T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emel AYDIN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. YALÇIN YILMAZ**

Şubat 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emel AYDIN

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 06/02/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Şevket GÜR Jüri Başkanı	Yrd. Doç. Dr. Yalçın YILMAZ Üye	Yrd. Doç. Dr. Murat TUNA Üye

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimime ilk başladığım andan itibaren eğitimim boyunca bilgisini, sabrını ve her türlü yardımını esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yalçın Yılmaz'a desteği için en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Eğitimim süresince yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım değerli hocalarıma teşekkürler. Tezin yazımı aşamasında sabırla bana yardımcı olan sevgili arkadaşlarıma ve her zaman maddi ve manevi olarak yanımda olan desteklerini esirgemeyen canım aileme sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hacim İntegral Metodu, Phragmen-Lindelöf Prensibi

Verilen kısmi türevli denklemin çözümünün uygun bir ölçüm fonksiyonu yardımıyla birinci mertebeden diferansiyel eşitsizlik elde edilmekte ve bu eşitsizlik, başlangıç koşullarına bağlı olup çözümün bir ölçüm fonksiyonuna göre yazılmaktadır. İlk olarak Neumann problemi için "Hacim İntegral Metodu" diye adlandırılan yöntem gösterilmektedir.

Lineer olmayan sınır koşulu altındaki dalga denkleminin çözümlerinin davranışları incelenmektedir. Homojen başlangıç ve sınır koşulları altında p-Laplesyen terim içeren doğrusal olmayan denklemin çözümünün davranışı incelenmektedir.

DIFFERENTIAL INEQUALITIES

SUMMARY

Key Words: Volume Integral Method, Phragmen-Lindelöf Principle

For the solution of a given partial differential equation it is obtained a first order differential inequality with the help of an appropriate measure and this inequality, depending on the initial conditions, is written, by use of the measure. First, for the Neumann problem so-called “Volume Integral Method” has be introduced.

Behavior of solutions of nonlinear wave equation under some boundary conditions is examined. Spatial behaviour of the solution of a nonlinear wave equation under homogeneous initial and boundary conditions with p-Laplasyen term are investigated.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Kavram ve Eşitsizlikler

Hacim integral metodu diye adlandırılan metot kaynağını Knowles [5] ve Toupin'in [6] çalışmalarından almıştır. Hacim integral metodunun ve elastisiteyle ilgili anlatılanların birçok yeni referansıyla birlikte kapsamlı araştırması, Horgan ve Knowles [7] tarafından yazılan makalede bulunabilir.

R^n, n−boyutlu uzay ve Ω kümesi bu uzayda basit bağlantılı açık bir küme olsun ve

u: Ω → R yeteri kadar diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots u_{x_n})$

ve R^{n-1} de Laplace operatörü

$\Delta_1 = \nabla_1^2 = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_{n-1}x_{n-1}}$

şeklinde ifade edilir. $C_0^2(\Omega)$ ile Ω' da 2. mertebeye kadar türevi sürekli ve sınırda 0 değerini alan fonksiyonlar gösterilir.

Divergence Teoremi: Ω, R^3'te düzgün veya parçalı düzgün bir S yüzeyi ile sınırlanmış olsun. F, Ω üzerinde düzgün bir vektör alanı, n ise S yüzeyinin dışa doğru normal birim vektörü olsun. Bu durumda

$$\iint_S F.nds = \iiint_\Omega \mathrm{div}F dV \qquad (1.1)$$

eşitliği sağlanır.

Cauchy Eşitsizliği: ∀ a, b ∈ R için,

$$a.b \leq |a.b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \qquad (1.2)$$

dir.

$\varepsilon -$ Cauchy Eşitsizliği: $\forall$ a, b > 0 ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\mathrm{a.b} \leq \varepsilon.\mathrm{a}^2 + \frac{\mathrm{b}^2}{4.\varepsilon} \tag{1.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Hölder Eşitsizliği: f ve g fonksiyonları $\Omega \subset R^3$ üzerinde integralllenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_\Omega |\mathrm{f.g}| d\Omega \leq \left(\int_\Omega |\mathrm{f}|^\mathrm{p} d\Omega\right)^{1/\mathrm{p}} \left(\int_\Omega |\mathrm{g}|^\mathrm{q}\, d\Omega\right)^{1/\mathrm{q}} \tag{1.4}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada, $\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1$ dir.

Young Eşitsizliği: $1 < p,\ q < \infty$ ve $\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1$ olsun, $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{a.b} \leq \frac{\mathrm{a}^\mathrm{p}}{\mathrm{p}} + \frac{\mathrm{b}^\mathrm{q}}{\mathrm{q}} \tag{1.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Başka bir ifadeyle eşitsizlik, μ pozitif sabit ve $0 < r < 1$ olmak üzere,

$$\mathrm{c}^\mathrm{r}\mathrm{d}^{1-\mathrm{r}} \leq \mathrm{r c \mu} + (1-\mathrm{r})\mathrm{d}\mu^{-\mathrm{r}/1-\mathrm{r}} \tag{1.6}$$

şeklinde yazılır.

Poincare Eşitsizliği: Ω, R^3 te düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip düzgün bir bölge olsun. Bu durumda $\mathrm{C}_0^2(\Omega)$ da aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|\mathrm{u}\|_2 \leq \mathrm{c}(\Omega)\|\nabla \mathrm{u}\|_2 \tag{1.7}$$

Burada $\mathrm{c}(\Omega)$, Ω' nın büyüklüğü ve geometrisine bağlı bir sabittir ve karesi integrallenebilen u fonksiyonunun normu $\|\mathrm{u}\|_2^2 = \int_\Omega \mathrm{u}^2 \mathrm{dx}$ ile tanımlanır.

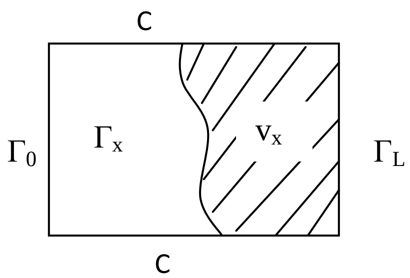
BÖLÜM 2. BİRİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ KESTİRİMLER

2.1. Hacim İntegral Metodu

Bu bölümde, öncelikle metodun genel bir tanımı yapılacaktır. Sonra metodun dikdörtgensel bir bölgede Neumann problemine nasıl uygulandığı gösterilecektir.
Ayrıca Phragmen-Lindelöf tipi azalım kestirimlerinin yarı sonsuz dikdörtgensel bir bölgede nasıl elde edildiği gösterilecektir. Yani, bir ölçümün verilen bir üstel fonksiyondan daha hızlı ve asimptotik olarak artmadığı biliniyorsa, o çözümün ölçümü sonsuza doğru gidildikçe üstel olarak azalıyor anlamına gelmektedir. Kutupsal koordinatlar yardımıyla tanımlanan benzer bölgeler için de benzer analizlere ayrıca yer verilmiştir. Son olarak bir dik silindir için difüzyon problemi olan zamana bağlı bir probleme uyarlanabilecek bir yöntem gösterilecektir.

