbf{(2.3.21)}$$

elde edilir. $\theta'=-\dfrac{(r-\kappa)}{\sqrt{\kappa^2+k^2}}$ seçelim. (2.3.19) gereği $\cos\psi=\dfrac{1}{\sqrt{\kappa^2+k^2}}$ bulunur.

Şimdi ϕ' ifadesini hesaplayalım. (2.3.19) dan

$$\cos\psi=-\frac{\theta'}{(r-\kappa)} \qquad \textbf{(2.3.22)}$$

olduğu açıktır. $\cos^2\psi+\sin^2\psi=1$ bağıntısı gereği

$$\left(\frac{\theta'}{(r-\kappa)}\right)^2+\sin^2\psi=1,$$

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{(r-\kappa)^2 - \theta'^2}}{(r-\kappa)} \qquad \textbf{(2.3.23)}$$

elde edilir. (2.3.21), (2.3.22) ve (2.3.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$-\frac{(r-\kappa)}{\sqrt{\kappa^2+k^2}}\frac{\dfrac{\sqrt{(r-\kappa)^2-\theta'^2}}{(r-\kappa)}}{-\dfrac{\theta'}{(r-\kappa)}}+\phi'\cos\theta=0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\phi' = \frac{\sqrt{(r-\kappa)^2-(\theta')^2}}{\cos\theta} \qquad \textbf{(2.3.24)}$$

elde edilir. (2.3.18), (2.3.19) ve (2.3.23) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\psi' = -k - \tan\theta\sqrt{(r-\kappa)^2-(\theta')^2} \qquad \textbf{(2.3.25)}$$

sonucuna ulaşılır [19].

BÖLÜM 3. $\mathbb{E}^3$, 3 BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölümde**,** Smarandache eğrileri tanımlanmış, bu eğrilerin Frenet ve Bishop çatıları için yapılan tanımlar ve bu çatıların elemanları verilmiştir.

3.1. $\mathbb{E}^3$, $3-$Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Tanım 3.1.1. $\alpha=\alpha(s)$**,** $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ bu eğrinin Serret-Frenet çatısı olsun. $\boldsymbol{tn}-$Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n})$$

ile tanımlanır. κ ve τ, α eğrisinin, sırasıyla, eğriliği ve burulması olsun. $\boldsymbol{tn}-$ Smarandache eğrisinin Frenet elemanları $\left\{\boldsymbol{t}_\xi,\boldsymbol{n}_\xi,\boldsymbol{b}_\xi,\kappa_\xi,\tau_\xi\right\}$ olmak üzere

$$\boldsymbol{t}_\xi=\frac{-\kappa\boldsymbol{t}+\kappa\boldsymbol{n}+\tau\boldsymbol{b}}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}$$

şeklindedir. λ_1, λ_2 ve λ_3;

$$\begin{aligned}
\lambda_1&=-\left[\kappa^2\left(2\kappa^2+\tau^2\right)+\tau\left(\tau\kappa'-\kappa\tau'\right)\right],\\
\lambda_2&=-\left[\kappa^2\left(2\kappa^2+3\tau^2\right)+\tau\left(\tau^3-\tau\kappa'+\kappa\tau'\right)\right],\\
\lambda_3&=\kappa\left[\tau\left(2\kappa^2+\tau^2\right)-2\left(\tau\kappa'-\kappa\tau'\right)\right]
\end{aligned}$$

olmak üzere $\boldsymbol{n}_\xi$ asli normal vektör alanı

$$\boldsymbol{n}_\xi=\frac{\lambda_1\boldsymbol{t}+\lambda_2\boldsymbol{n}+\lambda_3\boldsymbol{b}}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}$$

ile verilir. Binormal vektör alanı ise

$$\boldsymbol{b}_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\left[\left(\kappa\lambda_3-\tau\lambda_2\right)\boldsymbol{t}+\left(\kappa\lambda_3+\tau\lambda_1\right)\boldsymbol{n}-\kappa\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\boldsymbol{b}\right]$$

şeklindedir. Ayrıca $\boldsymbol{tn}-$Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)}}{\left(2\kappa^2+\tau^2\right)^2},$$

$$\tau_\xi = \frac{\sqrt{2}\left[\left(\kappa^2+\tau^2-\kappa'\right)\left(\kappa\rho_3+\tau\rho_1\right)+\kappa\left(\kappa\tau+\tau'\right)\left(\rho_2-\rho_1\right)+\left(\kappa^2+\kappa'\right)\left(\kappa\rho_3-\tau\rho_2\right)\right]}{\left[\tau\left(2\kappa^2+\tau^2\right)+\kappa\tau'-\tau\kappa'\right]^2+\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)^2+\left(2\kappa^3+\kappa\tau^2\right)^2}$$

şeklindedir. τ_ξ ifadesinde geçen ρ_1,ρ_2 ve ρ_3 için,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \kappa^3+\kappa\left(\tau^2-3\kappa'\right)-\kappa'',\\
\rho_2 &= -\kappa^3-\kappa\left(\tau^2+3\kappa'\right)-3\tau\tau'+\kappa'',\\
\rho_3 &= -\kappa^2\tau-\tau^3+2\tau\kappa'+\kappa\tau'+\tau''
\end{aligned}$$

bağıntıları geçerlidir [5].

Tanım 3.1.2. $\alpha=\alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ bu eğrinin Serret-Frenet çatısı olsun. $\boldsymbol{nb}-$Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{b}\right)$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\boldsymbol{nb}-$Smarandache eğrisinin Frenet elemanlarıarı, $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları cinsinden hesaplanabilir [5].

Tanım 3.1.3. $\alpha=\alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ bu eğrinin Serret-Frenet çatısı olsun. $\boldsymbol{tnb}-$Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{b}\right)$$

ile tanımlanır. Ek olarak $\boldsymbol{tnb}-$Smarandache eğrisinin Frenet elemanları, $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları cinsinden hesaplanabilir [5].

3.2. $\mathbb{E}^3$, $3-$Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Tanım 3.2.1. $\alpha=\alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2\}$ bu eğrinin Bishop çatısı olsun. $\boldsymbol{tN}_1-$Smarandache eğrisi

$$\xi(s_\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{N}_1\right)$$

ile tanımlanır. k_1 ve k_2, $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre eğrilikleri ve $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b},\ \kappa,\ \tau\}$, bu eğrinin Frenet elemanları olsun. Ayrıca $\boldsymbol{tN}_1-$Smarandache eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları, sırasıyla, $\{\boldsymbol{t}_\xi,\ \boldsymbol{n}_\xi,\ \boldsymbol{b}_\xi,\ \kappa_\xi,\ \tau_\xi\}$ ve $\{\boldsymbol{t}_\xi,\ \boldsymbol{N}_{1\xi},\ \boldsymbol{N}_{2\xi},\ k_{1\xi},\ k_{2\xi}\}$ olsun. $\xi=\xi(s_\xi)$ eğrisinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=\frac{-1}{\sqrt{2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}\left(k_1\boldsymbol{t}-k_1\boldsymbol{N}_1-k_2\boldsymbol{N}_2\right)$$

şeklindedir. $\xi=\xi(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ ve $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ normal vektörlerini $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Bishop elemanları cinsinden yazabilmek için λ_1, λ_2 ve λ_3 ;

$$\begin{aligned}
\lambda_1&=-\dot{k}_1k_2^{\,2}-2k_1^{\,4}-3k_1^{\,2}k_2^{\,2}-k_2^{\,4}+k_1k_2\dot{k}_2,\\
\lambda_2&=-2k_1^{\,4}-k_1^{\,2}k_2^{\,2}+\dot{k}_1k_2^{\,2}-k_1k_2\dot{k}_2,\\
\lambda_3&=-2k_1^{\,3}k_2-k_1k_2^{\,3}+2k_1^{\,2}\dot{k}_2-2k_1\dot{k}_1k_2
\end{aligned}$$

ve σ_1, σ_2 ve σ_3 ;

$$\begin{aligned}
\sigma_1&=\lambda_3k_1-\lambda_2k_2,\\
\sigma_2&=\lambda_3k_1+\lambda_1k_2,\\
\sigma_3&=-k_1\left(\lambda_1+\lambda_2\right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. O halde $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ ve $\boldsymbol{N}_{2\xi}$

$$N_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\cos\theta_\xi\lambda_1-\sin\theta_\xi\sigma_1\right)\boldsymbol{t}\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\cos\theta_\xi\lambda_2-\sin\theta_\xi\sigma_2\right)\boldsymbol{N}_1\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\cos\theta_\xi\lambda_3-\sin\theta_\xi\sigma_3\right)\boldsymbol{N}_2\end{array}\right\}$$

$$N_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sin\theta_\xi\lambda_1+\cos\theta_\xi\sigma_1\right)\boldsymbol{t}\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sin\theta_\xi\lambda_2+\cos\theta_\xi\sigma_2\right)\boldsymbol{N}_1\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sin\theta_\xi\lambda_3+\cos\theta_\xi\sigma_3\right)\boldsymbol{N}_2\end{array}\right\}$$

olarak bulunur. Burada θ_ξ, $\boldsymbol{n}_\xi$ ile $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektörleri arasındaki açıdır. $\boldsymbol{tN}_1-$ Smarandache eğrisinin doğal eğrilikleri ise

$$k_{1\xi}=\frac{\sqrt{2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)}\cos\theta_\xi}{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^2},$$

$$k_{2\xi}=\frac{\sqrt{2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)}\sin\theta_\xi}{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^2}$$

şeklindedir [10].

Tanım 3.2.2. $\alpha=\alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\}$ bu eğrinin Bishop çatısı olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{tN}_2-$Smarandache eğrisi

$$\xi(s_\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{N}_2)$$

ile tanımlanır. k_1 ve k_2, $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre eğrilikleri ve $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b},\kappa,\tau\}$ bu eğrinin Frenet elemanları olsun. $\boldsymbol{tN}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları, sırasıyla, $\{\boldsymbol{t}_\xi,\boldsymbol{n}_\xi,\boldsymbol{b}_\xi,\kappa_\xi,\tau_\xi\}$ ve $\{\boldsymbol{t}_\xi,\boldsymbol{N}_{1\xi},\boldsymbol{N}_{2\xi},k_{1\xi},k_{2\xi}\}$ olmak üzere bu eğrinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=\frac{-1}{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}}\left(k_2\boldsymbol{t}-k_1\boldsymbol{N}_1-k_2\boldsymbol{N}_2\right)$$

şeklindedir. $\xi=\xi(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ ve $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ normal vektörlerini $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Bishop elemanları cinsinden yazabilmek için λ_1, λ_2 ve λ_3;

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -k_1^2\dot{k}_2 - k_1^4 - 3k_1^2k_2^2 - 2k_2^4 + k_1\dot{k}_1k_2, \\
\lambda_2 &= -k_1^3k_2 - 2k_1k_2^3 + 2\dot{k}_1k_2^2 - 2k_1k_2\dot{k}_2, \\
\lambda_3 &= -k_1^2k_2^2 - 2k_2^4 + k_1^2\dot{k}_2 - k_1\dot{k}_1k_2
\end{aligned}$$

ve σ_1, σ_2 ve σ_3;

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda_3k_1 - \lambda_2k_2, \\
\sigma_2 &= (\lambda_3+\lambda_1)k_2, \\
\sigma_3 &= -(\lambda_2k_2+\lambda_1k_1)
\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. O halde $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ ve $\boldsymbol{N}_{2\xi}$

$$\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\left\{\begin{array}{l}
\left(\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\cos\theta_\xi\lambda_1 - \sin\theta_\xi\sigma_1\right)\boldsymbol{t} \\
+\left(\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\cos\theta_\xi\lambda_2 - \sin\theta_\xi\sigma_2\right)\boldsymbol{N}_1 \\
+\left(\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\cos\theta_\xi\lambda_3 - \sin\theta_\xi\sigma_3\right)\boldsymbol{N}_2
\end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\left\{\begin{array}{l}
\left(\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\sin\theta_\xi\lambda_1 + \cos\theta_\xi\sigma_1\right)\boldsymbol{t} \\
+\left(\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\sin\theta_\xi\lambda_2 + \cos\theta_\xi\sigma_2\right)\boldsymbol{N}_1 \\
+\left(\sqrt{k_1^2+2k_2^2}\sin\theta_\xi\lambda_3 + \cos\theta_\xi\sigma_3\right)\boldsymbol{N}_2
\end{array}\right\}$$

olarak bulunur. Burada θ_ξ, $\boldsymbol{n}_\xi$ ile $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektörleri arasındaki açıdır. $\boldsymbol{tN}_2-$ Smarandache eğrisinin doğal eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}
k_{1\xi} &= \frac{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)}\cos\theta_\xi}{(k_1^2+2k_2^2)^2}, \\
k_{2\xi} &= \frac{\sqrt{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)}\sin\theta_\xi}{(k_1^2+2k_2^2)^2}
\end{aligned}$$

şeklindedir [10].

Tanım 3.2.3. $\alpha=\alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2\}$ bu eğrinin Bishop çatısı olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2-$Smarandache eğrisi

$$\xi(s_\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2)$$

ile tanımlanır. $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b},\ \kappa,\ \tau\}$ ve $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2,\ k_1,\ k_2\}$, $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin, sırasıyla, Frenet ve Bishop elemanları olsun. Ayrıca $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları, sırasıyla, $\{\boldsymbol{t}_\xi,\ \boldsymbol{n}_\xi,\ \boldsymbol{b}_\xi,\ \kappa_\xi,\ \tau_\xi\}$ ve $\{\boldsymbol{t}_\xi,\ \boldsymbol{N}_{1\xi},\ \boldsymbol{N}_{2\xi},\ k_{1\xi},\ k_{2\xi}\}$ olmak üzere bu eğrinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=-\boldsymbol{t}$$

şeklindedir. $\xi=\xi(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ ve $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ normal vektörleri ise

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{1\xi}&=\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\left\{\left(k_2\sin\theta_\xi-k_1\cos\theta_\xi\right)\boldsymbol{N}_1-\left(k_2\cos\theta_\xi+k_1\sin\theta_\xi\right)\boldsymbol{N}_2\right\}\\ \boldsymbol{N}_{2\xi}&=\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\left\{-\left(k_1\sin\theta_\xi+k_2\cos\theta_\xi\right)\boldsymbol{N}_1+\left(k_1\cos\theta_\xi-k_2\sin\theta_\xi\right)\boldsymbol{N}_2\right\}\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada θ_ξ, $\boldsymbol{n}_\xi$ ile $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektörleri arasındaki açıdır. $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2-$Smarandache eğrisinin doğal eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}k_{1\xi}&=\frac{\sqrt{2\left(k_1^2+k_2^2\right)}\cos\theta_\xi}{k_1+k_2},\\ k_{2\xi}&=\frac{\sqrt{2\left(k_1^2+k_2^2\right)}\sin\theta_\xi}{k_1+k_2}\end{aligned}$$

şeklindedir [10].

Tanım 3.2.4. $\alpha=\alpha(s)$, $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri ve $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{N}_2\}$ bu eğrinin Bishop çatısı olsun. $\boldsymbol{t}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2-$Smarandache eğrisi

$$\xi(s_\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2)$$

ile tanımlanır. $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre doğal eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b}\}$, bu çatıya göre eğrilik ve burulma, sırasıyla, κ ve τ ile gösterilsin. Ayrıca $\{\boldsymbol{t}_\xi,\ \boldsymbol{n}_\xi,\ \boldsymbol{b}_\xi\}$, $\boldsymbol{t}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet çatısı, $\{\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{N}_{1\xi}, \boldsymbol{N}_{2\xi}\}$ bu eğrinin Bishop çatısı ve $k_{1\xi}$ ile $k_{2\xi}$ Bishop çatısına göre eğrilikler olsun. $\boldsymbol{t}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2-$Smarandache eğrisinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=\frac{-1}{\sqrt{2\left(k_1^{\ 2}+k_1k_2+k_2^{\ 2}\right)}}\left(\left(k_1+k_2\right)\boldsymbol{t}-k_1\boldsymbol{N}_1-k_2\boldsymbol{N}_2\right)$$

şeklindedir. $\xi=\xi(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ ve $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ normal vektörlerini $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin Bishop elemanları cinsinden yazabilmek için λ_1, λ_2, λ_3, σ_1, σ_2 ve σ_3 katsayılarını tanımlayalım. O halde, λ_1, λ_2 ve λ_3;

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -2\dot{k}_1k_2^{\ 2}-k_1^{\ 2}\dot{k}_2+k_1k_2\dot{k}_2-2k_1^{\ 4}-2k_1^{\ 3}k_2-4k_1^{\ 2}k_2^{\ 2}-2k_1k_2^{\ 3}-2k_2^{\ 4}+k_1\dot{k}_1k_2+\dot{k}_1k_2^{\ 2},\\
\lambda_2 &= -2k_1^{\ 4}-4k_1^{\ 3}k_2-4k_1^{\ 2}k_2^{\ 2}-2k_1k_2^{\ 3}+k_1\dot{k}_1k_2+2\dot{k}_1k_2^{\ 2}-k_1^{\ 2}\dot{k}_2-2k_1k_2\dot{k}_2,\\
\lambda_3 &= -2k_1^{\ 3}k_2-4k_1^{\ 2}k_2^{\ 2}-4k_1k_2^{\ 3}-2k_2^{\ 4}+2k_1^{\ 2}\dot{k}_2+k_1k_2\dot{k}_2-2k_1\dot{k}_1k_2-\dot{k}_1k_2^{\ 2}
\end{aligned}$$

ve σ_1, σ_2 ve σ_3;

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda_3k_1-\lambda_2k_2,\\
\sigma_2 &= \lambda_3\left(k_1+k_2\right)+\lambda_1k_2,\\
\sigma_3 &= -\left(\lambda_2\left(k_1+k_2\right)+\lambda_1k_1\right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bunlardan yararlanılarak $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ ve $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ normal vektör alanları ise

$$\boldsymbol{N}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^{\ 2}+k_1k_2+k_2^{\ 2}\right)}\sqrt{\lambda_1^{\ 2}+\lambda_2^{\ 2}+\lambda_3^{\ 2}}}\left\{\begin{array}{l}
\left(\sqrt{2\left(k_1^{\ 2}+k_1k_2+k_2^{\ 2}\right)}\cos\theta_\xi\lambda_1-\sin\theta_\xi\sigma_1\right)\boldsymbol{t}\\
+\left(\sqrt{2\left(k_1^{\ 2}+k_1k_2+k_2^{\ 2}\right)}\cos\theta_\xi\lambda_2-\sin\theta_\xi\sigma_2\right)\boldsymbol{N}_1\\
+\left(\sqrt{2\left(k_1^{\ 2}+k_1k_2+k_2^{\ 2}\right)}\cos\theta_\xi\lambda_3-\sin\theta_\xi\sigma_3\right)\boldsymbol{N}_2
\end{array}\right\}$$

$$N_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \begin{Bmatrix} \left(\sqrt{2\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)} \sin\theta_\xi \lambda_1 + \cos\theta_\xi \sigma_1\right) \boldsymbol{t} \\ + \left(\sqrt{2\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)} \sin\theta_\xi \lambda_2 + \cos\theta_\xi \sigma_2\right) N_1 \\ + \left(\sqrt{2\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)} \sin\theta_\xi \lambda_3 + \cos\theta_\xi \sigma_3\right) N_2 \end{Bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada θ_ξ, $\boldsymbol{n}_\xi$ ile $N_{1\xi}$ vektörleri arasındaki açıdır. ξ eğrisinin doğal eğrilikleri

$$k_{1\xi} = \frac{\sqrt{3\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)} \cos\theta_\xi}{4\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)^2},$$

$$k_{2\xi} = \frac{\sqrt{3\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)} \sin\theta_\xi}{4\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)^2}$$

biçimindedir [10].

3.3. $\mathbb{E}^3$, 3 – Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrileri

Tanım 3.3.1. $\mathbb{E}^3$, 3 – boyutlu Öklid uzayında birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri $\gamma = \gamma(s)$ ve $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\}$ bu eğrinin Serret-Frenet çatısı olsun. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tn}_1$ – Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{n}_1\right)$$

ile tanımlanır. k ve r, γ eğrisinin Frenet eğrilikleri ve $\{\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{n}_{1\xi}, \boldsymbol{n}_{2\xi}, k_\xi, r_\xi\}$, ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tn}_1$ – Smarandache eğrisinin Frenet elemanları olmak üzere ξ eğrisinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + r^2}}\left(-k\boldsymbol{t} + k\boldsymbol{n}_1 + r\boldsymbol{n}_2\right) \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\lambda_1 = -2k^4 - \dot{k}r^2 - k^2r^2 + kr\dot{r},$$
$$\lambda_2 = -2k^4 - 3k^2r^2 + \dot{k}r^2 - r^4 - kr\dot{r},$$
$$\lambda_3 = 2k^3r + 2k^2\dot{r} + kr^3 - 2k\dot{k}r$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{n}_{1\xi} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}\left(\lambda_1\boldsymbol{t} + \lambda_2\boldsymbol{n}_1 + \lambda_3\boldsymbol{n}_2\right)$$

dir. Buna ek olarak $\boldsymbol{n}_{2\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + r^2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}\left(\sigma_4 + \sigma_1\boldsymbol{t} + \sigma_2\boldsymbol{n}_1 + \sigma_3\boldsymbol{n}_2\right)$$

şeklinde hesaplanır. Burada σ_1, σ_2, σ_3 ve σ_4 için

$$\sigma_1 = k\lambda_3 - r\lambda_2,$$
$$\sigma_2 = k\lambda_3 + r\lambda_1,$$
$$\sigma_3 = -k(\lambda_1 + \lambda_2),$$
$$\sigma_4 = k\lambda_1 - k\lambda_2 - r\lambda_3$$

bağıntıları geçerlidir. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tn}_1$ – Smarandache eğrisinin eğriliği ve burulması ise, sırasıyla,

$$k_\xi = \frac{\sqrt{2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)}}{\left(2k^2 + r^2\right)^2},$$

$$r_\xi = \frac{\sqrt{2}.\left[\left(\dot{k} + k^2\right)\left(k\rho_3 - r\rho_2\right) + \left(k^2 - \dot{k} + r^2\right)\left(k\rho_3 + r\rho_1\right) + k\left(kr + \dot{r}\right)\left(\rho_1 + \rho_2\right)\right]}{\left[\left(2k\dot{k} + r\dot{r}\right)^2 + \left(2k^2r + k\dot{r} - \dot{k}r + r^3\right)^2 + \left(k\dot{r} - \dot{k}r\right)^2 + \left(2k^3 + kr^2\right)^2\right]}$$

şeklinde bulunur. Burada ρ_1, ρ_2 ve ρ_3, sırasıyla,

$$\rho_1 = -\ddot{k} - 3k\dot{k} + \dot{k}r + 2k\dot{r} + k^3 + kr^2,$$
$$\rho_2 = -3k\dot{k} - k^3 + k^2r + \ddot{k} - \ddot{r} - 3r\dot{r} - kr^2 + r^3,$$
$$\rho_3 = -k^2r + 2\dot{k}r - 3r\dot{r} - r^3 + k\dot{r} + \ddot{r}$$

ile verilir [11].

Tanım 3.3.2. $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri $\gamma=\gamma(s)$ ve $\{\boldsymbol{t},\,\boldsymbol{n}_1,\,\boldsymbol{n}_2\}$ bu eğrinin Serret-Frenet çatısı olsun. O halde uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tn}_2-$Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}_2\right)$$

ile tanımlanır. k ve r, γ eğrisinin Frenet eğrilikleri, $\left\{\boldsymbol{t}_\xi,\,\boldsymbol{n}_{1\xi},\,\boldsymbol{n}_{2\xi},\,k_\xi,\,r_\xi\right\}$, ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tn}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet elemanları olmak üzere ξ eğrisinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=\boldsymbol{n}_1$$

biçiminde hesaplanır. ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tn}_2-$Smarandache eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\boldsymbol{n}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{k^2+r^2}}\left(-k\boldsymbol{t}+r\boldsymbol{n}_2\right)$$

dir. Buna ek olarak binormal vektör alanı $\boldsymbol{n}_{2\xi}$

$$\boldsymbol{n}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{k^2+r^2}}\left(r\boldsymbol{t}+k\boldsymbol{n}_2\right)$$

olarak bulunur. ξ nin eğriliği ve burulması ise, sırasıyla,

$$k_\xi=\frac{\sqrt{2\left(k^2+r^2\right)}}{k-r}\ ,$$

$$r_\xi=\frac{\sqrt{2}\left(r-k\right)\left[\rho_3\left(-k^2+kr\right)-\rho_1\left(kr-r^2\right)\right]}{\left(k-r\right)^2\left(\dot{k}-\dot{r}\right)^2+\left(k^2r-2kr^2+r^3\right)^2+\left(-2k^2r+kr^2+k^3\right)^2}$$

şeklindedir. Burada ρ_1, ρ_2 ve ρ_3 ise

$$\rho_1 = -3k\dot{k} + \dot{k}r + 2k\dot{r},$$
$$\rho_2 = -k^3 + k^2 r + \ddot{k} - \ddot{r} - kr^2 + r^3,$$
$$\rho_3 = 2\dot{k}r - 3r\dot{r} + k\dot{r}$$

olarak elde edilir [11].

Tanım 3.3.3. $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri $\gamma = \gamma(s)$ ve $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\}$ bu eğrinin Serret-Frenet çatısı olsun. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 -$ Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2\right)$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\{k, r\}$, γ eğrisinin Frenet eğrilikleri, $\{\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{n}_{1\xi}, \boldsymbol{n}_{2\xi}, k_\xi, r_\xi\}$, ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 -$ Smarandache eğrisinin Frenet elemanları olmak üzere ξ eğrisinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2r^2}}\left(-k\boldsymbol{t} - r\boldsymbol{n}_1 + r\boldsymbol{n}_2\right)$$

şeklinde bulunur. $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ asli normal vektör alanı ise

$$\boldsymbol{n}_{1\xi} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}\left(\lambda_1\boldsymbol{t} + \lambda_2\boldsymbol{n}_1 + \lambda_3\boldsymbol{n}_2\right)$$

şeklindedir. Burada λ_1, λ_2 ve λ_3 için

$$\lambda_1 = -k^3 r - 2\dot{k}r^2 + 2kr^3 + 2kr\dot{r},$$
$$\lambda_2 = -k^4 - k^2\dot{r} - 3k^2r^2 - 2r^4 + k\dot{k}r,$$
$$\lambda_3 = -k^2r^2 + k^2\dot{r} - 2r^4 - k\dot{k}r$$

bağıntıları geçerlidir. Binormal vektör alanı ise

$$\sigma_1 = -r\left(\lambda_2 + \lambda_3\right),$$
$$\sigma_2 = k\lambda_3 + r\lambda_1,$$
$$\sigma_3 = -k\lambda_2 + r\lambda_1,$$
$$\sigma_4 = k\lambda_1 + r\lambda_2 - r\lambda_3$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{n}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{k^2+2r^2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\left(\sigma_4+\sigma_1\boldsymbol{t}+\sigma_2\boldsymbol{n}_1+\sigma_3\boldsymbol{n}_2\right)$$

şeklindedir. ξ nin eğriliği ve burulması ise, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\rho_1&=-\ddot{k}+\dot{k}r+2k\dot{r}+k^3+kr^2,\\
\rho_2&=-3k\dot{k}+k^2r-\ddot{r}-3r\dot{r}+r^3,\\
\rho_3&=-k^2r-3r\dot{r}-r^3+\ddot{r}
\end{aligned}$$

biçiminde olmak üzere

$$k_\xi=\frac{\sqrt{2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)}}{\left(k^2+2r^2\right)^2}\ ,$$

$$r_\xi=\frac{\sqrt{2}\left[r\left(-\dot{k}+kr\right)\left(\rho_2+\rho_3\right)+\left(k^2+\dot{r}+r^2\right)\left(k\rho_3+r\rho_1\right)+\left(-r^2+\dot{r}\right)\left(k\rho_2-r\rho_1\right)\right]}{\left[\left(k\dot{k}+2r\dot{r}\right)^2+\left(k^2r+2r^3\right)^2+\left(k\dot{r}-\dot{k}r\right)^2+\left(k^3+k\dot{r}+2kr^2-\dot{k}r\right)^2\right]}$$

ile ifade edilir [11].

Tanım 3.3.4. $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri $\gamma=\gamma(s)$ ve $\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\}$ bu eğrinin Serret-Frenet çatısı olsun. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2-$Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2\right)$$

ile tanımlanır. $\{k, r\}$, γ eğrisinin Frenet eğrilikleri ve $\{\boldsymbol{t}_\xi,\boldsymbol{n}_{1\xi},\boldsymbol{n}_{2\xi},k_\xi,r_\xi\}$, ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet elemanları olmak üzere ξ eğrisinin tanjant vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=\frac{1}{\sqrt{2\left(k^2-kr+r^2\right)}}\left(-k\boldsymbol{t}+\left(k-r\right)\boldsymbol{n}_1+r\boldsymbol{n}_2\right)$$

şeklindedir. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tn}_1\boldsymbol{n}_2 -$ Smarandache eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -2k^4 + 4k^3r + k\dot{k}r - 4k^2r^2 - 2\dot{k}r^2 + 2kr^3 - k^2\dot{r} + 2kr\dot{r}, \\
\lambda_2 &= -2k^4 - k^2\dot{r} - 4k^2r^2 + 2k^3r + k\dot{k}r - kr\dot{r} + 2kr^3 + \dot{k}r^2 - 2r^4, \\
\lambda_3 &= 2k^3r - k^2r^2 + 2k^2\dot{r} + 4kr^3 - kr\dot{r} - 2r^4 - k\dot{k}r + \dot{k}r^2
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{n}_{1\xi} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \left(\lambda_1 \boldsymbol{t} + \lambda_2 \boldsymbol{n}_1 + \lambda_3 \boldsymbol{n}_2 \right)$$

dir. Buna ek olarak binormal vektör alanı $\boldsymbol{n}_{2\xi}$ ise

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (k - r)\lambda_3 - r\lambda_2, \\
\sigma_2 &= k\lambda_3 + r\lambda_1, \\
\sigma_3 &= -k\lambda_2 - (k - r)\lambda_1, \\
\sigma_4 &= k\lambda_1 - (k - r)\lambda_2 - r\lambda_3
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\left(k^2 - kr + r^2\right)}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \left(\sigma_4 + \sigma_1 \boldsymbol{t} + \sigma_2 \boldsymbol{n}_1 + \sigma_3 \boldsymbol{n}_2 \right)$$

ile ifade edilir. Son olarak ξ uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisinin eğriliği ve burulması, sırasıyla,

$$k_\xi = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\left[2\left(k^2 - kr + r^2\right)\right]^2} \ ,$$

$$r_\xi = \frac{\sqrt{3}\left[\left(-\dot{k} - k^2 + kr\right)\left((r-k)\rho_3 + r\rho_2\right) + \left(k^2 - \dot{k} + \dot{r} + r^2\right)\left(k\rho_3 + r\rho_1\right) + \left(kr - r^2 + \dot{r}\right)\left(k\rho_2 + (k-r)\rho_1\right)\right]}{\left[\left(-2k\dot{k} + \dot{k}r - 2r\dot{r} + k\dot{r}\right)^2 + \left(2k^2r - 2kr^2 + k\dot{r} + 2r^3 - \dot{k}r\right)^2 + \left(k\dot{r} - \dot{k}r\right)^2 + \left(k^3 + k\dot{r} + 2kr^2 - \dot{k}r - 2k^2r + k^3\right)^2\right]}$$

şeklindedir. Burada ρ_1, ρ_2 ve ρ_3 için

$$\rho_1 = -\ddot{k} - 3k\dot{k} + \dot{k}r + 2k\dot{r} + k^3 + kr^2,$$
$$\rho_2 = -3k\dot{k} - k^3 + k^2 r + \ddot{k} - \ddot{r} - 3r\dot{r} - kr^2 + r^3,$$
$$\rho_3 = -k^2 r + 2\dot{k}r - 3r\dot{r} - r^3 + k\dot{r} + \ddot{r}$$

bağıntıları geçerlidir [11].

BÖLÜM 4. BISHOP ÇATISINA GÖRE KUATERNİYONİK SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $3-$boyutlu Öklid uzayındaki uzaysal kuaterniyonik ve $4-$boyutlu Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Bishop (paralel transport) çatısına göre Smarandache eğrileri tanıtılacaktır. Buna ek olarak Smarandache eğrisinin Frenet çatısı, Frenet eğrilikleri, Bishop çatısı ve doğal eğrilikleri; ilişkili olduğu esas eğrinin Bishop elemanları cinsinden hesaplanacaktır. Son olarak bir örnekle kuaterniyonik ve uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrileri, grafikle görselleştirilecektir.

4.1. Bishop Çatısına Göre Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrileri

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayında

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$
$$s \to \gamma(s) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i(s)\boldsymbol{e}_i, \qquad (1 \le i \le 3)$$

olarak tanımlanan uzaysal kuaterniyonik eğrilerin Bishop çatısına göre Smarandache eğrileri, birim hızlı bir eğri yardımıyla tanımlanıp, Frenet ve Bishop elemanları, üretildiği eğrinin elemanları cinsinden hesaplanacaktır.

Tanım 4.1.1. $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2\}$, γ eğrisinin Bishop çatısı olsun. Bu durumda uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1-$Smarandache eğrisi

$$\xi(s_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{m}_1) \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ , ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1-$Smarandache eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.1.1. $\gamma=\gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\xi=\xi(s_\xi)$, γ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1-$ Smarandache eğrisi olsun. $\xi(s_\xi)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop çatısı $\{\boldsymbol{t}_\xi,\, \boldsymbol{m}_{1\xi},\, \boldsymbol{m}_{2\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}$ ve $k_{2\xi}$, Frenet elemanları $\{\boldsymbol{t}_\xi,\, \boldsymbol{n}_{1\xi},\, \boldsymbol{n}_{2\xi},\, k_\xi,\, r_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1-$ Smarandache eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları, $\gamma(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop elemanları olan $\{\boldsymbol{t},\, \boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2,\, k_1,\, k_2\}$ cinsinden yazılabilir.

