

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$E^3$ , 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA  
SABBAN ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE  
EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kemal TAŞKÖPRÜ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK  
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ  
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Murat TOSUN

Temmuz 2013

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$E^3$ , 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA  
SABBAN ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE  
EĞRİLERİ


YÜKSEK LİSANS TEZİ

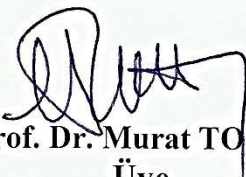
Kemal TAŞKÖPRÜ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 01/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

  
Prof. Dr. İbrahim OKUR  
Jüri Başkanı

  
Prof. Dr. Murat TOSUN  
Üye

  
Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR  
Üye

## TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve bu çalışmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran her aşamasını titizlikle değerlendirip yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat TOSUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresince bana vakit ayıran her zaman ve her konuda desteğini gördüğüm Sayın Doç. Dr. Soley ERSOY'a, Sayın Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e teőekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında birçok fedakarlık gösteren, beni destekleyen, bana karşı duydukları sarsılmaz inanç ve gösterdikleri sabırlarından dolayı aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
ÖZET .....	viii
SUMMARY .....	ix
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR .....	2
2.1. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar .....	2
2.2. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyle Teorisi .....	5
BÖLÜM 3.	
$E^3$ , 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ .....	17
3.1. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri .....	17
3.2. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Smarandache Eğrileri .....	19
3.3. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Darboux Çatısına Göre Smarandache Eğrileri .....	24

#### BÖLÜM 4.

#### $E^3$ , 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABBAN ÇATISINA GÖRE

SMARANDACHE EĞRİLERİ.....	34
4.1. $\gamma t$ - Smarandache Eğrileri .....	34
4.2. $td$ - Smarandache Eğrileri .....	37
4.3. $\gamma td$ - Smarandache Eğrileri .....	40

#### BÖLÜM 5.

SMARANDACHE EĞRİLERİNE BİR ÖRNEK.....	44
---------------------------------------	----

#### BÖLÜM 6.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	49
---------------------------	----

KAYNAKLAR.....	50
----------------	----

ÖZGEÇMİŞ.....	52
---------------	----

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cümlesi
$E^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$E^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\  \cdot \ $	: $E^3$ de norm
$S^2$	: $E^3$ de birim küre
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: $E^3$ de Vektörel çarpım
$\kappa$	: Eğrinin eğriliği
$\tau$	: Eğrinin burulması
$\kappa_g$	: Eğrinin geodezik eğriliği
$C^k$	: k. Mertebeden diferensiyellenebilen fonksiyonların sınıfı
$k_g$	: Yüzey üzerindeki eğrinin geodezik eğriliği
$k_n$	: Yüzey üzerindeki eğrinin normal eğriliği
$\tau_g$	: Yüzey üzerindeki eğrinin geodezik burulması

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Frenet ve Darboux Çatılarının Elemanları. ....	13
Şekil 5.1 $\gamma = \gamma(s)$ .....	44
Şekil 5.2 $\gamma t$ - Smarandache Eğrisi. ....	46
Şekil 5.3 $td$ - Smarandache Eğrisi. ....	477
Şekil 5.4 $\gamma td$ - Smarandache Eğrisi. ....	488

## ÖZET

Anahtar kelimeler: Smarandache Eğrileri, Sabban Çatısı, Geodezik Eğrilik

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid uzayında temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca, Öklid uzayında Frenet Bishop, Darboux ve Sabban çatıları tanıtılmış ve yine bu çatıların Frenet çatısı ile olan ilişkisi verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet, Bishop, ve Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerinin tanımları verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerinin tanımı verilmiş olup buna bağlı teoremlerle ilgili eğrinin Sabban çatısına göre invaryantları ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerine ait bir örnek verilmiş olup gerekli hesaplamalar yapılarak buna dayalı sonuçlar ile grafikleri çizilmiştir.

Altıncı bölümde çalışmanın sonuçları üzerine durulmuş ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.



# **SMARANDACHE CURVES ACCORDING TO SABBAN FRAME ON $E^3$ , 3-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE**

## **SUMMARY**

Key Words: Smarandache Curves, Sabban Frame, Geodesic Curvature

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic concepts in the Euclidean space are introduced. Frenet, Bishop and Darboux frame is defined in Euclidean space, respectively and its relationships with Frenet Frame are given.

In the third chapter, Smarandache curves according to Frenet, Bishop and Darboux frame in Euclidean space is defined.

The fourth chapter is the original parts of this study. In this chapter, Smarandache curves according to Sabban frame on  $E^3$ , 3-dimensional Euclidean space is defined and their invariants are proved on Sabban frame with related theorems.

In the fifth chapter, an example about Smarandache curves according to Sabban frame on 3-dimensional Euclidean space are given and graphs are plotted with the results obtained from the calculations.

In the sixth chapter of this thesis, the results of the study are emphasized and suggestions have been made for future works.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Geometride, eğriler teorisi çok geniş kapsamlı çalışma alanıdır. Eğriler teorisinde, özellikle geodezikler, çemberler, genel helisler ve Bertrand eğri çiftleri vb. gibi özel eğriler çalışılmaktadır. Eğriler teorisinde bir eğrinin Serret-Frenet denklemlerinin bulunması ve eğriliklerinin hesaplanması çok önemlidir.

Öklid ve Minkowski uzaylarında en çok çalışılan problemlerden biri de regüler bir eğrinin karakterizasyonları hakkındadır. Bu problemlerin çözümünde  $\kappa$  (Eğrinin eğriliği) ve  $\tau$  (Eğrinin burulması) nun önemli bir rolü vardır.  $\kappa$  ve  $\tau$  nun yardımıyla regüler bir eğrinin şeklini ve büyüklüğünü tanımlayabiliriz. Bu problemin çözümünde başka bir yaklaşımda iki eğrinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiyi ele almaktır. Örneğin Bertrand eğrileri ve Mannheim eğrileri bu ilişki sonucunda ortaya çıkar.

Öklid ve Minkowski uzayında Bishop, Darboux ve Sabban çatıları da eğrinin hareketini tanımlamak için farklı birer yaklaşımdır. Bu yaklaşımlar yardımıyla 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında Smarandache eğrilerinin Frenet, Bishop ve Darboux çatılarına göre özellikleri veya karakterizasyonları için birçok çalışma yapılmıştır [1], [2], [3], [5], [15].

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerinin karakterizasyonları ve özellikleri için gerekli tanımlar ve teoremler verilerek birim küre üzerinde bu eğrilere ait bir uygulama tanım ve teoremler kullanılarak yapılan hesaplamalarla grafik olarak çizimi yapılmıştır.

## BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. $E^3$ , 3-boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında temel kavram ve teoremlere yer verilecektir.

**Tanım 2.1.1.**  $A$  boş olmayan bir küme ve bir  $K$  cismi üzerindeki vektör uzayı  $V$  olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir  $f : A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu varsa,  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş afin uzay denir [7].

- i.  $\forall P, Q, R \in A$  için  $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ .
- ii.  $\forall P \in A$  ve  $\alpha \in V$  için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır.

**Tanım 2.1.2.** Bir reel afin uzay  $A$  ve  $A$  birleşen bir vektör uzayı  $V$  olsun.  $V$  de;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa,  $A$  afin uzayına Öklid uzayı denir. Eğer  $A = \mathbb{R}^n$  (noktalar kümesi) ve  $V = \mathbb{R}^n$  (n-boyutlu standart reel vektör uzayı) olarak seçilirse,  $A$  standart reel Öklid Uzayı adını alır ve  $E^n$  ile gösterilir [7].

**Tanım 2.1.3.**

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(x, y)$  reel sayısına da  $x, y \in E^n$  noktaları arasındaki uzaklık denir.

**Teorem 2.1.1.**  $E^n$  de uzaklık fonksiyonu bir metriktir [7].

**Tanım 2.1.4.**

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  de Öklid metriği denir [7].

**Tanım 2.1.5.**  $\forall x, y, z \in E^n$  için  $\widehat{xyz}$  açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overline{xy}, \overline{yz} \rangle}{\|\overline{xy}\| \|\overline{yz}\|}$$

den hesaplanan  $\theta$  reel sayıdır [7].

**Tanım 2.1.6.**  $E^n$ , n-boyutlu Öklid uzayında  $\vec{x} \in E^n$  için  $x$  vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

biçiminde tanımlanır [7].

**Tanım 2.1.7.**

$$\wedge : E^n \times E^n \rightarrow E^n$$

$$(x, y) \rightarrow x \wedge y = \sum_{i=1}^n \det(e_i, x, y) e_i$$

şeklinde tanımlı  $\wedge$  iç işlemine vektörel çarpım denir.  $x \wedge y$  vektörü, hem  $x$  hem de  $y$  vektörüne dik bir vektördür ve

$$\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin \theta$$

dır [7].

**Tanım 2.1.8.**  $E^n$  de sıralı bir  $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$ -lisine  $\mathbb{R}^n$  de karşılık gelen  $\{\overrightarrow{P_0P_0}, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  vektör  $n$ -lisi  $\mathbb{R}^n$  için bir ortonormal baz ise  $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$  sistemine  $E^n$  in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir [7].

**Tanım 2.1.9.**  $V$  vektör uzayı ile birleşen afin uzay  $A$  olsun.  $P \in A$  ve  $\vec{v} \in V$  için  $(P, \vec{v})$  sıralı ikilisine  $A$  afin uzayının  $P$  noktasındaki bir tanjant vektörü denir.  $A$  afin uzayının  $P$  noktasındaki bir tanjant vektörlerinin cümlesi  $T_A(P)$  ile gösterilir [7].

$T_A(P)$  de toplama ve skaler ile çarpma işlemleri sırasıyla ,

$$\begin{aligned} \oplus : T_A(P) \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ ((P, \vec{v}), (P, \vec{u})) &\rightarrow (P, \vec{v}) \oplus (P, \vec{u}) = (P, \vec{v} + \vec{u}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ (\lambda, (P, \vec{v})) &\rightarrow \lambda \odot (P, \vec{v}) = (P, \lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada  $\mathbb{R}$  ile  $A$  nın birleştiği  $V$  vektör uzayının cismi gösterilmektedir.  $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$  vektör uzayına,  $A$  afin uzayının  $P$  noktasındaki bir tanjant uzayı denir ve kısaca  $T_A(P)$  ile gösterilir [7].

**Tanım 2.1.10.**  $A \subset E^n$  üzerindeki bir vektör alanı

$$X : A \rightarrow \bigcup_{P \in A} T_A(P)$$

biçimde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I : A \rightarrow A$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur. Böylece  $E^n$  de bir  $X$  vektör alanını,  $\forall P \in E^n$  noktasına karşılık bir  $X_P$  tanjant vektörü karşılık getiren fonksiyon olarak düşünülebilir.