2.2. Metodun Tanımı

Sınırlanmış üç boyutlu bölgeye dikkat edilmektedir. Aşağıdaki üç boyutlu V bölgesi ele alınsın (bkz. 2.1). Bölge Γ_0 ve Γ_L ile birlikte C yanal sınır olmak üzere üç ayrık parçadan oluşan sınıra sahiptir.



Şekil 2.1. Sınırı C, yan yüzeyi Γ_0 ve Γ_L den oluşan bölge

$x \in [0, L]$ olmak üzere, kendilerini kesmeyen yüzeylerin ailesi Γ_x ile gösterilsin ve aşağıdaki koşulları sağlasın.

a) Γ_0 , Γ_L , x=0 ve x=L noktalarına karşı gelen V' nin sınırını oluştursun.

b) Γ_x'in her yüzeyi yanal yüzey ile basit kapalı eğri boyunca kesişsin.

u (skaler veya vektörel), V üzerinde L(u) = 0 kısmi türevli denklem veya sisteminin şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. b_0 verilen bir fonksiyon olmak üzere u, $B_0(u) = b_0$, (Γ_0 üzerinde) sınır koşulunu sağlar. Ayrıca V' nin sınırının kalan kısmında(C ve Γ_L üzerinde) sıfır sınır koşullarını sağlasın. V_x ; Γ_x , Γ_L ve C arasında kalan alanı veya hacmi göstersin. P(u), u'nun negatif olmayan bir fonksiyonu olmak üzere

$$F(x) = \int_{V_x} P(u)dV$$

ile V_x de çözümün "hacim integral ölçümü" tanımlansın. Hacim integral metodunun amacı birinci dereceden diferansiyel bir eşitsizlik ve buradan da F(0) başlangıç verilerine ve x'e göre bir üst sınır elde etmektir. Bu amaçla

$$F'(x) + h(x)F(x) \leq 0 \tag{2.1}$$

tipinde bir eşitsizlik elde edilir. Burada h(x), Γ_x kesitinin geometrisine bağlıdır. Eşitsizlik $e^{\int_0^x h(x)dx}$ ile çarpılıp düzenlendiğinde

$$e^{\int_0^x h(x)dx}F'(x) + e^{\int_0^x h(x)dx}h(x)F(x) \leq 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\, e^{\int_0^x h(x)dx}\right] \leq 0$$

$$F(x) \leq F(0)\, e^{-\int_0^x h(x)dx} \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu ise F(x)'in üstel hız ile sıfıra gittiğini gösterir.

Yukarıda ifade edilen genel yaklaşım uzay değişkeniyle birlikte t zaman değişkenine bağlı parabolik problemlere de uyarlanabilir. Kısmi türevli denklem veya sisteminin zaman türev(ler)ini içerdiği düşünülürse, ilk koşul sıfır ve sınır koşulları yukarıda bahsedildiği gibi olsun.

P ve Q(u ve türevlerinin) negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere, V_x üzerinde çözümün bir ölçümü

$$F(x, t) = \int_0^t \int_{V_x} P(u)dVd\Gamma + \int_V Q(u)dV \tag{2.3}$$

ile tanımlanırsa F(x, t) için öncekine benzer bir diferansiyel eşitsizlik sağlanır.

2.3. Neumann Problemi

Bu kısımda dikdörtgen içerisindeki basit Neumann problemine metodun nasıl uygulanacağı gösterilecektir. L, h sabitler olmak üzere bölge aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

R : $0 < x < L$, $0 < y < h$

u(x, y) aşağıdaki problemin klasik bir çözümü olsun,

$\nabla_1^2 u = 0,$ R üzerinde (2.4$_1$)

$u_y = 0,$ y = 0, h sınırında (2.4$_2$)

$u_x = 0,$ x = L sınırında (2.4$_3$)

$u_x = f(y)$ x = 0 sınırında. (2.4$_4$)

(1.4$_1$) – (1.4$_4$) ve Divergence Teoremi kullanıldığında,

$\iint_\Omega \Delta u dxdy = \int_s \frac{\partial u}{\partial n} ds$ eşitliğinden

$$\iint_\Omega (u_{xx} + u_{yy}) dxdy = \int_s \nabla u . n ds = 0$$

$$\int_s \nabla u . n ds = \int_{s_1} u_y \, ds + \int_{s_2} u_x ds - \int_{s_3} u_y \, ds - \int_{s_4} u_x ds = 0$$

$$- \int_{s_4} u_x \, ds = - \int_{s_4} f(y) dy = 0$$

$$\int_0^h f(y) dy = 0 \qquad (2.4_5)$$

elde edilir. (2.4$_5$) eşitliği f fonksiyonu için koşul olsun, u'nun keyfi bir sabit farkıyla belirlendiği bilinmektedir.

Teorem 2.1.

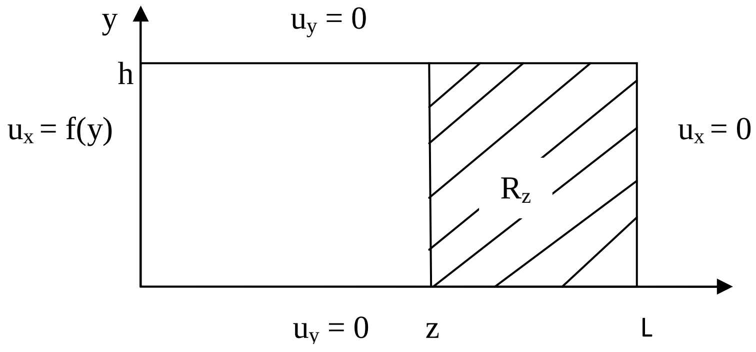
$R_z = R \cap x > z$ olmak üzere, R_z içindeki çözümün hacim ölçümü

$$F(z) = \int_{R_z} (\nabla_1 u)^2 \, dA \qquad (2.5_1)$$

olarak tanımlansın. Burada u, (2.4) ile tanımlı problemin çözümü olmak üzere, F(z)

$$F(z) \leq F(0) \exp(-2\pi z/h) \qquad (2.5_2)$$

eşitsizliğini sağlar.