İspat: Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1-$Smarandache eğrisinin $\gamma=\gamma(s)$ eğrisine göre Bishop elemanlarını araştıralım. (4.1.1) denklemi s ye göre diferensiyellenirse

$$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2-k_1\boldsymbol{t}\right) \tag{4.1.2}$$

elde edilir. s_ξ yay parametresi olduğundan $\dfrac{d\xi}{ds_\xi}=\boldsymbol{t}_\xi$ dir. Dolayısıyla

$$\boldsymbol{t}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.3}$$

yazılır. $\{\boldsymbol{t},\, \boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2\}$, γ eğrisinin Bishop çatısı olduğundan $h(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t})=h(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_1)=h(\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_2)=1$ ve $h(\boldsymbol{t},\boldsymbol{m}_1)=h(\boldsymbol{t},\boldsymbol{m}_2)=h(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2)=0$ bağıntıları geçerlidir. Bu eşitlikler göz önüne alınır ve kuaterniyonik iç çarpım yapılırsa

$$h\left(\boldsymbol{t}_\xi\frac{ds_\xi}{ds},\boldsymbol{t}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\right)$$

ifadesinden

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2=\frac{1}{2}\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)$$

$$\frac{ds_\xi}{ds}=\sqrt{\frac{2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}{2}} \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.4) eşitliği (4.1.3) denkleminde yerine yazılırsa t_ξ vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=\frac{-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2}{\sqrt{2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}} \tag{4.1.5}$$

olarak elde edilir. (4.1.5) ifadesi s ye göre diferensiyellenirse

$$\frac{d\boldsymbol{t}_\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{\begin{bmatrix}\sqrt{2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}\left(-\dot{k}_1\boldsymbol{t}-k_1\dot{\boldsymbol{t}}+\dot{k}_1\boldsymbol{m}_1+k_1\dot{\boldsymbol{m}}_1+\dot{k}_2\boldsymbol{m}_2+k_2\dot{\boldsymbol{m}}_2\right)\\-\frac{1}{2}\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(4k_1\dot{k}_1+2k_2\dot{k}_2\right)\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\end{bmatrix}}{2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\left(-\dot{k}_1\boldsymbol{t}-k_1\left(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)+\dot{k}_1\boldsymbol{m}_1-k_1^{\,2}\boldsymbol{t}+\dot{k}_2\boldsymbol{m}_2-k_2^{\,2}\boldsymbol{t}\right)\\-\left(2k_1\dot{k}_1+k_2\dot{k}_2\right)\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\end{bmatrix}}{\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\left(-\dot{k}_1\boldsymbol{t}-k_1^{\,2}\boldsymbol{t}-k_2^{\,2}\boldsymbol{t}-k_1^{\,2}\boldsymbol{m}_1+\dot{k}_1\boldsymbol{m}_1-k_1k_2\boldsymbol{m}_2+\dot{k}_2\boldsymbol{m}_2\right)\\-\left(2k_1\dot{k}_1+k_2\dot{k}_2\right)\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\end{bmatrix}}{\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}_\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.6}$$

bulunur. Burada a_0, a_1 ve a_2

$$\begin{aligned}a_0&=-2k_1^{\,4}-3k_1^{\,2}k_2^{\,2}-\dot{k}_1k_2^{\,2}-k_2^{\,4}+\dot{k}_2k_2k_1,\\a_1&=-2k_1^{\,4}-k_1^{\,2}k_2^{\,2}+\dot{k}_1k_2^{\,2}-k_1k_2\dot{k}_2,\\a_2&=-2k_1^{\,3}k_2+2k_1^{\,2}\dot{k}_2-k_1k_2^{\,3}-2k_1\dot{k}_1k_2\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

olarak alınmıştır. Son olarak (4.1.4) ve (4.1.6) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\frac{d\boldsymbol{t}_\xi}{ds_\xi}=\frac{1}{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{ds}{ds_\xi}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)$$

$$\boldsymbol{t}_\xi'=\frac{\sqrt{2}}{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^2}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.8}$$

elde edilir. ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1-$Smarandache eğrisinin Frenet çatısına göre eğriliği $k_\xi=N\left(\boldsymbol{t}_\xi'\right)$ dir. O halde (4.1.8) den $N\left(\boldsymbol{t}_\xi'\right)$ hesaplanırsa

$$k_\xi=N\left(\boldsymbol{t}_\xi'\right)=\frac{\sqrt{2\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^2} \tag{4.1.9}$$

bulunur. ξ eğrisinin asli normal vektör alanı, (4.1.8) ve (4.1.9) dan

$$\boldsymbol{n}_{1\xi}=\frac{\xi''}{N\left(\xi''\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^2}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)\frac{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^2}{\sqrt{2\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}$$

$$\boldsymbol{n}_{1\xi}=\frac{\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}} \tag{4.1.10}$$

şeklindedir.

Şimdi binormal vektör alanını hesaplayalım. ξ uzaysal kuaterniyonik eğri olduğundan (2.3.5) gereği,

$$\boldsymbol{n}_{2\xi}=\boldsymbol{t}_\xi\times\boldsymbol{n}_{1\xi}$$

bağıntısı geçerlidir. İki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyonik çarpımı için (2.3.3) eşitliğinden

$$\boldsymbol{n}_{2\xi}=-\left\langle\boldsymbol{t}_\xi,\boldsymbol{n}_{1\xi}\right\rangle+\boldsymbol{t}_\xi\wedge\boldsymbol{n}_{1\xi}$$

ilişkisi mevcuttur. Burada $\left\{\boldsymbol{t}_\xi,\ \boldsymbol{n}_{1\xi},\ \boldsymbol{n}_{2\xi}\right\}$ ortonormal bir sistem oluşturduğundan,

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \boldsymbol{t}_{\xi} \wedge \boldsymbol{n}_{1\xi} \tag{4.1.11}$$

elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.10) eşitlikleri (4.1.11) ifadesinde kullanılırsa,

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2k_1^2 + k_2^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{t} & \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 \\ -k_1 & k_1 & k_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

yazılır. Böylece

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2k_1^2 + k_2^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}} \left[\left(k_1 a_2 - k_2 a_1\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1 a_2 + k_2 a_0\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(-k_1 a_1 - k_1 a_0\right)\boldsymbol{m}_2 \right] \tag{4.1.12}$$

elde edilir. Kısalık için b_0, b_1 ve b_2

$$\begin{aligned} b_0 &= k_1 a_2 - k_2 a_1, \\ b_1 &= k_1 a_2 + k_2 a_0, \\ b_2 &= -k_1\left(a_0 + a_1\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa (4.1.12) ifadesi

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2k_1^2 + k_2^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}} \left(b_0 \boldsymbol{t} + b_1 \boldsymbol{m}_1 + b_2 \boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.13}$$

şeklinde bulunur. Şimdi $\boldsymbol{tm}_1 -$Smarandache eğrisinin r_{ξ} burulmasını hesaplayalım. Bunun için $\dot{\xi}$ ifadesinde s parametresine göre türev alınırsa

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1 \boldsymbol{t} + k_1 \boldsymbol{m}_1 + k_2 \boldsymbol{m}_2\right)$$

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dot{k}_1 \boldsymbol{t} - k_1 \dot{\boldsymbol{t}} + \dot{k}_1 \boldsymbol{m}_1 + k_1 \dot{\boldsymbol{m}}_1 + \dot{k}_2 \boldsymbol{m}_2 + k_2 \dot{\boldsymbol{m}}_2\right)$$

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\dot{k}_1 \boldsymbol{t} - k_1\left(k_1 \boldsymbol{m}_1 + k_2 \boldsymbol{m}_2\right) + \dot{k}_1 \boldsymbol{m}_1 - k_1^2 \boldsymbol{t} + \dot{k}_2 \boldsymbol{m}_2 - k_2^2 t\right]$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\dot{k}_1 - k_1^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1^2 + \dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(-k_1 k_2 + \dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\right] \qquad \textbf{(4.1.14)}$$

elde edilir. Aynı şekilde s ye göre (4.1.14) denkleminin türevi alınırsa

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \left(-\ddot{k}_1 - 2k_1\dot{k}_1 - 2k_2\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\dot{k}_1 - k_1^2 - k_2^2\right)\left(k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) + \left(-2k_1\dot{k}_1 + \ddot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 \\ +\left(-k_1^2 + \dot{k}_1\right)\left(-k_1\boldsymbol{t}\right) + \left(-\dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2 + \ddot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2 + \left(-k_1 k_2 + \dot{k}_2\right)\left(-k_2\boldsymbol{t}\right) \end{bmatrix}$$

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \left(-\ddot{k}_1 - 2k_1\dot{k}_1 - 2k_2\dot{k}_2 + k_1^3 - k_1\dot{k}_1 + k_1 k_2^2 - k_2\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t} \\ +\left(-k_1\dot{k}_1 - k_1^3 - k_1 k_2^2 - 2k_1\dot{k}_1 + \ddot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 \\ +\left(-\dot{k}_1 k_2 - k_1^2 k_2 - k_2^3 - \dot{k}_1 k_2 - k_1\dot{k}_2 + \ddot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa $\dddot{\xi}$ ifadesinde $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{m}_1$ ve $\boldsymbol{m}_2$ nin katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} c_0 &= -\ddot{k}_1 - 3k_1\dot{k}_1 - 3k_2\dot{k}_2 + k_1^3 + k_1 k_2^2, \\ c_1 &= -3k_1\dot{k}_1 - k_1^3 - k_1 k_2^2 + \ddot{k}_1, \\ c_2 &= -2\dot{k}_1 k_2 - k_1^2 k_2 - k_2^3 - k_1\dot{k}_2 + \ddot{k}_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_0\boldsymbol{t} + c_1\boldsymbol{m}_1 + c_2\boldsymbol{m}_2\right) \qquad \textbf{(4.1.15)}$$

şeklinde bulunur. Böylece türev formüllerinden

$$\dot{\xi} \times \ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\dot{k}_1 - k_1^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1^2 + \dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(-k_1 k_2 + \dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\right]$$

elde edilir. Burada kuaterniyonik çarpımın özellikleri kullanılırsa, ξ eğrisi uzaysal kuaterniyonik eğri olduğundan;

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{m}_2 = -1, \\ &\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = -\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{t}, \\ &\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{t} = -\boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{m}_1, \\ &\boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{m}_1 = -\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{m}_2 \end{aligned}$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılar göz önüne alınarak $\dot{\xi}\times\ddot{\xi}$ hesaplanırsa

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\times\left(-\dot{k}_1-k_1^2-k_2^2\right)\boldsymbol{t}\\+\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\times\left(-k_1^2+\dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\times\left(-k_1k_2+\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{array}\right\}$$

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}-k_1\dot{k}_1-k_1^3-k_1k_2^2+\left(k_1\dot{k}_1+k_1^3+k_1k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2+\left(-\dot{k}_1k_2-k_1^2k_2-k_2^3\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(k_1^3-k_1\dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_2+k_1^3-k_1\dot{k}_1+\left(k_1^2k_2-k_2\dot{k}_1\right)\boldsymbol{t}\\+\left(-k_1^2k_2+k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_1^2k_2+k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t}+k_2^2k_1-k_2\dot{k}_2\end{array}\right\}$$

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{2}\left\{-2k_1\dot{k}_1-k_2\dot{k}_2+\left(k_1\dot{k}_2-k_2\dot{k}_1\right)\boldsymbol{t}+\left(-\dot{k}_1k_2-2k_1^2k_2-k_2^3+k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1+\left(2k_1^3+k_1k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2\right\}$$

(4.1.16)

bulunur. (4.1.15) ve (4.1.16) denklemleri göz önüne alınır ve kuaterniyonik iç çarpım yapılırsa

$$h(\dot{\xi}\times\ddot{\xi},\dddot{\xi})=\frac{1}{2\sqrt{2}}h\left(\left[\begin{array}{l}-2k_1\dot{k}_1-k_2\dot{k}_2+\left(k_1\dot{k}_2-k_2\dot{k}_1\right)\boldsymbol{t}\\+\left(-\dot{k}_1k_2-2k_1^2k_2-k_2^3+k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1+\left(2k_1^3+k_1k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2\end{array}\right],c_0\boldsymbol{t}+c_1\boldsymbol{m}_1+c_2\boldsymbol{m}_2\right)$$

$$h(\dot{\xi}\times\ddot{\xi},\dddot{\xi})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[c_0\left(k_1\dot{k}_2-k_2\dot{k}_1\right)+c_1\left(-\dot{k}_1k_2-2k_1^2k_2-k_2^3+k_1\dot{k}_2\right)+c_2\left(2k_1^3+k_1k_2^2\right)\right]$$

(4.1.17)

elde edilir. Şimdi $\left[N\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}\right)\right]^2$ değerini bulalım. Bunun için ilk önce v, $\dot{v}$ ve $v\dot{v}$ değerleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}v&=N\left(\dot{\xi}\right)\\&=N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\right)\\&=\sqrt{\frac{2k_1^2+k_2^2}{2}}\end{aligned}$$

dir. Buradan türev alınırsa

$$\dot{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2k_1^2 + k_2^2}}\left(\frac{4k_1\dot{k}_1 + 2k_2\dot{k}_2}{2}\right)$$

$$\dot{v} = \frac{2k_1\dot{k}_1 + k_2\dot{k}_2}{\sqrt{4k_1^2 + 2k_2^2}}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$v\dot{v} = \frac{2k_1\dot{k}_1 + k_2\dot{k}_2}{2} \quad \textbf{(4.1.18)}$$

elde edilir. (4.1.16) ve (4.1.18) den

$$\dot{\xi} \times \ddot{\xi} + v\dot{v} = \frac{1}{2}\left[\left(k_1\dot{k}_2 - k_2\dot{k}_1\right)\boldsymbol{t} + \left(-\dot{k}_1k_2 - 2k_1^2k_2 - k_2^3 + k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(2k_1^3 + k_1k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2\right]$$

yazılabilir. O halde $\left[N\left(\dot{\xi} \times \ddot{\xi} + v\dot{v}\right)\right]^2$ ifadesi

$$\left[N\left(\dot{\xi} \times \ddot{\xi} + v\dot{v}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\left(k_1\dot{k}_2 - k_2\dot{k}_1\right)^2 + \left(-\dot{k}_1k_2 - 2k_1^2k_2 - k_2^3 + k_1\dot{k}_2\right)^2 + \left(2k_1^3 + k_1k_2^2\right)^2\right]$$

(4.1.19)

şeklindedir. Son olarak (4.1.17) ve (4.1.19) eşitlikleri (2.3.7) denkleminde yerine yazılırsa r_ξ burulması

$$r_\xi = \frac{\sqrt{2}\left[c_0\left(k_1\dot{k}_2 - k_2\dot{k}_1\right) + c_1\left(-\dot{k}_1k_2 - 2k_1^2k_2 - k_2^3 + k_1\dot{k}_2\right) + c_2\left(2k_1^3 + k_1k_2^2\right)\right]}{\left(k_1\dot{k}_2 - k_2\dot{k}_1\right)^2 + \left(-\dot{k}_1k_2 - 2k_1^2k_2 - k_2^3 + k_1\dot{k}_2\right)^2 + \left(2k_1^3 + k_1k_2^2\right)^2}$$

şeklinde bulunur.

$\boldsymbol{m}_{1\xi}$ ile $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ arasındaki açı θ_ξ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_{1\xi} &= \boldsymbol{n}_{1\xi}\cos\theta_\xi - \boldsymbol{n}_{2\xi}\sin\theta_\xi \\ \boldsymbol{m}_{2\xi} &= \boldsymbol{n}_{1\xi}\sin\theta_\xi + \boldsymbol{n}_{2\xi}\cos\theta_\xi \end{aligned} \quad \textbf{(4.1.20)}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\theta_\xi = \int r_\xi\left(s_\xi\right)ds_\xi$ dir. (4.1.10) ve (4.1.13) ifadeleri (4.1.20) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{m}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)\cos\theta_\xi-\frac{1}{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}}\frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\left(b_0\boldsymbol{t}+b_1\boldsymbol{m}_1+b_2\boldsymbol{m}_2\right)\sin\theta_\xi$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenleme yapılırsa $\boldsymbol{m}_{1\xi}$,

$$\boldsymbol{m}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{\left(2k_1^2+k_2^2\right)\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}\begin{bmatrix}\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\cos\theta_\xi a_0-\sin\theta_\xi b_0\right)\boldsymbol{t}\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\cos\theta_\xi a_1-\sin\theta_\xi b_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\cos\theta_\xi a_2-\sin\theta_\xi b_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde $\boldsymbol{m}_{2\xi}$ hesaplanırsa

$$\boldsymbol{m}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)\sin\theta_\xi+\frac{1}{\sqrt{2k_1^2+k_2^2}}\frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\left(b_0\boldsymbol{t}+b_1\boldsymbol{m}_1+b_2\boldsymbol{m}_2\right)\cos\theta_\xi$$

bulunur. Buradan gerekli düzenleme yapılırsa

$$\boldsymbol{m}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{\left(2k_1^2+k_2^2\right)\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}\begin{bmatrix}\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sin\theta_\xi a_0+\cos\theta_\xi b_0\right)\boldsymbol{t}\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sin\theta_\xi a_1+\cos\theta_\xi b_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(\sqrt{2k_1^2+k_2^2}\sin\theta_\xi a_2+\cos\theta_\xi b_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

elde edilir.

ξ nin doğal eğriliklerini elde etmek için (2.3.13) deki $k_\xi=\sqrt{k_{1\xi}^2+k_{2\xi}^2}$ ifadesini göz önüne alalım. Açıkça görülmektedir ki $k_{1\xi}$ ve $k_{2\xi}$ için,

$$\begin{aligned}k_{1\xi}&=k_\xi\cos\theta_\xi,\\k_{2\xi}&=k_\xi\sin\theta_\xi\end{aligned}\qquad\textbf{(4.1.21)}$$

yazılabilir. (4.1.9) ifadesi bu eşitliklerde yerine yazıldığında $k_{1\xi}$ ve $k_{2\xi}$

$$k_{1\xi}=\frac{\sqrt{2\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}{\left(2k_1^2+k_2^2\right)^2}\cos\theta_\xi,$$

$$k_{2\xi} = \frac{\sqrt{2\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2\right)}}{\left(2k_1^2 + k_2^2\right)^2} \sin\theta_\xi$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.1.2. $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2\}$, γ nın Bishop çatısı olsun. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2 -$Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.22}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ, ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2 -$Smarandache eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.1.2. $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\xi = \xi\left(s_\xi\right)$, γ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2 -$Smarandache eğrisi olsun. $\xi\left(s_\xi\right)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop çatısı $\{\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{m}_{1\xi}, \boldsymbol{m}_{2\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}$ ve $k_{2\xi}$, Frenet elemanları $\{\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{n}_{1\xi}, \boldsymbol{n}_{2\xi}, k_\xi, r_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\xi\left(s_\xi\right)$ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2 -$Smarandache eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları, $\gamma(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop elemanları olan $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, k_1, k_2\}$ cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2 -$Smarandache eğrisinin, $\gamma = \gamma(s)$ eğrisine göre Frenet ve Bishop elemanlarını bulalım. (4.1.22) denkleminin s ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2 - k_2\boldsymbol{t}\right) \tag{4.1.23}$$

elde edilir. Burada s_ξ, ξ uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisinin yay parametresi olduğundan

$$\boldsymbol{t}_\xi \frac{ds_\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.24}$$

yazılabilir. (4.1.24) denklemine kendisi ile kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{t}_\xi \frac{ds_\xi}{ds}, \boldsymbol{t}_\xi \frac{ds_\xi}{ds}\right) = h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right)\right)$$

bulunur. Ayrıca $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2\}$ ortonormal baz olduğundan

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2 h\left(\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{t}_\xi\right) = \frac{1}{2}\left[k_2^{\,2} h\left(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}\right) + k_1^{\,2} h\left(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_1\right) + k_2^{\,2} h\left(\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_2\right)\right]$$

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2 = \frac{k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}}{2}$$

yazılır ve dolayısıyla

$$\frac{ds_\xi}{ds} = \sqrt{\frac{k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}}{2}} \tag{4.1.25}$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.1.24) denkleminde kullanılırsa $\boldsymbol{t}_\xi$ teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{t}_\xi = \frac{-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2}{\sqrt{k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}}} \tag{4.1.26}$$

şeklinde bulunur. (4.1.26) denkleminin s parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\frac{d\boldsymbol{t}_\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds} = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}}\left(-\dot{k}_2\boldsymbol{t} - k_2\dot{\boldsymbol{t}} + \dot{k}_1\boldsymbol{m}_1 + k_1\dot{\boldsymbol{m}}_1 + \dot{k}_2\boldsymbol{m}_2 + k_2\dot{\boldsymbol{m}}_2\right) \\ -\frac{1}{2}\left(k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2k_1\dot{k}_1 + 4k_2\dot{k}_2\right)\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \end{bmatrix}}{k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \left(k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}\right)\left(-\dot{k}_2\boldsymbol{t} - k_1k_2\boldsymbol{m}_1 - k_2^{\,2}\boldsymbol{m}_2 + \dot{k}_1\boldsymbol{m}_1 - k_1^{\,2}\boldsymbol{t} + \dot{k}_2\boldsymbol{m}_2 - k_2^{\,2}\boldsymbol{t}\right) \\ -\left(k_1\dot{k}_1 + 2k_2\dot{k}_2\right)\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \end{bmatrix}}{\left(k_1^{\,2} + 2k_2^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(4.1.27)

elde edilir. Kısalık için a_0, a_1 ve a_2,

$$a_0 = -k_1^2\dot{k}_2 - k_1^4 - 3k_1^2k_2^2 - 2k_2^4 + k_1\dot{k}_1k_2,$$
$$a_1 = -k_1^3k_2 - 2k_1k_2^3 + 2\dot{k}_1k_2^2 - 2k_1k_2\dot{k}_2,$$
$$a_2 = -k_1^2k_2^2 + k_1^2\dot{k}_2 - 2k_2^4 - k_1\dot{k}_1k_2$$

olarak alınır ve (4.1.25) denklemi göz önüne alınırsa (4.1.27) denklemi

$$\frac{d\boldsymbol{t}_\xi}{ds_\xi} = \frac{1}{\left(k_1^2 + 2k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{ds}{ds_\xi}\left(a_0\boldsymbol{t} + a_1\boldsymbol{m}_1 + a_2\boldsymbol{m}_2\right)$$

$$\boldsymbol{t}_\xi' = \frac{\sqrt{2}}{\left(k_1^2 + 2k_2^2\right)^2}\left(a_0\boldsymbol{t} + a_1\boldsymbol{m}_1 + a_2\boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.28}$$

şeklinde elde edilir. ξ uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisinin Frenet çatısına göre eğriliği $k_\xi = N\left(\boldsymbol{t}_\xi'\right)$ olduğundan

$$k_\xi = N\left(\boldsymbol{t}_\xi'\right) = \frac{\sqrt{2\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2\right)}}{\left(k_1^2 + 2k_2^2\right)^2} \tag{4.1.29}$$

olarak hesaplanır. ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2$ − Smarandache eğrisinin asli normal vektör alanı ise, (4.1.28) ve (4.1.29) dan

$$\boldsymbol{n}_{1\xi} = \frac{\xi''}{N\left(\xi''\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\left(k_1^2 + 2k_2^2\right)^2}\left(a_0\boldsymbol{t} + a_1\boldsymbol{m}_1 + a_2\boldsymbol{m}_2\right)\frac{\left(k_1^2 + 2k_2^2\right)^2}{\sqrt{2\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2\right)}}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ için

$$\boldsymbol{n}_{1\xi} = \frac{a_0\boldsymbol{t} + a_1\boldsymbol{m}_1 + a_2\boldsymbol{m}_2}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}} \tag{4.1.30}$$

yazılır.

Şimdi binormal vektör alanını hesaplayalım. (4.1.11) eşitliğinden $\boldsymbol{n}_{2\xi} = \boldsymbol{t}_\xi \wedge \boldsymbol{n}_{1\xi}$ olduğu biliniyor. (4.1.26) ve (4.1.30) daki $\boldsymbol{t}_\xi$ ve $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ ifadeleri (4.1.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{t} & \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 \\ -k_2 & k_1 & k_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

bulunur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}} \left[\left(k_1 a_2 - k_2 a_1\right) \boldsymbol{t} + \left(k_2 a_2 + k_2 a_0\right) \boldsymbol{m}_1 + \left(-k_2 a_1 - k_1 a_0\right) \boldsymbol{m}_2 \right]$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$\begin{aligned} b_0 &= k_1 a_2 - k_2 a_1, \\ b_1 &= k_2 (a_2 + a_0), \\ b_2 &= -k_2 a_1 - k_1 a_0 \end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}} \left(b_0 \boldsymbol{t} + b_1 \boldsymbol{m}_1 + b_2 \boldsymbol{m}_2 \right) \qquad \textbf{(4.1.31)}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $\boldsymbol{tm}_2$ − Smarandache eğrisinin r_ξ burulmasını hesaplayalım. Bunun için (4.1.23) denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-k_2 \boldsymbol{t} + k_1 \boldsymbol{m}_1 + k_2 \boldsymbol{m}_2 \right), \\ \ddot{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\dot{k}_2 \boldsymbol{t} - k_2 \dot{\boldsymbol{t}} + \dot{k}_1 \boldsymbol{m}_1 + k_1 \dot{\boldsymbol{m}}_1 + \dot{k}_2 \boldsymbol{m}_2 + k_2 \dot{\boldsymbol{m}}_2 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\dot{k}_2 \boldsymbol{t} - k_2 \left(k_1 \boldsymbol{m}_1 + k_2 \boldsymbol{m}_2 \right) + \dot{k}_1 \boldsymbol{m}_1 - k_1^2 \boldsymbol{t} + \dot{k}_2 \boldsymbol{m}_2 - k_2^2 \boldsymbol{t} \right)$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\dot{k}_2 - k_1^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1k_2 + \dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(-k_2^2 + \dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\right] \tag{4.1.32}$$

denklemi elde edilir. Aynı şekilde ξ eğrisinin üçüncü türevi

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \left(-\ddot{k}_2 - 2k_1\dot{k}_1 - 2k_2\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-\dot{k}_2 - k_1^2 - k_2^2\right)\left(k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) + \left(-\dot{k}_1k_2 - k_1\dot{k}_2 + \ddot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 \\ -\left(-k_1k_2 + \dot{k}_1\right)k_1\boldsymbol{t} + \left(-2k_2\dot{k}_2 + \ddot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2 - \left(-k_2^2 + \dot{k}_2\right)k_2\boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \left(-\ddot{k}_2 - 2k_1\dot{k}_1 - 2k_2\dot{k}_2 + k_1^2k_2 - k_1\dot{k}_1 + k_2^3 - k_2\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t} \\ +\left(-\dot{k}_2k_1 - k_1^3 - k_1k_2^2 - \dot{k}_1k_2 - k_1\dot{k}_2 + \ddot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 \\ +\left(-\dot{k}_2k_2 - k_1^2k_2 - k_2^3 - 2k_2\dot{k}_2 + \ddot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa, $\dddot{\xi}$ îfadesinde $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1$ ve $\boldsymbol{m}_2$ nin katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} c_0 &= -\ddot{k}_2 - 3k_1\dot{k}_1 - 3k_2\dot{k}_2 + k_1^2k_2 + k_2^3, \\ c_1 &= -2k_1\dot{k}_2 - k_1^3 - k_1k_2^2 - \dot{k}_1k_2 + \ddot{k}_1 \end{aligned}$$

ve

$$c_2 = -3\dot{k}_2k_2 - k_1^2k_2 - k_2^3 + \ddot{k}_2$$

olmak üzere

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_0\boldsymbol{t} + c_1\boldsymbol{m}_1 + c_2\boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.33}$$

bulunur. Böylece türev formüllerinden

$$\dot{\xi} \times \ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\dot{k}_2 - k_1^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_1k_2 + \dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(-k_2^2 + \dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\right]$$

$$\dot{\xi} \times \ddot{\xi} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \times \left[\left(-\dot{k}_2 - k_1^2 - k_2^2\right)\boldsymbol{t}\right] \\ +\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \times \left[\left(-k_1k_2 + \dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1\right] \\ +\left(-k_2\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right) \times \left[\left(-k_2^2 + \dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\right] \end{array}\right\}$$

elde edilir. Burada kuaterniyonik çarpımın özellikleri göz önüne alınırsa

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}-k_2\dot{k}_2-k_1^2k_2-k_2^3+\left(k_1\dot{k}_2+k_1^3+k_1k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2+\left(-k_2\dot{k}_2-k_2k_1^2-k_2^3\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{m}_2+k_1^2k_2-k_1\dot{k}_1+\left(k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{t}\\+\left(-k_2^3+k_2\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_1k_2^2+k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t}+k_2^3-k_2\dot{k}_2\end{array}\right\}$$

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{2}\left\{-k_1\dot{k}_1-2k_2\dot{k}_2+\left(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1^2k_2-2k_2^3\right)\boldsymbol{m}_1+\left(k_1\dot{k}_2+k_1^3+2k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{m}_2\right\}$$

(4.1.34)

elde edilir. (4.1.33) ve (4.1.34) denklemleri göz önüne alınır ve kuaterniyonik iç çarpım işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned}h\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi},\dddot{\xi}\right)&=\frac{1}{2\sqrt{2}}h\left(\left[\begin{array}{l}-k_1\dot{k}_1-2k_2\dot{k}_2+\left(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1^2k_2-2k_2^3\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(k_1\dot{k}_2+k_1^3+2k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{array}\right],c_0\boldsymbol{t}+c_1\boldsymbol{m}_1+c_2\boldsymbol{m}_2\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[c_0\left(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\right)+c_1\left(-k_1^2k_2-2k_2^3\right)+c_2\left(k_1\dot{k}_2+k_1^3+2k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\right)\right]\end{aligned}$$

(4.1.35)

ifadesi bulunur. Ayrıca $v\dot{v}$ değeri için

$$\begin{aligned}v&=N\left(\dot{\xi}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}N\left(-k_2\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\end{aligned}$$

yazılır ve dolayısıyla

$$v=\sqrt{\frac{k_1^2+2k_2^2}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\dot{v}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{k_1^2+2k_2^2}}\left(\frac{2k_1\dot{k}_1+4k_2\dot{k}_2}{2}\right)=\frac{k_1\dot{k}_1+k_2\dot{k}_2}{\sqrt{2k_1^2+4k_2^2}}$$

$$v\dot{v}=\frac{k_1\dot{k}_1+2k_2\dot{k}_2}{2} \tag{4.1.36}$$

bulunur. (4.1.34) ve (4.1.36) eşitliklerinden

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}=\frac{1}{2}\Big[\big(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\big)\boldsymbol{t}+\big(-k_1^2k_2-2k_2^3\big)\boldsymbol{m}_1+\big(k_1\dot{k}_2+k_1^3+2k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\big)\boldsymbol{m}_2\Big]$$

yazılabilir. Böylece $N\big(\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}\big)$ değeri

$$\Big[N\big(\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}\big)\Big]^2=\frac{1}{4}\Big[\big(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\big)^2+\big(-k_1^2k_2-2k_2^3\big)^2+\big(k_1\dot{k}_2+k_1^3+2k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\big)^2\Big] \tag{4.1.37}$$

olarak bulunur. Son olarak (4.1.35) ve (4.1.37) eşitlikleri (2.3.7) denkleminde yerine yazılırsa r_ξ burulması

$$r_\xi=\frac{\sqrt{2}\Big[c_0\big(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\big)+c_1\big(-k_1^2k_2-2k_2^3\big)+c_2\big(k_1\dot{k}_2+k_1^3+2k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\big)\Big]}{\big(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\big)^2+\big(-k_1^2k_2-2k_2^3\big)^2+\big(k_1\dot{k}_2+k_1^3+2k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2\big)^2}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca $\boldsymbol{m}_{1\xi}$ ile $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ arasındaki açı θ_ξ olmak üzere

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_{1\xi}&=\boldsymbol{n}_{1\xi}\cos\theta_\xi-\boldsymbol{n}_{2\xi}\sin\theta_\xi\\ \boldsymbol{m}_{2\xi}&=\boldsymbol{n}_{1\xi}\sin\theta_\xi+\boldsymbol{n}_{2\xi}\cos\theta_\xi\end{aligned} \tag{4.1.38}$$

eşitlikleri mevcuttur. Burada θ_ξ

$$\theta_\xi=\int r_\xi\big(s_\xi\big)ds_\xi$$

ile verilir. (4.1.30) ve (4.1.31) eşitlikleri (4.1.38) de yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{m}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\big(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\big)\cos\theta_\xi-\frac{1}{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}}\frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\big(b_0\boldsymbol{t}+b_1\boldsymbol{m}_1+b_2\boldsymbol{m}_2\big)\sin\theta_\xi$$

şeklindedir. Burada gerekli düzenleme yapılırsa $\boldsymbol{m}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{m}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{\left(k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}\right)\left(a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}\right)}}\begin{bmatrix}\left(\sqrt{k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}}\cos\theta_\xi a_0-\sin\theta_\xi b_0\right)\boldsymbol{t}\\+\left(\sqrt{k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}}\cos\theta_\xi a_1-\sin\theta_\xi b_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(\sqrt{k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}}\cos\theta_\xi a_2-\sin\theta_\xi b_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde $\boldsymbol{m}_{2\xi}$ yi hesaplanırsa

$$\boldsymbol{m}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)\sin\theta_\xi+\frac{1}{\sqrt{k_1^2+2k_2^2}}\frac{1}{\sqrt{a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}}\left(b_0\boldsymbol{t}+b_1\boldsymbol{m}_1+b_2\boldsymbol{m}_2\right)\cos\theta_\xi$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa $\boldsymbol{m}_{2\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{m}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{\left(2k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\left(a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}\right)}}\begin{bmatrix}\left(\sqrt{k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}}\sin\theta_\xi a_0+\cos\theta_\xi b_0\right)\boldsymbol{t}\\+\left(\sqrt{k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}}\sin\theta_\xi a_1+\cos\theta_\xi b_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(\sqrt{k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}}\sin\theta_\xi a_2+\cos\theta_\xi b_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

bulunur.

ξ nin doğal eğriliklerini elde etmek için ise (4.1.21) denklemlerinde (4.1.29) eşitliğini kullanalım. Böylece

$$\begin{aligned}k_{1\xi}&=k_\xi\cos\theta_\xi,\\k_{2\xi}&=k_\xi\sin\theta_\xi\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}k_{1\xi}&=\frac{\sqrt{2\left(a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}\right)}}{\left(k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}\right)^2}\cos\theta_\xi,\\k_{2\xi}&=\frac{\sqrt{2\left(a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}\right)}}{\left(k_1^{\,2}+2k_2^{\,2}\right)^2}\sin\theta_\xi\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.3. $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2\}$, γ nın Bishop çatısı olsun. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2 -$ Smarandache eğrisi

$$\xi(s_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2) \qquad \textbf{(4.1.39)}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ, ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2 -$ Smarandache eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.1.3. $\gamma = \gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\xi = \xi(s_\xi)$, γ nın uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2 -$ Smarandache eğrisi olsun. $\xi(s_\xi)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop çatısı $\{\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{m}_{1\xi}, \boldsymbol{m}_{2\xi}\}$, bu çatıya göre doğal eğrilikler $k_{1\xi}$ ve $k_{2\xi}$, Frenet elemanları ise $\{\boldsymbol{t}_\xi, \boldsymbol{n}_{1\xi}, \boldsymbol{n}_{2\xi}, k_\xi, r_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\xi(s_\xi)$ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2 -$ Smarandache eğrisinin Frenet ve Bishop elemanları, $\gamma(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop elemanları olan $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, k_1, k_2\}$ cinsinden yazılabilir.