$E^n$  de vektör alanlarının cümlesi  $\chi(E^n)$  ile gösterilirse, tanjant uzayına benzer şekilde  $\{\chi(E^n), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$  altılısının vektör uzayı olduğu gösterilebilir. Bu vektör uzayına  $E^n$  üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir ve kısaca  $\chi(E^n)$  ile gösterilir [7].

## 2.2. $E^3$ , 3-boyutlu Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler Teorisi

**Tanım 2.2.1.**  $X$  bir cümle ve  $X$  in alt cümlelerinin bir koleksiyonu  $\mathcal{T}$  olsun.  $\mathcal{T}$  koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğruluyorsa  $X$  üzerinde bir topoloji ve  $(X, \mathcal{T})$  ikilisi de bir topolojik uzay adını alır [7].

- i.  $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ ,
- ii.  $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T}$  için  $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ ,

iii.  $A_i \in \mathcal{T}$ ,  $i \in I$  için  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ .

**Tanım 2.2.2.**  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzay olsun.  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu sürekli,  $f^{-1}$  var ve  $f^{-1}$  de sürekli ise  $f$  ye  $X$  den  $Y$  ye bir homeomorfizm denir [7].

**Tanım 2.2.3.**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  in  $P$  ve  $Q$  gibi farklı noktaları için  $X$  de sırasıyla  $P$  ve  $Q$  noktalarını içine alan  $A_P$  ve  $A_Q$  açık alt cümleleri  $A_P \cap A_Q = \emptyset$  olacak şekilde bulunabiliyorsa  $X$  topolojik uzayı bir Hausdorff uzayı adını alır [7].

**Tanım 2.2.4.**  $M$  bir topolojik uzay olsun.  $M$  için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa  $M$  ye bir n-boyutlu topolojik manifold denir [7].

- i.  $M$  bir Hausdorff uzayıdır.
- ii.  $M$  nin her bir açık alt cümlesi  $E^n$  e veya  $E^n$  nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.
- iii.  $M$  sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

**Tanım 2.2.5.**  $M$ , n-boyutlu topolojik manifold ve  $U$ ,  $E^n$  nin bir açık alt cümlesi olsun. O zaman  $U$  bir  $\psi$  homeomorfizmi ile  $M$  in bir  $W$  açık alt cümlesine eşlenebilir. Böylece  $\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset M$  olmak üzere  $(U, \psi)$  ikilisine  $M$  de bir koordinat komşuluğu denir.

**Tanım 2.2.1.**  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow E^n$$

diferansiyellenebilen fonksiyona  $E^n$  de bir eğri adı verilir. Burada  $I \subseteq \mathbb{R}$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı,  $t \in I$  değişkenine  $\alpha$  eğrisinin parametresi ve  $(I, \alpha)$  ya da koordinat komşuluğu denir [7].

**Tanım 2.2.2.**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  ve  $(J, \beta)$  gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna  $M$  nin bir parametre değişimi ( $M$  nin  $I$  daki parametresinin  $J$  deki parametre ile değişimi) denir [7].

**Tanım 2.2.3.**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\alpha : I \rightarrow E^n$  fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  olmak üzere

$$\alpha'(t) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \Big|_t \right) \text{ dır. } (\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^n}(P) \text{ tanjant vektörüne, } M$$

eğrisinin  $t \in I$  parametre değerine karşılık gelen  $\alpha(t)$  noktasında  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [7].

**Tanım 2.2.4.**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna  $M$  eğrisinin  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve  $\|\alpha'(t)\|$  reel sayısına da  $\alpha(t)$  noktasındaki skaler hızı denir [7].

**Tanım 2.2.5.** Eğer  $\|\alpha'(t)\| = 1$  ise  $M$  eğrisine  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri,  $t \in I$  parametresine de yay parametresi denir [7].

**Tanım 2.2.6.** Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye (yani  $\forall t \in I$  için  $\alpha'(t) \neq 0$ ) regüler eğri denir [7].



**Tanım 2.2.7.**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda,  $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$  sistemi lineer bağımsız ve  $\forall \alpha^{(k)}$ ,  $k > r$  için;  $\alpha^{(k)} \in S_p \{\psi\}$  olmak üzere,  $\psi$  den elde edilen  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  ortonormal sistemine,  $M$  eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve  $t \in M$  için  $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$  ye ise  $t \in M$  noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir [7].

**Tanım 2.2.8.**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s)$  noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  olsun. Buna göre,

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle, 1 \leq i < r$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $M$  eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve  $s \in I$  için  $k_i(s)$  sayısının da  $\alpha(s)$  noktasında  $M$  nin i-yinci eğriliği denir [7].

**Teorem 2.2.1.**  $E^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  yay parametresi olmak üzere,  $\alpha(s)$  noktasındaki  $M$  nin i-yinci eğriliği  $k_i(s)$  ve Frenet r-ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  olmak üzere

- i.  $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$
- ii.  $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), 1 < i < r$
- iii.  $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dir.

$n = 3$  özel halinde,  $E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında  $\alpha(s)$  noktasında bir  $M$  eğrisinin Frenet 3-ayaklı alanı,

$$T = \alpha'$$

$$N = \frac{1}{\|\alpha''\|} \alpha''$$

$$B = T \wedge N$$

dır [7].

Burada 1-inci eğrilik olan  $k_1(s) = \kappa(s)$  değerine sadece eğrilik, 2-nci eğrilik olan  $k_2(s) = \tau(s)$  değerine de burulma (torsiyon) denir.  $T$ ,  $N$  ve  $B$  vektörlerine de, sırasıyla eğrinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir. Böylece matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

verilebilir [7].

**Tanım 2.2.10.** Bir eğri boyunca  $N$  normal vektör alanının türevi teğetsel ise  $N$  ye relatif paralel vektör alanı denir [4].

**Tanım 2.2.11.**  $E^3$  de  $s \in I$  yay parametresi ile verilen  $C^2$  sınıftan regüler bir  $\alpha$  eğrisi üzerindeki relatif paralel vektör alanları yönlendirilmiş 1-boyutlu teğet ve 2-boyutlu normal kısımdan oluşan  $\mathbb{R}$  cismi üzerinde 3-boyutlu bir vektör uzayı meydana getirir. Bu vektör uzayının bir ortonormal bazına relatif paralel adapte edilmiş çatı ya da Bishop çatısı denir [4].

Böylece  $N_2 = T \wedge N_1$  olmak üzere  $\{T, N_1, N_2\}$   $C^2$  sınıftan regüler eğrinin Bishop çatısı olsun. Buna göre

$$\langle T, T \rangle = \langle N_1, N_1 \rangle = \langle N_2, N_2 \rangle = 1$$

$$\langle T, N_1 \rangle = \langle T, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0$$

olacağından çatının  $s$  yay parametresine göre türevi

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece her  $s \in I$  için

$$\kappa = \|T'\| = \|k_1 N_1 + k_2 N_2\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

olacak biçimde  $\kappa$ ,  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonudur. Burada  $\theta$ ,  $N_1$  normal vektör alanı ile  $N$  asli normal vektör alanı arasındaki açı olmak üzere  $k_1$  ve  $k_2$  Bishop çatısının doğal eğrilikleri olup

$$k_1 = \kappa \cos \theta \text{ ve } k_2 = \kappa \sin \theta$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$N = N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta$$

yazılabilir. Buna göre

$$\tan \theta = \frac{k_1}{k_2}$$

olmak üzere

$$\theta = \arctan\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \quad (2.2.1)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} N' &= -N_1 \sin \theta \frac{d\theta}{ds} + N_1' \cos \theta + N_2 \cos \theta \frac{d\theta}{ds} + N_2' \sin \theta \\ &= -\kappa T + (-N_1 \sin \theta + N_2 \cos \theta) \frac{d\theta}{ds} \\ &= -\kappa T + \tau B \end{aligned}$$

olduğundan Frenet formülleri kullanılarak

$$B = -N_1 \sin \theta + N_2 \cos \theta$$

ve

$$\tau = \frac{d\theta}{ds}$$

bulunur. (2.2.1) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\tau = \frac{d\theta}{ds} = \frac{k_1 k_2' - k_1' k_2}{k_1^2 + k_2^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\theta = \int \tau ds$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
B' &= -N_1 \cos \theta \frac{d\theta}{ds} - N_1' \sin \theta - N_2 \sin \theta \frac{d\theta}{ds} + N_2' \cos \theta \\
&= -(N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta) \frac{d\theta}{ds} \\
&= -\tau N
\end{aligned}$$

ve

$$T' = k_1 N_1 + k_2 N_2 = \kappa \cos \theta N_1 + \kappa \sin \theta N_2 = \kappa N$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \cos \theta & \kappa \sin \theta \\ -\kappa & -\sin \theta \frac{d\theta}{ds} & \cos \theta \frac{d\theta}{ds} \\ 0 & -\cos \theta \frac{d\theta}{ds} & -\sin \theta \frac{d\theta}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

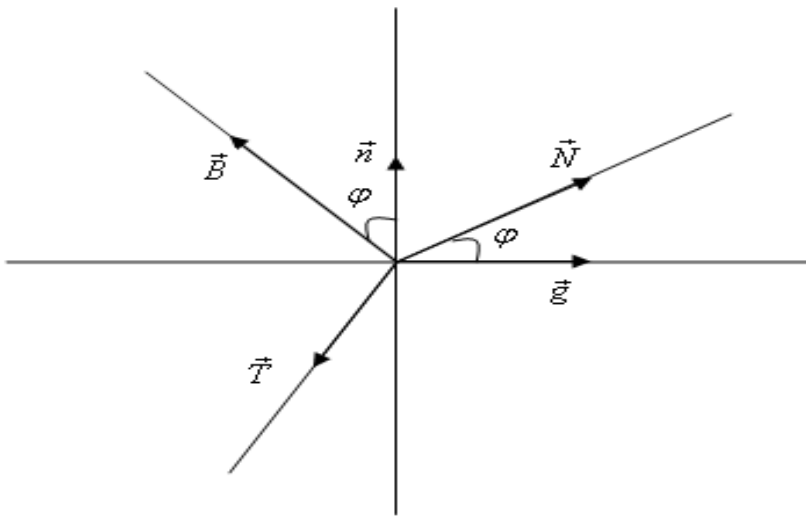
elde edilir. Son olarak Frenet çatısı ve Bishop çatısı (relatif adapte edilmiş çatı) arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
T &= T \\
N &= \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} N_1 + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} N_2 \\
B &= -\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} N_1 + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} N_2
\end{aligned}$$

ile verilir [4], [9].