Şekil 2.2. (2.4)'te belirtilen problemin tüm koşullarını sağlayan sonlu bir dikdörtgen

İspat:

Γ_z , $x = z$ noktasındaki dikdörtgenin dik kesiti olsun. R_z bölgesinde Divergence teoremi ve (2.4) uygulandığında

$$\int_{\Gamma_x} u_x dy = 0 \tag{2.6}$$

elde edilir. Daha sonra

$\nabla_1.(u\nabla_1 u) = \nabla_1 u \nabla_1 u + u\nabla_1 u = (\nabla_1 u)^2 + u\nabla_1 u$ eşitliğinden

$(\nabla_1 u)^2 = \nabla_1.(u\nabla_1 u) - u\nabla_1 u$ elde edilir. Burada R_z bölgesinde integral alınıp Divergence teoremi uygulandığında

$$\int_{R_z}(\nabla_1 u)^2 dA = \int_{R_z}(\nabla_1.(u\nabla_1 u) - u\nabla_1 u)dA = \int_{R_z}\nabla_1.(u\nabla_1 u)dA$$

$$\int_{R_z}\nabla_1.(u\nabla_1 u)dA = \int_{\partial R_z} u\nabla_1 u.\,nds = -\int_{s_1} uu_y + \int_{s_2} uu_x + \int_{s_3} uu_y - \int_{s_4} uu_x$$

$$= -\int_{s_4} uu_x \qquad \text{çıkar. Yani}$$

$$\int_{R_z}(\nabla_1 u)^2 dA = -\int_{s_4} uu_x dy \tag{2.7}$$

eşitliği elde edilir. F(z)' nin türevi,

$F(z) = \int_{R_z}(\nabla_1 u)^2 dA = \int_z^L \iint_{\Gamma_ç}(\nabla_1 u)^2 dydç$ eşitliğinden,

$$F'(z) = -\int_{\Gamma_z}(\nabla_1 u)^2 dy$$

(2.8)

olarak bulunur. Herhangi bir k sabiti için,

$$F'(z) + 2kF(z) = -\int_{\Gamma_z}[(\nabla_1 u)^2 + 2kuu_x]dy$$

$$= -\int_{\Gamma_z}[u_x^2 + u_y^2 + 2kuu_x + k^2u^2 - k^2u^2]dy$$

$$= -\int_{\Gamma_z}[(u_x + ku)^2 + u_y^2 - k^2u^2]dy$$

$$\leq -\int_{\Gamma_z}(u_y^2 - k^2u^2)dy \qquad (2.9)$$

elde edilir. Problemin çözümü olan u, keyfi sabit ile belirlenmektedir. Sabit

$$\int_{\Gamma_0} udy = 0 \qquad (2.10)$$

ile çözülebilecek biçimde tanımlansın. (2.6) ve (2.10)'dan

$$\int_{\Gamma_z} udy = 0 \qquad (2.11)$$

elde edilir. π^2h^{-2} Poincare sabiti olmak üzere (2.11) ile birlikte Poincare eşitsizliği kullanıldığında

$$\int_{\Gamma_z} u_y^2dy \geq \pi^2h^{-2}\int_{\Gamma_z} u^2\, dy \qquad (2.12)$$

elde edilir. Bu ifade (2.9) ile birlikte kullanıldığında

$$F'(z) + 2kF(z) + \int_{\Gamma_z} k^2u^2\, dy \geq \pi^2h^{-2}\int_{\Gamma_z} u^2\, dy$$

$$F'(z) + 2kF(z) \leq -(\pi^2h^{-2} - k^2)\int_{\Gamma_z} u^2\, dy \qquad (2.13)$$

bulunur ve dolayısıyla

$$F'(z) + (2\pi/h)F(z) \leq 0 \qquad (2.14)$$

elde edilir ($k = \pi h^{-1}$). Eşitsizlik $e^{2\pi z/h}$ ile çarpılıp [0, z] aralığında integre edildiğinde

$$e^{2\pi z/h}F'(z) + e^{2\pi z/h}(2\pi/h)F(z) \leq 0$$

$$\int_0^z \frac{d}{dz}[F(z)e^{2\pi z/h}] \leq 0$$

$$F(z) \leq F(0)\, e^{-2\pi z/h}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve böylece teorem kanıtlanır.

Bu ifade çözümün üstel hız ile sıfıra gittiğini gösterir. Datalara göre F(0) için bir üst sınır belirlenebilir. Aşağıdaki problemde bu elde edilecektir.

Teorem 2.2.

v, R'nin kapanışı üzerinde tanımlı keyfi, sürekli, diferansiyellenebilir bir vektör fonksiyonu olsun ve

$$\nabla_1 v = 0\,, \qquad R \text{ üzerinde}, \qquad (2.15_1)$$

$$v_1 = f\,, \qquad \Gamma_0 \text{ üzerinde},$$

$v_1 = 0$, Γ_L üzerinde

$v_2 = 0$, $y = 0, y = h$ noktalarında (2.15$_2$)

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\int_R v^2 dA \geq \int_R (\nabla_1 u)^2 dA \equiv F(0); \tag{2.16}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $v = \nabla u$ ise (2.16)'nın eşitlik durumu geçerlidir.

İspat:

Eşitsizliği ispatlayabilmek için

$$\int_R v.\nabla_1 u dA = \int_R (\nabla_1 u)^2 dA \tag{2.17}$$

olduğu gösterilmelidir. Divergence teoremi, (2.4), (2.15) kullanıldığında

$$\int_R v.\nabla_1 u dA = \int_R \nabla_1.(uv) dA = \int_{\partial R} uvnds$$

$$= -\int_{s_1} u(v_1, v_2)(0,-1)dy + \int_{s_2} u(v_1, v_2)(1,0)dy +$$

$$\int_{s_3} u(v_1, v_2)(0,1)dy + \int_{s_4} u(v_1, v_2)(-1,0)dy$$

$$= -\int_{s_1} uv_2 dy + \int_{s_2} uv_1 dy + \int_{s_3} uv_2\, dy - \int_{s_4} uv_1 dy$$

$$= -\int_{s_4} ufdy \tag{1}$$

olur. Diğer yandan,

$$\int_R (\nabla_1 u)^2 dA = \int_R \nabla_1.(u\nabla_1 u) dA = \int_{\partial R} (u\nabla_1 u).nds$$

$$= -\int_{s_1} uu_y + \int_{s_2} uu_x + \int_{s_3} uu_y - \int_{s_4} uu_x\, dy$$

$$= -\int_{s_4} ufdy \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2)'den

$$\int_R v.\nabla_1 u dA = \int_R (\nabla_1 u)^2 dA$$

eşitliğine ulaşılır. Hölder eşitsizliği kullanıldığında

$$\int_R v.\nabla_1 u dA \geq \int_R (\nabla_1 u)^2 dA$$

$$\int_R v.\nabla_1 u dA \leq \left(\int_R v^2 dA\right)^{1/2} \left(\int_R (\nabla_1 u)^2 dA\right)^{1/2}$$

$$\left(\int_R v^2 dA\right)^{1/2} \left(\int_R (\nabla_1 u)^2 dA\right)^{1/2} \geq \int_R (\nabla_1 u)^2 dA$$

$$\int_R v^2 dA \geq \int_R (\nabla_1 u)^2 dA \equiv F(0)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buda istenilen eşitsizliktir.