İspat: Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2 -$ Smarandache eğrisinin $\gamma = \gamma(s)$ ye göre Frenet ve Bishop elemanlarını araştıralım. (4.1.39) eşitliğini s ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-k_1\boldsymbol{t} - k_2\boldsymbol{t})$$

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1 + k_2)\boldsymbol{t} \qquad \textbf{(4.1.40)}$$

bulunur. s_ξ, ξ eğrisinin yay parametresi olduğundan $\boldsymbol{t}_\xi$ teğet vektör alanı için

$$\boldsymbol{t}_\xi \frac{ds_\xi}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1 + k_2)\boldsymbol{t} \qquad \textbf{(4.1.41)}$$

ifadesi yazılır. (4.1.41) ifadesinde kuaterniyonik iç çarpım işlemi yapılırsa

$$h\left(\boldsymbol{t}_{\xi}\frac{ds_{\xi}}{ds},\boldsymbol{t}_{\xi}\frac{ds_{\xi}}{ds}\right)=h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1+k_2)\boldsymbol{t},-\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1+k_2)\boldsymbol{t}\right)$$

eşitliğinden

$$\frac{ds_{\xi}}{ds}=\frac{k_1+k_2}{\sqrt{2}} \tag{4.1.42}$$

bulunur. Dolayısıyla $\boldsymbol{t}_{\xi}$ için

$$\boldsymbol{t}_{\xi}=-\boldsymbol{t} \tag{4.1.43}$$

yazılabilir. (4.1.43) eşitliğinde s ye göre diferensiyel alınırsa

$$\frac{d\boldsymbol{t}_{\xi}}{ds_{\xi}}\frac{ds_{\xi}}{ds}=-k_1\boldsymbol{m}_1-k_2\boldsymbol{m}_2$$

elde edilir. (4.1.42) denklemi son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{t}_{\xi}'=-\frac{\sqrt{2}}{k_1+k_2}(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2) \tag{4.1.44}$$

elde edilir. ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet çatısına göre eğriliği $k_{\xi}=N\left(\boldsymbol{t}_{\xi}'\right)$ dir. Dolayısıyla k_{ξ},

$$k_{\xi}=N\left(\boldsymbol{t}_{\xi}'\right)=\frac{\sqrt{2\left(k_1^2+k_2^2\right)}}{k_1+k_2} \tag{4.1.45}$$

biçimindedir. (4.1.44) ve (4.1.45) denklemlerinden ξ eğrisinin asli normal vektör alanı ise

$$\boldsymbol{n}_{1\xi}=\frac{\xi''(s_{\xi})}{N\left(\xi''(s_{\xi})\right)}=-\frac{(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2)}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \tag{4.1.46}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi binormal vektör alanını hesaplayalım. (4.1.43) ve (4.1.46) ifadelerindeki $\boldsymbol{t}_\xi$ ve $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ eşitlikleri (4.1.11) denkleminde yerine yazılırsa $\boldsymbol{n}_{2\xi}$ binormal vektör alanı

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{-1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{t} & \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{-1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(k_2 \boldsymbol{m}_1 - k_1 \boldsymbol{m}_2 \right) \qquad \textbf{(4.1.47)}$$

olarak bulunur. Şimdi $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisinin r_ξ burulmasını hesaplayalım. Bunun için (4.1.40) eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(k_1 + k_2 \right) \boldsymbol{t}$$
$$\ddot{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\dot{k}_1 + \dot{k}_2 \right) \boldsymbol{t} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(k_1 + k_2 \right) \left(k_1 \boldsymbol{m}_1 + k_2 \boldsymbol{m}_2 \right)$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\ddot{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\dot{k}_1 + \dot{k}_2 \right) \boldsymbol{t} + \left(k_1^2 + k_1 k_2 \right) \boldsymbol{m}_1 + \left(k_1 k_2 + k_2^2 \right) \boldsymbol{m}_2 \right] \qquad \textbf{(4.1.48)}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.1.48) denkleminde tekrar diferensiyel alınırsa

$$\dddot{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \left(\ddot{k}_1 + \ddot{k}_2 \right) \boldsymbol{t} + \left(\dot{k}_1 + \dot{k}_2 \right) \left(k_1 \boldsymbol{m}_1 + k_2 \boldsymbol{m}_2 \right) + \left(2 k_1 \dot{k}_1 + \dot{k}_1 k_2 + k_1 \dot{k}_2 \right) \boldsymbol{m}_1 \\ - \left(k_1^2 + k_1 k_2 \right) k_1 \boldsymbol{t} + \left(\dot{k}_1 k_2 + k_1 \dot{k}_2 + 2 k_2 \dot{k}_2 \right) \boldsymbol{m}_2 - \left(k_1 k_2 + k_2^2 \right) k_2 \boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

bulunur. $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{m}_1$ ve $\boldsymbol{m}_2$ nin katsayıları, sırasıyla,

$$a_0 = \ddot{k}_1 + \ddot{k}_2 - k_1^3 - k_1^2 k_2 - k_1 k_2^2 - k_2^3,$$
$$a_1 = 3 k_1 \dot{k}_1 + 2 k_1 \dot{k}_2 + \dot{k}_1 k_2$$

ve

$$a_2 = 2 \dot{k}_1 k_2 + 3 k_2 \dot{k}_2 + k_1 \dot{k}_2,$$

olmak üzere son denklem

$$\dddot{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0\boldsymbol{t} + a_1\boldsymbol{m}_1 + a_2\boldsymbol{m}_2\right) \qquad \textbf{(4.1.49)}$$

şeklinde bulunur. (4.1.40) ve (4.1.48) denklemlerinden

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_1 + k_2\right)\boldsymbol{t}\times\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\dot{k}_1 + \dot{k}_2\right)\boldsymbol{t} + \left(k_1^2 + k_1k_2\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(k_1k_2 + k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2\right]\right\}$$

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi} = \frac{1}{2}\left[\left(-k_1\dot{k}_1 - k_1\dot{k}_2 - k_2\dot{k}_1 - k_2\dot{k}_2\right) + \left(k_1^3 + k_1^2k_2 + k_1^2k_2 + k_1k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2 + \left(-k_1^2k_2 - k_1k_2^2 - k_1k_2^2 - k_2^3\right)\boldsymbol{m}_1\right]$$

eşitliği geçerlidir. Son eşitlikte gerekli düzenleme yapılırsa

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi} = \frac{1}{2}\left[\left(-k_1\dot{k}_1 - k_1\dot{k}_2 - k_2\dot{k}_1 - k_2\dot{k}_2\right) + \left(-k_1^2k_2 - 2k_1k_2^2 - k_2^3\right)\boldsymbol{m}_1 + \left(k_1^3 + 2k_1^2k_2 + k_1k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2\right]$$

(4.1.50)

bulunur. (4.1.49) ve (4.1.50) denklemleri göz önüne alınır ve kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi}, \dddot{\xi}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[a_1\left(-k_1^2k_2 - 2k_1k_2^2 - k_2^3\right) + a_2\left(k_1^3 + 2k_1^2k_2 + k_1k_2^2\right)\right] \qquad \textbf{(4.1.51)}$$

dir. Burulmayı hesaplayabilmek için şimdi $v\dot{v}$ i bulmalıyız. (4.1.40) eşitliği kullanılırsa

$$v = N\left(\dot{\xi}\right) = \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\dot{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{k_1^2 + k_2^2}}\,\frac{2k_1\dot{k}_1 + 2k_2\dot{k}_2}{2} = \frac{k_1\dot{k}_1 + k_2\dot{k}_2}{\sqrt{2\left(k_1^2 + k_2^2\right)}}$$

$$v\dot{v} = \frac{k_1\dot{k}_1 + k_2\dot{k}_2}{2} \qquad \textbf{(4.1.52)}$$

bulunur. (4.1.50) ve (4.1.52) denklemlerinden

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}=\frac{1}{2}\left[-k_1\dot{k}_2-k_2\dot{k}_1+\left(-k_1^{\,2}k_2-2k_1k_2^{\,2}-k_2^{\,3}\right)\boldsymbol{m}_1+\left(k_1^{\,3}+2k_1^{\,2}k_2+k_1k_2^{\,2}\right)\boldsymbol{m}_2\right]$$

yazılır. Böylece

$$\left[N\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left[\left(k_1\dot{k}_2+k_2\dot{k}_1\right)^2+\left(k_1^{\,2}k_2+2k_1k_2^{\,2}+k_2^{\,3}\right)^2+\left(k_1^{\,3}+2k_1^{\,2}k_2+k_1k_2^{\,2}\right)^2\right]$$

olduğundan (2.3.7) gereği

$$r_\xi=\frac{\sqrt{2}\left[a_1\left(-k_1^{\,2}k_2-2k_1k_2^{\,2}-k_2^{\,3}\right)+a_2\left(k_1^{\,3}+2k_1^{\,2}k_2+k_1k_2^{\,2}\right)\right]}{\left[\left(k_1\dot{k}_2+k_2\dot{k}_1\right)^2+\left(k_1^{\,2}k_2+2k_1k_2^{\,2}+k_2^{\,3}\right)^2+\left(k_1^{\,3}+2k_1^{\,2}k_2+k_1k_2^{\,2}\right)^2\right]}$$

bulunur.

$\boldsymbol{m}_{1\xi}$ ile $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ arasındaki açı θ_ξ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_{1\xi}&=\boldsymbol{n}_{1\xi}\cos\theta_\xi-\boldsymbol{n}_{2\xi}\sin\theta_\xi\\ \boldsymbol{m}_{2\xi}&=\boldsymbol{n}_{1\xi}\sin\theta_\xi+\boldsymbol{n}_{2\xi}\cos\theta_\xi\end{aligned}\qquad\textbf{(4.1.53)}$$

eşitlikleri mevcuttur. Burada θ_ξ

$$\theta_\xi=\int r_\xi\left(s_\xi\right)ds_\xi$$

ile verilir. (4.1.46) ve (4.1.47) eşitlikleri (4.1.53) denkleminde kullanılırsa

$$\boldsymbol{m}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}\left[\left(-k_1\boldsymbol{m}_1-k_2\boldsymbol{m}_2\right)\cos\theta_\xi-\left(-k_2\boldsymbol{m}_1+k_1\boldsymbol{m}_2\right)\sin\theta_\xi\right]$$

$$\boldsymbol{m}_{1\xi}=\frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}\left[\left(-k_1\cos\psi_\xi+k_2\sin\psi_\xi\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_2\cos\psi_\xi-k_1\sin\psi_\xi\right)\boldsymbol{m}_2\right]$$

elde edilir. $\boldsymbol{m}_{2\xi}$ vektörü ise

$$\boldsymbol{m}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}\left[\left(-k_1\boldsymbol{m}_1-k_2\boldsymbol{m}_2\right)\sin\psi_\xi+\left(-k_2\boldsymbol{m}_1+k_1\boldsymbol{m}_2\right)\cos\psi_\xi\right]$$

$$\boldsymbol{m}_{2\xi}=\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\Big[\left(-k_1\sin\psi_\xi-k_2\cos\psi_\xi\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_2\sin\psi_\xi+k_1\cos\psi_\xi\right)\boldsymbol{m}_2\Big]$$

şeklinde elde edilir. ξ nin doğal eğriliklerini elde etmek için (4.1.21) denklemlerinde (4.1.45) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}k_{1\xi}&=k_\xi\cos\theta_\xi\\k_{2\xi}&=k_\xi\sin\theta_\xi\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}k_{1\xi}&=\frac{\sqrt{2\left(k_1^2+k_2^2\right)}}{k_1+k_2}\cos\theta_\xi\\k_{2\xi}&=\frac{\sqrt{2\left(k_1^2+k_2^2\right)}}{k_1+k_2}\sin\theta_\xi\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 4.1.4. $\gamma=\gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{t},\,\boldsymbol{m}_1,\,\boldsymbol{m}_2\}$, γ nın Bishop çatısı olsun. Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1\boldsymbol{m}_2-$ Smarandache eğrisi

$$\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.54}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ, ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1\boldsymbol{m}_2-$ Smarandache eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.1.4. $\gamma=\gamma(s)$ bir birim hızlı regüler, uzaysal kuaterniyonik eğri ve $\xi=\xi\left(s_\xi\right)$, γ eğrisinin uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1\boldsymbol{m}_2-$ Smarandache eğrisi olsun. $\xi\left(s_\xi\right)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop çatısı $\{\boldsymbol{t}_\xi,\,\boldsymbol{m}_{1\xi},\,\boldsymbol{m}_{2\xi}\}$, bu çatıya göre doğal eğrilikler $k_{1\xi}$ ve $k_{2\xi}$, Frenet elemanları ise $\{\boldsymbol{t}_\xi,\,\boldsymbol{n}_{1\xi},\,\boldsymbol{n}_{2\xi},\,k_\xi,\,r_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\xi\left(s_\xi\right)$ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1\boldsymbol{m}_2-$ Smarandache eğrisinin Frenet ve

Bishop elemanları, $\gamma(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Bishop elemanları olan $\{\boldsymbol{t},\, \boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2,\, k_1,\, k_2\}$ cinsinden yazılabilir.

İspat: Uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisinin $\gamma=\gamma(s)$ ye göre Frenet ve Bishop elemanlarını hesaplayalım. (4.1.54) denkleminin s ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2-k_1\boldsymbol{t}-k_2\boldsymbol{t}\right)$$

$$\dot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right] \qquad \textbf{(4.1.55)}$$

elde edilir. s_ξ nin ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisinin yay parametresi olmasından dolayı

$$\boldsymbol{t}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]$$

ifadesi yazılır. Son eşitlikte her iki tarafa kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{t}_\xi\frac{ds_\xi}{ds},\boldsymbol{t}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right],\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\right)$$

eşitliğinden, $\{\boldsymbol{t},\, \boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2\}$ sistemi ortonormal baz olduğundan

$$\frac{ds_\xi}{ds}=\sqrt{\frac{2\left(k_1^{\,2}+k_1k_2+k_2^{\,2}\right)}{3}} \qquad \textbf{(4.1.56)}$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{t}_\xi$ vektörü

$$\boldsymbol{t}_\xi=\frac{\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2}{\sqrt{2\left(k_1^{\,2}+k_1k_2+k_2^{\,2}\right)}} \qquad \textbf{(4.1.57)}$$

olarak hesaplanır. ξ eğrisinin eğriliğini ve asli normal vektör alanını bulmak için (4.1.57) denklemi s ye göre diferensiyellenirse

$$\frac{d\boldsymbol{t}_\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}\left[\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1-k_2\right)\left(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)+\dot{k}_1\boldsymbol{m}_1+k_1\dot{\boldsymbol{m}}_1+\dot{k}_2\boldsymbol{m}_2+k_2\dot{\boldsymbol{m}}_2\right]\\ -\frac{1}{2}\left[2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}2\left(2k_1\dot{k}_1+\dot{k}_1k_2+k_1\dot{k}_2+2k_2\dot{k}_2\right)\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\end{array}\right\}}{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\left[\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1^2-k_1k_2\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_1k_2-k_2^2\right)\boldsymbol{m}_2+\dot{k}_1\boldsymbol{m}_1-k_1^2\boldsymbol{t}+\dot{k}_2\boldsymbol{m}_2-k_2^2\boldsymbol{t}\right]\\ -\left(2k_1\dot{k}_1+\dot{k}_1k_2+k_1\dot{k}_2+2k_2\dot{k}_2\right)\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\end{array}\right\}}{\left[2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\left[\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2-k_1^2-k_2^2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1^2-k_1k_2+\dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_1k_2-k_2^2+\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\right]\\ -\left(2k_1\dot{k}_1+\dot{k}_1k_2+k_1\dot{k}_2+2k_2\dot{k}_2\right)\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\end{array}\right\}}{\left[2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{m}_1$ ve $\boldsymbol{m}_2$ nin katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}a_0&=-k_1^2\dot{k}_2-2k_1^4-4k_1^2k_2^2+k_1k_2\dot{k}_1+k_1k_2\dot{k}_2-2k_1^3k_2-2k_1k_2^3-\dot{k}_1k_2^2-2k_2^4,\\ a_1&=-2k_1^4-4k_1^3k_2-4k_1^2k_2^2+k_1\dot{k}_1k_2-2k_1k_2^3+2\dot{k}_1k_2^2-k_1^2\dot{k}_2-2k_1k_2\dot{k}_2\end{aligned}$$

ve

$$a_2=-2k_1^3k_2-4k_1^2k_2^2+2k_1^2\dot{k}_2-4k_1k_2^3+k_1k_2\dot{k}_2-2k_2^4-2k_1\dot{k}_1k_2-\dot{k}_1k_2^2$$

olmak üzere

$$\frac{d\boldsymbol{t}_\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\left[2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)$$

elde edilir. (4.1.56) ifadesi son eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\boldsymbol{t}_\xi'=\frac{\sqrt{3}}{\left[2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\right]^2}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)\qquad\textbf{(4.1.58)}$$

bulunur. O halde ξ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet çatısına göre eğriliği (4.1.58) denkleminden

$$k_\xi = N\left(\boldsymbol{t}_\xi'\right) = \frac{\sqrt{3\left(a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}\right)}}{\left[2\left(k_1^{\ 2} + k_1 k_2 + k_2^{\ 2}\right)\right]^2} \tag{4.1.59}$$

olarak elde edilir. ξ eğrisinin asli normal vektör alanı $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ ise, (4.1.58) ve (4.1.59) denklemlerinin (2.3.4) formüllerinde yerlerine yazılmasıyla,

$$\boldsymbol{n}_{1\xi} = \frac{a_0 \boldsymbol{t} + a_1 \boldsymbol{m}_1 + a_2 \boldsymbol{m}_2}{\sqrt{a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}} \tag{4.1.60}$$

olarak hesaplanır.

Binormal vektör alanını hesaplamak için (4.1.11) denkleminde (4.1.57) ve (4.1.60) eşitlikleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^{\ 2} + k_1 k_2 + k_2^{\ 2}\right)\left(a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}\right)}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{t} & \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 \\ -k_1 - k_2 & k_1 & k_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^{\ 2} + k_1 k_2 + k_2^{\ 2}\right)\left(a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}\right)}} \begin{bmatrix} \left(k_1 a_2 - k_2 a_1\right)\boldsymbol{t} + \left(\left(k_1 + k_2\right)a_2 + k_2 a_0\right)\boldsymbol{m}_1 \\ + \left(\left(-k_1 - k_2\right)a_1 - a_0 k_1\right)\boldsymbol{m}_2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Son eşitlikte $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{m}_1$ ve $\boldsymbol{m}_2$ nin katsayıları, sırasıyla,

$$b_0 = k_1 a_2 - k_2 a_1,$$
$$b_1 = \left(k_1 + k_2\right)a_2 + k_2 a_0$$

ve

$$b_2 = \left(-k_1 - k_2\right)a_1 - k_1 a_0$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{n}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^{\ 2} + k_1 k_2 + k_2^{\ 2}\right)\left(a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}\right)}} \left(b_0 \boldsymbol{t} + b_1 \boldsymbol{m}_1 + b_2 \boldsymbol{m}_2\right) \tag{4.1.61}$$

elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisinin r_ξ burulmasını hesaplayalım. Bunun için (4.1.55) eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$\dot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]$$

dir. İkinci türev ise

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1-k_2\right)\left(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)+\dot{k}_1\boldsymbol{m}_1-k_1^2\boldsymbol{t}+\dot{k}_2\boldsymbol{m}_2-k_2^2\boldsymbol{t}\right]$$

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2-k_1^2-k_2^2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1^2-k_1k_2+\dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_1k_2-k_2^2+\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\right] \quad \textbf{(4.1.62)}$$

olarak bulunur. (4.1.62) denkleminde türev alma işlemine devam edilirse

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\left(-\ddot{k}_1-\ddot{k}_2-2\dot{k}_1k_1-2\dot{k}_2k_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2-k_1^2-k_2^2\right)\left(k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right)\\+\left(-2k_1\dot{k}_1-\dot{k}_1k_2-k_1\dot{k}_2+\ddot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1+\left(k_1^2+k_1k_2-\dot{k}_1\right)k_1\boldsymbol{t}\\+\left(-\dot{k}_1k_2-k_1\dot{k}_2-2\dot{k}_2k_2+\ddot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2+\left(k_1k_2+k_2^2-\dot{k}_2\right)k_2\boldsymbol{t}\end{bmatrix}$$

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\left(-\ddot{k}_1-\ddot{k}_2-2k_1\dot{k}_1-2k_2\dot{k}_2+k_1^3+k_1^2k_2-k_1\dot{k}_1+k_1k_2^2+k_2^3-k_2\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t}\\+\left(-k_1\dot{k}_1-k_1\dot{k}_2-k_1^3-k_1k_2^2-2k_1\dot{k}_1-\dot{k}_1k_2-k_1\dot{k}_2+\ddot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(-\dot{k}_1k_2-k_2\dot{k}_2-k_1^2k_2-k_2^3-\dot{k}_1k_2-k_1\dot{k}_2-2k_2\dot{k}_2+\ddot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{m}_1$ ve $\boldsymbol{m}_2$ nin katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}c_0&=-\ddot{k}_1-\ddot{k}_2-3\dot{k}_1k_1-3\dot{k}_2k_2+k_1^3+k_1^2k_2+k_1k_2^2+k_2^3,\\c_1&=-3\dot{k}_1k_1-2k_1\dot{k}_2-k_1^3-k_1k_2^2-\dot{k}_1k_2+\ddot{k}_1,\end{aligned}$$

ve

$$c_2=-2\dot{k}_1k_2-3\dot{k}_2k_2-k_1^2k_2-k_2^3-k_1\dot{k}_2+\ddot{k}_2$$

olmak üzere $\dddot{\xi}$ için

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(c_0\boldsymbol{t}+c_1\boldsymbol{m}_1+c_2\boldsymbol{m}_2\right) \quad \textbf{(4.1.63)}$$

bulunur. (4.1.55) ve (4.1.62) denklemleri gereği

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\times\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2-k_1^{\,2}-k_2^{\,2}\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1^{\,2}-k_1k_2+\dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(-k_1k_2-k_2^{\,2}+\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

dir. Burada kuaterniyonik çarpımın özellikleri kullanıldığında

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\times\left(-\dot{k}_1-\dot{k}_2-k_1^{\,2}-k_2^{\,2}\right)\boldsymbol{t}\\+\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\times\left(-k_1^{\,2}-k_1k_2+\dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left[\left(-k_1-k_2\right)\boldsymbol{t}+k_1\boldsymbol{m}_1+k_2\boldsymbol{m}_2\right]\times\left(-k_1k_2-k_2^{\,2}+\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{array}\right\}$$

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l}-k_1\dot{k}_1-k_1\dot{k}_2-k_1^{\,3}-k_1k_2^{\,2}-\dot{k}_1k_2-k_2\dot{k}_2-k_1^{\,2}k_2-k_2^{\,3}+\left(-k_2\dot{k}_1-k_2\dot{k}_2-k_1^{\,2}k_2-k_2^{\,3}\right)\boldsymbol{m}_1+k_1k_2^{\,2}+k_2^{\,3}-k_2\dot{k}_2\\+\left(k_1\dot{k}_1+k_1\dot{k}_2+k_1^{\,3}+k_1k_2^{\,2}+k_1^{\,3}+k_1^{\,2}k_2-k_1\dot{k}_1+k_1^{\,2}k_2+k_1k_2^{\,2}-k_2\dot{k}_1\right)\boldsymbol{m}_2+k_1^{\,3}+k_1^{\,2}k_2-k_1\dot{k}_1\\+\left(k_2k_1^{\,2}+k_1k_2^{\,2}-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{t}+\left(-k_1^{\,2}k_2-2k_1k_2^{\,2}-k_2^{\,3}+k_1\dot{k}_2+k_2\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1+\left(-k_1^{\,2}k_2-k_1k_2^{\,2}+k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{t}\end{array}\right\}$$

$$\dot{\xi}\times\ddot{\xi}=\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l}-2k_1\dot{k}_1-k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2-2k_2\dot{k}_2+\left(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{t}\\+\left(-k_2\dot{k}_1-2k_1^{\,2}k_2-2k_2^{\,3}-2k_1k_2^{\,2}+k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1\\+\left(k_1\dot{k}_2+2k_1^{\,3}+2k_1k_2^{\,2}+2k_1^{\,2}k_2-\dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{array}\right\}\qquad\textbf{(4.1.64)}$$

bulunur. (4.1.63) ve (4.1.64) denklemleri, $h\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi},\dddot{\xi}\right)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$h\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi},\dddot{\xi}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}c_0\left(k_1\dot{k}_2-\dot{k}_1k_2\right)+c_1\left(-\dot{k}_1k_2-2k_1^{\,2}k_2-2k_2^{\,3}-2k_1k_2^{\,2}+k_1\dot{k}_2\right)\\+c_2\left(k_1\dot{k}_2+2k_1^{\,3}+2k_1k_2^{\,2}+2k_1^{\,2}k_2-\dot{k}_1k_2\right)\end{bmatrix}\qquad\textbf{(4.1.65)}$$

elde edilir. Şimdi (2.3.7) formüllerindeki

$$r_{\xi}=\frac{h(\dot{\xi}\times\ddot{\xi},\dddot{\xi})}{\left[N\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}\right)\right]^{2}},\qquad N\left(\dot{\xi}\right)=v$$

burulmasının payda kısmı olan $\left[N\left(\dot{\xi}\times\ddot{\xi}+v\dot{v}\right)\right]^{2}$ yi hesaplayalım. Bunun için (4.1.55) denkleminden

$$v = N\left(\dot{\xi}\right) = N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1 - k_2\right)\boldsymbol{t} + k_1\boldsymbol{m}_1 + k_2\boldsymbol{m}_2\right]\right) = \sqrt{\frac{2\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)}{3}}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)}}\,\frac{2\left(2k_1\dot{k}_1 + k_1\dot{k}_2 + \dot{k}_1k_2 + 2k_2\dot{k}_2\right)}{3} = \frac{2k_1\dot{k}_1 + k_1\dot{k}_2 + \dot{k}_1k_2 + 2k_2\dot{k}_2}{\sqrt{6\left(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2\right)}}$$

bulunur ve dolayısıyla $v\dot{v}$,

$$v\dot{v} = \frac{2k_1\dot{k}_1 + k_1\dot{k}_2 + \dot{k}_1k_2 + 2k_2\dot{k}_2}{3} \tag{4.1.66}$$

olarak hesaplanır. (4.1.64) ve (4.1.66) denklemleri gereği

$$\dot{\xi} \times \ddot{\xi} + v\dot{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \left(k_1\dot{k}_2 - \dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{t} + \left(-k_2\dot{k}_1 - 2k_1^2k_2 - 2k_2^3 - 2k_1k_2^2 + k_1\dot{k}_2\right)\boldsymbol{m}_1 \\ +\left(k_1\dot{k}_2 + 2k_1^3 + 2k_1k_2^2 + 2k_1^2k_2 - \dot{k}_1k_2\right)\boldsymbol{m}_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.67}$$

bağıntısı geçerlidir. (4.1.67) ifadesinde kuaterniyonik norm alma işlemi uygulanırsa

$$\left[N\left(\dot{\xi} \times \ddot{\xi} + v\dot{v}\right)\right]^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} \left(k_1\dot{k}_2 - \dot{k}_1k_2\right)^2 + \left(-k_2\dot{k}_1 - 2k_1^2k_2 - 2k_2^3 - 2k_1k_2^2 + k_1\dot{k}_2\right)^2 \\ +\left(k_1\dot{k}_2 + 2k_1^3 + 2k_1k_2^2 + 2k_1^2k_2 - \dot{k}_1k_2\right)^2 \end{bmatrix} \tag{4.1.68}$$

bulunur. (2.3.7) deki burulma formülünde (4.1.65) ve (4.1.68) denklemleri yerine yazılırsa

$$r_{\xi} = \frac{\sqrt{3}\begin{bmatrix} c_0\left(k_1\dot{k}_2 - \dot{k}_1k_2\right) + c_1\left(-\dot{k}_1k_2 - 2k_1^2k_2 - 2k_2^3 - 2k_1k_2^2 + k_1\dot{k}_2\right) \\ +c_2\left(k_1\dot{k}_2 + 2k_1^3 + 2k_1k_2^2 + 2k_1^2k_2 - \dot{k}_1k_2\right) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left(k_1\dot{k}_2 - \dot{k}_1k_2\right)^2 + \left(-k_2\dot{k}_1 - 2k_1^2k_2 - 2k_2^3 - 2k_1k_2^2 + k_1\dot{k}_2\right)^2 \\ +\left(k_1\dot{k}_2 + 2k_1^3 + 2k_1k_2^2 + 2k_1^2k_2 - \dot{k}_1k_2\right)^2 \end{bmatrix}}$$

elde edilir.

$\boldsymbol{m}_{1\xi}$ ile $\boldsymbol{n}_{1\xi}$ arasındaki açı θ_{ξ} olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_{1\xi} &= \boldsymbol{n}_{1\xi}\cos\theta_{\xi} - \boldsymbol{n}_{2\xi}\sin\theta_{\xi} \\ \boldsymbol{m}_{2\xi} &= \boldsymbol{n}_{1\xi}\sin\theta_{\xi} + \boldsymbol{n}_{2\xi}\cos\theta_{\xi} \end{aligned} \tag{4.1.69}$$

bağıntıları mevcuttur. Burada θ_ξ

$$\theta_\xi = \int r_\xi\left(s_\xi\right) ds_\xi$$

ile hesaplanır. (4.1.60) ve (4.1.61) eşitliklerini (4.1.69) denkleminde yerine yazalım. Böylece

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_{1\xi} = & \frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)\cos\theta_\xi \\ & -\frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}\left(b_0\boldsymbol{t}+b_1\boldsymbol{m}_1+b_2\boldsymbol{m}_2\right)\sin\theta_\xi\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa $\boldsymbol{m}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{m}_{1\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}\begin{bmatrix}\left(\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}\cos\theta_\xi a_0-\sin\theta_\xi b_0\right)\boldsymbol{t} \\ +\left(\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}\cos\theta_\xi a_1-\sin\theta_\xi b_1\right)\boldsymbol{m}_1 \\ +\left(\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}\cos\theta_\xi a_2-\sin\theta_\xi b_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde $\boldsymbol{m}_{2\xi}$ vektör alanı

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_{2\xi} = & \frac{1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2}}\left(a_0\boldsymbol{t}+a_1\boldsymbol{m}_1+a_2\boldsymbol{m}_2\right)\sin\theta_\xi \\ & +\frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}\left(b_0\boldsymbol{t}+b_1\boldsymbol{m}_1+b_2\boldsymbol{m}_2\right)\cos\theta_\xi\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada gerekli düzenleme yapılırsa $\boldsymbol{m}_{2\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{m}_{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}\begin{bmatrix}\left(\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}\sin\theta_\xi a_0+\cos\theta_\xi b_0\right)\boldsymbol{t} \\ +\left(\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}\sin\theta_\xi a_1+\cos\theta_\xi b_1\right)\boldsymbol{m}_1 \\ +\left(\sqrt{2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)}\sin\theta_\xi a_2+\cos\theta_\xi b_2\right)\boldsymbol{m}_2\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

ξ nin doğal eğriliklerini elde etmek için ise (4.1.21) denklemlerinde (4.1.59) eşitliği kullanılırsa

$$k_{1\xi}=\frac{\sqrt{3\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}{\left[2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\right]^2}\cos\theta_\xi,$$
$$k_{2\xi}=\frac{\sqrt{3\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2\right)}}{\left[2\left(k_1^2+k_1k_2+k_2^2\right)\right]^2}\sin\theta_\xi$$

elde edilir.

4.2. Paralel Transport Çatısına Göre Kuaterniyonik Smarandache Eğrileri

Bu bölümde $4-$boyutlu Öklid uzayında

$$\delta : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$$
$$s\to\delta(s)=\sum_{i=1}^{4}\delta_i(s)\boldsymbol{e}_i \qquad (1\le i\le 4), \qquad (e_4=1)$$

olarak tanımlanan kuaterniyonik eğriler üzerinde çalışılacaktır. Birim hızlı regüler kuaterniyonik eğri yardımıyla paralel transport çatısına göre Smarandache eğrileri tanımlanıp bunların Frenet ve paralel transport elemanları esas eğrinin paralel transport elemanları cinsinden hesaplanacaktır.

Tanım 4.2.1. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1-$ Smarandache eğrileri

$$\xi=\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{M}_1\right) \tag{4.2.1}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ , ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.1. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{M}_3,k_1^*,k_2^*,k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun.

Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi,\, \boldsymbol{M}_{1\xi},\, \boldsymbol{M}_{2\xi},\, \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^{\;*},\, k_{2\xi}^{\;*},\, k_{3\xi}^{\;*}$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi,\, \boldsymbol{N}_{1\xi},\, \boldsymbol{N}_{2\xi},\, \boldsymbol{N}_{3\xi},\, \kappa_\xi,\, k_\xi,\, (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ kuaterniyonik eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. (4.2.1) denkleminde s ye göre türev alınır ve paralel transport formülleri kullanılırsa

$$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^{\,*}\boldsymbol{T}+k_1^{\,*}\boldsymbol{M}_1+k_2^{\,*}\boldsymbol{M}_2+k_3^{\,*}\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

elde edilir. s_ξ yay parametresi olduğundan

$$\frac{d\xi}{ds_\xi}=\boldsymbol{T}_\xi \text{ ve } \boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^{\,*}\boldsymbol{T}+k_1^{\,*}\boldsymbol{M}_1+k_2^{\,*}\boldsymbol{M}_2+k_3^{\,*}\boldsymbol{M}_3\right)$$

yazılır. Son eşitlikte her iki tarafa kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds},\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^{\,*}\boldsymbol{T}+k_1^{\,*}\boldsymbol{M}_1+k_2^{\,*}\boldsymbol{M}_2+k_3^{\,*}\boldsymbol{M}_3\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^{\,*}\boldsymbol{T}+k_1^{\,*}\boldsymbol{M}_1+k_2^{\,*}\boldsymbol{M}_2+k_3^{\,*}\boldsymbol{M}_3\right)\right)$$

ifadesinden

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2=\frac{1}{2}\left(2\left(k_1^{\,*}\right)^2+\left(k_2^{\,*}\right)^2+\left(k_3^{\,*}\right)^2\right)$$

$$\frac{ds_\xi}{ds}=\sqrt{\frac{2\left(k_1^{\,*}\right)^2+\left(k_2^{\,*}\right)^2+\left(k_3^{\,*}\right)^2}{2}} \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{T}_\xi$ teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_{\xi} = \frac{-k_1^{*}\boldsymbol{T} + k_1^{*}\boldsymbol{M}_1 + k_2^{*}\boldsymbol{M}_2 + k_3^{*}\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{2\left(k_1^{*}\right)^2 + \left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2}} \tag{4.2.4}$$

olarak hesaplanır. (4.2.2) ifadesi tekrar s ye göre diferensiyellenirse

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dot{k}_1^{*}\boldsymbol{T} - k_1^{*}\dot{\boldsymbol{T}} + \dot{k}_1^{*}\boldsymbol{M}_1 + k_1^{*}\dot{\boldsymbol{M}}_1 + \dot{k}_2^{*}\boldsymbol{M}_2 + k_2^{*}\dot{\boldsymbol{M}}_2 + \dot{k}_3^{*}\boldsymbol{M}_3 + k_3^{*}\dot{\boldsymbol{M}}_3\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dot{k}_1^{*}\boldsymbol{T} - k_1^{*}\left(k_1^{*}\boldsymbol{M}_1 + k_2^{*}\boldsymbol{M}_2 + k_3^{*}\boldsymbol{M}_3\right) + \dot{k}_1^{*}\boldsymbol{M}_1 - \left(k_1^{*}\right)^2\boldsymbol{T} + \dot{k}_2^{*}\boldsymbol{M}_2 - \left(k_2^{*}\right)^2\boldsymbol{T} + \dot{k}_3^{*}\boldsymbol{M}_3 - \left(k_3^{*}\right)^2\boldsymbol{T}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenleme yapılırsa

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\dot{k}_1^{*} - \left(k_1^{*}\right)^2 - \left(k_2^{*}\right)^2 - \left(k_3^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{T} + \left(\dot{k}_1^{*} - \left(k_1^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{M}_1 + \left(\dot{k}_2^{*} - k_1^{*}k_2^{*}\right)\boldsymbol{M}_2 + \left(\dot{k}_3^{*} - k_1^{*}k_3^{*}\right)\boldsymbol{M}_3\right] \tag{4.2.5}$$

sonucuna ulaşılır. (4.2.5) ifadesi tekrar s ye göre diferensiyellenirse

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{l}\left(-\ddot{k}_1^{*} - 2k_1^{*}\dot{k}_1^{*} - 2k_2^{*}\dot{k}_2^{*} - 2k_3^{*}\dot{k}_3^{*}\right)\boldsymbol{T} + \left(-\dot{k}_1^{*} - \left(k_1^{*}\right)^2 - \left(k_2^{*}\right)^2 - \left(k_3^{*}\right)^2\right)\left(k_1^{*}\boldsymbol{M}_1 + k_2^{*}\boldsymbol{M}_2 + k_3^{*}\boldsymbol{M}_3\right) \\ +\left(\ddot{k}_1^{*} - 2k_1^{*}\dot{k}_1^{*}\right)\boldsymbol{M}_1 - \left(k_1^{*}\dot{k}_1^{*} - \left(k_1^{*}\right)^3\right)\boldsymbol{T} + \left(\ddot{k}_2^{*} - \dot{k}_1^{*}k_2^{*} - k_1^{*}\dot{k}_2^{*}\right)\boldsymbol{M}_2 - \left(k_2^{*}\dot{k}_2^{*} - k_1^{*}\left(k_2^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{T} \\ +\left(\ddot{k}_3^{*} - \dot{k}_1^{*}k_3^{*} - k_1^{*}\dot{k}_3^{*}\right)\boldsymbol{M}_3 - \left(k_3^{*}\dot{k}_3^{*} - k_1^{*}\left(k_3^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{T}\end{array}\right]$$

yazılır. Son eşitlik düzenlenirse

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{l}\left(-\ddot{k}_1^{*} - 3k_1^{*}\dot{k}_1^{*} - 3k_2^{*}\dot{k}_2^{*} - 3k_3^{*}\dot{k}_3^{*} + \left(k_1^{*}\right)^3 + k_1^{*}\left(k_2^{*}\right)^2 + k_1^{*}\left(k_3^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{T} \\ +\left(\ddot{k}_1^{*} - 3k_1^{*}\dot{k}_1^{*} - \left(k_1^{*}\right)^3 - k_1^{*}\left(k_2^{*}\right)^2 - k_1^{*}\left(k_3^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{M}_1 \\ +\left(\ddot{k}_2^{*} - 2\dot{k}_1^{*}k_2^{*} - k_1^{*}\dot{k}_2^{*} - \left(k_1^{*}\right)^2 k_2^{*} - \left(k_2^{*}\right)^3 - k_2^{*}\left(k_3^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{M}_2 \\ +\left(\ddot{k}_3^{*} - 2\dot{k}_1^{*}k_3^{*} - k_1^{*}\dot{k}_3^{*} - \left(k_1^{*}\right)^2 k_3^{*} - \left(k_2^{*}\right)^2 k_3^{*} - \left(k_3^{*}\right)^3\right)\boldsymbol{M}_3\end{array}\right] \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Burada $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ ve $\boldsymbol{M}_3$ ün katsayıları ise, sırasıyla,

$$a_0 = -\ddot{k}_1^* - 3k_1^*\dot{k}_1^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - 3k_3^*\dot{k}_3^* + \left(k_1^*\right)^3 + k_1^*\left(k_2^*\right)^2 + k_1^*\left(k_3^*\right)^2,$$
$$a_1 = \ddot{k}_1^* - 3k_1^*\dot{k}_1^* - \left(k_1^*\right)^3 - k_1^*\left(k_2^*\right)^2 - k_1^*\left(k_3^*\right)^2,$$
$$a_2 = \ddot{k}_2^* - 2\dot{k}_1^*k_2^* - k_1^*\dot{k}_2^* - \left(k_1^*\right)^2 k_2^* - \left(k_2^*\right)^3 - k_2^*\left(k_3^*\right)^2,$$
$$a_3 = \ddot{k}_3^* - 2\dot{k}_1^*k_3^* - k_1^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_3^* - \left(k_2^*\right)^2 k_3^* - \left(k_3^*\right)^3$$

olmak üzere (4.2.6) denklemi

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{M}_1 + a_2\boldsymbol{M}_2 + a_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.7)}$$

olarak bulunur. Bu son denklem s ye göre diferensiyellenirse

$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\dot{a}_0\boldsymbol{T} + a_0\left(k_1^*\boldsymbol{M}_1 + k_2^*\boldsymbol{M}_2 + k_3^*\boldsymbol{M}_3\right) + \dot{a}_1\boldsymbol{M}_1 - a_1k_1^*T + \dot{a}_2\boldsymbol{M}_2 - a_2k_2^*\boldsymbol{T} + \dot{a}_3\boldsymbol{M}_3 - a_3k_3^*\boldsymbol{T}\Big)$$

şeklinde bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\left(\dot{a}_0 - a_1k_1^* - a_2k_2^* - a_3k_3^*\right)\boldsymbol{T} + \left(a_0k_1^* + \dot{a}_1\right)\boldsymbol{M}_1 + \left(a_0k_2^* + \dot{a}_2\right)\boldsymbol{M}_2 + \left(a_0k_3^* + \dot{a}_3\right)\boldsymbol{M}_3\Big]$$

elde edilir. Ayrıca

$$b_0 = \dot{a}_0 - a_1k_1^* - a_2k_2^* - a_3k_3^*,$$
$$b_1 = a_0k_1^* + \dot{a}_1,$$
$$b_2 = a_0k_2^* + \dot{a}_2$$

ve

$$b_3 = a_0k_3^* + \dot{a}_3$$

olarak alınırsa

$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.8)}$$

şeklinde yazılır. Şimdi $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ yi hesaplayalım. Öncelikle (4.2.2) nin normu alınırsa

$$\begin{aligned}\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right] &= \sqrt{\frac{2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2}{2}}\\ \left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2 &= \frac{1}{2}\left[2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right]\end{aligned} \qquad \textbf{(4.2.9)}$$

elde edilir. Şimdi ise $h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)$ ifadesini hesaplayalım. (4.2.2) ve (4.2.5) eşitlikleri $h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)$ ifadesinde yerine yazılırsa, $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3\}$ ortonormal bir sistem oluşturduğundan

$$h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} k_1^*\dot{k}_1^*+\left(k_1^*\right)^3+k_1^*\left(k_2^*\right)^2+k_1^*\left(k_3^*\right)^2-\left(k_1^*\right)^3 \\ +k_1^*\dot{k}_1^*-k_1^*\left(k_2^*\right)^2+k_2^*\dot{k}_2^*-k_1^*\left(k_3^*\right)^2+k_3^*\dot{k}_3^* \end{bmatrix}$$

$$h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)=\frac{1}{2}\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right) \qquad \textbf{(4.2.10)}$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)$ normal vektörünün pay kısmı olan $N\left(\dot{\xi}(s)\right)^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)$ ifadesi

$$\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)=\frac{\left\{\begin{array}{l}\left[2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right]\begin{bmatrix}\left(-\dot{k}_1^*-\left(k_1^*\right)^2-\left(k_2^*\right)^2-\left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{T}+\\ \left(\dot{k}_1^*-\left(k_1^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_1+\left(\dot{k}_2^*-k_1^*k_2^*\right)\boldsymbol{M}_2\\ +\left(\dot{k}_3^*-k_1^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}\\ -\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)\left(-k_1^*\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right)\end{array}\right\}}{2\sqrt{2}}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}c_0&=\left[2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(-\dot{k}_1^*-\left(k_1^*\right)^2-\left(k_2^*\right)^2-\left(k_3^*\right)^2\right)+\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_1^*,\\ c_1&=\left[2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_1^*-\left(k_1^*\right)^2\right)-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_1^*,\\ c_2&=\left[2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_2^*-k_1^*k_2^*\right)-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_2^*\end{aligned}$$

ve

$$c_3 = \left[2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_3^* - k_1^* k_3^*\right) - \left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_2^*\dot{k}_2^* + k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_3^*$$

olmak üzere

$$N\left(\dot{\xi}(s)\right)^2 \ddot{\xi}(s) - h\left(\dot{\xi}(s), \ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.11)}$$

eşitliği mevcuttur. (4.2.11) eşitliğinin normu alınırsa

$$N\left(N\left(\dot{\xi}(s)\right)^2 \ddot{\xi}(s) - h\left(\dot{\xi}(s), \ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \qquad \textbf{(4.2.12)}$$

elde edilir. (4.2.11) ve (4.2.12) denklemleri, (2.3.9) formüllerinde yerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ normal vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \qquad \textbf{(4.2.13)}$$

olarak hesaplanır.

Şimdi $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ yi hesaplayalım. (2.3.9) formüllerinden

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}(s) = \eta \frac{\boldsymbol{T}_\xi(s) \wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s) \wedge \dddot{\xi}(s)}{N\left(\boldsymbol{T}_\xi(s) \wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s) \wedge \dddot{\xi}(s)\right)}, \qquad \eta = \pm 1$$

dir. (4.2.4), (4.2.7) ve (4.2.13) denklemlerinden

$$\boldsymbol{T}_\xi(s) \wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s) \wedge \dddot{\xi}(s) = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{M}_3 \\ -k_1^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{2\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{T}\left[k_1^*(c_2a_3-c_3a_2)-k_2^*(c_1a_3-c_3a_1)+k_3^*(c_1a_2-c_2a_1)\right]\\+\boldsymbol{M}_1\left[k_1^*(c_2a_3-c_3a_2)+k_2^*(c_0a_3-c_3a_0)-k_3^*(c_0a_2-c_2a_0)\right]\\+\boldsymbol{M}_2\left[-k_1^*(c_1a_3-c_3a_1)-k_1^*(c_0a_3-c_3a_0)+k_3^*(c_0a_1-c_1a_0)\right]\\+\boldsymbol{M}_3\left[k_1^*(c_1a_2-c_2a_1)+k_1^*(c_0a_2-c_2a_0)-k_2^*(c_0a_1-c_1a_0)\right]\end{array}\right\}}{\sqrt{2\left(2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

bulunur. Kısalık için

$$d_0=\frac{\left[k_1^*(c_2a_3-c_3a_2)-k_2^*(c_1a_3-c_3a_1)+k_3^*(c_1a_2-c_2a_1)\right]}{\sqrt{2\left(2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_1=\frac{\left[k_1^*(c_2a_3-c_3a_2)+k_2^*(c_0a_3-c_3a_0)-k_3^*(c_0a_2-c_2a_0)\right]}{\sqrt{2\left(2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_2=\frac{\left[-k_1^*(c_1a_3-c_3a_1)-k_1^*(c_0a_3-c_3a_0)+k_3^*(c_0a_1-c_1a_0)\right]}{\sqrt{2\left(2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_3=\frac{\left[k_1^*(c_1a_2-c_2a_1)+k_1^*(c_0a_2-c_2a_0)-k_2^*(c_0a_1-c_1a_0)\right]}{\sqrt{2\left(2\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3 \qquad \textbf{(4.2.14)}$$

şeklindedir. Burada kuaterniyonik norm alınırsa

$$N\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)=\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2} \qquad \textbf{(4.2.15)}$$

elde edilir. Son olarak (4.2.14) ve (4.2.15) eşitlikleri, (2.3.9) formüllerinde yerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ için

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}=\eta\frac{d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}, \qquad \eta=\pm1 \qquad \textbf{(4.2.16)}$$

sonucuna ulaşılır.

$\boldsymbol{N}_{2\xi}$ yi hesaplamak için ise (2.3.9) daki $\boldsymbol{N}_{2\xi}(s) = \eta \boldsymbol{N}_{3\xi}(s) \wedge \boldsymbol{T}_{\xi}(s) \wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s)$ formülünü kullanalım. (4.2.4), (4.2.13) ve (4.2.16) denklemlerinden

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \frac{\eta \begin{vmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{M}_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ -k_1^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \frac{\eta \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{T}\left[d_1\left(k_2^* c_3 - k_3^* c_2\right) - d_2\left(k_1^* c_3 - k_3^* c_1\right) + d_3\left(k_1^* c_2 - k_2^* c_1\right)\right] \\ +\boldsymbol{M}_1\left[-d_0\left(k_2^* c_3 - k_3^* c_2\right) + d_2\left(-k_1^* c_3 - k_3^* c_0\right) - d_3\left(-k_1^* c_2 - k_2^* c_0\right)\right] \\ +\boldsymbol{M}_2\left[d_0\left(k_1^* c_3 - k_3^* c_1\right) - d_1\left(-k_1^* c_3 - k_3^* c_0\right) + d_3\left(-k_1^* c_1 - k_1^* c_0\right)\right] \\ +\boldsymbol{M}_3\left[-d_0\left(k_1^* c_2 - k_2^* c_1\right) + d_1\left(-k_1^* c_2 - k_2^* c_0\right) - d_2\left(-k_1^* c_1 - k_1^* c_0\right)\right] \end{array} \right\}}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

bulunur. $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ ifadesinde $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ ve $\boldsymbol{M}_3$ baz vektörlerinin katsayıları, sırasıyla,

$$e_0 = \frac{\left[d_1\left(k_2^* c_3 - k_3^* c_2\right) - d_2\left(k_1^* c_3 - k_3^* c_1\right) + d_3\left(k_1^* c_2 - k_2^* c_1\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_1 = \frac{\left[-d_0\left(k_2^* c_3 - k_3^* c_2\right) + d_2\left(-k_1^* c_3 - k_3^* c_0\right) - d_3\left(-k_1^* c_2 - k_2^* c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_2 = \frac{\left[d_0\left(k_1^* c_3 - k_3^* c_1\right) - d_1\left(-k_1^* c_3 - k_3^* c_0\right) + d_3\left(-k_1^* c_1 - k_1^* c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_3 = \frac{\left[-d_0\left(k_1^* c_2 - k_2^* c_1\right) + d_1\left(-k_1^* c_2 - k_2^* c_0\right) - d_2\left(-k_1^* c_1 - k_1^* c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \eta\left(e_0 \boldsymbol{T} + e_1 \boldsymbol{M}_1 + e_2 \boldsymbol{M}_2 + e_3 \boldsymbol{M}_3\right) \tag{4.2.17}$$

elde edilir. Şimdi $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanlarını hesaplayalım. (2.3.15) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} &= (\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi} + (\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi} - \cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \boldsymbol{N}_{3\xi}\,,\\
\boldsymbol{M}_{2\xi} &= -\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi \boldsymbol{N}_{1\xi} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \boldsymbol{N}_{2\xi} + \sin\theta_\xi \boldsymbol{N}_{3\xi}\,,\\
\boldsymbol{M}_{3\xi} &= (\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi} + (-\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi} + \cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \boldsymbol{N}_{3\xi}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (4.2.13), (4.2.16) ve (4.2.17) denklemleri göz önüne alınırsa $\boldsymbol{M}_{1\xi}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} = &\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)\frac{\left(c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\\
&+ (\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta\left(e_0\boldsymbol{T} + e_1\boldsymbol{M}_1 + e_2\boldsymbol{M}_2 + e_3\boldsymbol{M}_3\right)\\
&- \cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta \frac{\left(d_0\boldsymbol{T} + d_1\boldsymbol{M}_1 + d_2\boldsymbol{M}_2 + d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} = &\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_0 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{T}\\
&+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_1 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_1\\
&+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_2 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_2\\
&+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_3 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_3
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Aynı şekilde $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ vektör alanı

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{2\xi} = & \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_0 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \right) \boldsymbol{T} \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_1 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \right) \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_2 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \right) \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_3 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \right) \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Son olarak $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ vektör alanı

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{3\xi} = & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_0 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{T} \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_1 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_2 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_3 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Şimdi $k_{1\xi}^{\ *}, k_{2\xi}^{\ *}$ ve $k_{3\xi}^{\ *}$ doğal eğriliklerini hesaplamak için Frenet çatısına göre birinci eğrilik olan κ_ξ yi hesaplayalım. (4.2.9) gereği

$$\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^4=\frac{1}{4}\left[2\left(k_1^{\ *}\right)^2+\left(k_2^{\ *}\right)^2+\left(k_3^{\ *}\right)^2\right]^2 \tag{4.2.18}$$

eşitliği mevcuttur. (2.3.10) formüllerinde (4.2.12) ve (4.2.18) eşitlikleri yerine yazılırsa κ_ξ eğriliği

$$\kappa_\xi=\frac{\sqrt{2\left(c_0^{\ 2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}}{\left[2\left(k_1^{\ *}\right)^2+\left(k_2^{\ *}\right)^2+\left(k_3^{\ *}\right)^2\right]^2} \tag{4.2.19}$$

şeklinde bulunur. (4.2.19) eşitliği (2.3.17) formüllerinde yerine yazıldığında doğal eğrilikler, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
k_{1\xi}^{\ *}&=\frac{\sqrt{2\left(c_0^{\ 2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}}{\left[2\left(k_1^{\ *}\right)^2+\left(k_2^{\ *}\right)^2+\left(k_3^{\ *}\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right),\\
k_{2\xi}^{\ *}&=-\frac{\sqrt{2\left(c_0^{\ 2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}}{\left[2\left(k_1^{\ *}\right)^2+\left(k_2^{\ *}\right)^2+\left(k_3^{\ *}\right)^2\right]^2}\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi,\\
k_{3\xi}^{\ *}&=\frac{\sqrt{2\left(c_0^{\ 2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}}{\left[2\left(k_1^{\ *}\right)^2+\left(k_2^{\ *}\right)^2+\left(k_3^{\ *}\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (2.3.10) formülleri ile Frenet çatısına göre 2. ve 3. eğrilikler de hesaplanabilir. Bunun için

$$k_\xi=\frac{N\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)N\left(\dot{\xi}(s)\right)}{N\left(N\left(\dot{\xi}(s)\right)^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)\right)}$$

formülünde (4.2.9), (4.2.12) ve (4.2.15) eşitlikleri yerine yazılırsa Frenet çatısına göre 2. eğrilik

$$k_\xi = \frac{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \sqrt{\frac{2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2}{2}}$$

$$k_\xi = 2\sqrt{\frac{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \qquad \textbf{(4.2.20)}$$

şeklinde bulunur. Buna ek olarak Frenet çatısına göre 3. eğrilik formülü olan

$$(r-\kappa)_\xi(s) = \frac{h\left(\dddot{\xi}(s), \boldsymbol{N}_{3\xi}(s)\right)}{N\left(\boldsymbol{T}_\xi(s) \wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s) \wedge \ddot{\xi}(s)\right) N\left(\dot{\xi}(s)\right)}$$

eşitliğinde (4.2.8), (4.2.9), (4.2.15) ve (4.2.16) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$(r-\kappa)_\xi(s) = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \frac{h\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3, d_0\boldsymbol{T} + d_1\boldsymbol{M}_1 + d_2\boldsymbol{M}_2 + d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\sqrt{\frac{2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2}{2}}}$$

elde edilir. $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$ sisteminin ortonormal olduğu göz önüne alınarak gerekli düzenleme yapılırsa

$$(r-\kappa)_\xi(s) = \eta \frac{b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\sqrt{2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2}} \qquad \textbf{(4.2.21)}$$

sonucuna ulaşılır. (2.3.18) ve (2.3.19) eşitliklerinden

$$k_\xi = -\psi_\xi' + \theta_\xi' \tan\psi_\xi \tan\theta_\xi = 2\sqrt{\frac{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

$$(r-\kappa)_\xi = -\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi} = \eta \frac{b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\sqrt{2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2}}$$

bağıntıları mevcuttur. (2.3.24) ve (2.3.25) denklemlerinden $\theta_\xi' = -\frac{(r-\kappa)_\xi}{\sqrt{\kappa_\xi^2 + k_\xi^2}}$ seçildiğinde

$$\phi_\xi' = \frac{\sqrt{(r-\kappa)_\xi^{\;2} - (\theta_\xi')^2}}{\cos\theta_\xi}$$

$$\psi_\xi' = -k_\xi - \tan\theta_\xi \sqrt{\left(r-\kappa\right)_\xi^{\;2} - \left(\theta_\xi'\right)^2}$$

olduğu biliniyor. Dolayısıyla (4.2.19), (4.2.20) ve (4.2.21) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$\theta_\xi' = -\eta \frac{b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)} \sqrt{\frac{\left[2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right]^3 \left(c_0^{\;2} + c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}\right)}{2\left(c_0^{\;2} + c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}\right)^2 + 4\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)^5}}$$

bulunur. (4.2.21) denklemi, (2.3.24) eşitliğinde yerine yazıldığında ise ϕ_ξ'

$$\phi_\xi' = \frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^{\;2} + d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}\right)^2 \left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)} - \left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi}$$

olarak hesaplanır. Son olarak ψ_ξ', (2.3.25) eşitliğinde (4.2.20) ve (4.2.21) bağıntılarının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\psi_\xi' = &-2\sqrt{\frac{\left(d_0^{\;2} + d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}\right)\left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^{\;2} + c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}}} \\ &-\tan\theta_\xi \sqrt{\frac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^{\;2} + d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}\right)^2 \left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)} - \left(\theta_\xi'\right)^2}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.2. $\delta = \delta\left(s\right)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\left\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\right\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2 -$Smarandache eğrileri

$$\xi = \xi\left(s_\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{M}_2\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada s_ξ , ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.2. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3,\ k_1^*,\ k_2^*,\ k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi,\ \boldsymbol{M}_{1\xi},\ \boldsymbol{M}_{2\xi},\ \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*,\ k_{2\xi}^*,\ k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi,\ \boldsymbol{N}_{1\xi},\ \boldsymbol{N}_{2\xi},\ \boldsymbol{N}_{3\xi},\ \kappa_\xi,\ k_\xi,\ (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ kuaterniyonik eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. Teorem 4.2.1. dekine benzer işlemler yapılırsa ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2-$Smarandache eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_\xi=\frac{-k_2^*\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{\left(k_1^*\right)^2+2\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2}}$$

şeklindedir. $a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2$ ve b_3 için

$$\begin{aligned}
a_0&=-\ddot{k}_2^*-3k_1^*\dot{k}_1^*-3k_2^*\dot{k}_2^*-3k_3^*\dot{k}_3^*+\left(k_1^*\right)^2k_2^*+\left(k_2^*\right)^3+k_2^*\left(k_3^*\right)^2,\\
a_1&=\ddot{k}_1^*-\dot{k}_1^*k_2^*-2k_1^*\dot{k}_2^*-\left(k_1^*\right)^3-k_1^*\left(k_2^*\right)^2-k_1^*\left(k_3^*\right)^2,\\
a_2&=\ddot{k}_2^*-3\dot{k}_2^*k_2^*-\left(k_1^*\right)^2k_2^*-\left(k_2^*\right)^3-k_2^*\left(k_3^*\right)^2,\\
a_3&=\ddot{k}_3^*-2\dot{k}_2^*k_3^*-k_2^*\dot{k}_3^*-\left(k_1^*\right)^2k_3^*-\left(k_2^*\right)^2k_3^*-\left(k_3^*\right)^3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_0&=\dot{a}_0-a_1k_1^*-a_2k_2^*-a_3k_3^*,\\
b_1&=a_0k_1^*+\dot{a}_1,\\
b_2&=a_0k_2^*+\dot{a}_2,\\
b_3&=a_0k_3^*+\dot{a}_3
\end{aligned}$$

bağıntıları geçerli olmak üzere $\dddot{\xi}$ ve $\ddddot{\xi}$ ifadeleri

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{M}_1 + a_2\boldsymbol{M}_2 + a_3\boldsymbol{M}_3\right)$$
$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right)$$

olarak bulunur. $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ normal vektör alanı ise

$$\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}$$

olarak hesaplanır. Burada katsayılar, sırasıyla,

$$c_0 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(-\dot{k}_2^* - \left(k_1^*\right)^2 - \left(k_2^*\right)^2 - \left(k_3^*\right)^2\right) + k_2^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + 2k_2^*\dot{k}_2^* + k_3^*\dot{k}_3^*\right),$$
$$c_1 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(-k_1^*k_2^* + \dot{k}_1^*\right) - k_1^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + 2k_2^*\dot{k}_2^* + k_3^*\dot{k}_3^*\right),$$
$$c_2 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(-\left(k_2^*\right)^2 + \dot{k}_2^*\right) - k_2^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + 2k_2^*\dot{k}_2^* + k_3^*\dot{k}_3^*\right)$$

ve

$$c_3 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(-k_2^*k_3^* + \dot{k}_3^*\right) - k_3^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + 2k_2^*\dot{k}_2^* + k_3^*\dot{k}_3^*\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Benzer şekilde $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{3\xi} = \eta\frac{d_0\boldsymbol{T} + d_1\boldsymbol{M}_1 + d_2\boldsymbol{M}_2 + d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}}}, \qquad \eta = \pm 1$$

olarak bulunur. Burada d_0, d_1, d_2 ve d_3 katsayıları

$$d_0 = \frac{\left[k_1^*\left(c_2a_3 - c_3a_2\right) - k_2^*\left(c_1a_3 - c_3a_1\right) + k_3^*\left(c_1a_2 - c_2a_1\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},$$
$$d_1 = \frac{\left[k_2^*\left(c_2a_3 - c_3a_2\right) + k_2^*\left(c_0a_3 - c_3a_0\right) - k_3^*\left(c_0a_2 - c_2a_0\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},$$

$$d_2 = \frac{\left[-k_2^*\left(c_1a_3 - c_3a_1\right) - k_1^*\left(c_0a_3 - c_3a_0\right) + k_3^*\left(c_0a_1 - c_1a_0\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$d_3 = \frac{\left[k_2^*\left(c_1a_2 - c_2a_1\right) + k_1^*\left(c_0a_2 - c_2a_0\right) - k_2^*\left(c_0a_1 - c_1a_0\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

şeklindedir. $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ normal vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \eta\left(e_0\boldsymbol{T} + e_1\boldsymbol{M}_1 + e_2\boldsymbol{M}_2 + e_3\boldsymbol{M}_3\right), \qquad \eta = \pm 1$$

şeklindedir. Burada katsayılar, sırasıyla,

$$e_0 = \frac{\left[d_1\left(k_2^*c_3 - k_3^*c_2\right) - d_2\left(k_1^*c_3 - k_3^*c_1\right) + d_3\left(k_1^*c_2 - k_2^*c_1\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_1 = \frac{\left[-d_0\left(k_2^*c_3 - k_3^*c_2\right) + d_2\left(-k_2^*c_3 - k_3^*c_0\right) - d_3\left(-k_2^*c_2 - k_2^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_2 = \frac{\left[d_0\left(k_1^*c_3 - k_3^*c_1\right) - d_1\left(-k_2^*c_3 - k_3^*c_0\right) + d_3\left(-k_2^*c_1 - k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_3 = \frac{\left[-d_0\left(k_1^*c_2 - k_2^*c_1\right) + d_1\left(-k_2^*c_2 - k_2^*c_0\right) - d_2\left(-k_2^*c_1 - k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

şeklinde tanımlanır. (2.3.15) denklemlerinden $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanları ise

$$\boldsymbol{M}_{1\xi}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_0}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}\\+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_0-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_0}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}\\+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_1-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_1$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}\\+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_2-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_2$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}\\+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_3-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_3$$

$$\boldsymbol{M}_{2\xi}=\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_0}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_0+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_0}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\right)\boldsymbol{T}$$

$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_1+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\right)\boldsymbol{M}_1$$

$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_2+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\right)\boldsymbol{M}_2$$

$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_3+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}\right)\boldsymbol{M}_3$$

$$\boldsymbol{M}_{3\xi}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_{0}}{\sqrt{c_{0}^{2}+c_{1}^{2}+c_{2}^{2}+c_{3}^{2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_{0}+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_{0}}{\sqrt{d_{0}^{2}+d_{1}^{2}+d_{2}^{2}+d_{3}^{2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{T}$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_{1}}{\sqrt{c_{0}^{2}+c_{1}^{2}+c_{2}^{2}+c_{3}^{2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_{1}+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_{1}}{\sqrt{d_{0}^{2}+d_{1}^{2}+d_{2}^{2}+d_{3}^{2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_{1}$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_{2}}{\sqrt{c_{0}^{2}+c_{1}^{2}+c_{2}^{2}+c_{3}^{2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_{2}+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_{2}}{\sqrt{d_{0}^{2}+d_{1}^{2}+d_{2}^{2}+d_{3}^{2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_{2}$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_{3}}{\sqrt{c_{0}^{2}+c_{1}^{2}+c_{2}^{2}+c_{3}^{2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_{3}+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_{3}}{\sqrt{d_{0}^{2}+d_{1}^{2}+d_{2}^{2}+d_{3}^{2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_{3}$$

şeklinde hesaplanır. Teorem 4.2.1. dekine benzer işlemler yapılırsa Frenet çatısına göre eğrilikler ise

$$\kappa_{\xi}=\frac{\sqrt{2\left(c_{0}^{2}+c_{1}^{2}+c_{2}^{2}+c_{3}^{2}\right)}}{\left[\left(k_{1}^{*}\right)^{2}+2\left(k_{2}^{*}\right)^{2}+\left(k_{3}^{*}\right)^{2}\right]^{2}},$$

$$k_{\xi}=2\sqrt{\frac{\left(d_{0}^{2}+d_{1}^{2}+d_{2}^{2}+d_{3}^{2}\right)\left(\left(k_{1}^{*}\right)^{2}+2\left(k_{2}^{*}\right)^{2}+\left(k_{3}^{*}\right)^{2}\right)}{c_{0}^{2}+c_{1}^{2}+c_{2}^{2}+c_{3}^{2}}}$$

ve

$$\left(r-\kappa\right)_{\xi}=\eta\frac{b_{0}d_{0}+b_{1}d_{1}+b_{2}d_{2}+b_{3}d_{3}}{\left(d_{0}^{2}+d_{1}^{2}+d_{2}^{2}+d_{3}^{2}\right)\sqrt{\left(k_{1}^{*}\right)^{2}+2\left(k_{2}^{*}\right)^{2}+\left(k_{3}^{*}\right)^{2}}}$$

olarak bulunur. Paralel transport çatısına göre eğrilikler

$$k_{1\xi}^{*} = \frac{\sqrt{2\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}{\left[\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^{*} = -\frac{\sqrt{2\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}{\left[\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right]^2}\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi$$

ve

$$k_{3\xi}^{*} = \frac{\sqrt{2\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}{\left[\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\theta_\xi' = -\eta \frac{b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)} \sqrt{\frac{\left[\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right]^3 \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}{2\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)^2 + 4\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)^5}}$$

seçildiğinde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\phi_\xi' = \frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)^2 \left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)} - \left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi},$$

$$\begin{aligned} \psi_\xi' = &-2\sqrt{\frac{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ &- \tan\theta_\xi \sqrt{\frac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)^2 \left(2\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)} - \left(\theta_\xi'\right)^2}. \end{aligned}$$

Son olarak

$$k_\xi = -\psi_\xi' + \theta_\xi' \tan\psi_\xi \tan\theta_\xi = 2\sqrt{\frac{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + 2\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

ve

$$\left(r-\kappa\right)_{\xi}=-\frac{\theta_{\xi}'}{\cos\psi_{\xi}}=\eta\frac{b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_0^{\ 2}+d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}\right)\sqrt{\left(k_1^*\right)^2+2\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2}}$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 4.2.3. $\delta=\delta\left(s\right)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\left\{\boldsymbol{T},\,\boldsymbol{M}_1,\,\boldsymbol{M}_2,\,\boldsymbol{M}_3\right\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_3-$Smarandache eğrileri

$$\xi=\xi\left(s_{\xi}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{M}_3\right)$$

ile tanımlanır. Burada s_{ξ}, ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.3. $\delta=\delta\left(s\right)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\left\{\boldsymbol{T},\,\boldsymbol{M}_1,\,\boldsymbol{M}_2,\,\boldsymbol{M}_3,\,k_1^*,\,k_2^*,\,k_3^*\right\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_3-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ eğrisinin paralel transport çatısı $\left\{\boldsymbol{T}_{\xi},\,\boldsymbol{M}_{1\xi},\,\boldsymbol{M}_{2\xi},\,\boldsymbol{M}_{3\xi}\right\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^{\ *},\,k_{2\xi}^{\ *},\,k_{3\xi}^{\ *}$ ve Frenet elemanları $\left\{\boldsymbol{T}_{\xi},\,\boldsymbol{N}_{1\xi},\,\boldsymbol{N}_{2\xi},\,\boldsymbol{N}_{3\xi},\,\kappa_{\xi},\,k_{\xi},\,\left(r-\kappa\right)_{\xi}\right\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ kuaterniyonik eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_3-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta\left(s\right)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. Teorem 4.2.1. dekine benzer işlemler yapılırsa ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_3-$Smarandache eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_{\xi}=\frac{-k_3^*\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2}}$$

bulunur.