**Tanım 2.2.13.**  $S$ ,  $E^3$  ün bir alt kümesi olsun.  $\forall P \in S$  için  $P$  nin  $E^3$  üzerinde bir komşuluğu  $V$  olmak üzere  $E^2$  nin  $U$  açık cümlesinden  $V \cap S$  ye bir  $F$  diffeomorfizmi varsa,  $S$  cümlesi  $E^3$  de bir yüzey adını alır [8].

**Tanım 2.2.14.**  $E^3$  de yönlendirilebilir bir yüzey  $S$  olmak üzere  $S$  de yatan bir eğri  $\alpha$  olsun.  $\alpha$  eğrisi  $S$  yüzeyi üzerinde olduğundan her bir noktasında ikinci bir çatı mevcuttur ve bu çatı Darboux çatısı olarak adlandırılır. Darboux çatısı  $\{T, g, n\}$  ile gösterilirse  $T$ ,  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektörü,  $n$ ,  $S$  yüzeyinin birim normal vektörü ve  $g = n \wedge T$  olacak şekilde bir birim vektördür. Böylece  $T$  birim teğet vektörü hem Frenet çatısında hem de Darboux çatısında olduğundan  $N$ ,  $B$ , ve  $g$ ,  $n$  vektörleri aynı düzlemedirler [17].



Şekil 2.1 Frenet ve Darboux Çatılarının Elemanları.

O halde Darboux çatısı  $\{T, g, n\}$  ve Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  arasında

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

bağıntısı vardır. Burada  $g$  ve  $N$  vektörleri arasındaki açı  $\varphi$  dir. Böylece (2.2.2) denkleminde

$$g = \cos \varphi N + \sin \varphi B, \quad n = -\sin \varphi N + \cos \varphi B$$

dir. Dolayısıyla son denklemlerden

$$\begin{bmatrix} g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

dir. Burada

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

matrisi düzlemin dönme matrisi olup ortogonal bir matristir. O halde (2.2.3) denkleminde kolayca görülebilir ki

$$\begin{bmatrix} N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ n \end{bmatrix}$$

ve

$$N = \cos \varphi g - \sin \varphi n, \quad B = \sin \varphi g + \cos \varphi n$$

dir. Böylece  $\{T, g, n\}$  Darboux çatısı nin türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

ile verilir. Öyle ki burada  $k_g$ ,  $k_n$  ve  $\tau_g$ , sırasıyla  $\alpha$  eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olarak adlandırılır.

O halde,  $\alpha$  eğrisinin geodezik eğriliği  $k_g$ , normal eğriliği  $k_n$  ve geodezik torsiyonu  $\tau_g$  ile  $\kappa$  ve  $\tau$  arasında aşağıdaki ilişki

$$k_g = \kappa \cos \varphi, \quad k_n = \kappa \sin \varphi, \quad \tau_g = \tau + \frac{d\varphi}{ds}$$

ile verilir [16]. Burada

$$k_g = \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d^2\alpha}{ds^2} \wedge n \right\rangle$$

$$\tau_g = \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, n \wedge \frac{dn}{ds} \right\rangle$$

dir. Yönlendirilebilir  $S$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha$  eğrisi için özel olarak;

- i. Eğer  $k_g = 0$  ise  $\alpha$  bir geodezik eğri,
- ii. Eğer  $k_n = 0$  ise  $\alpha$  bir asimptotik eğri,
- iii. Eğer  $\tau_g = 0$  ise  $\alpha$  bir eğrilik çizgisi,

dir [11], [17].

**Tanım 2.2.15.** Merkezi orijinde bulunan ve yarıçapı bir birim olan küreye  $E^3$  de birim küre denir ve

$$S^2 = \{P = (P_1, P_2, P_3) \mid \langle P, P \rangle = 1\}$$

ile gösterilir [6].

**Tanım 2.2.15.**  $\gamma$ ,  $S^2$  de birim hızlı küresel eğri ve  $s$ ,  $\gamma$  nın yay parametresi olsun.  $t(s) = \gamma'(s)$  olmak üzere  $t(s)$ ,  $\gamma$  nın birim teğet vektörü olarak tanımlansın.  $\gamma(s)$  yer vektörü olmak üzere  $\gamma$  eğrisi boyunca  $d(s) = \gamma(s) \wedge t(s)$  de binormal vektörünü gösterebilirsin. Bu şekilde oluşturulan  $\{\gamma, t, d\}$  çatısına  $\gamma$  nın  $S^2$  üzerinde Sabban çatısı adı verilir [10].



**Tanım 2.2.16.**  $\gamma$ ,  $S^2$  de birim hızlı küresel eğri ve  $s$ ,  $\gamma$  nın yay parametresi olsun.

$\gamma$  nın  $S^2$  üzerinde Sabban çatısı  $\{\gamma, t, d\}$  için

$$\kappa_g = \langle t', d \rangle$$

ifadesine  $\gamma$  nın  $S^2$  üzerinde geodezik eğriliği denir.

Böylece  $\gamma$  eğrisinin küresel Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \gamma' &= t \\ t' &= -\gamma + \kappa_g d \\ d' &= -\kappa_g t \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

ile verilir [10].

### BÖLÜM 3. $E^3$ , 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölümde  $E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında farklı çatılara göre Smarandache eğrileri tanımlanmış ve bu eğriler ile ilgili teoremler verilmiştir.

#### 3.1. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

$\gamma = \gamma(s)$  ve  $\beta = \beta(s^*)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğriler ve  $\gamma$  nın Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun. Böylece  $TN$ -Smarandache eğrisi,  $NB$ -Smarandache eğrisi ve  $TNB$ -Smarandache eğrisi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [1].

**Tanım 3.1.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, N, B\}$ ,  $\gamma$  nın Frenet çatısı olmak üzere  $TN$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

ile verilir öyle ki  $\gamma$  nın eğriliği ve burulması, sırasıyla  $\kappa$  ve  $\tau$  olmak üzere  $\beta$  nın eğriliği  $\kappa^\beta$  ise

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -\left(\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')\right) \\ \eta_2 &= -\left(\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')\right) \\ \eta_3 &= \kappa\left(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')\right)\end{aligned}$$

dır. Ayrıca  $\beta$  nın burulması  $\tau^\beta$  ise

$$\tau^\beta = \frac{\sqrt{2}\left[\left(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa'\right)\left(\kappa\mu_3 + \tau\mu_1\right) + \kappa\left(\kappa\tau + \tau'\right)\left(\mu_2 - \mu_3\right) + \left(\kappa^2 + \kappa'\right)\left(\kappa\mu_3 - \tau\mu_2\right)\right]}{\left(\tau\left(2\kappa^2 + \tau^2\right) + \kappa\tau' - \tau\kappa'\right)^2 + \left(\kappa'\tau - \kappa\tau'\right)^2 + \left(2\kappa^3 + \kappa\tau^2\right)^2}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \kappa^3 + \kappa\left(\tau^2 - 3\kappa'\right) - \kappa'' \\ \mu_2 &= -\kappa^3 - \kappa\left(\tau^2 - 3\kappa'\right) - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \mu_3 &= -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau''\end{aligned}$$

dır [1].

**Tanım 3.1.2.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, N, B\}$ ,  $\gamma$  nın Frenet çatısı olmak üzere  $NB$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

ile verilir [1].

**Tanım 3.1.3.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, N, B\}$ ,  $\gamma$  nın Frenet çatısı olmak üzere  $TNB$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

ile verilir [1].

$NB$  ve  $TNB$ -Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonunu  $TN$ -Smarandache eğrilerindeki gibi hesaplayabiliriz [1].

### 3.2. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

$\gamma = \gamma(s)$  ve  $\beta = \beta(s^*)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğriler olsunlar.  $\gamma$  nın Bishop çatısı  $\{T, N_1, N_2\}$  olmak üzere  $TN_1$ -Smarandache eğrisi,  $TN_2$ -Smarandache eğrisi,  $N_1N_2$ -Smarandache eğrisi ve  $TN_1N_2$ -Smarandache eğrisi aşağıdaki gibi verilebilir [5].

**Tanım 3.2.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, N_1, N_2\}$ ,  $\gamma$  nın Bishop çatısı olmak üzere  $TN_1$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N_1)$$

ile tanımlanır. Burada  $\gamma$  nın doğal eğrilikleri, sırasıyla  $k_1$  ve  $k_2$  ise  $\beta$  nın eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{(2k_1^2 + k_2^2)^2}$$

dır. Öyle ki

$$\lambda_1 = -k_1'k_2^2 - 2k_1^4 - 3k_1^2k_2^2 - k_2^4 + k_1k_2k_2'$$

$$\lambda_2 = -2k_1^4 - k_1^2k_2^2 + k_1'k_2^2 - k_1k_2k_2'$$

$$\lambda_3 = -2k_1^3k_2 - k_1k_2^3 + 2k_1^2k_2' - 2k_1k_1'k_2$$

dir. Ayrıca  $\gamma$  nin burulması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\tau^\beta = \frac{\sqrt{2} \left[ (k_1^2 - k_1')(\rho_3 k_1 + \rho_1 k_2) + k_1(k_2' - k_1 k_2)(\rho_1 + \rho_2) - (k_1' + k_1^2 + k_2^2)(\rho_2 k_2 - \rho_3 k_1) \right]}{(k_1 k_2' - k_1' k_2)^2 + (k_1 k_2' - 2k_1^2 k_2 - k_1' k_2 - k_2^3)^2 + (2k_1^3 + k_1 k_2^2)^2}$$

dir. Burada

$$\rho_1 = -k_1'' - 3k_1 k_1' - 3k_2 k_2' + k_1^3 + k_1 k_2^2$$

$$\rho_2 = -3k_1 k_1' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + k_1''$$

$$\rho_3 = -2k_1' k_2 - k_1^2 k_2 - k_2^3 - k_1 k_2' + k_2''$$

dir. İlave olarak  $\theta_\beta = -\int \tau^\beta(s) ds$  olmak üzere  $\beta$  nin doğal eğrilikleri

$$k_1^\beta = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos \theta_\beta}{(2k_1^2 + k_2^2)^2} \text{ ve } k_2^\beta = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin \theta_\beta}{(2k_1^2 + k_2^2)^2}$$

olur [5].