Eğer $v = \nabla u$ ise

$$\int_R v\nabla_1 u dA \geq \int_R (\nabla_1 u)^2 dA$$

$$\int_R vv dA \geq \int_R (\nabla_1 u)^2 dA$$

$$\int_R v^2 dA = \int_R (\nabla_1 u)^2 dA$$

eşitliği bulunur.

İyi bir seçimle v,

$$v_1 = f(y)\zeta(x), \qquad v_2 = -\left\{\int_0^y f(y)dy\right\}\zeta'(x) \tag{2.18}$$

olarak belirlenebilir. Burada ζ ,

$$\zeta(0) = 1 , \qquad \zeta(L) = 0$$

koşullarını sağlayan, sürekli, diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Not: (2.4_2) – (2.4_4) ve özellikle (2.4_4) koşulu, normal türevi sınır üzerinde belirlenmiş bir harmonik fonksiyonu bulma gibi daha genel bir problemde sınır koşullarında yapılan bir değişiklik olarak dikkate alınabilir. Teorem 2.1.'den yapılan değişikliklere göre F(0) için bir üst sınır bulma işlemi, sürekli bağımlılık kestirimi olarak dikkate alınabilir. x = 0 noktasındaki küçük değişimler, verilen her x için F(x) değerinde de küçük değişimler oluşturur.

2.4. Phragmen – Lindelöf Kestirimleri

Phragmen-Lindelöf kestirimleri ele alınırken öncelik olarak (2.14)'ün çıkarılışına benzer bir yöntem uygulanır. (2.12) eşitsizliği aşağıdaki gibi düzenlendiğinde

$$\pi^2 h^{-2} \int_{\Gamma_z} u^2\, dy \leq \int_{\Gamma_z} u_y^2 dy$$

$$\left(\int_{\Gamma_z} u^2 dy\right)^{1/2} \leq \pi^{-1} h \left(\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy\right)^{1/2} \tag{2.19}$$

ve (2.7) ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanıp yerine yazıldığında

$$F(z) \leq \left(\int_{\Gamma_z} u^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy\right)^{1/2}$$

$$\leq \pi^{-1} h \left(\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy\right)^{1/2} \tag{2.20}$$

elde edilir. Cauchy eşitsizliği ve (2.8) kullanıldığında

$$|F(z)| \leq \frac{h}{\pi}\left(\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{h}{\pi}\left(\frac{\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy}{2} + \frac{\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy}{2}\right)$$

$$\leq \frac{h}{2\pi}\int_{\Gamma_z}(u_x^2 + u_y^2)dy = \frac{h}{2\pi}\int_{\Gamma_z}(\nabla_1 u)^2 dy = \frac{h}{2\pi}\left(-F'(z)\right)$$

$$-F'(z) \geq \frac{2\pi}{h}\,|F(z)|$$

ifadesine ulaşılır ve tekrar (2.14) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi hacim integral metodunu yarı sonsuz dikdörtgensel bölge içinde $0 < x < \infty$, $0 < y < h$, nasıl kullanılacağı gösterilecektir. $x \to \infty$ değeri hariç tüm koşullar geçerlidir. Çözüm x sonsuza giderken üstel olarak daha hızlı artmaz ise çözüm üstel hız ile sıfıra gider. Bu sonuca Phragmen – Lindelöf sonucu denir.

Bu bölümde çözümün ölçümü

$$\mathcal{F}(z) = -\int_{\Gamma_z} u u_x dy \tag{2.21$_1$}$$

ile tanımlanmaktadır. Genel olarak

$$\mathcal{F}(z) = \int_{R_z}(\nabla_1 u)^2 dA \tag{2.21$_2$}$$

olduğu söylenemez. Burada u'nun sonsuzdaki davranışı bilinmiyor, bundan dolayı u' ya negatif değildir denilemez. Eğer $z \to \infty$ iken $u \to 0$ ise $\mathcal{F}(z)$ ve F(z) ayırtedilemez.

$\delta > 0$ için,

$$\mathcal{F}(z+\delta) - \mathcal{F}(z) = -\int_{\Gamma_{z+\delta}} u u_x dy + \int_{\Gamma_z} u u_x dy$$

$$= \int_{z+\delta}^{z}\int_{\Gamma_\varsigma}(\nabla_1 u)^2 dy d\varsigma - \int_{z}^{z+\delta}\int_{\Gamma_\varsigma}(\nabla_1 u)^2 dy d\varsigma$$

$$= -\int_{z}^{z+\delta}\int_{\Gamma_\varsigma}(\nabla_1 u)^2 dy d\varsigma \tag{2.22}$$

olarak bulunur. Bu eşitlik $(1/\delta)$ ile çarpılıp $\delta \to 0$ için limit alındığında

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathcal{F}(z+\delta) - \mathcal{F}(z)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{-\int_z^{z+\varsigma}\int_{\Gamma_\varsigma}(\nabla_1 u)^2 dy d\varsigma}{\delta}$$

$$\mathcal{F}'(z) = -\int_{\Gamma_z}(\nabla_1 u)^2 dy \tag{2.23}$$

elde edilir. (2.20) ifadesi gerekli değişikliklerin yapılması koşuluyla

$$|\mathcal{F}(z)| \leq \pi^{-1} h\left(\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy\right)^{1/2} \tag{2.24}$$

eşitsizliğini verir. (2.23) ile birlikte Aritmetik – geometrik eşitsizliği kullanıldığında (2.14)'e benzer şekilde

$$|\mathcal{F}(z)| \leq \frac{h}{\pi}\left(\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{h}{\pi}\left(\frac{\int_{\Gamma_z} u_x^2 dy}{2} + \frac{\int_{\Gamma_z} u_y^2 dy}{2}\right)$$

$$\leq \frac{h}{2\pi}\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 dy$$

$$-\mathcal{F}'(z) \geq 2\pi h^{-1}|\mathcal{F}(z)| \qquad (2.25)$$

ifadesi elde edilir. $\mathcal{F}(z)$' nin pozitif yada negatif olması durumu ele alındığında

$\mathcal{F}(z) > 0$ ise,

$$-\mathcal{F}'(z) \geq 2\pi h^{-1}\mathcal{F}(z)$$

$$\mathcal{F}'(z) \leq -2\pi h^{-1}\mathcal{F}(z) \qquad (2.26_1)$$

$\mathcal{F}(z) < 0$ ise,

$$-\mathcal{F}'(z) \geq 2\pi h^{-1}(-\mathcal{F}(z)) \qquad (2.26_2)$$

eşitsizlikleri bulunur.