a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 ve b_3 katsayıları

$$a_0 = -\ddot{k}_3^* - 3k_1^*\dot{k}_1^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - 3k_3^*\dot{k}_3^* + \left(k_1^*\right)^2 k_3^* + \left(k_2^*\right)^2 k_3^* + \left(k_3^*\right)^3,$$
$$a_1 = \ddot{k}_1^* - \dot{k}_1^* k_3^* - 2k_1^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^3 - k_1^*\left(k_2^*\right)^2 - k_1^*\left(k_3^*\right)^2,$$
$$a_2 = \ddot{k}_2^* - 2k_2^*\dot{k}_3^* - \dot{k}_2^* k_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_2^* - \left(k_2^*\right)^3 - k_2^*\left(k_3^*\right)^2,$$
$$a_3 = \ddot{k}_3^* - 3\dot{k}_3^* k_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_3^* - \left(k_2^*\right)^2 k_3^* - \left(k_3^*\right)^3$$

ve

$$b_0 = \dot{a}_0 - a_1 k_1^* - a_2 k_2^* - a_3 k_3^*,$$
$$b_1 = a_0 k_1^* + \dot{a}_1,$$
$$b_2 = a_0 k_2^* + \dot{a}_2,$$
$$b_3 = a_0 k_3^* + \dot{a}_3$$

olmak üzere $\dddot{\xi}$ ve $\ddddot{\xi}$ ifadeleri

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{M}_1 + a_2\boldsymbol{M}_2 + a_3\boldsymbol{M}_3\right)$$
$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right)$$

şeklinde bulunur. $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ normal vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

olarak ifade edilir. Burada c_0, c_1, c_2 ve c_3 için

$$c_0 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(-\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 - \left(k_2^*\right)^2 - \left(k_3^*\right)^2\right) + k_3^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + k_2^*\dot{k}_2^* + 2k_3^*\dot{k}_3^*\right),$$
$$c_1 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(-k_1^* k_3^* + \dot{k}_1^*\right) - k_1^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + k_2^*\dot{k}_2^* + 2k_3^*\dot{k}_3^*\right),$$
$$c_2 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(-k_2^* k_3^* + \dot{k}_2^*\right) - k_2^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + k_2^*\dot{k}_2^* + 2k_3^*\dot{k}_3^*\right),$$
$$c_3 = \left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(-\left(k_3^*\right)^2 + \dot{k}_3^*\right) - k_3^*\left(k_1^*\dot{k}_1^* + k_2^*\dot{k}_2^* + 2k_3^*\dot{k}_3^*\right)$$

bağıntıları geçerlidir. Ayrıca $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ normal vektör alanı

$$N_{3\xi} = \eta \frac{d_0 T + d_1 M_1 + d_2 M_2 + d_3 M_3}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}$$

biçimindedir. Burada T, M_1, M_2 ve M_3 ün katsayıları, sırasıyla,

$$d_0 = \frac{\left[k_1^*\left(c_2a_3 - c_3a_2\right) - k_2^*\left(c_1a_3 - c_3a_1\right) + k_3^*\left(c_1a_2 - c_2a_1\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$d_1 = \frac{\left[k_3^*\left(c_2a_3 - c_3a_2\right) + k_2^*\left(c_0a_3 - c_3a_0\right) - k_3^*\left(c_0a_2 - c_2a_0\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

$$d_2 = \frac{\left[-k_3^*\left(c_1a_3 - c_3a_1\right) - k_1^*\left(c_0a_3 - c_3a_0\right) + k_3^*\left(c_0a_1 - c_1a_0\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$d_3 = \frac{\left[k_3^*\left(c_1a_2 - c_2a_1\right) + k_1^*\left(c_0a_2 - c_2a_0\right) - k_2^*\left(c_0a_1 - c_1a_0\right)\right]}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

olarak tanımlanır. $N_{2\xi}$ normal vektör alanı ise

$$N_{2\xi} = \eta\left(e_0 T + e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3\right)$$

şeklindedir. Burada e_0, e_1, e_2 ve e_3, sırasıyla,

$$e_0 = \frac{\left[d_1\left(k_2^*c_3 - k_3^*c_2\right) - d_2\left(k_1^*c_3 - k_3^*c_1\right) + d_3\left(k_1^*c_2 - k_2^*c_1\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_1 = \frac{\left[-d_0\left(k_2^*c_3 - k_3^*c_2\right) + d_2\left(-k_3^*c_3 - k_3^*c_0\right) - d_3\left(-k_3^*c_2 - k_2^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_2 = \frac{\left[d_0\left(k_1^*c_3 - k_3^*c_1\right) - d_1\left(-k_3^*c_3 - k_3^*c_0\right) + d_3\left(-k_3^*c_1 - k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_3 = \frac{\left[-d_0\left(k_1^*c_2 - k_2^*c_1\right) + d_1\left(-k_3^*c_2 - k_2^*c_0\right) - d_2\left(-k_3^*c_1 - k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + 2\left(k_3^*\right)^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

biçimindedir. (2.3.15) denklemlerinden $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanları ise

$$\boldsymbol{M}_{1\xi}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_0-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_0}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}$$
$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_1-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_1$$
$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_2-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_2$$
$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_3-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_3 \text{ s}$$

$$\boldsymbol{M}_{2\xi}=\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_0+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_0}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{T}$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_1+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{M}_1$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_2+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{M}_2$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_3+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{M}_3$$

$$\boldsymbol{M}_{3\xi}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_0}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_0+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_0}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_1+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_1$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_2+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_2$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_3+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_3$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.1. dekine benzer işlemler yapılırsa Frenet çatısına göre eğrilikler,

$$\kappa_\xi=\frac{\sqrt{2\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}{\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right]^2},$$

$$k_\xi=2\sqrt{\frac{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}},$$

$$\left(r-\kappa\right)_\xi=\eta\frac{b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)\sqrt{\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2}}$$

olarak hesaplanır. Paralel transport çatısına göre eğrilikler ise

$$k_{1\xi}^{*}=\frac{\sqrt{2\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^{*}=-\frac{\sqrt{2\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right]^2}\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}^{*}=\frac{\sqrt{2\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca

$$\theta_\xi'=-\eta\frac{b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}\sqrt{\frac{\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right]^3\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}{2\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+4\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right)^5}}$$

seçildiğinde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\phi_\xi'=\frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right)}-\left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi},$$

$$\psi_\xi'=-2\sqrt{\frac{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}$$
$$-\tan\theta_\xi\sqrt{\frac{\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right)}-\left(\theta_\xi'\right)^2}.$$

Son olarak

$$k_\xi=-\psi_\xi'+\theta_\xi'\tan\psi_\xi\tan\theta_\xi=2\sqrt{\frac{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2\right)}{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}},$$

$$\left(r-\kappa\right)_\xi=-\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi}=\eta\frac{b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\sqrt{\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+2\left(k_3^*\right)^2}}$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 4.2.4. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisi

$$\xi=\xi(s_\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2) \qquad \textbf{(4.2.22)}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ, ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.4. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3,\ k_1^*,\ k_2^*,\ k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi,\ \boldsymbol{M}_{1\xi},\ \boldsymbol{M}_{2\xi},\ \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*,\ k_{2\xi}^*,\ k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi,\ \boldsymbol{N}_{1\xi},\ \boldsymbol{N}_{2\xi},\ \boldsymbol{N}_{3\xi},\ \kappa_\xi,\ k_\xi,\ (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. (4.2.22) denkleminde s ye göre türev alınır ve paralel transport formülleri kullanılırsa

$$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^*\boldsymbol{T}-k_2^*\boldsymbol{T}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^*-k_2^*\right)\boldsymbol{T} \qquad \textbf{(4.2.23)}$$

bulunur. s_ξ yay parametresi olduğundan

$$\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^*-k_2^*\right)\boldsymbol{T} \qquad \textbf{(4.2.24)}$$

yazılır. (4.2.24) eşitliğinde her iki tarafa kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds},\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^*-k_2^*\right)\boldsymbol{T},\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-k_1^*-k_2^*\right)\boldsymbol{T}\right)$$

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(k_1^* + k_2^*\right)^2$$

$$\frac{ds_\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_1^* + k_2^*\right) \tag{4.2.25}$$

elde edilir. O halde (4.2.25) eşitliği (4.2.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{T}_\xi = -\boldsymbol{T} \tag{4.2.26}$$

sonucuna ulaşılır. (4.2.23) eşitliği s ye göre diferensiyellenirse

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\dot{k}_1^* - \dot{k}_2^*\right)\boldsymbol{T} + \left(-\left(k_1^*\right)^2 - k_1^* k_2^*\right)\boldsymbol{M}_1 + \left(-k_1^* k_2^* - \left(k_2^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_2 + \left(-k_1^* k_3^* - k_2^* k_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\right]$$

(4.2.27)

bulunur. (4.2.27) eşitliği tekrar s ye göre diferensiyellenirse

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \left(-\ddot{k}_1^* - \ddot{k}_2^* + \left(k_1^*\right)^3 + \left(k_1^*\right)^2 k_2^* + k_1^*\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^3 + k_1^*\left(k_3^*\right)^2 + k_2^*\left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{T} \\ +\left(-3k_1^*\dot{k}_1^* - 2k_1^*\dot{k}_2^* - \dot{k}_1^* k_2^*\right)\boldsymbol{M}_1 + \left(-2\dot{k}_1^* k_2^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - k_1^*\dot{k}_2^*\right)\boldsymbol{M}_2 \\ +\left(-2\dot{k}_1^* k_3^* - 2\dot{k}_2^* k_3^* - k_1^*\dot{k}_3^* - k_2^*\dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{M}_3 \end{bmatrix}$$

(4.2.28)

elde edilir. (4.2.28) eşitliğini kısaltmak adına

$$\begin{aligned} a_0 &= -\ddot{k}_1^* - \ddot{k}_2^* + \left(k_1^*\right)^3 + \left(k_1^*\right)^2 k_2^* + k_1^*\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^3 + k_1^*\left(k_3^*\right)^2 + k_2^*\left(k_3^*\right)^2, \\ a_1 &= -3k_1^*\dot{k}_1^* - 2k_1^*\dot{k}_2^* - \dot{k}_1^* k_2^*, \\ a_2 &= -2\dot{k}_1^* k_2^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - k_1^*\dot{k}_2^*, \\ a_3 &= -2\dot{k}_1^* k_3^* - 2\dot{k}_2^* k_3^* - k_1^*\dot{k}_3^* - k_2^*\dot{k}_3^* \end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{M}_1 + a_2\boldsymbol{M}_2 + a_3\boldsymbol{M}_3\right) \tag{4.2.29}$$

bulunur. Son olarak $\dddot{\xi}$ ifadesini hesaplayalım. Bunun için son denklemin s ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{a}_0\boldsymbol{T}+a_0\left(k_1^{*}\boldsymbol{M}_1+k_2^{*}\boldsymbol{M}_2+k_3^{*}\boldsymbol{M}_3\right)+\dot{a}_1\boldsymbol{M}_1-a_1k_1^{*}T+\dot{a}_2\boldsymbol{M}_2-a_2k_2^{*}\boldsymbol{T}+\dot{a}_3\boldsymbol{M}_3-a_3k_3^{*}\boldsymbol{T}\right)$$

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\dot{a}_0-a_1k_1^{*}-a_2k_2^{*}-a_3k_3^{*}\right)\boldsymbol{T}+\left(a_0k_1^{*}+\dot{a}_1\right)\boldsymbol{M}_1+\left(a_0k_2^{*}+\dot{a}_2\right)\boldsymbol{M}_2+\left(a_0k_3^{*}+\dot{a}_3\right)\boldsymbol{M}_3\right]$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}
b_0&=\dot{a}_0-a_1k_1^{*}-a_2k_2^{*}-a_3k_3^{*},\\
b_1&=a_0k_1^{*}+\dot{a}_1,\\
b_2&=a_0k_2^{*}+\dot{a}_2,\\
b_3&=a_0k_3^{*}+\dot{a}_3
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_0\boldsymbol{T}+b_1\boldsymbol{M}_1+b_2\boldsymbol{M}_2+b_3\boldsymbol{M}_3\right) \tag{4.2.30}$$

olarak yazılır. Şimdi kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet elemanlarını, esas eğri olan δ nın paralel transport elemanları cinsinden hesaplayalım. Bunun için ilk önce (4.2.23) ün normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
N\left(\dot{\xi}\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_1^{*}+k_2^{*}\right)\\
\left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^2&=\frac{1}{2}\left(k_1^{*}+k_2^{*}\right)^2
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

elde edilir. (4.2.23) ve (4.2.27) göz önüne alınarak $\dot{\xi}(s)$ ve $\ddot{\xi}(s)$ vektörlerinin kuaterniyonik iç çarpımı alınırsa

$$h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)=\frac{1}{2}h\left(\left(-k_1^{*}-k_2^{*}\right)\boldsymbol{T},\begin{bmatrix}\left(-\dot{k}_1^{*}-\dot{k}_2^{*}\right)\boldsymbol{T}+\left(-\left(k_1^{*}\right)^2-k_1^{*}k_2^{*}\right)\boldsymbol{M}_1\\+\left(-k_1^{*}k_2^{*}-\left(k_2^{*}\right)^2\right)\boldsymbol{M}_2+\left(-k_1^{*}k_3^{*}-k_2^{*}k_3^{*}\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}\right)$$

bulunur. $\{\boldsymbol{T},\,\boldsymbol{M}_1,\,\boldsymbol{M}_2,\,\boldsymbol{M}_3\}$ ortonormal bir sistem oluşturduğundan, bu iç çarpım

$$h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)=\frac{1}{2}\left(k_1^*+k_2^*\right)\left(\dot{k}_1^*+\dot{k}_2^*\right)$$

olarak elde edilir. Böylece $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ normal vektör alanının pay kısmı

$$\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)=\frac{\begin{array}{l}\left(k_1^*+k_2^*\right)^2\left(-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*\right)\boldsymbol{M}_1\\+\left(k_1^*+k_2^*\right)^2\left(-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_2\\+\left(k_1^*+k_2^*\right)^2\left(-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\end{array}}{2\sqrt{2}}$$

dır. Son eşitlikte katsayılar, sırasıyla,

$$c_1=\left(k_1^*+k_2^*\right)^2\left(-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*\right),$$
$$c_2=\left(k_1^*+k_2^*\right)^2\left(-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2\right),$$
$$c_3=\left(k_1^*+k_2^*\right)^2\left(-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*\right)$$

olmak üzere

$$\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3\right)\qquad\textbf{(4.2.32)}$$

yazılır. Burada (4.2.32) denkleminin kuaterniyonik normu alındığında

$$N\left(\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)\right)=\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}{2\sqrt{2}}\qquad\textbf{(4.2.33)}$$

elde edilir. Böylece (4.2.32) ve (4.2.33) denklemleri, (2.3.9) formüllerinde yerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{1\xi}=\frac{c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\qquad\textbf{(4.2.34)}$$

olarak bulunur.

Şimdi $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanını hesaplayalım. Bunun için ilk önce (2.3.9) formüllerinden $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanının

$$N_{3\xi}(s)=\eta\frac{T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)}{N\left(T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)},\qquad \eta=\pm1$$

olduğu biliniyor. İlk önce (4.2.26), (4.2.29) ve (4.2.34) denklemleri, $N_{3\xi}$ nin pay kısmında yerine yazıldığında

$$T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}\begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{\left[(c_2a_3-c_3a_2)M_1-(c_1a_3-c_3a_1)M_2+(c_1a_2-c_2a_1)M_3\right]}{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

bulunur. Kısalık için

$$d_1=(c_2a_3-c_3a_2)\frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$
$$d_2=(c_3a_1-c_1a_3)\frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$
$$d_3=(c_1a_2-c_2a_1)\frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

olarak alınırsa

$$T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=d_1M_1+d_2M_2+d_3M_3 \qquad \textbf{(4.2.35)}$$

dır. Son eşitliğin kuaterniyonik normu alındığında ise

$$N\left(T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)=\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2} \qquad \textbf{(4.2.36)}$$

olarak bulunur. Böylece (4.2.35) ve (4.2.36) eşitlikleri (2.3.9) formüllerinde yerine yazılırsa $N_{3\xi}$ vektör alanı

$$N_{3\xi} = \eta \frac{d_1 M_1 + d_2 M_2 + d_3 M_3}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \tag{4.2.37}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $N_{2\xi}$ vektör alanı (2.3.9) denklemlerinden

$$N_{2\xi}(s) = \eta N_{3\xi}(s) \wedge T_{\xi}(s) \wedge N_{1\xi}(s) \qquad \eta = \pm 1$$

olarak yazılır. Bu son denklemde (4.2.26), (4.2.34) ve (4.2.37) denklemleri göz önüne alınırsa $N_{2\xi}$ vektör alanı

$$N_{2\xi} = \frac{\eta}{\sqrt{\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}} \begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$N_{2\xi} = \frac{-\eta\left[\left(d_2 c_3 - d_3 c_2\right) M_1 - \left(d_1 c_3 - d_3 c_1\right) M_2 + \left(d_1 c_2 - d_2 c_1\right) M_3\right]}{\sqrt{\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

olarak elde edilir. Son ifadede M_1, M_2 ve M_3 ün katsayıları, sırasıyla, e_1, e_2 ve e_3

$$e_1 = \frac{d_3 c_2 - d_2 c_3}{\sqrt{\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_2 = \frac{d_1 c_3 - d_3 c_1}{\sqrt{\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$

$$e_3 = \frac{d_2 c_1 - d_1 c_2}{\sqrt{\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

olmak üzere

$$N_{2\xi} = \eta\left(e_1 M_1 + e_2 M_2 + e_3 M_3\right) \tag{4.2.38}$$

dir.

Şimdi $M_{1\xi}$, $M_{2\xi}$ ve $M_{3\xi}$ normal vektör alanlarını bulalım. (2.3.15) formüllerinden

$$\boldsymbol{M}_{1\xi}=(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi}+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi}-\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\boldsymbol{N}_{3\xi}\ ,$$
$$\boldsymbol{M}_{2\xi}=-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi\boldsymbol{N}_{1\xi}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\boldsymbol{N}_{2\xi}+\sin\theta_\xi\boldsymbol{N}_{3\xi}\ ,$$
$$\boldsymbol{M}_{3\xi}=(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi}+(-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi}+\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\boldsymbol{N}_{3\xi}$$

bağıntıları mevcuttur. (4.2.34), (4.2.37) ve (4.2.38) eşitlikleri (2.3.15) formüllerinde yerine yazıldığında $\boldsymbol{M}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{1\xi}&=\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)\frac{\left(c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{cc_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\&\quad+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta\left(e_1\boldsymbol{M}_1+e_2\boldsymbol{M}_2+e_3\boldsymbol{M}_3\right)\\&\quad-\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta\frac{\left(d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $\boldsymbol{M}_{1\xi}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{1\xi}&=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_1-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_1\\&\quad+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_2-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_2\\&\quad+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta e_3-\dfrac{\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_3\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Aynı şekilde $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ vektör alanı ise

$$\boldsymbol{M}_{2\xi} = \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_1 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \right)\boldsymbol{M}_1$$
$$+ \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_2 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \right)\boldsymbol{M}_2$$
$$+ \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_3 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \right)\boldsymbol{M}_3$$

olarak elde edilir. Son olarak $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{M}_{3\xi} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_1 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \end{array} \right]\boldsymbol{M}_1$$
$$+ \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_2 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \end{array} \right]\boldsymbol{M}_2$$
$$+ \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_3 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \end{array} \right]\boldsymbol{M}_3$$

dir.

Şimdi Frenet eğriliklerini hesaplayalım. Bunun için (4.2.31) eşitliğinden

$$\left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^4 = \frac{1}{4}\left(k_1^* + k_2^*\right)^4 \qquad \textbf{(4.2.39)}$$

bağıntısı mevcuttur. (2.3.10) formüllerinde (4.2.33) ve (4.2.39) denklemleri göz önüne alınırsa κ_ξ eğriliği

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left(k_1^*+k_2^*\right)^4} \qquad \textbf{(4.2.40)}$$

bulunur. Buna ek olarak (4.2.31), (4.2.33) ve (4.2.36) bağıntıları (2.3.10) formüllerinde yerine yazılırsa

$$k_\xi = 2\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\left(k_1^* + k_2^*\right) \tag{4.2.41}$$

elde edilir. Son olarak $\left(r-\kappa\right)_\xi$, 3. Frenet eğriliğini hesaplamak için (2.3.10) formüllerinde (4.2.30), (4.2.31), (4.2.36) ve (4.2.37) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = \frac{h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right), \eta\frac{d_1\boldsymbol{M}_1 + d_2\boldsymbol{M}_2 + d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\right)}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}\,\frac{k_1^* + k_2^*}{\sqrt{2}}}$$

bulunur. $\left\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\right\}$ ortonormal bir sistem oluşturduğundan

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = \eta\frac{b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3}{\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left(k_1^* + k_2^*\right)} \tag{4.2.42}$$

elde edilir.

Şimdi $k_{1\xi}^*, k_{2\xi}^*$ ve $k_{3\xi}^*$ doğal eğriliklerini hesaplayalım. Bunun için Frenet çatısına göre birinci eğrilik olan κ_ξ, (2.3.17) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$k_{1\xi}^* = \frac{\sqrt{2\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}{\left(k_1^* + k_2^*\right)^4}\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^* = -\frac{\sqrt{2\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}{\left(k_1^* + k_2^*\right)^4}\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}^* = \frac{\sqrt{2\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}{\left(k_1^* + k_2^*\right)^4}\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)$$

elde edilir. Açıların türevleriyle Frenet eğrilikleri arasındaki ilişkiyi bulalım. (2.3.24) ve (2.3.25) denklemlerinden $\theta_\xi' = -\frac{(r-\kappa)_\xi}{\sqrt{\kappa_\xi^2 + k_\xi^2}}$ olarak seçildiğinde

$$\phi_\xi' = \frac{\sqrt{(r-\kappa)_\xi^{\,2} - (\theta_\xi')^2}}{\cos\theta_\xi},$$

$$\psi_\xi' = -k_\xi - \tan\theta_\xi\sqrt{\left(r-\kappa\right)_\xi^{\,2} - \left(\theta_\xi'\right)^2}$$

dır. Burada (4.2.40), (4.2.41) ve (4.2.42) denklemleri yerlerine yazılırsa θ_ξ' ifadesi

$$\theta_\xi' = -\eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)}\sqrt{\frac{\left(k_1^*+k_2^*\right)^6\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+4\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(k_1^*+k_2^*\right)^{10}}}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (4.2.42) bağıntısı (2.3.24) formülünde yerine yazılırsa ϕ_ξ' ifadesi ise

$$\phi_\xi' = \frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(k_1^*+k_2^*\right)^2} - \left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi}$$

olarak bulunur. (2.3.25) eşitliğinde (4.2.41) ve (4.2.42) nin kullanılmasıyla ψ_ξ' ifadesi de

$$\psi_\xi' = -2\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+d_3^2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\left(k_1^*+k_2^*\right) - \tan\theta_\xi\sqrt{\frac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(k_1^*+k_2^*\right)^2} - \left(\theta_\xi'\right)^2}$$

şeklinde bulunur. Son olarak (2.3.18), (2.3.19), (4.2.41) ve (4.2.42) eşitlikleri gereği

$$k_\xi = -\psi_\xi' + \theta_\xi' \tan\psi_\xi \tan\theta_\xi = 2\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+d_3^2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\left(k_1^*+k_2^*\right),$$

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = -\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi} = \eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(k_1^*+k_2^*\right)}$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 4.2.5. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrileri

$$\xi=\xi(s_\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada s_ξ, ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.5. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3,\ k_1^*,\ k_2^*,\ k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi,\ \boldsymbol{M}_{1\xi},\ \boldsymbol{M}_{2\xi},\ \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*,\ k_{2\xi}^*,\ k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi,\ \boldsymbol{N}_{1\xi},\ \boldsymbol{N}_{2\xi},\ \boldsymbol{N}_{3\xi},\ \kappa_\xi,\ k_\xi,\ (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. Teorem 4.2.4. dekine benzer işlemler yapılırsa ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_\xi=-\boldsymbol{T}$$

bulunur. $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_0,\ b_1,\ b_2$ ve b_3 katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
a_0&=-\ddot{k}_1^*-\ddot{k}_3^*+\left(k_1^*\right)^3+\left(k_1^*\right)^2k_3^*+k_1^*\left(k_2^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2k_3^*+k_1^*\left(k_3^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^3,\\
a_1&=-3k_1^*\dot{k}_1^*-2k_1^*\dot{k}_3^*-\dot{k}_1^*k_3^*,\\
a_2&=-2\dot{k}_1^*k_2^*-2k_2^*\dot{k}_3^*-k_1^*\dot{k}_2^*-\dot{k}_2^*k_3^*,\\
a_3&=-2\dot{k}_1^*k_3^*-3k_3^*\dot{k}_3^*-k_1^*\dot{k}_3^*
\end{aligned}$$

ve

$$b_0 = \dot{a}_0 - a_1 k_1^* - a_2 k_2^* - a_3 k_3^*,$$
$$b_1 = a_0 k_1^* + \dot{a}_1,$$
$$b_2 = a_0 k_2^* + \dot{a}_2,$$
$$b_3 = a_0 k_3^* + \dot{a}_3$$

olmak üzere $\dddot{\xi}$ ve $\ddddot{\xi}$

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0 \boldsymbol{T} + a_1 \boldsymbol{M}_1 + a_2 \boldsymbol{M}_2 + a_3 \boldsymbol{M}_3\right)$$
$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_0 \boldsymbol{T} + b_1 \boldsymbol{M}_1 + b_2 \boldsymbol{M}_2 + b_3 \boldsymbol{M}_3\right)$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ normal vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{c_1 \boldsymbol{M}_1 + c_2 \boldsymbol{M}_2 + c_3 \boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

bulunur. Burada c_1, c_2 ve c_3

$$c_1 = \left(k_1^* + k_3^*\right)^2 \left(-\left(k_1^*\right)^2 - k_1^* k_3^*\right),$$
$$c_2 = \left(k_1^* + k_3^*\right)^2 \left(-k_1^* k_2^* - k_2^* k_3^*\right),$$
$$c_3 = \left(k_1^* + k_3^*\right)^2 \left(-k_1^* k_3^* - \left(k_3^*\right)^2\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ normal vektör alanı ise

$$\boldsymbol{N}_{3\xi} = \eta \frac{d_1 \boldsymbol{M}_1 + d_2 \boldsymbol{M}_2 + d_3 \boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}$$

biçimindedir. Burada d_1, d_2 ve d_3 ise

$$d_1 = \left(c_2 a_3 - c_3 a_2\right) \frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}},$$
$$d_2 = \left(c_3 a_1 - c_1 a_3\right) \frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}$$

ve

$$d_3 = (c_1 a_2 - c_2 a_1) \frac{1}{\sqrt{2(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2})}}$$

dir. Buna ek olarak $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ binormal vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \eta(e_1 \boldsymbol{M}_1 + e_2 \boldsymbol{M}_2 + e_3 \boldsymbol{M}_3), \qquad \eta = \pm 1$$

bulunur. Burada e_1, e_2 ve e_3 katsayıları, sırasıyla,

$$e_1 = \frac{d_3 c_2 - d_2 c_3}{\sqrt{(d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2})(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2})}},$$
$$e_2 = \frac{d_1 c_3 - d_3 c_1}{\sqrt{(d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2})(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2})}},$$
$$e_3 = \frac{d_2 c_1 - d_1 c_2}{\sqrt{(d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2})(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2})}}$$

şeklindedir. Teorem 4.2.4. dekine benzer işlemler yapılırsa Frenet eğrilikleri

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{2(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2})}}{(k_1^* + k_3^*)^4},$$
$$k_\xi = 2\sqrt{\frac{d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}}{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}\,(k_1^* + k_3^*),$$
$$(r - \kappa)_\xi = \eta \frac{b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3}{(d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2})(k_1^* + k_3^*)}$$

olarak bulunur. (2.3.15) formüllerinden $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanları ise, sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} = & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right) c_1}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_1 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right) c_2}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_2 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right) c_3}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_3 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{2\xi} = & \left(\dfrac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_1 + \dfrac{\sin\theta_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \right) \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left(\dfrac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_2 + \dfrac{\sin\theta_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \right) \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left(\dfrac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_3 + \dfrac{\sin\theta_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \right) \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{3\xi} = & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_1}{\sqrt{c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_1 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_2}{\sqrt{c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_2 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_3}{\sqrt{c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_3 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

şeklindedir. $k_{1\xi}^{\ *}$, $k_{2\xi}^{\ *}$ ve $k_{3\xi}^{\ *}$ doğal eğrilikleri

$$k_{1\xi}^{\ *} = \frac{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left(k_1^*+k_3^*\right)^4}\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^{\ *} = -\frac{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left(k_1^*+k_3^*\right)^4}\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}^{\ *} = \frac{\sqrt{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left(k_1^*+k_3^{\ *}\right)^4}\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)$$

biçiminde bulunur. Açıların türevleriyle Frenet eğrilikleri arasındaki bağıntılardan dolayı

$$\theta_\xi' = -\eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)}\sqrt{\frac{\left(k_1^*+k_3^*\right)^6\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}{2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+4\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(k_1^*+k_3^*\right)^{10}}}$$

seçildiğinde

$$\phi_\xi' = \frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(k_1^*+k_3^*\right)^2}-\left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi},$$

$$\psi_\xi' = -2\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+d_3^2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\left(k_1^*+k_3^*\right)-\tan\theta_\xi\sqrt{\frac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(k_1^*+k_3^*\right)^2}-\left(\theta_\xi'\right)^2}$$

eşitlikleri mevcuttur. Ayrıca

$$k_\xi = -\psi_\xi' + \theta_\xi' \tan\psi_\xi \tan\theta_\xi = 2\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+d_3^2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\left(k_1^*+k_3^*\right),$$

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = -\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi} = \eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(k_1^*+k_3^*\right)}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 4.2.6. $\delta = \delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3 -$Smarandache eğrileri

$$\xi = \xi(s_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3)$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ, ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.6. $\delta = \delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3 -$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{M}_{1\xi}, \boldsymbol{M}_{2\xi}, \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*, k_{2\xi}^*, k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{N}_{1\xi}, \boldsymbol{N}_{2\xi}, \boldsymbol{N}_{3\xi}, \kappa_\xi, k_\xi, (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3 -$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3 -$Smarandache eğrisinin $\delta = \delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. Teorem 4.2.4. dekine benzer işlemler yapılırsa ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3 -$Smarandache eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_\xi = -\boldsymbol{T}$$

olur.