**Tanım 3.2.2.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, N_1, N_2\}$ ,  $\gamma$  nin Bishop çatısı olmak üzere  $TN_2$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N_2)$$

ile tanımlanır.  $\gamma$  nin doğal eğrilikleri, sırasıyla  $k_1$  ve  $k_2$  ise  $\beta$  nin eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{(k_1^2 + 2k_2^2)^2}$$

dir. Burada

$$\lambda_1 = -k_1^2 k_2' - k_1^4 - 3k_1^2 k_2^2 - 2k_2^4 + k_1 k_1' k_2$$

$$\lambda_2 = -k_1^3 k_2 - 2k_1 k_2^3 + 2k_1' k_2^2 - 2k_1 k_2 k_2'$$

$$\lambda_3 = -k_1^2 k_2^2 - 2k_2^4 + k_1^2 k_2' - k_1 k_1' k_2$$

dir. İlave olarak  $\gamma$  nın burulması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\tau^\beta = \frac{\sqrt{2} \left[ k_2 (k_1 k_2 - k_1') (\rho_3 + \rho_1) + (k_2' - k_2^2) (\rho_1 k_1 + \rho_2 k_2) - (k_2' + k_1^2 + k_2^2) (\rho_2 k_2 - \rho_3 k_1) \right]}{(k_1 k_2' - k_1' k_2)^2 + (-2k_2^3 - k_1^2 k_2)^2 + (2k_1 k_2^2 - k_1' k_2 + k_1 k_2' + k_1^3)^2}$$

dir. Öyle ki burada

$$\rho_1 = -k_2'' - 3k_1 k_1' - 3k_2 k_2' + k_1^2 k_2 + k_2^3$$

$$\rho_2 = -2k_1 k_2' - k_1^3 - k_1 k_2^2 - k_1' k_2 + k_1''$$

$$\rho_3 = -3k_2 k_2' - k_1^2 k_2 - k_2^3 + k_2''$$

dir. Ayrıca  $\theta_\beta = -\int \tau^\beta(s) ds$  olmak üzere  $\beta$  nın doğal eğrilikleri

$$k_1^\beta = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos \theta_\beta}{(k_1^2 + 2k_2^2)^2} \text{ ve } k_2^\beta = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin \theta_\beta}{(k_1^2 + 2k_2^2)^2}$$

dir [5].

**Tanım 3.2.3.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, N_1, N_2\}$ ,  $\gamma$  nın Bishop çatısı olmak üzere  $N_1 N_2$  -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1 + N_2)$$

ile tanımlanır.  $\gamma$  nın doğal eğrilikleri sırasıyla  $k_1$  ve  $k_2$  ise  $\beta$  nın eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_1 + k_2}$$

ve burulması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\tau^\beta = \frac{-\sqrt{2}(\rho_3(k_1^2 + k_1 k_2) - \rho_2(k_1 k_2 + k_2^2))}{(k_1 + k_2)((k_1 k_2 + k_2^2)^2 + (k_1^2 + k_1 k_2)^2)}$$

dir. Burada

$$\rho_1 = k_1'' + k_2'' - k_1^3 - k_1^2 k_2 - k_1 k_2^2 - k_2^3$$

$$\rho_2 = 3k_1 k_1' + 2k_1 k_2' + k_1' k_2$$

$$\rho_3 = 2k_1' k_2 + 3k_2 k_2' + k_1 k_2'$$

dir. Ayrıca  $\theta_\beta = -\int \tau^\beta(s) ds$  olmak üzere  $\beta$  nın doğal eğrilikleri

$$k_1^\beta = \frac{\sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)} \cos \theta_\beta}{k_1 + k_2} \text{ ve } k_2^\beta = \frac{\sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)} \sin \theta_\beta}{k_1 + k_2}$$

dir [5].

**Tanım 3.2.4.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, N_1, N_2\}$ ,  $\gamma$  nın Bishop çatısı olmak üzere  $TN_1N_2$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N_1 + N_2)$$

ile tanımlanır.  $\gamma$  nın doğal eğrilikleri sırasıyla  $k_1$  ve  $k_2$  ise  $\beta$  nın eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{4(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)^2}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2k_1'k_2^2 - k_1^2k_2' + k_1k_2k_2' - 2k_1^4 - 2k_1^3k_2 - 4k_1^2k_2^2 - 2k_1k_2^3 - 2k_2^4 + k_1k_1'k_2 + k_1'k_2^2 \\ \lambda_2 &= -2k_1^4 - 4k_1^3k_2 - 4k_1^2k_2^2 - 2k_1k_2^3 + k_1k_1'k_2 + 2k_1'k_2^2 - k_1^2k_2' - 2k_1k_2k_2' \\ \lambda_3 &= -2k_1^3k_2 - 4k_1^2k_2^2 - 4k_1k_2^3 - 2k_2^4 + 2k_1^2k_2' + k_1k_2k_2' - 2k_1k_1'k_2 - k_1'k_2^2\end{aligned}$$

dır. Ayrıca  $\gamma$  nın burulması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\tau^\beta = \frac{\sqrt{3} \left[ \begin{aligned} &(k_1' - k_1^2 - k_1k_2)(-\rho_3k_1 - \rho_3k_2 - \rho_1k_2) + (k_2' - k_1k_2 - k_2^2)(\rho_2k_1 + \rho_2k_2 + \rho_1k_1) \\ &- (k_1' + k_2' + k_1^2 + k_2^2)(-\rho_3k_2 + \rho_2k_2) \end{aligned} \right]}{\left[ \begin{aligned} &(k_1k_2' - k_1'k_2)^2 + (k_1k_2' - 2k_1^2k_2 - 2k_1k_2^2 - 2k_2^3 - k_1'k_2)^2 \\ &+ (2k_1^3 + 2k_1^2k_2 + 2k_1k_2^2 - k_1'k_2 + k_1k_2')^2 \end{aligned} \right]}$$

dır. Burada



$$\begin{aligned}\rho_1 &= -k_1'' - k_2'' - 3k_1k_1' - 3k_2k_2' + k_1^3 + k_1^2k_2 + k_1k_2^2 + k_2^3 \\ \rho_2 &= -3k_1k_1' - 2k_1k_2' - k_1^3 - k_1k_2^2 - k_1'k_2 + k_1'' \\ \rho_3 &= -2k_1'k_2 - 3k_2k_2' - k_1^2k_2 - k_2^3 - k_1k_2' + k_2''\end{aligned}$$

dir.  $\theta_\beta = -\int \tau^\beta(s) ds$  olmak üzere  $\beta$  nin doğal eğrilikleri

$$k_1^\beta = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos \theta_\beta}{4(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)^2} \text{ ve } k_2^\beta = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin \theta_\beta}{4(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)^2}$$

dır [5].

### 3.3. $E^3$ , 3-Boyutlu Öklid Uzayında Darboux Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

$\gamma = \gamma(s)$  ve  $\beta = \beta(s^*)$ ,  $E^3$  de birim hızlı regüler eğriler olsunlar.  $\gamma$  nin Darboux çatısı  $\{T, g, n\}$  olmak üzere  $Tg$  -Smarandache eğrisi,  $Tn$  -Smarandache eğrisi,  $gn$  -Smarandache eğrisi ve  $Tgn$  -Smarandache eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir [3].

**Tanım 3.3.1.**  $E^3$  de  $M$ , yönlendirilebilir bir yüzey,  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $M$  üzerinde yatan birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, g, n\}$ ,  $\gamma$  nin Darboux çatısı olmak üzere  $Tg$  -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + g)$$

ile tanımlanır.  $\gamma$  nin, sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu  $k_g$ ,  $k_n$  ve  $\tau_g$  ise  $\beta$  nin eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$k^\beta = \frac{\sqrt{2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)}}{(2k_g^2 + (k_n + \tau_g)^2)^2}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= (k_n + \tau_g) \left[ k_g (k_n' + \tau_g' - k_n k_g - \tau_g k_g) - k_g' (k_n + \tau_g) - k_n (2k_g^2 + (k_n + \tau_g)^2) \right] - 2k_g^4 \\ \Gamma_2 &= (k_n + \tau_g) \left[ -k_g (k_n' + \tau_g' + k_n k_g + \tau_g k_g) + k_g' (k_n + \tau_g) - \tau_g (2k_g^2 + (k_n + \tau_g)^2) \right] - 2k_g^4 \\ \Gamma_3 &= k_g (k_n + \tau_g) \left[ -2k_g' - k_n + \tau_g (k_n + \tau_g) \right] + 2k_g^2 (k_g \tau_g + k_n' + \tau_g')\end{aligned}$$

dır. Ayrıca  $\beta$  nın bulunması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\tau^\beta &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{(\eta_1 + \eta_2) \left[ k_g (k_n' + \tau_g') - k_g' (k_n + \tau_g) \right] + (\tau_g \eta_1 - k_n \eta_2 + k_g \eta_3) \left[ 2k_g^2 + (k_n + \tau_g)^2 \right]}{2 \left( (k_g')^2 + k_g^4 \right) + (k_n + \tau_g) \left[ (k_n + \tau_g) (k_n^2 + \tau_g^2) + 2k_n (k_g' + k_g^2) + 2\tau_g (k_g' - k_g^2) \right]} \\ &\quad + (k_n' + \tau_g') \left[ k_n' + \tau_g' - 2k_g (k_n - \tau_g) \right] + k_g^2 (k_n - \tau_g)^2\end{aligned}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}\eta_1 &= k_g'' + 2k_n (k_n' + \tau_g') + k_g (3k_g' - \tau_g^2 - k_n^2 - k_g^2) + k_n' (k_n + \tau_g) \\ \eta_2 &= -k_g'' + 2\tau_g (k_n' + \tau_g') + k_g (3k_g' + \tau_g^2 + k_n^2 + k_g^2) + \tau_g' (k_n + \tau_g) \\ \eta_3 &= -k_g'' - \tau_g'' + k_g (k_n' - \tau_g') + (k_n + \tau_g) (\tau_g^2 + k_n^2 + k_g^2) + 2k_g' (k_n - \tau_g)\end{aligned}$$

dır. Eğer,  $g^\beta$  ve  $n^\beta$  arasındaki açı  $\varphi^\beta$  ise  $\beta$  nın geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu,

$$k_g^\beta = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{(2k_g^2 + (k_n + \tau_g)^2)^2} \cos \varphi^\beta,$$

$$k_n^\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{\left(2k_g^2 + (k_n + \tau_g)^2\right)^2} \sin \varphi^\beta$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_g^\beta = & \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{(\eta_1 + \eta_2) \left[ k_g (k_n' + \tau_g') - k_g' (k_n + \tau_g) \right] + (\tau_g \eta_1 - k_n \eta_2 + k_g \eta_3) \left[ 2k_g^2 + (k_n + \tau_g)^2 \right]}{2 \left( (k_g')^2 + k_g^4 \right) + (k_n + \tau_g) \left[ (k_n + \tau_g)(k_n^2 + \tau_g^2) + 2k_n (k_g' + k_g^2) + 2\tau_g (k_g' - k_g^2) \right]} + \frac{d\varphi^\beta}{ds^*} \\ & + (k_n' + \tau_g') \left[ k_n' + \tau_g' - 2k_g (k_n - \tau_g) \right] + k_g^2 (k_n - \tau_g)^2 \end{aligned}$$

dır [3].