$-\mathcal{F}(z_1) > 0$ olacak şekilde $z_1 : 0 \leq z_1 < \infty$ var olsun. Tüm $z > z_1$' ler için (2.26_2)' den $-\mathcal{F}'(z_1) > 0$ elde edilir. Bu durumda $-\mathcal{F}(z_1)$ artan olur. O halde $z > z_1$' ler için $-\mathcal{F}(z) > 0$ çıkar. Yani (2.26_2) eşitsizliği geçerlidir. $z > z_1$ için (2.26_2) ifadesi $e^{-2\pi z/h}$ ile çarpılıp $[z_1, z]$ aralığında integral alındığında

$$-e^{-2\pi z/h}\mathcal{F}'(z) - e^{-2\pi z/h} 2\pi h^{-1}\left(-\mathcal{F}(z)\right) \geq 0$$

$$\int_{z_1}^{z} \frac{d}{dz}\left[-\mathcal{F}(z)e^{-2\pi z/h}\right] \geq 0$$

$$-\mathcal{F}(z)e^{-2\pi z/h} + \mathcal{F}(z_1)e^{-2\pi z/h} \geq 0$$

$$-\mathcal{F}(z)e^{\{-2\pi h^{-1}(z-z_1)\}} \geq -\mathcal{F}(z_1) \qquad (2.27)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ifade $\mathcal{F}(z)$'nin asimptotik olarak en az üstel hızla arttığını göstermektedir.

$$\lim_{z\to\infty} -\mathcal{F}(z)e^{-2\pi z/h} = 0 \qquad (2.28)$$

koşulu geçerli olsun. Bu ifade $-\mathcal{F}(z)$'nin en fazla üstel hızla sıfıra gittiğini göstermektedir. (2.28) ve $z_1 : -\mathcal{F}(z_1) > 0$ olmasından dolayı bir çelişki elde edilir. O halde $\mathcal{F}(z) \geq 0$' dır. O zaman (2.26_1) geçerlidir. (2.26_1) ifadesi $e^{2\pi z/h}$ ile çarpılıp [0, z] aralığında integral alındığında,

$$e^{2\pi z/h}\mathcal{F}'(z) + e^{2\pi z/h} 2\pi h^{-1}\mathcal{F}(z) \leq 0$$

$$\int_0^z \frac{d}{dz}\left[\mathcal{F}(z)e^{2\pi z/h}\right] \leq 0$$

$$\mathcal{F}(z) \leq \mathcal{F}(0)\, e^{-2\pi z/h} \qquad (2.29)$$

sonucuna ulaşılır. $z \to \infty$ iken $\mathcal{F}(z)$ en fazla üstel hızla sıfıra gider. O halde

$\int_{\Gamma_z} uu_x dy \to 0$

bulunur ve (2.21_2) bu kuralı sağlar. (2.28) asimptotik koşulu aşağıdaki gibi farklı bir şekilde ifade edilebilir. L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$\lim_{z\to\infty} -\mathcal{F}'(z)e^{-2\pi h^{-1}z} = 0 \qquad (2.30)$$

yazılabilir. Burada (2.23) ifadesi kullanılırsa

$$\lim_{z\to\infty} \int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 dy\, e^{-2\pi h^{-1}z} = 0 \qquad (2.31)$$

elde edilir. Eğer bu asimptotik koşul geçerli ise (2.29) ifadesi sağlanır.

Teorem 2.3. (Phragmen – Lindelöf)

u, (2.4_1) – (2.4_2), (2.4_2) – (2.4_5)'in $0 < x < \infty$, $0 < y < h$ yarı sonsuz dikdörtgen içinde klasik çözümü olsun, normalleştirme koşulu (2.10) ve

$$\lim_{z\to\infty}\left(\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 dy\right)e^{-2\pi h^{-1}z} = 0 \qquad (2.32_1)$$

asimptotik koşulu geçerli olsun. (2.21_1) veya (2.21_2) ile belirlenen $\mathcal{F}(z)$

$$\mathcal{F}(z) \le \mathcal{F}(0)\, e^{-2\pi h^{-1}z} \qquad (2.32_2)$$

eşitsizliğini sağlar.

2.5. Eğrisel Sınırlı Bölgeler

Sonlu veya yarı sonsuz dikdörtgensel bölgede elde edilen genel yaklaşımın sonuncusu farklı geometrilere de uygulanabilir. (r, θ) kutupsal koordinatlar ve r_1, r_0, α pozitif sabitler olmak üzere, bölge

$$r_0 \le r \le r_1, \qquad 0 \le \theta \le \alpha$$

olarak belirlensin. Γ_r r radyal koordinata sahip bölgenin kesitini ifade etsin ve R_Γ ile r' den daha küçük olmayan radyal koordinatlı bölgenin bir kısmı olsun.

$$\begin{aligned} &u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0 \\ &u = 0 \qquad r = r_1,\ \theta = 0,\ \theta = \alpha \\ &u \text{ belirli} \qquad r = r_0 \end{aligned} \qquad (2.33)$$

u(r, θ), (2.33)'ün klasik bir çözümü olsun ve

$$\mathcal{F}(r) = -\int_{\Gamma_r} uu_r r d\theta \qquad (2.34)$$

olarak tanımlansın.

$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$

eşitliğini elde etmek için kutupsal koordinatlarda ki

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

ifadeleri kullanılmaktadır.