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\ddot{k}_2^* - \ddot{k}_3^* + (k_1^*)^2 k_2^* + (k_1^*)^2 k_3^* + (k_2^*)^3 + (k_2^*)^2 k_3^* + k_2^* (k_3^*)^2 + (k_3^*)^3, \\
a_1 &= -2k_1^* \dot{k}_2^* - 2k_1^* \dot{k}_3^* - \dot{k}_1^* k_2^* - \dot{k}_1^* k_3^*, \\
a_2 &= -3\dot{k}_2^* k_2^* - 2k_2^* \dot{k}_3^* - \dot{k}_2^* k_3^*, \\
a_3 &= -2\dot{k}_2^* k_3^* - 3k_3^* \dot{k}_3^* - k_2^* \dot{k}_3^*
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \dot{a}_0 - a_1 k_1^{\,*} - a_2 k_2^{\,*} - a_3 k_3^{\,*},\\
b_1 &= a_0 k_1^{\,*} + \dot{a}_1,\\
b_2 &= a_0 k_2^{\,*} + \dot{a}_2,\\
b_3 &= a_0 k_3^{\,*} + \dot{a}_3
\end{aligned}
$$

olmak üzere $\dddot{\xi}$ ve $\ddddot{\xi}$

$$
\begin{aligned}
\dddot{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_0 \boldsymbol{T} + a_1 \boldsymbol{M}_1 + a_2 \boldsymbol{M}_2 + a_3 \boldsymbol{M}_3\right)\\
\ddddot{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_0 \boldsymbol{T} + b_1 \boldsymbol{M}_1 + b_2 \boldsymbol{M}_2 + b_3 \boldsymbol{M}_3\right)
\end{aligned}
$$

biçimindedir. $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ normal vektör alanı

$$
\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{c_1 \boldsymbol{M}_1 + c_2 \boldsymbol{M}_2 + c_3 \boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}
$$

dir. Burada c_1, c_2 ve c_3

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \left(k_2^{\,*} + k_3^{\,*}\right)^2 \left(-k_1^{\,*} k_2^{\,*} - k_1^{\,*} k_3^{\,*}\right),\\
c_2 &= \left(k_2^{\,*} + k_3^{\,*}\right)^2 \left(-\left(k_2^{\,*}\right)^2 - k_2^{\,*} k_3^{\,*}\right),\\
c_3 &= \left(k_2^{\,*} + k_3^{\,*}\right)^2 \left(-k_2^{\,*} k_3^{\,*} - \left(k_3^{\,*}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanır. Buna ek olarak $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ ise

$$
\boldsymbol{N}_{3\xi} = \eta \frac{d_1 \boldsymbol{M}_1 + d_2 \boldsymbol{M}_2 + d_3 \boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}}}
$$

şeklindedir. d_1, d_2 ve d_3 için, sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \left(c_2 a_3 - c_3 a_2\right) \frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},\\
d_2 &= \left(c_3 a_1 - c_1 a_3\right) \frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}}
\end{aligned}
$$

ve

$$d_3 = \left(c_1 a_2 - c_2 a_1\right) \frac{1}{\sqrt{2\left(c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}\right)}}$$

bağıntıları mevcuttur. $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ vektör alanı ise

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \eta\left(e_1 \boldsymbol{M}_1 + e_2 \boldsymbol{M}_2 + e_3 \boldsymbol{M}_3\right) \qquad \eta = \pm 1$$

biçimindedir. Burada $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ ve $\boldsymbol{M}_3$ ün katsayıları ise, sırasıyla,

$$e_1 = \frac{d_3 c_2 - d_2 c_3}{\sqrt{\left(d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}\right)\left(c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}\right)}},$$

$$e_2 = \frac{d_1 c_3 - d_3 c_1}{\sqrt{\left(d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}\right)\left(c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}\right)}}$$

ve

$$e_3 = \frac{d_2 c_1 - d_1 c_2}{\sqrt{\left(d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}\right)\left(c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}\right)}}$$

olarak tanımlanır. Teorem 4.2.4. dekine benzer işlemler yapılırsa kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3 -$ Smarandache eğrisinin Frenet eğrilikleri

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{2\left(c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}\right)}}{\left(k_1^{\;*} + k_3^{\;*}\right)^4},$$

$$k_\xi = 2\sqrt{\frac{d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}}{c_1^{\;2} + c_2^{\;2} + c_3^{\;2}}}\left(k_2^{\;*} + k_3^{\;*}\right),$$

$$\left(r - \kappa\right)_\xi = \eta \frac{b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3}{\left(d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + d_3^{\;2}\right)\left(k_2^{\;*} + k_3^{\;*}\right)}$$

şeklinde hesaplanır. (2.3.15) denklemlerinden $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanları ise

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} = {} & \left[\frac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi} - \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_1}{\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + (\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi} + \sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_1 - \frac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right]\boldsymbol{M}_1 \\
& + \left[\frac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi} - \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_2}{\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + (\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi} + \sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_2 - \frac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right]\boldsymbol{M}_2 \\
& + \left[\frac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi} - \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_3}{\sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + (\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi} + \sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_3 - \frac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right]\boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{2\xi} = {} & \left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_1}{\sqrt{{c_0}^2+{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + \cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_1 + \frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right)\boldsymbol{M}_1 \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_2}{\sqrt{{c_0}^2+{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + \cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_2 + \frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right)\boldsymbol{M}_2 \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_3}{\sqrt{{c_0}^2+{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + \cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_3 + \frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right)\boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{3\xi} = {} & \left[\frac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi} + \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_1}{\sqrt{{c_0}^2+{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + \left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi} - \cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_1 + \frac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right]\boldsymbol{M}_1 \\
& + \left[\frac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi} + \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_2}{\sqrt{{c_0}^2+{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + \left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi} - \cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_2 + \frac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right]\boldsymbol{M}_2 \\
& + \left[\frac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi} + \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_3}{\sqrt{{c_0}^2+{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2}} + \left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi} - \cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_3 + \frac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2}}\right]\boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

biçimindedir. $k_{1\xi}^{\ *}$, $k_{2\xi}^{\ *}$ ve $k_{3\xi}^{\ *}$ doğal eğrilikleri ise

$$k_{1\xi}^{\ *}=\frac{\sqrt{2\left(c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}}{\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)^4}\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^{\ *}=-\frac{\sqrt{2\left(c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}}{\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)^4}\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}^{\ *}=\frac{\sqrt{2\left(c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}}{\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)^4}\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)$$

olarak hesaplanır. Açıların türevleriyle Frenet eğrilikleri arasındaki ilişkiden dolayı

$$\theta_\xi'=-\eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}\right)}\sqrt{\frac{\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)^6\left(c_0^{\ 2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)}{2\left(c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}\right)^2+4\left(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}\right)\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)^{10}}}$$

seçildiğinde

$$\phi_\xi'=\frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}\right)^2\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)^2}-\left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi},$$

$$\psi_\xi'=-2\sqrt{\frac{d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}}{c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}}}\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)-\tan\theta_\xi\sqrt{\frac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}\right)^2\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)^2}-\left(\theta_\xi'\right)^2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca

$$k_\xi=-\psi_\xi'+\theta_\xi'\tan\psi_\xi\tan\theta_\xi=2\sqrt{\frac{d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}}{c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}}}\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right),$$

$$\left(r-\kappa\right)_\xi=-\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi}=\eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}+d_3^{\ 2}\right)\left(k_2^{\ *}+k_3^{\ *}\right)}$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 4.2.7. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2,\, \boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrileri

$$\xi=\xi(s_\xi)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2) \tag{4.2.43}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ, ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.7. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2,\, \boldsymbol{M}_3,\, k_1^*,\, k_2^*,\, k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi,\, \boldsymbol{M}_{1\xi},\, \boldsymbol{M}_{2\xi},\, \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*,\, k_{2\xi}^*,\, k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi,\, \boldsymbol{N}_{1\xi},\, \boldsymbol{N}_{2\xi},\, \boldsymbol{N}_{3\xi},\, \kappa_\xi,\, k_\xi,\, (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. (4.2.43) denkleminde s ye göre türev alınır ve paralel transport formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\xi}=\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3-\left(k_1^*+k_2^*\right)\boldsymbol{T}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\left(k_1^*+k_2^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right]\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

elde edilir. s_ξ, ξ eğrisinin yay parametresi olduğundan

$$\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\left(k_1^*+k_2^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right] \tag{4.2.45}$$

dır. (4.2.45) eşitliğinde her iki tarafa kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds},\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}\right)=\frac{1}{3}h\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3,-\left(k_1^*+k_2^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right)$$

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2=\frac{1}{3}\left[\left(k_1^*+k_2^*\right)^2+\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right]=\frac{1}{3}\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]$$

$$\frac{ds_\xi}{ds}=\sqrt{\frac{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2}{3}} \tag{4.2.46}$$

bulunur. Böylece (4.2.46) denklemi, (4.2.45) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{T}_\xi=\frac{-\left(k_1^*+k_2^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2}} \tag{4.2.47}$$

elde edilir. (4.2.44) ifadesi s ye göre diferensiyellenirse

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\left(\dot{k}_1^*+\dot{k}_2^*\right)\boldsymbol{T}-\left(k_1^*+k_2^*\right)\dot{\boldsymbol{T}}+\dot{k}_1^*\boldsymbol{M}_1+k_1^*\dot{\boldsymbol{M}}_1+\dot{k}_2^*\boldsymbol{M}_2+k_2^*\dot{\boldsymbol{M}}_2+\dot{k}_3^*\boldsymbol{M}_3+k_3^*\dot{\boldsymbol{M}}_3\right]$$

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-\left(\dot{k}_1^*+\dot{k}_2^*\right)\boldsymbol{T}-\left(k_1^*+k_2^*\right)\left(k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right)\\+\dot{k}_1^*\boldsymbol{M}_1-\left(k_1^*\right)^2\boldsymbol{T}+\dot{k}_2^*\boldsymbol{M}_2-\left(k_2^*\right)^2\boldsymbol{T}+\dot{k}_3^*\boldsymbol{M}_3-\left(k_3^*\right)^2\boldsymbol{T}\end{bmatrix}$$

dir. Gerekli düzenleme yapıldığında

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\left(-\dot{k}_1^*-\dot{k}_2^*-\left(k_1^*\right)^2-\left(k_2^*\right)^2-\left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{T}+\left(\dot{k}_1^*-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*\right)\boldsymbol{M}_1\\+\left(\dot{k}_2^*-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_2+\left(\dot{k}_3^*-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix} \tag{4.2.48}$$

elde edilir. (4.2.48) ifadesi tekrar s ye göre diferensiyellenir ve düzenlenirse

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}-\ddot{k}_1^*-\ddot{k}_2^*-3k_1^*\dot{k}_1^*-3k_2^*\dot{k}_2^*-3k_3^*\dot{k}_3^*+\left(k_1^*\right)^3+\left(k_1^*\right)^2k_2^*\\+k_1^*\left(k_2^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^3+k_1^*\left(k_3^*\right)^2+k_2^*\left(k_3^*\right)^2\end{pmatrix}\boldsymbol{T}\\+\left(-3k_1^*\dot{k}_1^*-2k_1^*\dot{k}_2^*-\left(k_1^*\right)^3-k_1^*\left(k_2^*\right)^2-k_1^*\left(k_3^*\right)^2+\ddot{k}_1^*-\dot{k}_1^*k_2^*\right)\boldsymbol{M}_1\\+\left(-2\dot{k}_1^*k_2^*-3k_2^*\dot{k}_2^*-\left(k_1^*\right)^2k_2^*-\left(k_2^*\right)^3-k_2^*\left(k_3^*\right)^2+\ddot{k}_2^*-k_1^*\dot{k}_2^*\right)\boldsymbol{M}_2\\+\left(-2\dot{k}_1^*k_3^*-2\dot{k}_2^*k_3^*-\left(k_1^*\right)^2k_3^*-\left(k_2^*\right)^2k_3^*-\left(k_3^*\right)^3+\ddot{k}_3^*-k_1^*\dot{k}_3^*-k_2^*\dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}$$

(4.2.49)

olarak bulunur. (4.2.49) da katsayılar a_0, a_1, a_2 ve a_3 olmak üzere

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -\ddot{k}_1^* - \ddot{k}_2^* - 3k_1^*\dot{k}_1^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - 3k_3^*\dot{k}_3^* + \left(k_1^*\right)^3 + \left(k_1^*\right)^2 k_2^* + k_1^*\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^3 + k_1^*\left(k_3^*\right)^2 + k_2^*\left(k_3^*\right)^2, \\
a_1 &= -3k_1^*\dot{k}_1^* - 2k_1^*\dot{k}_2^* - \left(k_1^*\right)^3 - k_1^*\left(k_2^*\right)^2 - k_1^*\left(k_3^*\right)^2 + \ddot{k}_1^* - \dot{k}_1^* k_2^*, \\
a_2 &= -2\dot{k}_1^* k_2^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - \left(k_1^*\right)^2 k_2^* - \left(k_2^*\right)^3 - k_2^*\left(k_3^*\right)^2 + \ddot{k}_2^* - k_1^*\dot{k}_2^*, \\
a_3 &= -2\dot{k}_1^* k_3^* - 2\dot{k}_2^* k_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_3^* - \left(k_2^*\right)^2 k_3^* - \left(k_3^*\right)^3 + \ddot{k}_3^* - k_1^*\dot{k}_3^* - k_2^*\dot{k}_3^*
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlandığında $\dddot{\xi}$ türevi

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_0\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{M}_1 + a_2\boldsymbol{M}_2 + a_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.50)}$$

olarak yazılır. (4.2.50) eşitliği son kez s ye göre diferensiyellenirse $\ddddot{\xi}$ ifadesi

$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\dot{a}_0\boldsymbol{T} + a_0\left(k_1^*\boldsymbol{M}_1 + k_2^*\boldsymbol{M}_2 + k_3^*\boldsymbol{M}_3\right) + \dot{a}_1\boldsymbol{M}_1 - a_1k_1^*T + \dot{a}_2\boldsymbol{M}_2 - a_2k_2^*\boldsymbol{T} + \dot{a}_3\boldsymbol{M}_3 - a_3k_3^*\boldsymbol{T}\right)$$

şeklinde bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\dot{a}_0 - a_1k_1^* - a_2k_2^* - a_3k_3^*\right)\boldsymbol{T} + \left(a_0k_1^* + \dot{a}_1\right)\boldsymbol{M}_1 + \left(a_0k_2^* + \dot{a}_2\right)\boldsymbol{M}_2 + \left(a_0k_3^* + \dot{a}_3\right)\boldsymbol{M}_3\right]$$

elde edilir. Burada katsayılar

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \dot{a}_0 - a_1k_1^* - a_2k_2^* - a_3k_3^*, \\
b_1 &= a_0k_1^* + \dot{a}_1, \\
b_2 &= a_0k_2^* + \dot{a}_2, \\
b_3 &= a_0k_3^* + \dot{a}_3
\end{aligned}
$$

olarak alındığında

$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.51)}$$

eşitliğine ulaşılır.

Şimdi $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ yi hesaplayalım. Önce (4.2.44) denkleminin kuaterniyonik normu alınırsa

$$
\begin{aligned}
N\left(\dot{\xi}\right) &= \sqrt{\frac{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2}{3}} \\
\left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^2 &= \frac{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2}{3}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.2.52)}
$$

bulunur. (4.2.44) ve (4.2.48) eşitlikleri $h\left(\dot{\xi},\ddot{\xi}\right)$ de yerine yazıldığında $\left\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3\right\}$ ün ortonormal bir sistem olması nedeniyle

$$
h\left(\dot{\xi},\ddot{\xi}\right)=\frac{1}{3}\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right) \qquad \textbf{(4.2.53)}
$$

olarak hesaplanır. Böylece $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ nin pay kısmı olan $\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)$ ifadesi

$$
\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)=\frac{
\begin{pmatrix}\left(k_1^*+k_2^*\right)^2+\left(k_1^*\right)^2\\ +\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}\left(-\dot{k}_1^*-\dot{k}_2^*-\left(k_1^*\right)^2-\left(k_2^*\right)^2-\left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{T}\\
+\left(\dot{k}_1^*-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*\right)\boldsymbol{M}_1\\
+\left(\dot{k}_2^*-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_2\\
+\left(\dot{k}_3^*-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}
-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)
\begin{bmatrix}-\left(k_1^*+k_2^*\right)\boldsymbol{T}\\ +k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2\\ +k_3^*\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}
}{3\sqrt{3}}
$$

(4.2.54)

dır. (4.2.54) eşitliğinde $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ ve $\boldsymbol{M}_3$ ün katsayıları sırasıyla c_0, c_1, c_2 ve c_3 olmak üzere

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(-\dot{k}_1^*-\dot{k}_2^*-\left(k_1^*\right)^2-\left(k_2^*\right)^2-\left(k_3^*\right)^2\right)\\
&\quad+\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)\left(k_1^*+k_2^*\right),\\
c_1 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_1^*-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*\right)\\
&\quad-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_1^*,\\
c_2 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_2^*-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2\right)\\
&\quad-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_2^*
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_3^*-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*\right)\\
&\quad-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_3^*
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanırsa

$$
\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(c_0\boldsymbol{T}+c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.55)}
$$

olur. (4.2.55) eşitliğinin kuaterniyonik normu alınırsa

$$
N\left(N\left(\dot{\xi}(s)\right)^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{c_0^{\ 2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}} \qquad \textbf{(4.2.56)}
$$

elde edilir. Son olarak (4.2.55) ve (4.2.56) denklemleri, (2.3.9) formüllerinde yerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektör alanı

$$
\boldsymbol{N}_{1\xi}=\frac{c_0\boldsymbol{T}+c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_0^{\ 2}+c_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}+c_3^{\ 2}}} \qquad \textbf{(4.2.57)}
$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (2.3.9) formüllerinden $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanı ise

$$
\boldsymbol{N}_{3\xi}(s)=\eta\,\frac{\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)}{N\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)}, \qquad \eta=\pm1
$$

eşitliği ile hesaplanır. (4.2.47), (4.2.50) ve (4.2.57) denklemleri göz önüne alındığında $N_{3\xi}$ vektör alanının pay kısmı

$$T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{\begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ -k_1^*-k_2^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında ise

$$T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{\left\{\begin{array}{l} T\left[k_1^*\left(c_2a_3-c_3a_2\right)-k_2^*\left(c_1a_3-c_3a_1\right)+k_3^*\left(c_1a_2-c_2a_1\right)\right] \\ +M_1\left[\left(k_1^*+k_2^*\right)\left(c_2a_3-c_3a_2\right)+k_2^*\left(c_0a_3-c_3a_0\right)-k_3^*\left(c_0a_2-c_2a_0\right)\right] \\ +M_2\left[\left(-k_1^*-k_2^*\right)\left(c_1a_3-c_3a_1\right)-k_1^*\left(c_0a_3-c_3a_0\right)+k_3^*\left(c_0a_1-c_1a_0\right)\right] \\ +M_3\left[\left(k_1^*+k_2^*\right)\left(c_1a_2-c_2a_1\right)+k_1^*\left(c_0a_2-c_2a_0\right)-k_2^*\left(c_0a_1-c_1a_0\right)\right] \end{array}\right\}}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}}$$

elde edilir. Burada d_0, d_1, d_2 ve d_3 katsayıları, sırasıyla,

$$d_0=\frac{k_1^*\left(c_2a_3-c_3a_2\right)-k_2^*\left(c_1a_3-c_3a_1\right)+k_3^*\left(c_1a_2-c_2a_1\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}},$$

$$d_1=\frac{\left(k_1^*+k_2^*\right)\left(c_2a_3-c_3a_2\right)+k_2^*\left(c_0a_3-c_3a_0\right)-k_3^*\left(c_0a_2-c_2a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}},$$

$$d_2=\frac{\left(-k_1^*-k_2^*\right)\left(c_1a_3-c_3a_1\right)-k_1^*\left(c_0a_3-c_3a_0\right)+k_3^*\left(c_0a_1-c_1a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}},$$

$$d_3=\frac{\left(k_1^*+k_2^*\right)\left(c_1a_2-c_2a_1\right)+k_1^*\left(c_0a_2-c_2a_0\right)-k_2^*\left(c_0a_1-c_1a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$T_\xi(s)\wedge N_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=d_0T+d_1M_1+d_2M_2+d_3M_3 \qquad \textbf{(4.2.58)}$$

yazılır. (4.2.58) denkleminde kuaterniyonik norm alınırsa

$$N\left(\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge \dddot{\xi}(s)\right)=\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2} \tag{4.2.59}$$

bulunur. Son olarak (4.2.58) ve (4.2.59) eşitlikleri, (2.3.9) formüllerinde yerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}=\eta\frac{d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \tag{4.2.60}$$

olarak elde edilir. Şimdi $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ vektör alanını hesaplayalım. Bunun için (4.2.47), (4.2.57) ve (4.2.60) denklemleri (2.3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{N}_{2\xi}=\frac{\eta\begin{vmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{M}_3\\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3\\ -k_1^*-k_2^* & k_1^* & k_2^* & k_3^*\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

bulunur. Son ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\boldsymbol{N}_{2\xi}=\frac{\eta\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{T}\left[d_1\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)-d_2\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)+d_3\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)\right]\\ +\boldsymbol{M}_1\left[-d_0\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)+d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)-d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)\right]\\ +\boldsymbol{M}_2\left[d_0\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)-d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)+d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right]\\ +\boldsymbol{M}_3\left[-d_0\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)+d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)-d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right]\end{array}\right\}}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

elde edilir. $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ ifadesinde $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ ve $\boldsymbol{M}_3$ baz vektörlerinin katsayıları, sırasıyla,

$$e_0=\frac{\left[d_1\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)-d_2\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)+d_3\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$e_1=\frac{\left[-d_0\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)+d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)-d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$e_2=\frac{\left[d_0\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)-d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)+d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$e_3=\frac{\left[-d_0\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)+d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)-d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{N}_{2\xi}=\eta\left(e_0\boldsymbol{T}+e_1\boldsymbol{M}_1+e_2\boldsymbol{M}_2+e_3\boldsymbol{M}_3\right),\qquad \eta=\pm1 \tag{4.2.61}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanlarını bulabiliriz. (2.3.15) denkleminden

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi}&=(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi}+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi}-\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\boldsymbol{N}_{3\xi}\,,\\
\boldsymbol{M}_{2\xi}&=-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi\boldsymbol{N}_{1\xi}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\boldsymbol{N}_{2\xi}+\sin\theta_\xi\boldsymbol{N}_{3\xi}\,,\\
\boldsymbol{M}_{3\xi}&=(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi}+(-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi}+\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\boldsymbol{N}_{3\xi}
\end{aligned}$$

formülleri mevcuttur. (4.2.57), (4.2.60) ve (4.2.61) eşitlikleri (2.3.15) formüllerinde yerine yazılırsa $\boldsymbol{M}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi}=&\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)\frac{\left(c_0\boldsymbol{T}+c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\
&+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta\left(e_0\boldsymbol{T}+e_1\boldsymbol{M}_1+e_2\boldsymbol{M}_2+e_3\boldsymbol{M}_3\right)\\
&-\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta\frac{\left(d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada gerekli düzenleme yapılırsa

$$M_{1\xi}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi}-\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_0}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +(\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_0-\dfrac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_0}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi}-\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +(\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_1-\dfrac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_1$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi}-\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +(\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_2-\dfrac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_2$$

$$+\begin{bmatrix}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi}-\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\ +(\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_3-\dfrac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_3$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{M}_{2\xi}=\left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_0}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}+\cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_0+\frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_0}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\right)\boldsymbol{T}$$

$$+\left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}+\cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_1+\frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\right)\boldsymbol{M}_1$$

$$+\left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}+\cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_2+\frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\right)\boldsymbol{M}_2$$

$$+\left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}+\cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_3+\frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\right)\boldsymbol{M}_3$$

olarak elde edilir. Son olarak $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{M}_{3\xi} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_0}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_0+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_0}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array}\right]\boldsymbol{T}$$

$$+\left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_1+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array}\right]\boldsymbol{M}_1$$

$$+\left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_2+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array}\right]\boldsymbol{M}_2$$

$$+\left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_3+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array}\right]\boldsymbol{M}_3$$

dir.

Şimdi Frenet eğriliklerini hesaplayalım. Bunun için (4.2.52) eşitliklerinden

$$\left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^4 = \frac{\left[2\left(\left(k_1^{*}\right)^2+\left(k_2^{*}\right)^2+k_1^{*}k_2^{*}\right)+\left(k_3^{*}\right)^2\right]^2}{9} \qquad \textbf{(4.2.62)}$$

yazılır. (4.2.56) ve (4.2.62) eşitlikleri (2.3.10) formüllerinde yerine yazılırsa

$$\kappa_{\xi} = \frac{\sqrt{3\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}{\left[2\left(\left(k_1^{*}\right)^2+\left(k_2^{*}\right)^2+k_1^{*}k_2^{*}\right)+\left(k_3^{*}\right)^2\right]^2} \qquad \textbf{(4.2.63)}$$

olarak bulunur. Ayrıca 2. eğrilik olan k_{ξ}, (4.2.52), (4.2.56) ve (4.2.59) eşitliklerinin (2.3.10) formüllerinde yerine yazılmasıyla

$$k_\xi = 3\sqrt{\frac{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]}{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \qquad \textbf{(4.2.64)}$$

olarak bulunur. Son olarak (2.3.10) formüllerinde (4.2.51), (4.2.52), (4.2.59) ve (4.2.60) eşitliklerinin yerine yazılmasıyla 3. Frenet eğriliği $\left(r-\kappa\right)_\xi$,

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = \frac{\eta}{\sqrt{3}} \frac{h\left(b_0\boldsymbol{T}+b_1\boldsymbol{M}_1+b_2\boldsymbol{M}_2+b_3\boldsymbol{M}_3, d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\sqrt{\frac{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2}{3}}}$$

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = \frac{\eta\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)}{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2}} \qquad \textbf{(4.2.65)}$$

şeklinde elde edilir.

Doğal eğrilikleri hesaplamak için ise (2.3.17) formüllerinde (4.2.63) eşitliği kullanılırsa

$$k_{1\xi}^* = \frac{\sqrt{3\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^* = -\frac{\sqrt{3\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]^2}\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}^* = \frac{\sqrt{3\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+k_1^*k_2^*\right)+\left(k_3^*\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)$$

olarak bulunur.

Ayrıca Frenet eğrilikleri ile açılar arasındaki ilişki $\theta_\xi' = -\dfrac{(r-\kappa)_\xi}{\sqrt{\kappa_\xi^2+k_\xi^2}}$ seçildiğinde (2.3.24) ve (2.3.25) deki gibidir. Böylece (4.2.63), (4.2.64) ve (4.2.65) denklemleri yukarıdaki seçimde yerine yazıldığında

$$\theta_\xi' = -\eta \frac{b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)} \sqrt{\frac{\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + k_1^* k_2^*\right) + \left(k_3^*\right)^2\right]^3 \left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}{9\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + k_1^* k_2^*\right) + \left(k_3^*\right)^2\right]^5} \\ +3\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)^2}$$

bulunur. Bu seçim yapıldığında, (2.3.24) eşitliğinde (4.2.65) denklemi yerine yazılırsa

$$\phi_\xi' = \frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)^2 \left(2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + k_1^* k_2^*\right) + \left(k_3^*\right)^2\right)} - \left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi}$$

bulunur. (2.3.25) eşitliğinde (4.2.64) ve (4.2.65) eşitlikleri yerine yazıldığında ise

$$\psi_\xi' = -3\sqrt{\frac{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + k_1^* k_2^*\right) + \left(k_3^*\right)^2\right]}{c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}$$
$$-\tan\theta_\xi \sqrt{\frac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)^2 \left(2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + k_1^* k_2^*\right) + \left(k_3^*\right)^2\right)} - \left(\theta_\xi'\right)^2}$$

dır. Son olarak (2.3.18), (2.3.19), (4.2.64) ve (4.2.65) gereği

$$\begin{aligned} k_\xi &= -\psi_\xi' + \theta_\xi' \tan\psi_\xi \tan\theta_\xi \\ &= 3\sqrt{\frac{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + k_1^* k_2^*\right) + \left(k_3^*\right)^2\right]}{c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(r - \kappa\right)_\xi &= -\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi} \\ &= \frac{\eta\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + k_1^* k_2^*\right) + \left(k_3^*\right)^2}} \end{aligned}$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 4.2.8. $\delta = \delta(s)$ birim hızlı regüler kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_3 -$ Smarandache eğrileri

$$\xi = \xi(s_\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_3)$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ, ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.8. $\delta = \delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_3 -$ Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{M}_{1\xi}, \boldsymbol{M}_{2\xi}, \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*, k_{2\xi}^*, k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{N}_{1\xi}, \boldsymbol{N}_{2\xi}, \boldsymbol{N}_{3\xi}, \kappa_\xi, k_\xi, (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_3 -$ Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_3 -$ Smarandache eğrisinin $\delta = \delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. Teorem 4.2.7. dekine benzer işlemler yapılırsa ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_3 -$ Smarandache eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_\xi = \frac{-(k_1^* + k_3^*)\boldsymbol{T} + k_1^*\boldsymbol{M}_1 + k_2^*\boldsymbol{M}_2 + k_3^*\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{2\left((k_1^*)^2 + (k_3^*)^2 + k_1^*k_3^*\right) + (k_2^*)^2}}$$

bulunur. $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2$ ve b_3 katsayıları, sırasıyla,

$$a_0 = -\ddot{k}_1^* - \ddot{k}_3^* - 3k_1^*\dot{k}_1^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - 3k_3^*\dot{k}_3^* + \left(k_1^*\right)^3 + \left(k_1^*\right)^2 k_3^* + k_1^*\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 k_3^* + k_1^*\left(k_3^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^3,$$
$$a_1 = -3k_1^*\dot{k}_1^* - 2k_1^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^3 - k_1^*\left(k_2^*\right)^2 - k_1^*\left(k_3^*\right)^2 + \ddot{k}_1^* - \dot{k}_1^*k_3^*,$$
$$a_2 = -2\dot{k}_1^*k_2^* - 2k_2^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_2^* - \left(k_2^*\right)^3 - k_2^*\left(k_3^*\right)^2 + \ddot{k}_2^* - k_1^*\dot{k}_2^* - \dot{k}_2^*k_3^*,$$
$$a_3 = -2\dot{k}_1^*k_3^* - 3k_3^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_3^* - \left(k_2^*\right)^2 k_3^* - \left(k_3^*\right)^3 + \ddot{k}_3^* - k_1^*\dot{k}_3^*$$

ve

$$b_0 = \dot{a}_0 - a_1k_1^* - a_2k_2^* - a_3k_3^*,$$
$$b_1 = a_0k_1^* + \dot{a}_1,$$
$$b_2 = a_0k_2^* + \dot{a}_2,$$
$$b_3 = a_0k_3^* + \dot{a}_3,$$

olmak üzere $\dddot{\xi}$ ve $\ddddot{\xi}$ vektörleri

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_0\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{M}_1 + a_2\boldsymbol{M}_2 + a_3\boldsymbol{M}_3\right)$$
$$\ddddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $\boldsymbol{N}_{1\xi}$

$$\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}$$

şeklindedir. Burada c_0, c_1, c_2 ve c_3 katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(-\dot{k}_1^* - \dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 - \left(k_2^*\right)^2 - \left(k_3^*\right)^2\right) \\
&\quad + \left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^* + k_2^*\dot{k}_2^*\right)\left(k_1^* + k_3^*\right), \\
c_1 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_1^* - \left(k_1^*\right)^2 - k_1^*k_3^*\right) \\
&\quad - \left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^* + k_2^*\dot{k}_2^*\right)k_1^*, \\
c_2 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_2^* - k_1^*k_2^* - k_2^*k_3^*\right) \\
&\quad - \left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^* + k_2^*\dot{k}_2^*\right)k_2^*, \\
c_3 &= \left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_3^* - k_1^*k_3^* - \left(k_3^*\right)^2\right) \\
&\quad - \left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^* + k_2^*\dot{k}_2^*\right)k_3^*
\end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{3\xi} = \eta \frac{d_0\boldsymbol{T} + d_1\boldsymbol{M}_1 + d_2\boldsymbol{M}_2 + d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}}} \qquad \eta = \pm 1$$

şeklindedir ve d_0, d_1, d_2 ve d_3 ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d_0 = \frac{k_1^*\left(c_2a_3 - c_3a_2\right) - k_2^*\left(c_1a_3 - c_3a_1\right) + k_3^*\left(c_1a_2 - c_2a_1\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},$$

$$d_1 = \frac{\left(k_1^* + k_3^*\right)\left(c_2a_3 - c_3a_2\right) + k_2^*\left(c_0a_3 - c_3a_0\right) - k_3^*\left(c_0a_2 - c_2a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},$$

$$d_2 = \frac{\left(-k_1^* - k_3^*\right)\left(c_1a_3 - c_3a_1\right) - k_1^*\left(c_0a_3 - c_3a_0\right) + k_3^*\left(c_0a_1 - c_1a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},$$

$$d_3 = \frac{\left(k_1^* + k_3^*\right)\left(c_1a_2 - c_2a_1\right) + k_1^*\left(c_0a_2 - c_2a_0\right) - k_2^*\left(c_0a_1 - c_1a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}}.$$

$\boldsymbol{N}_{2\xi}$ normal vektör alanı,

$$\boldsymbol{N}_{2\xi} = \eta\left(e_0\boldsymbol{T} + e_1\boldsymbol{M}_1 + e_2\boldsymbol{M}_2 + e_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \eta = \pm 1$$

olarak hesaplanır. Burada e_0, e_1, e_2 ve e_3, sırasıyla,

$$e_0 = \frac{\left[d_1\left(k_2^*c_3 - k_3^*c_2\right) - d_2\left(k_1^*c_3 - k_3^*c_1\right) + d_3\left(k_1^*c_2 - k_2^*c_1\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},$$

$$e_1 = \frac{\left[-d_0\left(k_2^*c_3 - k_3^*c_2\right) + d_2\left(-\left(k_1^* + k_3^*\right)c_3 - k_3^*c_0\right) - d_3\left(-\left(k_1^* + k_3^*\right)c_2 - k_2^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}},$$

$$e_2 = \frac{\left[d_0\left(k_1^*c_3 - k_3^*c_1\right) - d_1\left(-\left(k_1^* + k_3^*\right)c_3 - k_3^*c_0\right) + d_3\left(-\left(k_1^* + k_3^*\right)c_1 - k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_3^*\right) + \left(k_2^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}}$$

ve

$$e_3 = \frac{\left[-d_0 \left(k_1^* c_2 - k_2^* c_1 \right) + d_1 \left(-\left(k_1^* + k_3^* \right) c_2 - k_2^* c_0 \right) - d_2 \left(-\left(k_1^* + k_3^* \right) c_1 - k_1^* c_0 \right) \right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \right) \left[2 \left(\left(k_1^* \right)^2 + \left(k_3^* \right)^2 + k_1^* k_3^* \right) + \left(k_2^* \right)^2 \right] \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \right)}}$$

şeklindedir. (2.3.15) denkleminden $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanları ise

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} = & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_0 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{T} \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_1 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_2 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_3 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_3 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{2\xi} = & \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_0 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \right) \boldsymbol{T} \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_1 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \right) \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_2 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \right) \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_3 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \right) \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}$$

ve

$$\boldsymbol{M}_{3\xi}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_0}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_0+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_0}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{T}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_1+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_1$$

$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_2+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_2$$

$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+\left(\sin\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi}-\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)\eta e_3+\dfrac{\cos\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_3$$

biçimindedir. Frenet eğrilikleri ise, sırasıyla,

$$\kappa_{\xi}=\frac{\sqrt{3\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}{\left[2\left(\left(k_1^{*}\right)^2+\left(k_3^{*}\right)^2+k_1^{*}k_3^{*}\right)+\left(k_2^{*}\right)^2\right]^2},$$

$$k_{\xi}=3\sqrt{\frac{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_1^{*}\right)^2+\left(k_3^{*}\right)^2+k_1^{*}k_3^{*}\right)+\left(k_2^{*}\right)^2\right]}{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}},$$

$$\left(r-\kappa\right)_{\xi}=\frac{\eta\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)}{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)\sqrt{2\left(\left(k_1^{*}\right)^2+\left(k_3^{*}\right)^2+k_1^{*}k_3^{*}\right)+\left(k_2^{*}\right)^2}}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda doğal eğrilikler ise

$$k_{1\xi}{}^{*}=\frac{\sqrt{3\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}}{\left[2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}{}^{*}=-\frac{\sqrt{3\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}}{\left[2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right]^2}\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}{}^{*}=\frac{\sqrt{3\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}}{\left[2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)$$

şeklinde hesaplanır. Açıların türevleriyle Frenet eğrilikleri arasındaki ilişkiden dolayı

$$\theta'_\xi=-\eta\frac{b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2\right)}\sqrt{\frac{\left[2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right]^3\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)}{\begin{array}{l}9\left(d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2\right)\left[2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right]^5\\+3\left(c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2\right)^2\end{array}}}$$

seçimi yapıldığında

$$\phi_\xi{}'=\frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2\right)^2\left(2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right)}-\left(\theta_\xi'\right)^2}}{\cos\theta_\xi},$$

$$\begin{aligned}\psi_\xi{}'=&-3\sqrt{\frac{\left(d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2\right)\left[2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right]}{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}\\&-\tan\theta_\xi\sqrt{\frac{\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2\right)^2\left(2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right)}-\left(\theta_\xi'\right)^2}\end{aligned}$$

bağıntıları mevcuttur. Son olarak

$$\begin{aligned}k_\xi&=-\psi_\xi{}'+\theta_\xi'\tan\psi_\xi\tan\theta_\xi\\&=3\sqrt{\frac{\left(d_0{}^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2\right)\left[2\left(\left(k_1{}^{*}\right)^2+\left(k_3{}^{*}\right)^2+k_1{}^{*}k_3{}^{*}\right)+\left(k_2{}^{*}\right)^2\right]}{c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2}}\end{aligned}$$

ve

$$(r-\kappa)_{\xi}=-\frac{\theta_{\xi}'}{\cos\psi_{\xi}}$$

$$=\frac{\eta\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)}{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_3^*\right)+\left(k_2^*\right)^2}}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 4.2.9. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\,\boldsymbol{M}_1,\,\boldsymbol{M}_2,\,\boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2\boldsymbol{M}_3-$ Smarandache eğrileri

$$\xi=\xi\left(s_{\xi}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_3\right)$$

ile tanımlanır. Burada s_{ξ}, ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.9. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T},\,\boldsymbol{M}_1,\,\boldsymbol{M}_2,\,\boldsymbol{M}_3,\,k_1^*,\,k_2^*,\,k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_{\xi},\,\boldsymbol{M}_{1\xi},\,\boldsymbol{M}_{2\xi},\,\boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $\{k_{1\xi}^*,\,k_{2\xi}^*,\,k_{3\xi}^*\}$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_{\xi},\,\boldsymbol{N}_{1\xi},\,\boldsymbol{N}_{2\xi},\,\boldsymbol{N}_{3\xi},\,\kappa_{\xi},\,k_{\xi},\,(r-\kappa)_{\xi}\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. Teorem 4.2.7. dekine benzer işlemler yapılırsa ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_\xi = \frac{-\left(k_2^* + k_3^*\right)\boldsymbol{T} + k_1^*\boldsymbol{M}_1 + k_2^*\boldsymbol{M}_2 + k_3^*\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{2\left(\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_2^* k_3^*\right) + \left(k_1^*\right)^2}}$$