**Tanım 3.3.2.**  $E^3$  de  $M$ , yönlendirilebilir bir yüzey,  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $M$  üzerinde yatan birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, g, n\}$ ,  $\gamma$  nın Darboux çatısı olmak üzere  $Tn$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + n)$$

ile tanımlanır.  $\gamma$  nın sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu  $k_g$ ,  $k_n$  ve  $\tau_g$  ise  $\beta$  nın eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)}}{\left(2k_n^2 + (\tau_g - k_g)^2\right)^2}$$

dır. Öyle ki

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= (\tau_g - k_g) \left[ k_n (-k_g' + \tau_g' + k_n k_g - \tau_g k_n) - k_n' (\tau_g - k_g) + k_g (2k_n^2 + \tau_g - k_g) \right] - 2k_n^4 \\ \Gamma_2 &= k_n (\tau_g - k_g) \left[ 2k_n' + \tau_g (k_g^2 - \tau_g^2) \right] - 2k_n^2 (k_n k_g + \tau_g' - k_g' - k_n \tau_g) \\ \Gamma_3 &= (\tau_g - k_g) \left[ (-k_g' + \tau_g' - k_n k_g + \tau_g k_n) + k_n' (\tau_g - k_g) - \tau_g (2k_n^2 + \tau_g - k_g) \right] - 2k_n^4\end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $\beta$  nın burulması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\begin{aligned}& (\eta_1 + \eta_2) \left[ k_n (\tau_g' - k_g') - k_n' (\tau_g - k_g) + k_n^2 (\tau_g + k_g) \right] + (\tau_g \eta_1 + k_g \eta_3) (\tau_g - k_g)^2 \\ \tau^\beta &= \frac{-1 + k_n (\tau_g - k_g) \left[ k_n (\eta_1 - \eta_3) + \eta_2 (k_g - \tau_g) \right] - 2k_n (k_n' + k_n^2) \eta_2}{\sqrt{2} \left[ 2 \left( (k_n')^2 + k_n^4 \right) + (\tau_g - k_g) \left[ 2 (k_n^2 - k_n') - 2k_g (k_n^2 - k_n') \right] + (\tau_g - k_g)^2 (1 + k_g^2) \right.} \\ & \quad \left. + (\tau_g - k_g') \left[ (\tau_g' - k_g') + 2k_n (k_g + \tau_g) \right] + k_n^2 (k_g + \tau_g)^2 \right]\end{aligned}$$

dir. Öyle ki

$$\begin{aligned}\eta_1 &= k_n'' + 2k_g (\tau_g' - k_g') + k_n (3k_n' - \tau_g^2 - k_n^2 - k_g^2) + k_g' (k_g - \tau_g) \\ \eta_2 &= k_g'' - \tau_g'' + k_n (k_g' + \tau_g') + (k_g - \tau_g) (\tau_g^2 + k_n^2 + k_g^2) + \tau_g (2k_n' + k_n^2) + 2k_g k_n' \\ \eta_3 &= -k_n'' + 2\tau_g (\tau_g' - k_n') + k_n (3k_n' + \tau_g^2 + \tau_g (k_g + \tau_g)) + (k_g - \tau_g) (k_n k_g - \tau_g')\end{aligned}$$

dir. Eğer,  $g^\beta$  ve  $n^\beta$  arasındaki açı  $\varphi^\beta$  ise  $\beta$  nın geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu,

$$k_g^\beta = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{\left( 2k_g^2 + (\tau_g - k_g)^2 \right)^2} \cos \varphi^\beta,$$

$$k_n^\beta = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{\left( 2k_g^2 + (\tau_g - k_g)^2 \right)^2} \sin \varphi^\beta$$

ve

$$\begin{aligned} & (\eta_1 + \eta_2) \left[ k_n (\tau_g' - k_g') - k_n' (\tau_g - k_g) + k_n^2 (\tau_g + k_g) \right] + (\tau_g \eta_1 + k_g \eta_3) (\tau_g - k_g)^2 \\ \tau_g^\beta = & \frac{-1 + k_n (\tau_g - k_g) \left[ k_n (\eta_1 - \eta_3) + \eta_2 (k_g - \tau_g) \right] - 2k_n (k_n' + k_n^2) \eta_2}{\sqrt{2} \left[ 2 \left( (k_n')^2 + k_n^4 \right) + (\tau_g - k_g) \left[ 2(k_n^2 - k_n') - 2k_g (k_n^2 - k_n') \right] + (\tau_g - k_g)^2 (1 + k_g^2) \right]} + \frac{d\varphi^\beta}{ds^*} \\ & + (\tau_g - k_g') \left[ (\tau_g' - k_g') + 2k_n (k_g + \tau_g) \right] + k_n^2 (k_g + \tau_g)^2 \end{aligned}$$

dır [3].

**Tanım 3.3.3.**  $E^3$  de  $M$ , yönlendirilebilir bir yüzey,  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $M$  üzerinde yatan birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, g, n\}$ ,  $\gamma$  nın Darboux çatısı olmak üzere  $gn$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(g + n)$$

ile tanımlanır.  $\gamma$  nın, sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu  $k_g$ ,  $k_n$  ve  $\tau_g$  ise  $\beta$  nın eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)}}{\left(2\tau_g^2 + (k_n + k_g)^2\right)^2}$$

dır. Öyle ki

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 2\tau_g \tau_g' (k_n + k_g) - 2\tau_g^2 (k_n' + k_g') + \tau_g (k_g - k_n) \left(2\tau_g^2 + (k_n + k_g)^2\right) \\ \Gamma_2 &= -2\tau_g^4 + \tau_g (k_n + k_g) \left[ (k_n' + k_g') - 2\tau_g k_g \right] - (k_n + k_g)^2 \left[ k_g (k_n + k_g) + \tau_g' + \tau_g^2 \right] \\ \Gamma_3 &= -2\tau_g^4 + \tau_g (k_n + k_g) \left[ (k_n' + k_g') - 2\tau_g k_n \right] + (k_n + k_g)^2 \left( -k_n (k_n + k_g) + \tau_g' - \tau_g^2 \right) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $\beta$  nın burulması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\tau^\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{(k_n + k_g)^2 \left[ \begin{array}{l} \tau_g (k_n + k_g) \eta_1 - \left( (\tau_g' - \tau_g)^2 - k_n (k_n + k_g) \right) \eta_2 \\ + \left( (\tau_g' + \tau_g)^2 + k_g (k_n + k_g) \right) \eta_3 \end{array} \right] - \tau_g (\eta_2 + \eta_3) \left[ (k_n' + k_g') + \tau_g (k_n - k_g) \right]^2}{(k_n + k_g)^2 (k_n^2 + k_g^2) + 2(k_n + k_g) \left[ k_g (\tau_g' + \tau_g^2) + 2k_n (\tau_g^2 - \tau_g') \right] + 2(\tau_g')^2 + 2\tau_g^4 + \left[ (k_n' + k_g') + \tau_g (k_n - k_g) \right]^2}$$

dir. Öyle ki

$$\begin{aligned} \eta_1 &= k_n'' + k_g'' + 2\tau_g' (k_n - k_g) + \tau_g (k_n' - k_g') - (k_n + k_g) (\tau_g^2 + k_n^2 + k_g^2) \\ \eta_2 &= \tau_g'' + 2k_g (k_n' + k_g') + 3\tau_g \tau_g' + (k_n + k_g) (k_g' - \tau_g k_n) + k_g \tau_g (k_n - k_g) - \tau_g^3 \\ \eta_3 &= \tau_g'' + 2k_n (k_n' + \tau_g') + 3\tau_g \tau_g' + (k_n + k_g) (k_g' - \tau_g k_g) + k_n \tau_g (k_n - k_g) + \tau_g^3 \end{aligned}$$

dir. Eğer,  $g^\beta$  ve  $n^\beta$  arasındaki açı  $\varphi^\beta$  ise  $\beta$  nın geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu,

$$k_g^\beta = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{\left( 2\tau_g^2 + (k_n + k_g)^2 \right)^2} \cos \varphi^\beta,$$

$$k_n^\beta = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{\left( 2\tau_g^2 + (k_n + k_g)^2 \right)^2} \sin \varphi^\beta$$

ve

$$\tau_g^\beta = \frac{(k_n + k_g)^2 \left[ \begin{array}{l} \tau_g (k_n + k_g) \eta_1 - \left( (\tau_g' - \tau_g)^2 - k_n (k_n + k_g) \right) \eta_2 \\ + \left( (\tau_g' + \tau_g)^2 + k_g (k_n + k_g) \right) \eta_3 \end{array} \right]}{\sqrt{2} \left( (k_n + k_g)^2 (k_n^2 + k_g^2) + 2(k_n + k_g) \left[ k_g (\tau_g' + \tau_g^2) + 2k_n (\tau_g^2 - \tau_g') \right] \right)} + \frac{d\varphi^\beta}{ds^*}$$

$$+ 2(\tau_g')^2 + 2\tau_g^4 + \left[ (k_n' + k_g') + \tau_g (k_n - k_g) \right]^2$$

dır [3].

**Tanım 3.3.4.**  $E^3$  de  $M$ , yönlendirilebilir bir yüzey,  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $M$  üzerinde yatan birim hızlı regüler eğri ve  $\{T, g, n\}$ ,  $\gamma$  nın Darboux çatısı olmak üzere  $Tgn$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + g + n)$$

ile tanımlanır.  $\gamma$  nın sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu  $k_g$ ,  $k_n$  ve  $\tau_g$  ise  $\beta$  nın eğriliği  $\kappa^\beta$  olmak üzere

$$\kappa^\beta = \frac{\sqrt{2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)}}{\left( (k_n + k_g)^2 + (\tau_g - k_g)^2 + (\tau_g + k_n)^2 \right)^2}$$