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$
$$= \frac{x}{r}u_r - \frac{y}{r^2}u_\theta$$

$$u_{xx} = \frac{x}{r}(u_{rr}r_x + u_{r\theta}\theta_x) - \frac{y}{r^2}(u_{\theta r}r_x + u_{\theta\theta}\theta_x) + u_r\left(\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}\right) + u_\theta\frac{2xy}{r^4}$$

$$= \frac{x^2}{r^2}u_{rr} - u_{r\theta}\frac{xy}{r^3} - u_{\theta r}\frac{xy}{r^3} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + u_r\frac{r^2-x^2}{r^3} + 2u_\theta\frac{xy}{r^4}$$

$$u_{yy} = \frac{x}{r^2}u_\theta - \frac{u_r}{r} + \frac{y}{r}\left(u_{rr}r_y + u_{r\theta}\theta_y\right) + \frac{x}{r^2}\left(u_{\theta r}r_y + u_{\theta\theta}\theta_y\right)$$

$$= \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + u_{r\theta}\frac{xy}{r^3} + u_{\theta r}\frac{xy}{r^3} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} + u_r\frac{r^2-y^2}{r^3} - 2u_\theta\frac{xy}{r^4}$$ olarak bulunur. Buradan

$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$

(2.33) elde edilir. (2.33) ile birlikte Divergence teoremi kullanıldığında,

$\mathcal{F}(z) = \int (\nabla_1 u)^2 dA = \int \left(u_x^2 + u_y^2\right) r\,dr\,d\theta$

$$u_x = u_r r_x + u_\theta\theta_x = \frac{x}{r}u_r - \frac{y}{r^2}u_\theta$$

$$u_y = u_r r_y + u_\theta\theta_y = \frac{y}{r}u_r - \frac{x}{r^2}u_\theta$$

$$u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2 \qquad (2.35)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\mathcal{F} = \iint_{R_r}\left(u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2\right) r\,dr\,d\theta \qquad (2.36)$$

çıkar. Buradan türev

$$\mathcal{F} = \int_r^{r_1}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2\right) r\,dr\,d\varepsilon$$

$$\mathcal{F}'(r) = -\int_{r_\Gamma}\left(u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2\right) r\,d\theta \qquad (2.37)$$

olarak bulunur. (2.34) de, Schwarz eşitsizliği ve Poincare eşitsizliği kullanılıp daha sonra (2.37) ile birlikte aritmetik – geometrik eşitsizliği uygulandığında

$$|\mathcal{F}(r)| \le \left(\int_{r_\Gamma} u_r^2\,d\theta\right)^{1/2}\left(\int_{r_\Gamma} u_r^2\,r\,d\theta\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) r\left(\int_{r_\Gamma} r^{-2}u_\theta^2\,r\,d\theta\right)^{1/2}\left(\int_{r_\Gamma} u_r^2\,r\,d\theta\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) r\int_{r_\Gamma}\left(u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2\right) r\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) r\mathcal{F}'(r)$$

$$\mathcal{F}'(r) + 2(\pi/\alpha)r^{-1}|\mathcal{F}(r)| \leq 0 \tag{2.38}$$

elde edilir. $\mathcal{F}(r) \geq 0$ olduğundan eşitsizlik $r^{2\pi/\alpha}$ ile çarpılıp $[r_0, r]$ aralığında integre edilirse

$$\mathcal{F}'(r)r^{2\pi/\alpha} + \mathcal{F}(r)r^{\frac{2\pi}{\alpha}-1}\frac{2\pi}{\alpha} \leq 0$$

$$\int_{r_0}^{r}\left(\mathcal{F}(r)r^{2\pi/\alpha}\right)' = \mathcal{F}(r)r^{2\pi/\alpha} - \mathcal{F}(r_0){r_0}^{2\pi/\alpha} \leq 0$$

$$\mathcal{F}(r)r^{2\pi/\alpha} \leq \mathcal{F}(r_0){r_0}^{2\pi/\alpha}$$

$$\mathcal{F}(r) \leq \mathcal{F}(r_0)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\pi/\alpha} \tag{2.39}$$

elde edilir. Şimdi ($r_1 \to \infty$) olacak şekilde bölgenin sonsuz olduğu düşünüldüğünde, ilk koşul geçerli olmasın fakat diğer tüm koşullar önceki gibi olsun. Şimdi Phragmen – Lindelöf tipinde sonuç kanıtlanacaktır. $\mathcal{F}(r)$ (2.34)' de belirlendiği gibi fakat (2.36) önceki sonuçlardan söylenemez (bölge sonsuz olduğu için). (2.37) ve (2.38) yine geçerlidir. $\mathcal{F}(r_2) < 0$ olacak şekilde $r_2 > 0: 0 < r_2 < \infty$ var olsun, $r_1 < r_2 < r$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}'(r) + 2(\pi/\alpha)r^{-1}|\mathcal{F}(r)| \leq 0$$

$$\mathcal{F}'(r_2) - 2(\pi/\alpha)r^{-1}\mathcal{F}(r_2) \leq 0 \Longrightarrow \mathcal{F}'(r_2) < 0$$

$r_2 < r$ için $\mathcal{F}'(r) < 0 \Longrightarrow \mathcal{F}(r)$ azalandır.

$$(-\mathcal{F}(r))' \geq 2(\pi/\alpha)r^{-1}(-\mathcal{F}(r)) \tag{2.40}$$

ifadesine ulaşılır. Her taraf $r^{-2\pi/\alpha}$ ile çarpılıp $[r_2, r]$ integre edilirse

$$(-\mathcal{F}(r))'r^{-2\pi/\alpha} - (-\mathcal{F}(r))r^{-2\pi/\alpha}\frac{2\pi}{\alpha r} \geq 0$$

$$\int_{r_2}^{r}\left(-\mathcal{F}(r)r^{-2\pi/\alpha}\right)' \geq 0$$

$$-\mathcal{F}(r)r^{-2\pi/\alpha} \geq -\mathcal{F}(r_2){r_2}^{-2\pi/\alpha}$$

$$-\mathcal{F}(r)\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-2\pi/\alpha} \geq -\mathcal{F}(r_2)$$

$$\frac{-\mathcal{F}(r)}{(r/r_2)^{2\pi/\alpha}} \geq -\mathcal{F}(r_2) \tag{2.41}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $-\mathcal{F}(r)$'nin en az polinomik hızla sonsuza gittiğini ifade eder.

$$\lim_{r\to\infty} -\frac{\mathcal{F}(r)}{r^{2\pi/\alpha}} = 0 \tag{2.42}$$

eşitliği geçerli olsun. Yani $-\mathcal{F}(\mathrm{r})$ polinamik hızla sıfıra gitmektedir. O halde $-\mathcal{F}(\mathrm{r}) > 0$ olamaz, bu ise bir çelişkidir, $\mathcal{F}(\mathrm{r}) \geq 0$ olmalıdır. (2.42)'ye L- Hospital kuralı uygulandığında

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty} -\frac{\mathcal{F}'(\mathrm{r})}{\mathrm{r}^{\frac{2\pi}{\alpha}-1}} = 0 \tag{2.43}$$

elde edilir. (2.37) yerine yazılırsa

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty}\mathrm{r}^{-2(\pi/\alpha)+2}\int_{\mathrm{r}_\Gamma}(\mathrm{u}_\mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^{-2}\mathrm{u}_\theta^2)\mathrm{r}\,\mathrm{d}\theta = 0 \tag{2.44}$$

elde edilir. Eğer sonuncu asimptotik durum geçerli ise $\mathcal{F}(\mathrm{r}) \geq 0$ olur. Bu durmda (2.39) elde edilir. Bu durumda (2.36) durumu geçerli olur. Sonlu ve yarı sonsuz bölgeler için sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenmektedir.