şeklindedir. a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 ve b_3 katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\ddot{k}_2^* - \ddot{k}_3^* - 3k_1^*\dot{k}_1^* - 3k_2^*\dot{k}_2^* - 3k_3^*\dot{k}_3^* + \left(k_1^*\right)^2 k_2^* + \left(k_1^*\right)^2 k_3^* + \left(k_2^*\right)^3 + \left(k_2^*\right)^2 k_3^* + k_2^*\left(k_3^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^3, \\
a_1 &= -2k_1^*\dot{k}_2^* - 2k_1^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^3 - k_1^*\left(k_2^*\right)^2 - k_1^*\left(k_3^*\right)^2 + \ddot{k}_1^* - \dot{k}_1^* k_2^* - \dot{k}_1^* k_3^*, \\
a_2 &= -3k_2^*\dot{k}_2^* - 2k_2^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_2^* - \left(k_2^*\right)^3 - k_2^*\left(k_3^*\right)^2 + \ddot{k}_2^* - \dot{k}_2^* k_3^*, \\
a_3 &= -2\dot{k}_2^* k_3^* - 3k_3^*\dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 k_3^* - \left(k_2^*\right)^2 k_3^* - \left(k_3^*\right)^3 + \ddot{k}_3^* - k_2^*\dot{k}_3^*
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_0 &= \dot{a}_0 - a_1 k_1^* - a_2 k_2^* - a_3 k_3^*, \\
b_1 &= a_0 k_1^* + \dot{a}_1, \\
b_2 &= a_0 k_2^* + \dot{a}_2, \\
b_3 &= a_0 k_3^* + \dot{a}_3
\end{aligned}$$

olmak üzere $\ddot{\xi}$ ve $\dddot{\xi}$

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_0\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{M}_1 + a_2\boldsymbol{M}_2 + a_3\boldsymbol{M}_3\right) \\
\dddot{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

$\boldsymbol{N}_{1\xi}$ normal vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{1\xi} = \frac{c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

ile verilir. Burada c_0, c_1, c_2 ve c_3 katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
c_0 = &\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_2^* k_3^*\right) + \left(k_1^*\right)^2\right]\left(-\dot{k}_2^* - \dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 - \left(k_2^*\right)^2 - \left(k_3^*\right)^2\right) \\
&+ \left(2k_2^*\dot{k}_2^* + k_2^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_2^* k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^* + k_1^*\dot{k}_1^*\right)\left(k_2^* + k_3^*\right),
\end{aligned}$$

$$c_1=\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_1^*-k_1^*k_2^*-k_1^*k_3^*\right)$$
$$-\left(2k_2^*\dot{k}_2^*+k_2^*\dot{k}_3^*+\dot{k}_2^*k_3^*+2k_3^*\dot{k}_3^*+k_1^*\dot{k}_1^*\right)k_1^*,$$
$$c_2=\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_2^*-\left(k_2^*\right)^2-k_2^*k_3^*\right)$$
$$-\left(2k_2^*\dot{k}_2^*+k_2^*\dot{k}_3^*+\dot{k}_2^*k_3^*+2k_3^*\dot{k}_3^*+k_1^*\dot{k}_1^*\right)k_2^*,$$
$$c_3=\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]\left(\dot{k}_3^*-k_2^*k_3^*-\left(k_3^*\right)^2\right)$$
$$-\left(2k_2^*\dot{k}_2^*+k_2^*\dot{k}_3^*+\dot{k}_2^*k_3^*+2k_3^*\dot{k}_3^*+k_1^*\dot{k}_1^*\right)k_3^*$$

şeklindedir. Benzer şekilde $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}=\eta\frac{d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}},\qquad \eta=\pm1$$

olarak yazılır. Burada d_0, d_1, d_2 ve d_3 katsayıları, sırasıyla,

$$d_0=\frac{k_1^*\left(c_2a_3-c_3a_2\right)-k_2^*\left(c_1a_3-c_3a_1\right)+k_3^*\left(c_1a_2-c_2a_1\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}},$$
$$d_1=\frac{\left(k_2^*+k_3^*\right)\left(c_2a_3-c_3a_2\right)+k_2^*\left(c_0a_3-c_3a_0\right)-k_3^*\left(c_0a_2-c_2a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}},$$
$$d_2=\frac{\left(-k_2^*-k_3^*\right)\left(c_1a_3-c_3a_1\right)-k_1^*\left(c_0a_3-c_3a_0\right)+k_3^*\left(c_0a_1-c_1a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}},$$
$$d_3=\frac{\left(k_1^*+k_3^*\right)\left(c_1a_2-c_2a_1\right)+k_1^*\left(c_0a_2-c_2a_0\right)-k_2^*\left(c_0a_1-c_1a_0\right)}{\sqrt{3\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}$$

şeklindedir. $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ vektör alanı ise

$$\boldsymbol{N}_{2\xi}=\eta\left(e_0\boldsymbol{T}+e_1\boldsymbol{M}_1+e_2\boldsymbol{M}_2+e_3\boldsymbol{M}_3\right),\qquad \eta=\pm1$$

olarak bulunur. Burada e_0, e_1, e_2 ve e_3 katsayıları, sırasıyla,

$$e_0 = \frac{\left[d_1 \left(k_2^* c_3 - k_3^* c_2 \right) - d_2 \left(k_1^* c_3 - k_3^* c_1 \right) + d_3 \left(k_1^* c_2 - k_2^* c_1 \right) \right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \right) \left[2\left(\left(k_2^* \right)^2 + \left(k_3^* \right)^2 + k_2^* k_3^* \right) + \left(k_1^* \right)^2 \right] \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \right)}},$$

$$e_1 = \frac{\left[-d_0 \left(k_2^* c_3 - k_3^* c_2 \right) + d_2 \left(-\left(k_2^* + k_3^* \right) c_3 - k_3^* c_0 \right) - d_3 \left(-\left(k_2^* + k_3^* \right) c_2 - k_2^* c_0 \right) \right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \right) \left[2\left(\left(k_2^* \right)^2 + \left(k_3^* \right)^2 + k_2^* k_3^* \right) + \left(k_1^* \right)^2 \right] \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \right)}},$$

$$e_2 = \frac{\left[d_0 \left(k_1^* c_3 - k_3^* c_1 \right) - d_1 \left(-\left(k_2^* + k_3^* \right) c_3 - k_3^* c_0 \right) + d_3 \left(-\left(k_2^* + k_3^* \right) c_1 - k_1^* c_0 \right) \right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \right) \left[2\left(\left(k_2^* \right)^2 + \left(k_3^* \right)^2 + k_2^* k_3^* \right) + \left(k_1^* \right)^2 \right] \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \right)}},$$

$$e_3 = \frac{\left[-d_0 \left(k_1^* c_2 - k_2^* c_1 \right) + d_1 \left(-\left(k_2^* + k_3^* \right) c_2 - k_2^* c_0 \right) - d_2 \left(-\left(k_2^* + k_3^* \right) c_1 - k_1^* c_0 \right) \right]}{\sqrt{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \right) \left[2\left(\left(k_2^* \right)^2 + \left(k_3^* \right)^2 + k_2^* k_3^* \right) + \left(k_1^* \right)^2 \right] \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \right)}}$$

şeklindedir. (2.3.15) denklemlerinden $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} = & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_0 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{T} \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_1 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_1 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_2 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_2 \\
& + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi \right) c_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_3 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_3 ,
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M}_{2\xi}=\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_0+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_0}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{T}$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_1+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{M}_1$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_2+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{M}_2$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}+\cos\psi_\xi\cos\theta_\xi\eta e_3+\frac{\sin\theta_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)\boldsymbol{M}_3$$

ve

$$\boldsymbol{M}_{3\xi}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_0}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_0+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_0}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{T}$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_1+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_1}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_1$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_2+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_2}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_2$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\ +\left(\sin\psi_\xi\sin\phi_\xi-\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)\eta e_3+\dfrac{\cos\theta_\xi\cos\phi_\xi\eta d_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_3$$

olarak hesaplanır. Teorem 4.2.7. dekine benzer işlemler yapılırsa Frenet eğrilikleri

$$\kappa_\xi=\frac{\sqrt{3\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_2^*k_3^*\right)+\left(k_1^*\right)^2\right]^2},$$

$$k_{\xi} = 3\sqrt{\frac{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right]}{c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}},$$

$$\left(r - \kappa\right)_{\xi} = \frac{\eta\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\sqrt{2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2}}$$

biçimindedir. Doğal eğrilikler ise

$$k_{1\xi}^{\ *} = \frac{\sqrt{3\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}}{\left[2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi} - \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right),$$

$$k_{2\xi}^{\ *} = -\frac{\sqrt{3\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}}{\left[2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right]^2}\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi},$$

$$k_{3\xi}^{\ *} = \frac{\sqrt{3\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}}{\left[2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right]^2}\left(\cos\psi_{\xi}\sin\phi_{\xi} + \sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\cos\phi_{\xi}\right)$$

şeklinde hesaplanır. Açıların türevleriyle Frenet eğrilikleri arasındaki ilişkiden dolayı

$$\theta_{\xi}' = -\eta\frac{b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)}\sqrt{\frac{\left[2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right]^3\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)}{9\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right]^5 + 3\left(c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}\right)^2}}$$

seçimi yapıldığında

$$\phi_{\xi}' = \frac{\sqrt{\frac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)^2\left(2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right)} - \left(\theta_{\xi}'\right)^2}}{\cos\theta_{\xi}},$$

$$\psi_{\xi}' = -3\sqrt{\frac{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)\left[2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right]}{c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}$$
$$-\tan\theta_{\xi}\sqrt{\frac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^{\,2} + d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + d_3^{\,2}\right)^2\left(2\left(\left(k_2^{*}\right)^2 + \left(k_3^{*}\right)^2 + k_2^{*}k_3^{*}\right) + \left(k_1^{*}\right)^2\right)} - \left(\theta_{\xi}'\right)^2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca

$$k_\xi = -\psi_\xi' + \theta_\xi' \tan\psi_\xi \tan\theta_\xi$$

$$= 3\sqrt{\frac{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left[2\left(\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_2^* k_3^*\right) + \left(k_1^*\right)^2\right]}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

ve

$$\left(r - \kappa\right)_\xi = -\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi}$$

$$= \frac{\eta\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\sqrt{2\left(\left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_2^* k_3^*\right) + \left(k_1^*\right)^2}}$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 4.2.10. $\delta = \delta(s)$ birim hızlı regüler kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrileri

$$\xi = \xi\left(s_\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.66)}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ , ξ eğrisinin yay parametresidir.

Teorem 4.2.10. $\delta = \delta(s)$ birim hızlı regüler, kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{M}_{1\xi}, \boldsymbol{M}_{2\xi}, \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*, k_{2\xi}^*, k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{N}_{1\xi}, \boldsymbol{N}_{2\xi}, \boldsymbol{N}_{3\xi}, \kappa_\xi, k_\xi, (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. (4.2.66) bağıntısında s ye göre türev alınır ve paralel transport formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\xi}=\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-k_1^*\boldsymbol{T}-k_2^*\boldsymbol{T}-k_3^*\boldsymbol{T}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-k_1^*-k_2^*-k_3^*\right)\boldsymbol{T}\end{aligned}\tag{4.2.67}$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür. s_ξ yay parametresi olduğundan

$$\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-k_1^*-k_2^*-k_3^*\right)\boldsymbol{T}\tag{4.2.68}$$

yazılır. (4.2.68) eşitliğinde her iki tarafa kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds},\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-k_1^*-k_2^*-k_3^*\right)\boldsymbol{T},\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-k_1^*-k_2^*-k_3^*\right)\boldsymbol{T}\right),$$

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2=\frac{1}{3}\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^2$$

$$\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)\tag{4.2.69}$$

sonucuna ulaşılır. (4.2.69) eşitliğinin (4.2.68) denkleminde yerine yazılmasıyla $\boldsymbol{T}_\xi$ teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_\xi=-\boldsymbol{T}\tag{4.2.70}$$

bulunur. (4.2.67) ifadesi tekrar s ye göre diferensiyellenirse

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-k_1^*-k_2^*-k_3^*\right)\left(k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right)+\left(-\dot{k}_1^*-\dot{k}_2^*-\dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{T}\right]$$

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\left(-\dot{k}_1^*-\dot{k}_2^*-\dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{T}+\left(-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*-k_1^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_1\\+\left(-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2-k_2^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_2+\left(-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*-\left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}\tag{4.2.71}$$

bulunur. (4.2.71) eşitliği tekrar s ye göre diferensiyellenip gerekli düzenleme yapıldığında

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}-\ddot{k}_1^*-\ddot{k}_2^*-\ddot{k}_3^*+\left(k_1^*\right)^3+\left(k_1^*\right)^2k_2^*+\left(k_1^*\right)^2k_3^*+k_1^*\left(k_2^*\right)^2\\+\left(k_2^*\right)^3+\left(k_2^*\right)^2k_3^*+k_1^*\left(k_3^*\right)^2+k_2^*\left(k_3^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^3\end{pmatrix}\boldsymbol{T}\\+\left(-2k_1^*\dot{k}_1^*-k_1^*\dot{k}_2^*-\dot{k}_1^*k_2^*-k_1^*\dot{k}_3^*-\dot{k}_1^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_1\\+\left(-\dot{k}_1^*k_2^*-k_1^*\dot{k}_2^*-2k_2^*\dot{k}_2^*-k_2^*\dot{k}_3-\dot{k}_2^*k_3^*\right)\boldsymbol{M}_2\\+\left(-\dot{k}_1^*k_3^*-k_1^*\dot{k}_3^*-k_2^*\dot{k}_3-\dot{k}_2^*k_3^*-2k_3^*\dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. Son eşitliği kısaltmak adına

$$\begin{aligned}a_0&=-\ddot{k}_1^*-\ddot{k}_2^*-\ddot{k}_3^*+\left(k_1^*\right)^3+\left(k_1^*\right)^2k_2^*+\left(k_1^*\right)^2k_3^*+k_1^*\left(k_2^*\right)^2\\&\quad+\left(k_2^*\right)^3+\left(k_2^*\right)^2k_3^*+k_1^*\left(k_3^*\right)^2+k_2^*\left(k_3^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^3,\\a_1&=-2k_1^*\dot{k}_1^*-k_1^*\dot{k}_2^*-\dot{k}_1^*k_2^*-k_1^*\dot{k}_3^*-\dot{k}_1^*k_3^*,\\a_2&=-\dot{k}_1^*k_2^*-k_1^*\dot{k}_2^*-2k_2^*\dot{k}_2^*-k_2^*\dot{k}_3-\dot{k}_2^*k_3^*,\\a_3&=-\dot{k}_1^*k_3^*-k_1^*\dot{k}_3^*-k_2^*\dot{k}_3-\dot{k}_2^*k_3^*-2k_3^*\dot{k}_3^*\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_0\boldsymbol{T}+a_1\boldsymbol{M}_1+a_2\boldsymbol{M}_2+a_3\boldsymbol{M}_3\right)\tag{4.2.72}$$

yazılır. s ye göre son kez türev alınırsa

$$\ddddot{\xi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\dot{a}_0-a_1k_1^*-a_2k_2^*-a_3k_3^*\right)\boldsymbol{T}+\left(a_0k_1^*+\dot{a}_1\right)\boldsymbol{M}_1+\left(a_0k_2^*+\dot{a}_2\right)\boldsymbol{M}_2+\left(a_0k_3^*+\dot{a}_3\right)\boldsymbol{M}_3\right]$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}b_0&=\dot{a}_0-a_1k_1^*-a_2k_2^*-a_3k_3^*,\\b_1&=a_0k_1^*+\dot{a}_1,\\b_2&=a_0k_2^*+\dot{a}_2,\\b_3&=a_0k_3^*+\dot{a}_3\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa $\ddddot{\xi}$ ifadesi

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b_0 \boldsymbol{T} + b_1 \boldsymbol{M}_1 + b_2 \boldsymbol{M}_2 + b_3 \boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.73)}$$

biçiminde hesaplanır. Şimdi kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin Frenet elemanlarını δ nın paralel transport elemanları cinsinden hesaplayalım. Bunun için ilk önce (4.2.67) denkleminin kuaterniyonik normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned} N\left(\dot{\xi}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(k_1^* + k_2^* + k_3^*\right) \\ \left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^2 &= \frac{1}{3}\left(k_1^* + k_2^* + k_3^*\right)^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.2.74)}$$

elde edilir. (4.2.67) ve (4.2.71) eşitlikleri göz önüne alınarak $\xi(s)$ ile $\ddot{\xi}(s)$ vektörlerinin kuaterniyonik iç çarpımı alınırsa

$$h\left(\dot{\xi}(s), \ddot{\xi}(s)\right) = \frac{1}{3} h\left(\left(-k_1^* - k_2^* - k_3^*\right)\boldsymbol{T}, \begin{bmatrix} \left(-\dot{k}_1^* - \dot{k}_2^* - \dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{T} + \left(-\left(k_1^*\right)^2 - k_1^* k_2^* - k_1^* k_3^*\right)\boldsymbol{M}_1 \\ + \left(-k_1^* k_2^* - \left(k_2^*\right)^2 - k_2^* k_3^*\right)\boldsymbol{M}_2 + \left(-k_1^* k_3^* - k_2^* k_3^* - \left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_3 \end{bmatrix} \right)$$

bulunur. $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$, ortonormal bir sistem oluşturduğundan bu iç çarpım

$$\begin{aligned} h\left(\dot{\xi}(s), \ddot{\xi}(s)\right) &= \frac{1}{3}\left(k_1^* + k_2^* + k_3^*\right)\left(\dot{k}_1^* + \dot{k}_2^* + \dot{k}_3^*\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_2^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^* k_2^* + \dot{k}_2^* k_2^* + k_2^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^* k_3^* + \dot{k}_2^* k_3^* + \dot{k}_3^* k_3^*\right) \end{aligned}$$

$$\textbf{(4.2.75)}$$

olarak elde edilir. Böylece $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektör alanının pay kısmı, (4.2.67), (4.2.71), (4.2.74) ve (4.2.75) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2 \ddot{\xi}(s) - h\left(\dot{\xi}(s), \ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(k_1^* + k_2^* + k_3^*\right)^2 \begin{bmatrix} \left(-\left(k_1^*\right)^2 - k_1^* k_2^* - k_1^* k_3^*\right)\boldsymbol{M}_1 \\ + \left(-k_1^* k_2^* - \left(k_2^*\right)^2 - k_2^* k_3^*\right)\boldsymbol{M}_2 \\ + \left(-k_1^* k_3^* - k_2^* k_3^* - \left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{M}_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Son eşitliği düzenlemek adına

$$c_1=\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^2\left(-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*-k_1^*k_3^*\right),$$
$$c_2=\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^2\left(-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2-k_2^*k_3^*\right)$$

ve

$$c_3=\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^2\left(-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*-\left(k_3^*\right)^2\right)$$

olarak tanımlanırsa

$$\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.76)}$$

yazılır. Burada (4.2.76) denkleminin kuaterniyonik normu alındığında

$$N\left(\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)\right)=\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}{3\sqrt{3}} \qquad \textbf{(4.2.77)}$$

elde edilir. Böylece (4.2.76) ve (4.2.77) denklemleri (2.3.9) formüllerinde yerine yazılırsa $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{1\xi}=\frac{c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}} \qquad \textbf{(4.2.78)}$$

olarak bulunur. Şimdi $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanını hesaplayalım. (2.3.9) formüllerinden

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}(s)=\eta\frac{\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)}{N\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)}, \qquad \eta=\pm1$$

olduğu biliniyor. (4.2.70), (4.2.72) ve (4.2.78) eşitlikleri, $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ nin pay kısmında yerine yazıldığında

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{1}{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{M}_3\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_1 & c_2 & c_3\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge \dddot{\xi}(s)=\frac{\left[\left(c_2a_3-c_3a_2\right)\boldsymbol{M}_1-\left(c_1a_3-c_3a_1\right)\boldsymbol{M}_2+\left(c_1a_2-c_2a_1\right)\boldsymbol{M}_3\right]}{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

bulunur. Kısalık için

$$d_1=\frac{c_2a_3-c_3a_2}{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_2=\frac{c_3a_1-c_1a_3}{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_3=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

olarak alınırsa

$$\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge \dddot{\xi}(s)=d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3 \qquad \textbf{(4.2.79)}$$

dır. (4.2.79) eşitliğinin kuaterniyonik normu alınırsa

$$N\left(\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge \boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge \dddot{\xi}(s)\right)=\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2} \qquad \textbf{(4.2.80)}$$

bulunur. (4.2.79) ve (4.2.80) sonuçları, (2.3.9) formüllerinde yerine yazıldığında $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}=\eta\frac{d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \qquad \textbf{(4.2.81)}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $\boldsymbol{N}_{2\xi}$ vektör alanını bulmak için (2.3.9) formüllerinde (4.2.70), (4.2.78) ve (4.2.81) yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{N}_{2\xi}=\frac{\eta}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{M}_3\\ 0 & d_1 & d_2 & d_3\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenleme yapılırsa

$$N_{2\xi}=\frac{-\eta\left[\left(d_2c_3-d_3c_2\right)\boldsymbol{M}_1-\left(d_1c_3-d_3c_1\right)\boldsymbol{M}_2+\left(d_1c_2-d_2c_1\right)\boldsymbol{M}_3\right]}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

bulunur. Son eşitlikte $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ ve $\boldsymbol{M}_3$ ün katsayıları sırasıyla e_1, e_2 ve e_3 olmak üzere

$$N_{2\xi}=\eta\left(e_1\boldsymbol{M}_1+e_2\boldsymbol{M}_2+e_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.82)}$$

dir. Burada

$$e_1=\frac{d_3c_2-d_2c_3}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$
$$e_2=\frac{d_1c_3-d_3c_1}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$
$$e_3=\frac{d_2c_1-d_1c_2}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

olarak tanımlanır.

Artık $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanlarını bulabiliriz. (2.3.15) formüllerinde (4.2.78), (4.2.81) ve (4.2.82) eşitlikleri yerine yazıldığında $\boldsymbol{M}_{1\xi}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{1\xi}&=\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right)\frac{\left(c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{cc_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\&+(\cos\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\cos\phi_\xi)\eta\left(e_1\boldsymbol{M}_1+e_2\boldsymbol{M}_2+e_3\boldsymbol{M}_3\right)\\&-\cos\theta_\xi\sin\phi_\xi\eta\frac{\left(d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenleme yapılırsa $\boldsymbol{M}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{M}_{1\xi}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi}-\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_1}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+(\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_1-\dfrac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_1$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi}-\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_2}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+(\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_2-\dfrac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_2$$
$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\cos\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi}-\sin\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\right)c_3}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}\\+(\cos\psi_{\xi}\sin\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}+\sin\psi_{\xi}\cos\phi_{\xi})\eta e_3-\dfrac{\cos\theta_{\xi}\sin\phi_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\end{array}\right]\boldsymbol{M}_3$$

olarak ifade edilir.

Benzer şekilde $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ vektör alanı

$$\boldsymbol{M}_{2\xi}=\left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}+\cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_1+\frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_1}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\right)\boldsymbol{M}_1$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}+\cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_2+\frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_2}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\right)\boldsymbol{M}_2$$
$$+\left(\frac{-\sin\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}+\cos\psi_{\xi}\cos\theta_{\xi}\eta e_3+\frac{\sin\theta_{\xi}\eta d_3}{\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}}\right)\boldsymbol{M}_3$$

olarak hesaplanır. Son olarak $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ vektör alanı ise

$$\boldsymbol{M}_{3\xi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{{c_0}^2 + {c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_1 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{{d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_1$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{{c_0}^2 + {c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_2 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{{d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_2$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{{c_0}^2 + {c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2}} \\ +\left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_3 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{{d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_3$$

biçimindedir. Şimdi Frenet eğriliklerini hesaplayalım. Bunun için (4.2.74) eşitliklerinden

$$\left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^4 = \frac{1}{9}\left({k_1}^* + {k_2}^* + {k_3}^*\right)^4 \tag{4.2.83}$$

bağıntısı mevcuttur. (4.2.77) ve (4.2.83) denklemleri (2.3.10) formüllerinde yerine yazılırsa κ_ξ eğriliği

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{3\left({c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2\right)}}{\left({k_1}^* + {k_2}^* + {k_3}^*\right)^4} \tag{4.2.84}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (4.2.74), (4.2.77) ve (4.2.80) bağıntıları (2.3.10) formüllerinde yerine yazılırsa

$$k_\xi = 3\sqrt{\frac{{d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2}{{c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2}}\left({k_1}^* + {k_2}^* + {k_3}^*\right) \tag{4.2.85}$$

olarak hesaplanır. Son olarak 3. Frenet eğriliği $\left(r-\kappa\right)_\xi$ yi hesaplamak için (2.3.10) formüllerinde (4.2.73), (4.2.74), (4.2.80) ve (4.2.81) yerlerine yazılırsa

$$(r-\kappa)_\xi = \frac{h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(b_0\boldsymbol{T}+b_1\boldsymbol{M}_1+b_2\boldsymbol{M}_2+b_3\boldsymbol{M}_3\right),\eta\frac{d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}\,\frac{\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)}{\sqrt{3}}}$$

elde edilir $\{\boldsymbol{T},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2,\, \boldsymbol{M}_3\}$ ortonormal bir sistem oluşturduğundan

$$(r-\kappa)_\xi = \eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)} \tag{4.2.86}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi $k_{1\xi}^*, k_{2\xi}^*$ ve $k_{3\xi}^*$ doğal eğriliklerini hesaplayalım. Bunun için Frenet çatısına göre birinci eğrilik olan (4.2.84) bağıntısı (2.3.17) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$k_{1\xi}^* = \frac{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^4}\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^* = -\frac{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^4}\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}^* = \frac{\sqrt{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}{\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^4}\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)$$

elde edilir. $\theta'_\xi = -\dfrac{(r-\kappa)_\xi}{\sqrt{\kappa_\xi^2+k_\xi^2}}$ seçildiğinde (4.2.84), (4.2.85) ve (4.2.86) gereği

$$\theta'_\xi = -\eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{d_1^2+d_2^2+d_3^2}\sqrt{\frac{\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^6\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}{3\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+9\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^{10}}}$$

eşitliği mevcuttur. Ayrıca (4.2.86) bağıntısı (2.3.24) formülünde yerine yazılırsa

$$\phi'_\xi = \frac{\sqrt{\frac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^2}-\left(\theta'_\xi\right)^2}}{\cos\theta_\xi}$$

olarak hesaplanır. (2.3.25) eşitliğinde (4.2.85) ve (4.2.86) nın kullanılmasıyla ψ_ξ' ifadesi

$$\psi_\xi' = -3\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+d_3^2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right) - \tan\theta_\xi \sqrt{\frac{\left(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)^2}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)^2\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^2} - \left(\theta_\xi'\right)^2}$$

biçiminde bulunur. Son olarak (2.3.18), (2.3.19), (4.2.85) ve (4.2.86) eşitlikleri gereği

$$k_\xi = -\psi_\xi' + \theta_\xi' \tan\psi_\xi \tan\theta_\xi = 3\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+d_3^2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)$$

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = -\frac{\theta_\xi'}{\cos\psi_\xi} = \eta\frac{b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3}{\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)}$$

bağıntıları geçerlidir.

Tanım 4.2.11. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$, δ eğrisinin paralel transport çatısı olsun. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$ Smarandache eğrileri

$$\xi=\xi\left(s_\xi\right)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.87)}$$

ile tanımlanır. Burada s_ξ ile ξ eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir.

Teorem 4.2.11. $\delta=\delta(s)$ birim hızlı regüler kuaterniyonik eğri ve $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$, δ eğrisinin paralel transport elemanları olsun. Ayrıca δ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisi ξ olmak üzere, ξ nin paralel transport çatısı $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{M}_{1\xi}, \boldsymbol{M}_{2\xi}, \boldsymbol{M}_{3\xi}\}$, bu çatıya göre eğrilikler $k_{1\xi}^*, k_{2\xi}^*, k_{3\xi}^*$ ve Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}_\xi, \boldsymbol{N}_{1\xi}, \boldsymbol{N}_{2\xi}, \boldsymbol{N}_{3\xi}, \kappa_\xi, k_\xi, (r-\kappa)_\xi\}$ ile gösterilsin. Bu durumda ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin

Frenet ve paralel transport elemanları, δ eğrisinin paralel transport elemanları cinsinden yazılabilir.

İspat: ξ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisinin $\delta=\delta(s)$ ye göre Frenet ve paralel transport elemanlarını araştıralım. (4.2.87) denkleminde s ye göre türev alınır ve paralel transport formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\xi}=\frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds}&=\frac{1}{2}\left(k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)\boldsymbol{T}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right]\end{aligned}\tag{4.2.88}$$

yazılır. s_ξ yay parametresi olduğundan

$$\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}=\frac{1}{2}\left[-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right]$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafa kuaterniyonik iç çarpım uygulanırsa

$$h\left(\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds},\boldsymbol{T}_\xi\frac{ds_\xi}{ds}\right)=h\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)\boldsymbol{T}\\+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)\boldsymbol{T}\\+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\frac{ds_\xi}{ds}\right)^2=\frac{1}{4}\left[\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)^2+\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2\right]$$

$$\frac{ds_\xi}{ds}=\sqrt{\frac{\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*}{2}}$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{T}_\xi$ teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}_\xi=\frac{-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)\boldsymbol{T}+k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)}}\tag{4.2.89}$$

olarak hesaplanır. (4.2.88) eşitliği tekrar s ye göre diferensiyellenirse

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{2}\left[-\left(\dot{k}_1^*+\dot{k}_2^*+\dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{T}-(k_1^*+k_2^*+k_3^*)\dot{\boldsymbol{T}}+\dot{k}_1^*\boldsymbol{M}_1+k_1^*\dot{\boldsymbol{M}}_1+\dot{k}_2^*\boldsymbol{M}_2+k_2^*\dot{\boldsymbol{M}}_2+\dot{k}_3^*\boldsymbol{M}_3+k_3^*\dot{\boldsymbol{M}}_3\right]$$

bulunur. Son eşitlik, paralel transport formülleri kullanılıp düzenlenirse

$$\ddot{\xi}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(-\dot{k}_1^*-\dot{k}_2^*-\dot{k}_3^*-\left(k_1^*\right)^2-\left(k_2^*\right)^2-\left(k_3^*\right)^2\right)\boldsymbol{T}+\left(-\left(k_1^*\right)^2-k_1^*k_2^*-k_1^*k_3^*+\dot{k}_1^*\right)\boldsymbol{M}_1\\ +\left(-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2-k_2^*k_3^*+\dot{k}_2^*\right)\boldsymbol{M}_2+\left(-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*-\left(k_3^*\right)^2+\dot{k}_3^*\right)\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}$$

(4.2.90)

olarak elde edilir. (4.2.90) eşitliği tekrar s ye göre diferensiyellenirse

$$\begin{aligned}a_0&=-\ddot{k}_1^*-\ddot{k}_2^*-\ddot{k}_3^*-3k_1^*\dot{k}_1^*-3k_2^*\dot{k}_2^*-3k_3^*\dot{k}_3^*+\left(k_1^*\right)^3+\left(k_1^*\right)^2k_2^*+\left(k_1^*\right)^2k_3^*\\&\quad+k_1^*\left(k_2^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^3+k_1^*\left(k_3^*\right)^2+k_2^*\left(k_3^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2,\\a_1&=-3k_1^*\dot{k}_1^*-2k_1^*\dot{k}_2^*-k_1^*\dot{k}_3^*-\left(k_1^*\right)^3-k_1^*\left(k_2^*\right)^2-k_1^*\left(k_3^*\right)^2-\dot{k}_1^*k_2^*-\dot{k}_1^*k_3^*+\ddot{k}_1^*,\\a_2&=-2\dot{k}_1^*k_2^*-3k_2^*\dot{k}_2^*-2k_2^*\dot{k}_3^*-\left(k_1^*\right)^2k_2^*-\left(k_2^*\right)^3-k_2^*\left(k_3^*\right)^2-k_1^*\dot{k}_2^*-\dot{k}_2^*k_3^*+\ddot{k}_2^*,\\a_3&=-2\dot{k}_1^*k_3^*-2\dot{k}_2^*k_3^*-3k_3^*\dot{k}_3^*-\left(k_1^*\right)^2k_3^*-\left(k_2^*\right)^2k_3^*-\left(k_3^*\right)^3+\ddot{k}_3^*-k_1^*\dot{k}_3^*-k_2^*\dot{k}_3^*\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\dddot{\xi}=\frac{1}{2}\left(a_0\boldsymbol{T}+a_1\boldsymbol{M}_1+a_2\boldsymbol{M}_2+a_3\boldsymbol{M}_3\right) \qquad \textbf{(4.2.91)}$$