dır. Öyle ki

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= (k_n + k_g)^2 \left[ k_g (\tau_g - k_g) - k_n (\tau_g + k_n) \right] + (k_n + k_g) \left[ (\tau_g - k_g) (\tau_g' - k_g') + (\tau_g + k_g) (\tau_g' + k_g') \right] \\
&\quad + \left( (\tau_g - k_g)^2 + (\tau_g + k_n)^2 \right) \left[ k_g (\tau_g - k_g) - (k_g' + k_n') - k_n (\tau_g + k_n) \right] \\
\Gamma_2 &= (\tau_g - k_g)^2 \left[ -k_g (k_n + k_g) - \tau_g (\tau_g + k_n) \right] + (\tau_g - k_g) \left[ (k_n + k_g) (k_n' + k_g') + (\tau_g + k_n) (\tau_g' + k_n') \right] \\
&\quad + \left( (k_g + k_n)^2 + (\tau_g + k_n)^2 \right) \left[ -k_g (k_g + k_n) + (k_g' - \tau_g') - \tau_g (\tau_g + k_n) \right] \\
\Gamma_3 &= (\tau_g + k_n)^2 \left[ \tau_g (k_g - \tau_g) - k_n (k_g + k_n) \right] + (\tau_g + k_n) \left[ -(k_n + k_g) (k_n' + k_g') - (\tau_g - k_g) (\tau_g' - k_g') \right] \\
&\quad + \left( (k_g + k_n)^2 + (\tau_g - k_g)^2 \right) \left[ \tau_g (k_g - \tau_g) + (\tau_g' + k_g') - k_n (k_g + k_n) \right]
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca  $\beta$  nın burulması  $\tau^\beta$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
& (k_n + k_g) (k_g - \tau_g) (\tau_g \eta_2 - k_n \eta_1) + (k_g - \tau_g)^2 (\tau_g \eta_1 - k_g \eta_3) \\
& + (k_n' + \tau_g') \left[ (k_g - \tau_g) \eta_1 + (k_n + k_g) \eta_2 \right] \\
& - (k_n' + \tau_g') \left[ (k_n' + \tau_g') \eta_1 + (k_g - \tau_g) \eta_3 - (k_n + \tau_g) \eta_2 \right] \\
& + (k_n + \tau_g)^2 (\tau_g \eta_1 - k_n \eta_2) + (k_n + \tau_g) (\tau_g \eta_3 - k_g \eta_1) + (k_n + \tau_g)^2 (k_g \eta_3 - k_n \eta_2) \\
\tau^\beta &= \frac{-1 + (k_g - \tau_g) (k_n + \tau_g) (k_n \eta_3 - k_g \eta_2) + (k_n + k_g) (\tau_g' - k_g')}{\sqrt{3} (k_g - \tau_g)^2 (k_g^2 + \tau_g^2) + 2 (k_n' + k_g') \left[ k_g (k_g - \tau_g) + k_n (k_n + \tau_g) \right] + (k_n + \tau_g)^2} \\
& + 2 (k_n + \tau_g) \left[ \tau_g (\tau_g' - k_g') + k_g^2 (k_n + \tau_g) \right] + (k_n + k_g)^2 (k_n^2 + \tau_g^2) \\
& + 2 (k_n + k_g) \left[ k_g (\tau_g' - k_g') - k_n (\tau_g' + k_g') \right] + k_n \tau_g (\tau_g - k_g) + (k_n' + k_g')^2 \\
& + (k_n^2 + \tau_g^2) + (\tau_g' - k_g')^2 + (\tau_g' - k_n') - 2 \tau_g (\tau_g - k_g) (\tau_g' + k_n')
\end{aligned}$$

dır. Öyle ki



$$\begin{aligned}
\eta_1 &= k_n'' + k_g'' - 2k_g'(k_g' - \tau_g') - (k_n + k_g)(k_n^2 + k_g^2) + (k_g - \tau_g)(k_g' - k_n\tau_g) + 2k_n(k_n' + \tau_g') \\
&\quad + (k_n + \tau_g)(k_n' - k_g\tau_g) \\
\eta_2 &= \tau_g'' - k_g'' + 2\tau_g(k_n' + \tau_g') + 2k_g(k_n' + k_g') + (k_n + k_g)(k_g' - k_n\tau_g) + (\tau_g + k_n)(k_n k_g + \tau_g') \\
&\quad + (k_g - \tau_g)(k_g^2 + \tau_g^2) \\
\eta_3 &= -\tau_g'' - k_n'' + 2k_n(k_g' + k_n') + (\tau_g - k_g)(\tau_g' - k_n k_g) + (k_n + k_g)(k_n' + k_g\tau_g) \\
&\quad + 2\tau_g(\tau_g' - k_g') + (k_n + \tau_g)(k_n^2 + \tau_g^2)
\end{aligned}$$

dir. Eğer, ,  $g^\beta$  ve  $n^\beta$  arasındaki açı  $\varphi^\beta$  ise  $\beta$  nın geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu,

$$k_g^\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{\left(\left(k_n + k_g\right)^2 + \left(\tau_g - k_g\right)^2 + \left(\tau_g + k_n\right)^2\right)^2} \cos \varphi^\beta,$$

$$k_n^\beta = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2}}{\left(\left(k_n + k_g\right)^2 + \left(\tau_g - k_g\right)^2 + \left(\tau_g + k_n\right)^2\right)^2} \sin \varphi^\beta$$

ve

$$\begin{aligned}
& (k_n + k_g)(k_g - \tau_g)(\tau_g \eta_2 - k_n \eta_1) + (k_g - \tau_g)^2 (\tau_g \eta_1 - k_g \eta_3) \\
& + (k_n' + \tau_g') \left[ (k_g - \tau_g) \eta_1 + (k_n + k_g) \eta_2 \right] \\
& - (k_n' + \tau_g') \left[ (k_n' + \tau_g') \eta_1 + (k_g - \tau_g) \eta_3 - (k_n + \tau_g) \eta_2 \right] \\
& + (k_n + \tau_g)^2 (\tau_g \eta_1 - k_n \eta_2) + (k_n + \tau_g) (\tau_g \eta_3 - k_g \eta_1) + (k_n + \tau_g)^2 (k_g \eta_3 - k_n \eta_2) \\
\tau_g^\beta = & \frac{-1 + (k_g - \tau_g)(k_n + \tau_g)(k_n \eta_3 - k_g \eta_2) + (k_n + k_g)(\tau_g' - k_g')}{\sqrt{3} (k_g - \tau_g)^2 (k_g^2 + \tau_g^2) + 2(k_n' + k_g') \left[ k_g (k_g - \tau_g) + k_n (k_n + \tau_g) \right] + (k_n + \tau_g)^2} + \frac{d\varphi^\beta}{ds^*} \\
& + 2(k_n + \tau_g) \left[ \tau_g (\tau_g' - k_g') + k_g^2 (k_n + \tau_g) \right] + (k_n + k_g)^2 (k_n^2 + \tau_g^2) \\
& + 2(k_n + k_g) \left[ k_g (\tau_g' - k_g') - k_n (\tau_g' + k_g') \right] + k_n \tau_g (\tau_g - k_g) + (k_n' + k_g')^2 \\
& + (k_n^2 + \tau_g^2) + (\tau_g' - k_g')^2 + (\tau_g' - k_n') - 2\tau_g (\tau_g - k_g) (\tau_g' + k_n')
\end{aligned}$$

dir [3]

## BÖLÜM 4. $E^3$ , 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABBAN ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölüm tezin orijinal kısmı olup  $E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında  $S^2$  birim küresinde de Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri tanımlanmış ve bu eğrilerle ilgili teoremler verilmiştir.

$\gamma = \gamma(s)$  ve  $\beta = \beta(s^*)$ ,  $S^2$  birim küresinde birim hızlı regüler eğriler olsunlar.  $\gamma$  nın Sabban çatısı  $\{\gamma, t, d\}$  ve  $\beta$  nın Sabban çatısı  $\{\beta, t_\beta, d_\beta\}$  olmak üzere  $\gamma t$ -Smarandache eğrisi,  $td$ -Smarandache eğrisi ve  $\gamma td$ -Smarandache eğrisi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

### 4.1. $\gamma t$ -Smarandache Eğrileri

**Tanım 4.1.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $S^2$  üzerinde birim hızlı regüler eğri ve  $\{\gamma, t, d\}$ ,  $\gamma$  nın Sabban çatısı olmak üzere  $\gamma t$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + t) \quad (4.1.1)$$

ile tanımlanır.

Böylece  $\gamma t$ -Smarandache eğrisinin Sabban çatısı ve  $\kappa_g^\beta$  geodezik eğriliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.1.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $S^2$  üzerinde birim hızlı regüler eğri,  $\{\gamma, t, d\}$ ,  $\gamma$  nın Sabban çatısı ve  $\kappa_g$ ,  $\gamma$  nın geodezik eğriliği olsun.  $\beta(s^*)$ ,  $\gamma$  nın  $\gamma t$ -Smarandache eğrisi ise  $\beta$  nın Sabban çatısı  $\{\beta, t_\beta, d_\beta\}$

$$\begin{bmatrix} \beta \\ t_\beta \\ d_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2+\kappa_g^2}} & \frac{1}{\sqrt{2+\kappa_g^2}} & \frac{\kappa_g}{\sqrt{2+\kappa_g^2}} \\ \frac{\kappa_g}{\sqrt{4+2\kappa_g^2}} & \frac{-1-\kappa_g}{\sqrt{4+2\kappa_g^2}} & \frac{2}{\sqrt{4+2\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ t \\ d \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada

$$\lambda_1 = \kappa_g \kappa_g' - \kappa_g^2 - 2$$

$$\lambda_2 = -\kappa_g \kappa_g' - 2 - 2\kappa_g^2 - \kappa_g^4$$

$$\lambda_3 = 2\kappa_g + 2\kappa_g' + \kappa_g^3$$

olmak üzere

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{(2+\kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1 \kappa_g + \lambda_2 (-1-\kappa_g) + 2\lambda_3)$$

dır.

**İspat.** (4.1.1) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma' + t')$$

elde edilir. Bu son denklemde (2.2.4) denklemi yerine yazılırsa

$$t_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \kappa_g d - \gamma) \quad (4.1.2)$$

bulunur, öyle ki burada

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2 + \kappa_g^2}{2}} \quad (4.1.3)$$

dır. (4.1.3) denklemi (4.1.2) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa  $\beta$  eğrisinin  $t_\beta$  teğet vektörü

$$t_\beta = \frac{1}{\sqrt{2 + \kappa_g^2}}(-\gamma + t + \kappa_g d) \quad (4.1.4)$$

olur. (4.1.4) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$t_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(2 + \kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}}(\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t + \lambda_3 d) \quad (4.1.5)$$

elde edilir öyle ki burada

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \kappa_g \kappa_g' - \kappa_g^2 - 2 \\ \lambda_2 &= -\kappa_g \kappa_g' - 2 - 2\kappa_g^2 - \kappa_g^4 \\ \lambda_3 &= 2\kappa_g + 2\kappa_g' + \kappa_g^3 \end{aligned}$$

dir. (4.1.3) denklemi (4.1.5) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$t_\beta' = \frac{\sqrt{2}}{(2 + \kappa_g^2)^2}(\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t + \lambda_3 d) \quad (4.1.6)$$

denklemleri bulunur. Eğer (4.1.1) ve (4.1.4) denklemleri göz önüne alınırsa  $\beta$  eğrisinin  $d_\beta$  normal vektörü

$$d_\beta = \beta \wedge t_\beta = \frac{1}{\sqrt{4+2\kappa_g^2}} (\kappa_g \gamma + (-1-\kappa_g)t + 2d) \quad (4.1.7)$$

olarak elde edilir.

Son olarak (4.1.6) ve (4.1.7) denklemlerinden  $\beta$  eğrisinin geodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \langle t_\beta', d_\beta \rangle \\ &= \frac{1}{(2+\kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1 \kappa_g + \lambda_2 (-1-\kappa_g) + 2\lambda_3) \end{aligned}$$

olur.