Teorem 2.4.

r sonlu olmak üzere, çözümünün pozitif ölçümü (2.36) ile verilen (2.33) problemi,

$$\mathcal{F}(\mathrm{r}) \leq \mathcal{F}(\mathrm{r}_0)\left(\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}}\right)^{2\pi/\alpha} \tag{2.45$_1$}$$

azalım kuralını sağlar. Aynı kural $\mathrm{r}_1 \to \infty$ olduğunda (r → ∞ iken u → 0)

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty}\mathrm{r}^{-2(\pi/\alpha)+2}\int_{\mathrm{r}_\Gamma}(\mathrm{u}_\mathrm{r}^2 + \mathrm{r}^{-2}\mathrm{u}_\theta^2)\mathrm{r}\,\mathrm{d}\theta = 0 \tag{2.45$_2$}$$

asimptotik koşulu geçerli olduğunda da sağlanır.

2.6. Başlangıç Sınır – Değer Problemi

Bu kesimde uzay değişkeniyle birlikte zaman değişkenini de içeren bir problem ele alınacaktır. Özellikle dik bir silindir içindeki ısı akışı için bir başlangıç sınır-değer problemi dikkate alınmaktadır. R basit, parçalı, kapalı eğri parçaları ile sınırlı kesitlere sahip bir silindirin içi olsun. x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinatlar ve R'nin kesitlerinin başlangıç ve bitimi $\mathrm{x}_3 = 0$ ve $\mathrm{x}_3 = \mathrm{L}$ düzlemlerinde olsun. $\mathrm{z} \geq 0$ olmak üzere Γ_z ile R'nin $\mathrm{x}_3 = \mathrm{z}$ düzlemindeki açık kesiti tanımlanmış olsun. $\partial\Gamma_\mathrm{z}$ ise Γ_z'nin sınırı ve R' nin yanal sınırı $\mathcal{L}$ olsun.

u(x, t) = u(x_1 , x_2 , x_3, t), aşağıdaki problemin çözümü olsun,

$$\nabla^2\mathrm{u} - \mathrm{u}_\mathrm{t} = 0\ , \qquad \mathrm{R}\times(0,\infty) \tag{2.46$_1$}$$

sınır koşulları,

u = f, Γ_0 üzerinde,

$$u = 0, \ \Gamma_L \text{ üzerinde} \tag{2.46$_2$}$$

$$u = 0, \ \mathcal{L} \text{ üzerinde} \tag{2.46$_3$}$$

ve başlangıç koşulu,

$$u(x, 0) = 0, \ x \in R \tag{2.46$_4$}$$

şeklindedir. Şimdi yüzey integral metodu bu problem için uygulanacaktır.

Teorem 2.5.

R_z , $x_3 > z$ olmak üzere R dik silindirinin bir bölümü olsun, (2.46) başlangıç sınır - değer probleminin çözümünün hacim integral ölçümü

$$E(z, t) = \int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 dV d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dV, \qquad z \geq 0, \ t \geq 0 \tag{2.47}$$

olarak verilsin. O halde

$$E(z, t) \leq E(0, t)\, e^{\left(-2\left(\lambda_1^{1/2}\right)z\right)} \tag{2.48}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada λ_1

$$\nabla_1^2 \varphi + \lambda\varphi = 0 \qquad \Gamma_z \text{ üzerinde,}$$

$$\varphi = 0 \qquad \partial\Gamma_z \text{ üzerinde,} \tag{2.49}$$

öz değer probleminin en küçük öz değeridir.

İspat:

Kanıt için ilk olarak genel eşitsizlik elde edilip, daha sonra başlangıç koşulu (2.46_4)'ün var olduğu kabul edilecektir.

Divergence teoremi, (2.46_1) diferansiyel eşitliği ve (2.46_2) – (2.46_3) sınır koşulları kullanıldığında ve

$\nabla^2 u - u_t = 0, \ \nabla u^2 = \nabla . \nabla u$

$(\nabla u)^2 = \nabla u . \nabla u$

$\nabla . (u \nabla u) = \nabla u . \nabla u + u\Delta u = (\nabla u)^2 + u\Delta u$ eşitliğinde integral alındığında

$$\int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 \, dvd\,\Gamma = \int_0^t \int_{R_z} \nabla . (uu) dvd\,\Gamma - \int_0^t \int_{R_z} u \nabla u dv\, d\Gamma$$

$$= \int_0^t \int_{R_z} \nabla . (u\nabla u) dvd\,\Gamma - \int_0^t \int_{R_z} uu_t dv\, d\Gamma$$

$$= \int_0^t \left[\int_{\Gamma_z} (u\nabla u). ndv\right] d\Gamma - \int_0^t \int_{R_z} uu_t dv\, d\Gamma$$

$\int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 \, dvd\,\Gamma = \int_0^t \left[\int_{S_1} (u\nabla u).\, ndv + \int_{S_2} (u\nabla u).\, ndv + \int_{S_3} (u\nabla u).\, ndv \right] d\Gamma -$

$\int_0^t \int_{R_z} uu_t dvd\,\Gamma$

$\int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 \, dvd\,\Gamma = -\int_0^t \int_{\Gamma_z} uu_{x_3} \, dvd\Gamma - \frac{1}{2} \int_{R_z} (u^2 \, l_0^t) dv = -\int_0^t \int_{R_z} uu_{x_3} \, dvd\Gamma -$