şeklindedir. (4.2.91) denklemini s ye göre son kez diferensiyellersek

$$\ddddot{\xi}=\frac{1}{2}\left(\dot{a}_0\boldsymbol{T}+a_0\left(k_1^*\boldsymbol{M}_1+k_2^*\boldsymbol{M}_2+k_3^*\boldsymbol{M}_3\right)+\dot{a}_1\boldsymbol{M}_1-a_1k_1^*T+\dot{a}_2\boldsymbol{M}_2-a_2k_2^*\boldsymbol{T}+\dot{a}_3\boldsymbol{M}_3-a_3k_3^*\boldsymbol{T}\right)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\ddddot{\xi}=\frac{1}{2}\left[\left(\dot{a}_0-a_1k_1^*-a_2k_2^*-a_3k_3^*\right)\boldsymbol{T}+\left(a_0k_1^*+\dot{a}_1\right)\boldsymbol{M}_1+\left(a_0k_2^*+\dot{a}_2\right)\boldsymbol{M}_2+\left(a_0k_3^*+\dot{a}_3\right)\boldsymbol{M}_3\right]$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}b_0&=\dot{a}_0-a_1k_1^*-a_2k_2^*-a_3k_3^*,\\b_1&=a_0k_1^*+\dot{a}_1,\\b_2&=a_0k_2^*+\dot{a}_2,\\b_3&=a_0k_3^*+\dot{a}_3\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$\dddot{\xi} = \frac{1}{2}\left(b_0\boldsymbol{T} + b_1\boldsymbol{M}_1 + b_2\boldsymbol{M}_2 + b_3\boldsymbol{M}_3\right) \quad \textbf{(4.2.92)}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektör alanını hesaplayalım. Öncelikle (4.2.88) denkleminin kuaterniyonik normu alınırsa

$$N\left(\dot{\xi}\right) = \sqrt{\frac{\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_2^* + k_1^*k_3^* + k_2^*k_3^*}{2}}$$
$$\left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^2 = \frac{\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_2^* + k_1^*k_3^* + k_2^*k_3^*}{2} \quad \textbf{(4.2.93)}$$

bulunur. (4.2.88) ve (4.2.90) denklemleri $h\left(\dot{\xi},\ddot{\xi}\right)$ ifadesinde yerine yazılırsa, $\left\{\boldsymbol{T},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2,\, \boldsymbol{M}_3\right\}$ vektörlerinin ortonormal bir sistem olması nedeniyle

$$h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right) = \frac{1}{4}\left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_2^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_2^* + 2k_2^*\dot{k}_2^* + k_2^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_3^* + \dot{k}_2^*k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^*\right)$$
$$\textbf{(4.2.94)}$$

olarak hesaplanır. $\boldsymbol{N}_{1\xi}$ vektör alanının pay kısmı olan $\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s) - h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)$, (4.2.88), (4.2.90), (4.2.93) ve (4.2.94) ün kullanılmasıyla

$$\left[N\left(\dot{\xi}(s)\right)\right]^2\ddot{\xi}(s) - h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s) = \frac{1}{8}\left(c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3\right) \quad \textbf{(4.2.95)}$$

şeklinde elde edilir. Burada c_0, c_1, c_2 ve c_3 katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} c_0 = 2&\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_2^* + k_1^*k_3^* + k_2^*k_3^*\right)\left(-\dot{k}_1^* - \dot{k}_2^* - \dot{k}_3^* - \left(k_1^*\right)^2 - \left(k_2^*\right)^2 - \left(k_3^*\right)^2\right) \\ &+\left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_2^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_2^* + 2k_2^*\dot{k}_2^* + k_2^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_3^* + \dot{k}_2^*k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^*\right)\left(k_1^* + k_2^* + k_3^*\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 = 2&\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^*k_2^* + k_1^*k_3^* + k_2^*k_3^*\right)\left(-\left(k_1^*\right)^2 - k_1^*k_2^* - k_1^*k_3^* + \dot{k}_1^*\right) \\ &-\left(2k_1^*\dot{k}_1^* + k_1^*\dot{k}_2^* + k_1^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_2^* + 2k_2^*\dot{k}_2^* + k_2^*\dot{k}_3^* + \dot{k}_1^*k_3^* + \dot{k}_2^*k_3^* + 2k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_1^*, \end{aligned}$$

$$c_2 = 2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(-k_1^*k_2^*-\left(k_2^*\right)^2-k_2^*k_3^*+\dot{k}_2^*\right)$$
$$-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+k_1^*\dot{k}_3^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_2^*\dot{k}_3^*+\dot{k}_1^*k_3^*+\dot{k}_2^*k_3^*+2k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_2^*,$$

$$c_3 = 2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(-k_1^*k_3^*-k_2^*k_3^*-\left(k_3^*\right)^2+\dot{k}_3^*\right)$$
$$-\left(2k_1^*\dot{k}_1^*+k_1^*\dot{k}_2^*+k_1^*\dot{k}_3^*+\dot{k}_1^*k_2^*+2k_2^*\dot{k}_2^*+k_2^*\dot{k}_3^*+\dot{k}_1^*k_3^*+\dot{k}_2^*k_3^*+2k_3^*\dot{k}_3^*\right)k_3^*$$

biçimindedir. (4.2.95) in kuaterniyonik normu alınırsa

$$N\left(N\left(\dot{\xi}(s)\right)^2\ddot{\xi}(s)-h\left(\dot{\xi}(s),\ddot{\xi}(s)\right)\dot{\xi}(s)\right)=\frac{1}{8}\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}} \qquad \textbf{(4.2.96)}$$

bulunur. (4.2.95) ve (4.2.96) denklemleri (2.3.9) formüllerinde yerine yazıldığında

$$\boldsymbol{N}_{1\xi}=\frac{c_0\boldsymbol{T}+c_1\boldsymbol{M}_1+c_2\boldsymbol{M}_2+c_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \qquad \textbf{(4.2.97)}$$

elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{N}_{3\xi}$ yi hesaplayalım. (2.3.9) formüllerinden $\boldsymbol{N}_{3\xi}$

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}(s)=\eta\frac{\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)}{N\left(\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)}, \qquad \eta=\pm1$$

eşitliği ile hesaplanır. (4.2.89), (4.2.91) ve (4.2.97) denklemlerinden

$$\boldsymbol{T}_\xi(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{M}_3\\ -k_1^*-k_2^*-k_3^* & k_1^* & k_2^* & k_3^*\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}}{2\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=\frac{\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{T}\left[k_1^*(c_2a_3-c_3a_2)-k_2^*(c_1a_3-c_3a_1)+k_3^*(c_1a_2-c_2a_1)\right]\\+\boldsymbol{M}_1\left[\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)(c_2a_3-c_3a_2)+k_2^*(c_0a_3-c_3a_0)-k_3^*(c_0a_2-c_2a_0)\right]\\+\boldsymbol{M}_2\left[\left(-k_1^*-k_2^*-k_3^*\right)(c_1a_3-c_3a_1)-k_1^*(c_0a_3-c_3a_0)+k_3^*(c_0a_1-c_1a_0)\right]\\+\boldsymbol{M}_3\left[\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)(c_1a_2-c_2a_1)+k_1^*(c_0a_2-c_2a_0)-k_2^*(c_0a_1-c_1a_0)\right]\end{array}\right\}}{2\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

bulunur. Kısalık için

$$d_0=\frac{k_1^*(c_2a_3-c_3a_2)-k_2^*(c_1a_3-c_3a_1)+k_3^*(c_1a_2-c_2a_1)}{2\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_1=\frac{\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)(c_2a_3-c_3a_2)+k_2^*(c_0a_3-c_3a_0)-k_3^*(c_0a_2-c_2a_0)}{2\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_2=\frac{\left(-k_1^*-k_2^*-k_3^*\right)(c_1a_3-c_3a_1)-k_1^*(c_0a_3-c_3a_0)+k_3^*(c_0a_1-c_1a_0)}{2\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$d_3=\frac{\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)(c_1a_2-c_2a_1)+k_1^*(c_0a_2-c_2a_0)-k_2^*(c_0a_1-c_1a_0)}{2\sqrt{2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)=d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3 \qquad \textbf{(4.2.98)}$$

şeklindedir. (4.2.98) ifadesinin kuaterniyonik normu alındığında

$$N\left(\boldsymbol{T}_{\xi}(s)\wedge\boldsymbol{N}_{1\xi}(s)\wedge\dddot{\xi}(s)\right)=\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2} \qquad \textbf{(4.2.99)}$$

bulunur. Son olarak (4.2.98) ve (4.2.99) eşitlikleri (2.3.9) formüllerinde yerine yazıldığında

$$\boldsymbol{N}_{3\xi}=\eta\frac{d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3}{\sqrt{d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2}} \qquad \textbf{(4.2.100)}$$

sonucuna ulaşılır. $N_{2\xi}$ yi hesaplamak için (2.3.9) daki $N_{2\xi}(s)=\eta N_{3\xi}(s)\wedge T_{\xi}(s)\wedge N_{1\xi}(s)$ formülünü kullanalım. (4.2.89), (4.2.97) ve (4.2.100) denklemlerinden

$$N_{2\xi}=\frac{\eta\begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ -k_1^*-k_2^*-k_3^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$N_{2\xi}=\frac{\eta\left\{\begin{array}{l} T\left[d_1\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)-d_2\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)+d_3\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)\right] \\ +M_1\left[-d_0\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)+d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)-d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)\right] \\ +M_2\left[d_0\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)-d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)+d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right] \\ +M_3\left[-d_0\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)+d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)-d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right] \end{array}\right\}}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

bulunur. $N_{2\xi}$ ifadesinde T, M_1, M_2 ve M_3 baz vektörlerinin katsayıları, sırasıyla,

$$e_0=\frac{\left[d_1\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)-d_2\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)+d_3\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$e_1=\frac{\left[-d_0\left(k_2^*c_3-k_3^*c_2\right)+d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)-d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$e_2=\frac{\left[d_0\left(k_1^*c_3-k_3^*c_1\right)-d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_3-k_3^*c_0\right)+d_3\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}},$$

$$e_3=\frac{\left[-d_0\left(k_1^*c_2-k_2^*c_1\right)+d_1\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_2-k_2^*c_0\right)-d_2\left(-\left(k_1^*+k_2^*+k_3^*\right)c_1-k_1^*c_0\right)\right]}{\sqrt{\left(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)2\left(\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right)\left(c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)}}$$

olmak üzere

$$N_{2\xi} = \eta\left(e_0 \boldsymbol{T} + e_1 \boldsymbol{M}_1 + e_2 \boldsymbol{M}_2 + e_3 \boldsymbol{M}_3\right), \qquad \eta = \pm 1 \qquad \textbf{(4.2.101)}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\boldsymbol{M}_{1\xi}$, $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ ve $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ normal vektör alanlarını hesaplayalım. Bunun için (2.3.15) denkleminden

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} &= (\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi} + (\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi} - \cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \boldsymbol{N}_{3\xi}\,, \\
\boldsymbol{M}_{2\xi} &= -\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi \boldsymbol{N}_{1\xi} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \boldsymbol{N}_{2\xi} + \sin\theta_\xi \boldsymbol{N}_{3\xi}\,, \\
\boldsymbol{M}_{3\xi} &= (\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{1\xi} + (-\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\phi_\xi)\boldsymbol{N}_{2\xi} + \cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \boldsymbol{N}_{3\xi}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (4.2.97), (4.2.100) ve (4.2.101) denklemleri göz önüne alınırsa $\boldsymbol{M}_{1\xi}$ vektör alanı

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} = &\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)\frac{\left(c_0\boldsymbol{T} + c_1\boldsymbol{M}_1 + c_2\boldsymbol{M}_2 + c_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}} \\
&+ (\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta\left(e_0\boldsymbol{T} + e_1\boldsymbol{M}_1 + e_2\boldsymbol{M}_2 + e_3\boldsymbol{M}_3\right) \\
&- \cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta \frac{\left(d_0\boldsymbol{T} + d_1\boldsymbol{M}_1 + d_2\boldsymbol{M}_2 + d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\sqrt{d_0^{\,2} + d_1^2 + d_2^{\,2} + d_3^2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında $\boldsymbol{M}_{1\xi}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{1\xi} &= \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_0}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_0 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array} \right] \boldsymbol{T} \\
&+ \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_1 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_1 \\
&+ \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_2 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_2 \\
&+ \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \cos\phi_\xi - \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi\right)c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} \\ +(\cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \cos\phi_\xi)\eta e_3 - \dfrac{\cos\theta_\xi \sin\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \end{array} \right] \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Aynı şekilde $\boldsymbol{M}_{2\xi}$ vektör alanı

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{2\xi} &= \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_0}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_0 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \right) \boldsymbol{T} \\
&+ \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_1}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_1 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \right) \boldsymbol{M}_1 \\
&+ \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_2}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_2 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \right) \boldsymbol{M}_2 \\
&+ \left(\frac{-\sin\psi_\xi \cos\theta_\xi c_3}{\sqrt{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}} + \cos\psi_\xi \cos\theta_\xi \eta e_3 + \frac{\sin\theta_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}} \right) \boldsymbol{M}_3
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Son olarak $\boldsymbol{M}_{3\xi}$ vektör alanı ise

$$\boldsymbol{M}_{3\xi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ + \left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_0 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_0}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{T}$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ + \left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_1 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_1}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_1$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ + \left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_2 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_2}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_2$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\cos\psi_\xi \sin\phi_\xi + \sin\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right) c_3}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ + \left(\sin\psi_\xi \sin\phi_\xi - \cos\psi_\xi \sin\theta_\xi \cos\phi_\xi\right)\eta e_3 + \dfrac{\cos\theta_\xi \cos\phi_\xi \eta d_3}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M}_3$$

dir. Şimdi Frenet eğriliklerini hesaplayalım. (4.2.93) eşitliğinden

$$\left[N\left(\dot{\xi}\right)\right]^4 = \frac{\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]^2}{4} \qquad \textbf{(4.2.102)}$$

bağıntısı mevcuttur. (4.2.96) ve (4.2.102) denklemleri, (2.3.10) formüllerinde yerine yazılırsa

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{\left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}}{2\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]^2} \qquad \textbf{(4.2.103)}$$

bulunur. (4.2.93), (4.2.96) ve (4.2.99) bağıntıları (2.3.10) formüllerinde yerine yazıldığında ikinci eğrilik

$$k_\xi = 4\sqrt{\frac{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)2\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right]}{c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}}$$

(4.2.104)

biçiminde bulunur. Ayrıca 3. eğrilik $\left(r-\kappa\right)_\xi$ yi hesaplamak için (4.2.92), (4.2.93), (4.2.99) ve (4.2.100) eşitlikleri (2.3.10) formüllerinde yerine yazılırsa

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = \frac{\eta}{2}\frac{h\left(b_0\boldsymbol{T}+b_1\boldsymbol{M}_1+b_2\boldsymbol{M}_2+b_3\boldsymbol{M}_3, d_0\boldsymbol{T}+d_1\boldsymbol{M}_1+d_2\boldsymbol{M}_2+d_3\boldsymbol{M}_3\right)}{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)\sqrt{\frac{\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*}{2}}}$$

bulunur. $\left\{\boldsymbol{T},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2,\, \boldsymbol{M}_3\right\}$, ortonormal bir sistem belirttiğinden

$$\left(r-\kappa\right)_\xi = \frac{\eta\left(b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\right)}{\left(d_0^{\,2}+d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}\right)\sqrt{2\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right]}}$$

(4.2.105)

elde edilir. Doğal eğrilikler, (4.2.103) bağıntısının (2.3.17) formüllerinde kullanılmasıyla

$$k_{1\xi}^{\ *} = \frac{\sqrt{\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}{2\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\cos\phi_\xi-\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\sin\phi_\xi\right),$$

$$k_{2\xi}^{\ *} = -\frac{\sqrt{\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}{2\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right]^2}\sin\psi_\xi\cos\theta_\xi,$$

$$k_{3\xi}^{\ *} = \frac{\sqrt{\left(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}\right)}}{2\left[\left(k_1^*\right)^2+\left(k_2^*\right)^2+\left(k_3^*\right)^2+k_1^*k_2^*+k_1^*k_3^*+k_2^*k_3^*\right]^2}\left(\cos\psi_\xi\sin\phi_\xi+\sin\psi_\xi\sin\theta_\xi\cos\phi_\xi\right)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca Frenet eğrilikleri ile açılar arasındaki ilişki $\theta_\xi' = -\dfrac{(r-\kappa)_\xi}{\sqrt{\kappa_\xi^{\,2}+k_\xi^{\,2}}}$ seçildiğinde (2.3.24) ve (2.3.25) deki gibidir. Böylece (4.2.103), (4.2.104) ve (4.2.105) denklemleri yukarıdaki seçimde yerine yazıldığında

$$\theta_{\xi}' = -\eta \frac{b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)} \sqrt{\frac{2\left(\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right)^3 \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)}{128\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]^5 + \left(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)^2}}$$

bulunur. (4.2.105) denklemi (2.3.24) deki eşitlikte kullanılırsa

$$\phi_{\xi}' = \frac{\sqrt{\dfrac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)^2 2\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]} - \left(\theta_{\xi}'\right)^2}}{\cos\theta_{\xi}}$$

yazılır. Buna ek olarak (2.3.25) ilişkisinde (4.2.104) ve (4.2.105) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\psi_{\xi}' = & -4\sqrt{\frac{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right) 2\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\
& - \tan\theta_{\xi} \sqrt{\frac{\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)^2}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)^2 2\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]} - \left(\dot{\theta}_{\xi}\right)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (2.3.18), (2.3.19), (4.2.104) ve (4.2.105) gereği

$$\begin{aligned}
k_{\xi} &= -\psi_{\xi}' + \theta_{\xi}' \tan\psi_{\xi} \tan\theta_{\xi} \\
&= 4\sqrt{\frac{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right) 2\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(r - \kappa\right)_{\xi} &= -\frac{\theta_{\xi}'}{\cos\psi_{\xi}} \\
&= \frac{\eta\left(b_0 d_0 + b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3\right)}{\left(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)\sqrt{2\left[\left(k_1^*\right)^2 + \left(k_2^*\right)^2 + \left(k_3^*\right)^2 + k_1^* k_2^* + k_1^* k_3^* + k_2^* k_3^*\right]}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur.

Örnek 4.2.1. Birim hızlı $\delta(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{s}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_2 + 2\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_3 - \frac{s}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_4$ eğrisini alalım. (2.3.9) formülleri gereğince Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_4 \\
\boldsymbol{N}_1(s) &= -\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_1 - \sin\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{N}_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_3 - \frac{2}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_4 \\
\boldsymbol{N}_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_4
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca (2.3.10) formüllerinden Frenet eğrilikleri

$$\kappa = \frac{2}{5},\ \ k = \frac{1}{5},\ \ r - \kappa = 0$$

bulunur. ϕ, θ, ψ Euler açıları olmak üzere $\theta' = -\frac{(r-\kappa)}{\sqrt{\kappa^2 + k^2}}$ seçildiğinde (2.3.24) ve (2.3.25) deki bağıntılar söz konusudur. Böylece $\theta = c_1$ seçildiğinde $\phi = c_2$ ve $\psi = -\frac{s}{5} + c_3$ bağıntıları mevcuttur. Burada $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ dir. Özel olarak $c_1 = \frac{3\pi}{2}, c_2 = c_3 = \frac{\pi}{4}$ olarak alındığında, (2.3.15) formüllerinden paralel transport çatısına göre normal vektör alanları

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_1 &= \left(-\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}\boldsymbol{e}_2 \\
&\quad + \left(-\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3 + \frac{2}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}\boldsymbol{e}_4 \\
\boldsymbol{M}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_4 \\
\boldsymbol{M}_3 &= \left(-\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{10}}\cos\frac{s}{5}\boldsymbol{e}_2 \\
&\quad + \left(-\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3 - \frac{2}{\sqrt{10}}\cos\frac{s}{5}\boldsymbol{e}_4
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Böylece kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1-$Smarandache eğrisi, (4.2.1) eşitliğinden

$$\xi_1(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{10}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_4$$

ile verilir. (4.2.22) bağıntısından kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisi ise

$$\xi_2(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e}_4$$

şeklindedir. Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2-$Smarandache eğrisi (4.2.43) formülünden

$$\xi_3(s)=\left(-\frac{2}{\sqrt{15}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{1}{\sqrt{30}}-\frac{2}{\sqrt{30}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$+\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3+\left(-\frac{1}{\sqrt{30}}+\frac{2}{\sqrt{30}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\boldsymbol{e}_4$$

biçimindedir. (4.2.66) eşitliğinden kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$Smarandache eğrisi

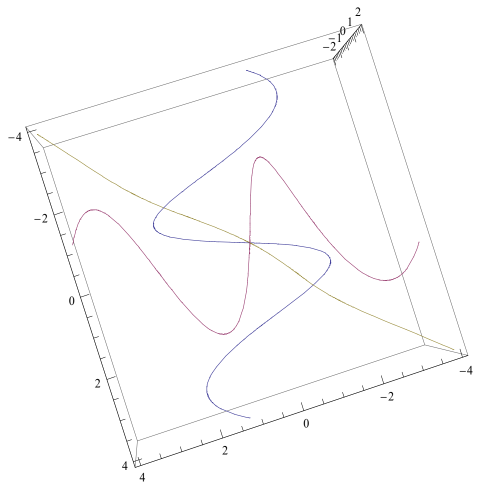
$$\xi_4(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{15}}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1$$
$$+\left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{30}}\cos\frac{s}{5}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{15}}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3$$
$$+\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{30}}\cos\frac{s}{5}\right)\boldsymbol{e}_4$$

olarak hesaplanır. Son olarak kuaterniyonik (4.2.87) denkleminden $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$ Smarandache eğrisi ise

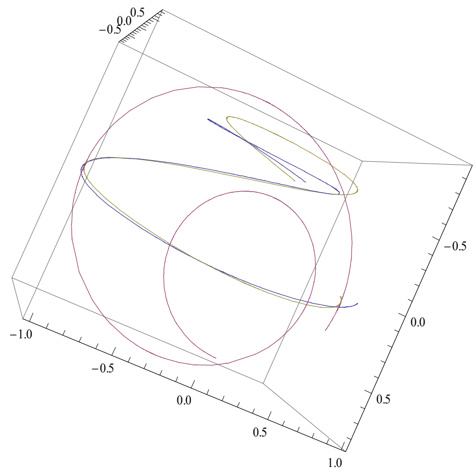
$$
\begin{aligned}
\xi_5(s)=&\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1\\
&+\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos\frac{s}{5}\right)\boldsymbol{e}_2\\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\frac{s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3\\
&+\left(-\frac{1}{2\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{5}-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos\frac{s}{5}\right)\boldsymbol{e}_4
\end{aligned}
$$

bulunur.

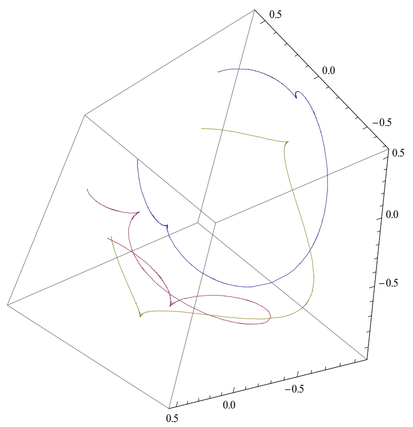
Bu eğrilerin bazı izdüşümlerinin grafikleri aşağıdaki gibidir:



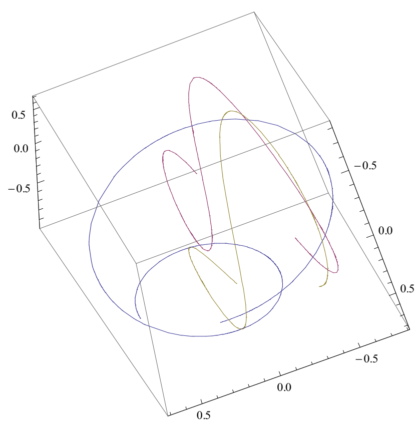
Şekil 4.2.1. $\delta(s)$ birim hızlı kuaterniyonik eğri



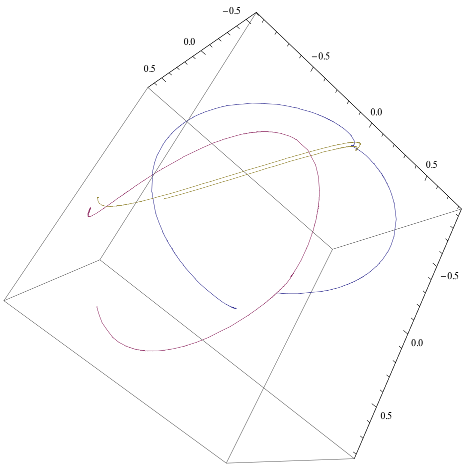
Şekil 4.2.2. $\xi_1(s)$ kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1-$ Smarandache eğrisi



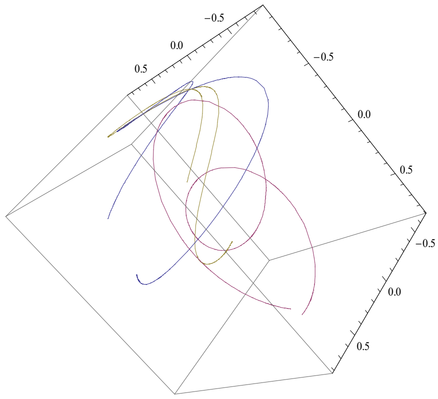
Şekil 4.2.3. $\xi_2(s)$ Kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2-$ Smarandache eğrisi



Şekil 4.2.4. $\xi_3(s)$ Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2-$ Smarandache eğrisi



Şekil 4.2.5. $\xi_4(s)$ Kuaterniyonik $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$ Smarandache eğrisi



Şekil 4.2.6. $\xi_5(s)$ Kuaterniyonik $\boldsymbol{TM}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3-$ Smarandache eğrisi

Örnek 4.2.2. Örnek 4.2.1. de verilen $\delta=\delta(s)$ eğrisi ile birleşen uzaysal kuaterniyonik eğri ($\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{N}_1(s)\times\hat{\boldsymbol{T}}(s)$ bağıntısı yardımıyla)

$$\gamma(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1-\frac{2s}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3$$

dir. γ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri, (2.3.4) denklemlerinden,

$$\boldsymbol{t}(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{n}_1(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{n}_2(s)=\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_2+\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3$$

şeklindedir. (2.3.7) formüllerinden γ eğrisinin burulması $r=\dfrac{2}{5}$ bulunur.

Teorem 2.3.7 gereğince $\boldsymbol{m}_1$ ile $\boldsymbol{n}_1$ arasındaki açı ψ olmak üzere $\psi=\int r(s)ds$ bağıntısı mevcuttur. Böylece

$$\psi(s)=\frac{2s}{5}+c,\qquad c\in\mathbb{R}$$

elde edilir. $c=0$ alınırsa

$$\boldsymbol{m}_1(s)=\cos\psi(s)\boldsymbol{n}_1(s)-\sin\psi(s)\boldsymbol{n}_2(s)$$
$$\boldsymbol{m}_2(s)=\sin\psi(s)\boldsymbol{n}_1(s)+\cos\psi(s)\boldsymbol{n}_2(s)$$

formüllerinden

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_1(s)=&\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1\\&+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\boldsymbol{e}_2\\&+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_2(s)=&\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1\\&-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\boldsymbol{e}_2\\&+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

bulunur. Bunlardan yararlanarak kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1-$Smarandache eğrisi, (4.1.1) eşitliği gereği

$$\begin{aligned}\xi_6(s)=&\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1\\&+\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{2s}{5}\right)\boldsymbol{e}_2\\&+\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2-$Smarandache eğrisi ise (4.1.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\xi_7(s)=&\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_1\\&+\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos\frac{2s}{5}\right)\boldsymbol{e}_2\\&+\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. (4.1.39) eşitliğinden kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisi

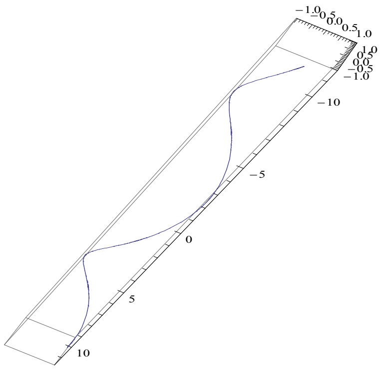
$$
\begin{aligned}
\xi_8(s)=&\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\frac{2s}{5}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos\frac{2s}{5}\right)\boldsymbol{e}_2 \\
&+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}} \\ +\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

biçiminde bulunur. Son olarak kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1\boldsymbol{m}_2-$Smarandache eğrisi, (4.1.54) formülünden

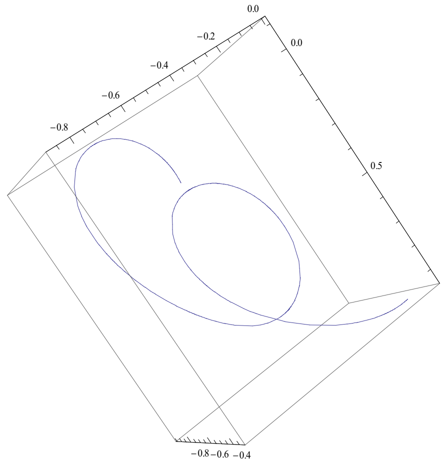
$$
\begin{aligned}
\xi_9(s)=&\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{30}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{30}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{15}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}} \\ +\sqrt{\frac{2}{15}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{2}{15}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{15}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\
&+\left(-\frac{2}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\frac{2s}{5}-\frac{1}{\sqrt{15}}\cos\frac{2s}{5}\right)\boldsymbol{e}_2 \\
&+\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{30}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{2}{15}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}} \\ +\sqrt{\frac{2}{15}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{15}}\cos\frac{2s}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{2}{15}}\cos\frac{2s}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

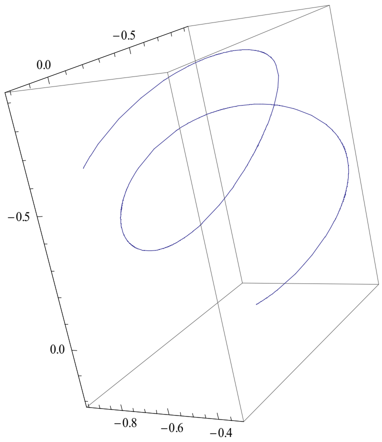
Bu eğrilerin grafikleri aşağıdaki gibidir:



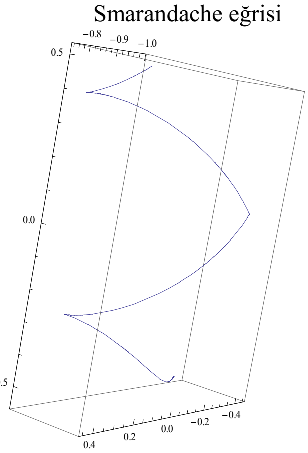
Şekil 4.2.7. Birim hızlı uzaysal kuaterniyonik γ eğrisi



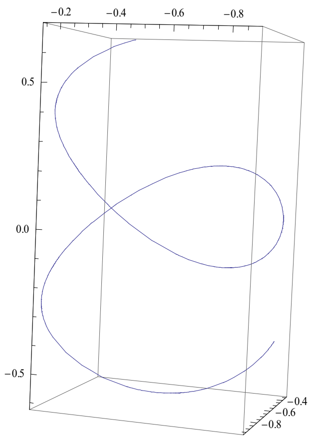
Şekil 4.2.8. $\xi_6(s)$ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1$ – Smarandache eğrisi



Şekil 4.2.9 $\xi_7(s)$ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_2$ – Smarandache eğrisi



Şekil 4.2.10. $\xi_8(s)$ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$ – Smarandache eğrisi



Şekil 4.2.11. $\xi_9(s)$ uzaysal kuaterniyonik $\boldsymbol{tm}_1\boldsymbol{m}_2$ – Smarandache eğrisi

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında uzaysal kuaterniyonik eğrilerin Smarandache eğrileri Bishop çatısına göre tanımlanıp, bu eğrilerin Bishop ve Frenet elemanları esas eğrinin Bishop elemanları cinsinden hesaplanmıştır. Ayrıca 4-boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin Smarandache eğrisi paralel transport çatısına göre tanıtılmış ve yine bu eğrilerin paralel transport ve Frenet elemanları esas eğrinin paralel transport elemanları cinsinden hesaplanmıştır. Ayrıca bir örnek yardımıyla kuaterniyonik ve uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrileri görselleştirilmiştir.

Bu çalışmada yapılan ve yukarıda bahsedilen hesaplamalar, yine Bishop (paralel transport) çatısına göre Lorentz uzayında Smarandache eğrileri tanımlanıp bu uzayda karşılıkları hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

[1] DEMİR, S., Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, 2003.

[2] BHARATHI, K., & NAGARAJ, M., Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae, Indian J. Pure Appl. Math., 18(6), 507-511, 1987.

[3] KARADAĞ, M., & SİVRİDAĞ, A.İ., Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 13 (1-2), 23-36, 1997.

[4] TUNA, A., Yarı Öklid Uzayındaki Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 2002.

[5] ALİ, A. T., Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, Int. J. Math. Comb., 2, 30-36, 2010.

[6] TURGUT, M., YILMAZ, S., Smarandache Curves in Minkowski Space-time, International J. Math. Combin., 3, 51-55, 2008.

[7] BAYRAK, N., BEKTAŞ, Ö., YÜCE, S., Special Smarandache Curves in $\mathbb{E}_1^3$, International Conference on Applied Analysis and Algebra, İstanbul, 2012.

[8] TAŞKÖPRÜ, K., $\mathbb{E}^3$, 3-Boyutlu Öklid Uzayında Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, 2013.

[9] BEKTAŞ, Ö., YÜCE, S., Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in $\mathbb{E}^3$, Rom. J. Math. Comput. Sci., 3, 48-59, 2013.

[10] ÇETİN, M., TUNÇER, Y., KARACAN, M. K., Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space, arXiv:1106.3202v1 [math.DG], 2011.

[11] ÇETİN, M., KOCAYİĞİT, H., On the Quaternionic Smarandache Curves in the Euclidean 3-Space, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 8, 139-150, 2013.

[12] HACISALİHOĞLU, H. H., Diferensiyel Geometri 1. Cilt, Ankara Üniversitesi, 1998.

[13] O'NEIL, B., Elemantary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966.

[14] SABUNCUOĞLU, A., Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.

[15] SOYFİDAN, T., Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, 2011.

[16] BISHOP, R. L., There is More than One Way to Frame a Curve, Amer. Math. Monthly, 82, 3, 246-251,1975.

[17] GÖKÇELİK, F., BOZKURT., Z., GÖK, İ., EKMEKÇİ, F.N., YAYLI, Y., Parallel Transport Frame in 4-Dimensional Euclidean Space $\mathbb{E}^4$, Caspian Journal of Mathematical Science, 2014 (Yayın Aşamasında).

[18] HACISALİHOĞLU, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Yayınları, 1983.

[19] SOYFİDAN, T., PARLATICI, H., GÜNGÖR, M.A., On the Quaternionic Curves According to Parallel Transport Frame, TWMS J. Pure Appl. Math., 4, 2, 194-203, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice PARLATICI, 20.12.1987 tarihinde İstanbul Fatih'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2005 yılında Hadımköy Örfi Çetinkaya Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2011 yılında tamamladı. 2011 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladığı yüksek lisans eğitimine, Sakarya Üniversitesi'nde devam etmektedir. Halen Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.