## 4.2. $td$ - Smarandache Eğrileri

**Tanım 4.2.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $S^2$  üzerinde birim hızlı regüler eğri ve  $\{\gamma, t, d\}$ ,  $\gamma$  nın Sabban çatısı olmak üzere  $td$  - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+d) \quad (4.2.1)$$

ile tanımlanır.

Bu durumda  $td$  - Smarandache eğrisinin Sabban çatısı ve  $\kappa_g^\beta$  geodezik eğriliği aşağıdaki teoremle verilebilir.

**Teorem 4.2.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $S^2$  üzerinde birim hızlı regüler eğri olmak üzere  $\{\gamma, t, d\}$ ,  $\gamma$  nın Sabban çatısı ve  $\kappa_g$  de  $\gamma$  nın geodezik eğriliği olsun.  $\beta(s^*)$ ,  $\gamma$  nın  $td$ -Smarandache eğrisi ise  $\beta$  nın Sabban çatısı  $\{\beta, t_\beta, d_\beta\}$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \beta \\ t_\beta \\ d_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+2\kappa_g^2}} & \frac{-\kappa_g}{\sqrt{1+2\kappa_g^2}} & \frac{\kappa_g}{\sqrt{1+2\kappa_g^2}} \\ \frac{\kappa_g}{\sqrt{2+4\kappa_g^2}} & \frac{-1}{\sqrt{2+4\kappa_g^2}} & \frac{1+\kappa_g}{\sqrt{2+4\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ t \\ d \end{bmatrix}$$

ile verilir öyle ki

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\kappa_g \kappa_g' + \kappa_g + 2\kappa_g^3 \\ \lambda_2 &= -1 - \kappa_g' - 3\kappa_g^2 - 2\kappa_g^4 \\ \lambda_3 &= -\kappa_g^2 + \kappa_g' - 2\kappa_g^4 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{(1+2\kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1 \kappa_g - \lambda_2 + \lambda_3 (1 + \kappa_g))$$

dır.

**İspat.** (4.2.1) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (t' + d')$$

elde edilir. Eğer (2.2.4) denklemi bu son denklemde yerine yazılırsa

$$t_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\gamma + \kappa_g d - \kappa_g t) \quad (4.2.2)$$

bulunur. (4.2.2) denkleminde açıktır ki

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{1 + 2\kappa_g^2}{2}} \quad (4.2.3)$$

dır. (4.2.3) denklemini (4.2.2) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa  $\beta$  eğrisinin  $t_\beta$  teğet vektörü

$$t_\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\kappa_g^2}} (-\gamma - \kappa_g t + \kappa_g d) \quad (4.2.4)$$

olarak elde edilir. (4.2.4) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$t_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(1 + 2\kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t + \lambda_3 d) \quad (4.2.5)$$

bulunur. Öyle ki burada

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\kappa_g \kappa_g' + \kappa_g + 2\kappa_g^3 \\ \lambda_2 &= -1 - \kappa_g' - 3\kappa_g^2 - 2\kappa_g^4 \\ \lambda_3 &= -\kappa_g^2 + \kappa_g' - 2\kappa_g^4 \end{aligned}$$

dir. (4.2.3) denklemini (4.2.5) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$t_\beta' = \frac{\sqrt{2}}{(1 + 2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t + \lambda_3 d) \quad (4.2.6)$$



elde edilir. Eğer (4.2.1) ve (4.2.4) denklemleri göz önüne alınırsa  $\beta$  eğrisinin  $d_\beta$  normal vektörü

$$d_\beta = \beta \wedge t_\beta = \frac{1}{\sqrt{2+4\kappa_g^2}} (\kappa_g \gamma - t + (1+\kappa_g)d) \quad (4.2.7)$$

bulunur.

Son olarak (4.2.6) ve (4.2.7) denklemlerinden  $\beta$  nın geodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \langle t_\beta', d_\beta \rangle \\ &= \frac{1}{(1+2\kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1 \kappa_g - \lambda_2 + \lambda_3 (1+\kappa_g)) \end{aligned}$$

dır.

### 4.3. $\gamma t d$ - Smarandache Eğrileri

**Tanım 4.3.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $S^2$  üzerinde birim hızlı regüler eğri ve  $\{\gamma, t, d\}$ ,  $\gamma$  nın Sabban çatısı olmak üzere  $\gamma t d$  - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma + t + d) \quad (4.3.1)$$

ile verilir.

Böylece  $\gamma t d$  - Smarandache eğrisinin Sabban çatısı ve  $\kappa_g^\beta$  geodezik eğriliği aşağıdaki teoremle verilebilir.

**Teorem 4.3.1.**  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $S^2$  üzerinde birim hızlı regüler eğri,  $\{\gamma, t, d\}$ ,  $\gamma$  nın Sabban çatısı ve  $\kappa_g$ ,  $\gamma$  nın geodezik eğriliği olsun.  $\beta(s^*)$ ,  $\gamma$  nın  $\gamma t d$  - Smarandache eğrisi ise  $\beta$  nın Sabban çatısı  $\{\beta, t_\beta, d_\beta\}$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \beta \\ t_\beta \\ d_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2(1-\kappa_g + \kappa_g^2)}} & \frac{1-\kappa_g}{\sqrt{2(1-\kappa_g + \kappa_g^2)}} & \frac{\kappa_g}{\sqrt{2(1-\kappa_g + \kappa_g^2)}} \\ \frac{2\kappa_g - 1}{\sqrt{6(1-\kappa_g + \kappa_g^2)}} & \frac{-1-\kappa_g}{\sqrt{6(1-\kappa_g + \kappa_g^2)}} & \frac{2-\kappa_g}{\sqrt{6(1-\kappa_g + \kappa_g^2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ t \\ d \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\lambda_1 = -\kappa_g' + 2\kappa_g \kappa_g' - 2 + 4\kappa_g - 4\kappa_g^2 + 2\kappa_g^3$$

$$\lambda_2 = -\kappa_g' - \kappa_g \kappa_g' - 2 - 4\kappa_g^2 + 2\kappa_g + 2\kappa_g^3 - 2\kappa_g^4$$

$$\lambda_3 = -\kappa_g \kappa_g' + 2\kappa_g - 4\kappa_g^2 + 2\kappa_g' + 4\kappa_g^3 - 2\kappa_g^4$$

olmak üzere

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}(1-\kappa_g + \kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1(2\kappa_g - 1) + \lambda_2(-1-\kappa_g) + \lambda_3(2-\kappa_g)).$$

dır.

**İspat.** (4.3.1) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma' + t' + d')$$

elde edilir. Eğer (2.2.4) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$t_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (t - \gamma + \kappa_g d - \kappa_g t) \quad (4.3.2)$$

bulunur. Öyle ki burada

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2(1 - \kappa_g + \kappa_g^2)}{3}} \quad (4.3.3)$$

dır. (3.3.3) denklemini (3.3.2) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa  $\beta$  eğrisinin  $t_\beta$  teğet vektörü

$$t_\beta = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \kappa_g + \kappa_g^2)}} (-\gamma + (1 - \kappa_g)t + \kappa_g d) \quad (4.3.4)$$

olur. (4.3.4) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$t_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1 - \kappa_g + \kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t + \lambda_3 d) \quad (4.3.5)$$

elde edilir öyle ki burada

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\kappa_g' + 2\kappa_g \kappa_g' - 2 + 4\kappa_g - 4\kappa_g^2 + 2\kappa_g^3 \\ \lambda_2 &= -\kappa_g' - \kappa_g \kappa_g' - 2 - 4\kappa_g^2 + 2\kappa_g + 2\kappa_g^3 - 2\kappa_g^4 \\ \lambda_3 &= -\kappa_g \kappa_g' + 2\kappa_g - 4\kappa_g^2 + 2\kappa_g' + 4\kappa_g^3 - 2\kappa_g^4 \end{aligned}$$

dir. (4.3.3) denklemini (4.3.5) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$t_\beta' = \frac{\sqrt{3}}{4(1 - \kappa_g + \kappa_g^2)^2} (\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t + \lambda_3 d) \quad (4.3.6)$$

bulunur. Eğer (4.3.1) ve (4.3.4) denklemleri göz önünde bulundurulursa

$$d_\beta = \beta \wedge t_\beta = \frac{1}{\sqrt{6(1-\kappa_g + \kappa_g^2)}} \left( (2\kappa_g - 1)\gamma + (-1 - \kappa_g)t + (2 - \kappa_g)d \right) \quad (4.3.7)$$

bulunur öyle ki burada  $d_\beta$ ,  $\beta$  eğrisinin normal vektörüdür.

Son olarak (4.3.6) ve (4.3.7) denklemleri kullanılırsa  $\beta$  nın geodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \langle t_\beta', d_\beta \rangle \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}(1-\kappa_g + \kappa_g^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \lambda_1(2\kappa_g - 1) + \lambda_2(-1 - \kappa_g) + \lambda_3(2 - \kappa_g) \right) \end{aligned}$$

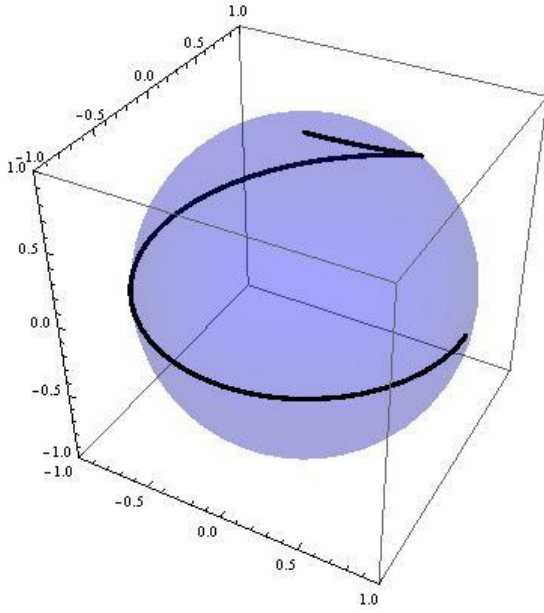
olur.

## BÖLÜM 5. SMARANDACHE EĞRİLERİNE BİR ÖRNEK

Bu bölümde  $E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre tanımlanan Smarandache eğrilerine örnekler verilmiştir.

$$\gamma(s) = \{\cos(s)\tanh(s), \sin(s)\tanh(s), \operatorname{sech}(s)\} \quad (5.1.1)$$

$S^2$  üzerinde birim hızlı regüler eğri olmak üzere bu eğrinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri hesaplanabilir.



Şekil 5.1  $\gamma = \gamma(s)$

Bölüm 4'te verilen bilgiler ışığında gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa  $\gamma = \gamma(s)$  eğrisinin Sabban çatısına göre teğeti ve normali bulunabilir. Böylece (5.1.1) denklemleri ile verilen  $\gamma$  eğrisi göz önüne alınırsa

$$t = \{\cos(s)\sec h^2(s) - \sin(s)\tanh(s), \cos(s)\tanh(s) + \sin(s)\sec h^2(s), -\tanh(s)\sec h(s)\}$$

ve

$$d_1(s) = -\sec h^3(s)\sin(s) - \cos(s)\sec h(s)\tanh(s) - \sec h(s)\sin(s)\tanh^2(s)$$

$$d_2(s) = \cos(s)\sec h^3(s) - \sec h(s)\sin(s)\tanh(s) + \cos(s)\sec h(s)\tanh^2(s)$$

$$d_3(s) = \cos^2(s)\tanh^2(s) + \sin^2(s)\tanh^2(s)$$

olmak üzere

$$d = \{d_1(s), d_2(s), d_3(s)\}$$

olur. O halde Tanım 2.2.15 ve Tanım 2.2.16 dan  $\gamma$  eğrisinin geodezik eğriliği gerekli işlemler ve kısaltmalardan sonra

$$\kappa_g = 2\sec h(s)$$

olarak bulunur.

(5.1.1) denklemi ile verilen  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma t$  - Smarandache eğrisinin denklemi:

$$\beta_1 = -\sin(s)\tanh(s) + \cos(s)\tanh(s) + \cos(s)\sec h^2(s)$$

$$\beta_2 = \sin(s)\tanh(s) + \cos(s)\tanh(s) + \sin(s)\sec h^2(s)$$

$$\beta_3 = \sec h(s) - \tanh(s)\sec h(s)$$

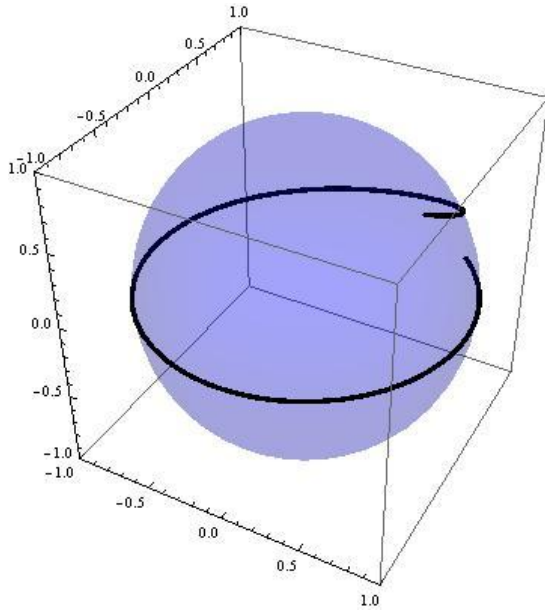
olmak üzere

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

dir, öyle ki burada  $\beta$  nın geodezik eğriliği

$$K_g^\beta = \frac{1}{(2+4\operatorname{sech}^2(s))^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 16\operatorname{sech}^5(s)+8\operatorname{sech}^4(s)-8(\tanh(s)-1)\operatorname{sech}^3(s) \\ -2(\tanh(s)-2)\operatorname{sech}^2(s)-2(\tanh(s)-1)\operatorname{sech}(s)+1 \end{bmatrix}$$

dır. (Şekil 5.2)



Şekil 5.2  $\gamma t$  - Smarandache Eğrisi.

(5.1.1) denklemleri ile verilen  $\gamma$  eğrisinin  $td$  -Smarandache eğrisinin denklemleri:

$$\beta_1 = -\sin(s)\tanh(s) + \cos(s)\operatorname{sech}^2(s) - \sin(s)\operatorname{sech}^3(s) - \cos(s)\tanh(s)\operatorname{sech}(s) - \sin(s)\tanh^2(s)\operatorname{sech}(s)$$

$$\beta_2 = \cos(s)\tanh(s) + \cos(s)\operatorname{sech}^3(s) + \sin(s)\operatorname{sech}^2(s) + \cos(s)\tanh^2(s)\operatorname{sech}(s) - \sin(s)\tanh(s)\operatorname{sech}(s)$$

$$\beta_3 = \sin^2(s)\tanh^2(s) + \cos^2(s)\tanh^2(s) - \tanh(s)\operatorname{sech}(s)$$

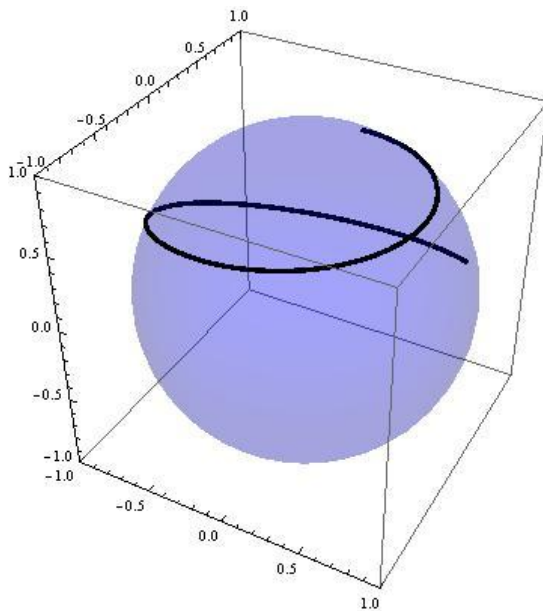
olmak üzere

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

dir. Ayrıca  $\beta$  nin geodezik eğriliği

$$\kappa_s^\beta = \frac{1}{(1+8\sec h^2(s))^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} -64\sec h^5(s) + 32\sec h^4(s) - 8(2\tanh(s)+1)\sec h^3(s) \\ -4(\tanh(s)-3)\sec h^2(s) - 4\tanh(s)\sec h(s) + 1 \end{bmatrix}$$

dir. (Şekil 5.3)



Şekil 5.3  $td$  - Smarandache Eğrisi.

$\gamma td$  - Smarandache eğrisinin denklemi,

$$\beta_1 = -\sin(s)\tanh(s) + \cos(s)\tanh(s) + \cos(s)\sec h^2(s) - \sin(s)\sec h^2(s) \\ - \cos(s)\tanh(s)\sec h(s) - \sin(s)\tanh^2(s)\sec h(s)$$

$$\beta_2 = \sin(s)\tanh(s) + \cos(s)\tanh(s) + \cos(s)\sec h^2(s) + \sin(s)\sec^2 h(s) \\ + \cos(s)\tanh^2(s)\sec h(s) - \sin(s)\tanh(s)\sec h(s)$$

$$\beta_3 = \sec h(s) + \sin^2(s)\tanh^2(s) + \cos^2(s)\tanh^2(s) - \tanh(s)\sec h(s)$$



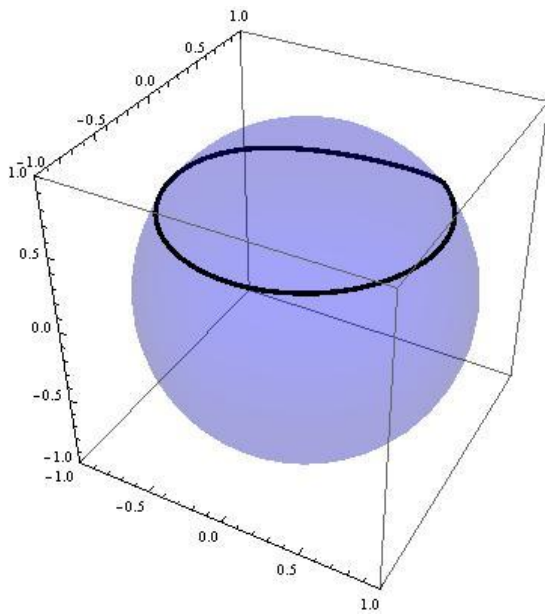
olmak üzere

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{\beta_1, \beta_2, \beta_2\}$$

olur. İlave olarak  $\beta$  nın geodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}(4\sec^2 h(s) - 2\sec h(s) + 1)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 128\sec^5 h(s) - 64\sec^4 h(s) + 32\sec^3 h(s) + 16\sec^2 h(s) \\ -8\sec h(s) - 48\tanh(s)\sec^3 h(s) + 24\tanh(s)\sec^2 h(s) \\ -12\tanh(s)\sec h(s) + 4 \end{bmatrix}$$

dır. (Şekil 5.4)



Şekil 5.4  $\gamma_{td}$  - Smarandache Eğrisi.

## **BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER**

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri ele alınmış olup ilgili teoremler ile bu eğrilerin Sabban invaryantları hesaplanmıştır. Daha sonra da Smarandache eğrilerine bir örnek verilerek grafikte gösterilmiştir.

Bu çalışmada ilk defa 3-boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre tanımlanan Smarandache eğrileri, yine Sabban çatısına göre Minkowski uzayında tanımlanarak kendine has özellikleri verilebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] ALİ A. T., Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.2, 30-36, 2010.
- [2] BAYRAK N., BEKTAŞ Ö., YÜCE S., Special Smarandache Curves in  $E_1^3$ , arXiv:1204.566v1 [math.HO] 25 Apr 2012.
- [3] BEKTAŞ Ö., YÜCE S., Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3- Space, arXiv:1203.4830v1 [math. DG], 20 Mar 2012.
- [4] BISHOP R. L., There is More Than One Way to Frame a Curve, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 3, 246-251, 1975.
- [5] ÇETİN M., TUNÇER Y., KARACAN M. K., Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space, arXiv:1106.3202v1 [math. DG], 16 Jun 2011.
- [6] DO CARMO M. P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [7] HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri 1. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1998.
- [8] HACISALİĞOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri II. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1994.
- [9] KARATAŞ H., Çizgi Yörüngelerinin Eğrilik Teorisi Üzerine, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 2011.
- [10] KOENDERINK J., Solid Shape, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [11] O'NEILL B., Elementary Differential Geometry, Academic Press Inc. New York, 1966.
- [12] SABUNCUOĞLU A., Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, 2010.
- [13] SMARANDACHE F., Degree of Negation of an Axiom, arXiv:0905.0719v3 [math.GM], 17 Nov 2010.

- [14] STRUIK, D. J., Lectures on Classical Differential Geometry, 2nd ed. Addison Wesley, Dover, 1988.
- [15] TURGUT M., YILMAZ S., Smarandache Curves in Minkowski Space-time, International J. Math. Combin., Vol.3, 51-55, 2008.
- [16] UĞURLU, H. H., KOCAYİĞİT, H., The Frenet and Darboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on Time-Like Surface, Mathematical & Computational Applications, Vol. 1, No.2, pp.133-141, 1996.
- [17] YILDIZ Ö. G., Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 2011.

## ÖZGEÇMİŞ

Kemal Taşköprü, 03.07.1987 de Edremit'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2005 yılında Behçet Kemal Çağlar Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamladı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başlamıştır.