$\frac{1}{2} \int_{R_z} u^2 \, dv + \frac{1}{2} \int u^2(x, 0) dv$ eşitliği bulunur. Buradan

$$E(z, t) = -\int_0^t d\Gamma \int_{R_z} uu_{x_3} \, dA + \frac{1}{2} \int_{R_z} u^2(x, 0) dv \tag{2.50}$$

elde edilir. (2.47) ifadesinin z'ye göre türevi

$$E(z, t) = \int_0^t d\Gamma \int_z^L \int_{\Gamma_\varepsilon} (\nabla u)^2 \, dsd\varepsilon + \frac{1}{2} \int_z^L \int_{\Gamma_\varepsilon} dsd\varepsilon$$

$$E_z(z, t) = -\int_0^t d\Gamma \int_{\Gamma_z} (\nabla u)^2 dA - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_z} u^2 \, dA \tag{2.51}$$

olarak bulunur. Herhangi bir k sabiti için (2.50) ve (2.51)'den

$$E_z + 2kE = -\int_0^t d\,\Gamma \int_{\Gamma_z} \left((\nabla u)^2 + 2k\, uu_{x_3} \right) dA - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_z} u^2 dA + k \int_{R_z} u^2 \, (x, 0) dv \tag{2.52}$$

$$\int_{\Gamma_z} \left((\nabla u)^2 + 2kuu_{x_3} \right) dA = \int_{\Gamma_z} (u_{x_3} + ku)^2 dA + \int_{\Gamma_z} ((\nabla_1 u)^2 - k^2 u^2) \, dA \tag{2.53}$$

elde edilir.

$$\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 \, dA \geq \lambda_1 \int_{\Gamma_z} u^2 \, dA \tag{2.54}$$

şeklindeki Poincare eşitsizliği $k = \sqrt{\lambda_1}$ seçilerek kullanıldığında (2.53)'ün sol tarafı pozitif olur. (2.52)'den

$$E_z + 2kE \leq k \int_{R_z} u^2(x, 0) dv \tag{2.55}$$

eşitsizliği bulunur.

Eşitsizlik e^{2kz} ile çarpılıp [0, z] aralığında integre edilirse

$$E_z e^{2kz} + 2ke^{2kz}.\, E \leq e^{2kz}.\, k \int_{R_z} u^2(x, 0) dv$$

$$\int_0^z \left(E.\, e^{2ks} \right)' ds \leq \int_0^z e^{2ks}.\, kds \int_{R_s} u^2(x, 0) dv$$

$$E(z, t) \leq E(0, f).e^{-2kz} + k \int_0^z ds\, e^{2k(s-z)} \int_{R_s} u^2(x, 0) dv \tag{2.56}$$

ifadesine ulaşılır. Bulunan bu eşitsizlikte sağ taraftaki ikinci terime kısmi integrasyon uygulandığında

$u = \int_{R_s} u^2(x, 0) dv$, $dv = e^{2k(s-z)}$

$du = -\int_{\Gamma_s} u^2(x,0) ds$, $v = \frac{e^{2k(s-z)}}{2k}$

$$k\int_0^z dse^{2k(s-z)}\int_{R_s} u^2(x,0)dv = k\int_{R_s} u^2(x,0)dv.\frac{e^{2k(s-z)}}{2k}|_0^z$$

$$+k\int_0^z\int_{\Gamma_s} u^2(x,0)ds.\frac{e^{2k(s-z)}}{2k}dv$$

$$k\int_0^z dse^{2k(s-z)}\int_{R_s} u^2(x,0)dv = \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2\,(x,0)dv - \frac{1}{2}\int_{R}\ u^2(x,0).e^{-2kz}.dv +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^z e^{2k(s-z)}.ds\int_{R_s} u^2(x,0)dv$$

$$k\int_0^z dse^{2k(s-z)}\int_{R_s} u^2(x,0)dv \le \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0)dv + \frac{1}{2}\int_0^z ds\int_{\Gamma_s} u^2(x,0)dA =$$

$$k\int_0^z dse^{2k(s-z)}\int_{R_s} u^2(x,0)dv = \frac{1}{2}\int_{R}\ u^2(x,0)dv \qquad (2.57)$$

elde edilir. (2.57) ve (2.56) kullanılırsa

$$E(z,t) \le E(0,t)e^{-2kz} + \frac{1}{2}\int_{R}\ u^2(x,0)dv$$

olur. $k=\sqrt{\lambda_1}$ olarak alınıp, (2.46_4) başlangıç koşulunda yerine yazıldığında

$$E(z,t) \le E(0,t)e^{-2\sqrt{\lambda_1}.z}$$

olur ve böylece (2.48) elde edilir.

2.7. Problemler

Problem 2.7.1. Basit kapalı C eğrisi ile sınırlı bir R bölgesini ele alalım. C'nin bir kısmı aşağıdaki verildiği gibi Γ_0 doğrusu ile oluşmuş olsun. Ayrıca u(x,y) fonksiyonu aşağıdaki problemin klasik bir çözümü olsun.

$\nabla_1^2 u = 0$ R içerisinde

sınır koşulları,

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, C/Γ_0 üzerinde

$u_x = f(y)$, Γ_0 üzerinde

olmak üzere

$\int_{\Gamma_o} f(y)dy = 0$ koşulu geçerlidir.

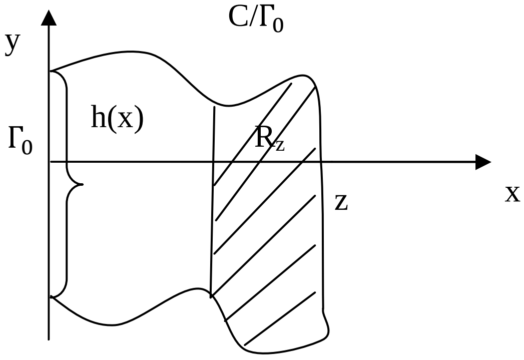
$R_z = R\cap x > z$ ve $F(z)= \int_{R_z}(\nabla u)^2 dA$ olarak tanımlansın.

$$F(z) \le F(0).e^{-2\pi\int_0^x h^{-1}(x)dx}$$

olduğunu kanıtlayın.

h(x), x değişkenine bağlı (y yönünde) bölgenin genişliğidir.

Çözüm:



Şekil 2.3. Koşulları Problem 2.7.1. de verilen bölge

R_z bölgesinde Divergence teoremi uygulandığında

$\Delta_1 u = 0$

$\nabla_1^2 u = \nabla_1 . \nabla_1 u$

$\nabla_1 = (\frac{\partial}{\partial_x}, \frac{\partial}{\partial_y})$

$(\nabla_1 u)^2 = \nabla_1 u . \nabla_1 u \Rightarrow \nabla_1 .(u\nabla_1 u) = \nabla_1 u . \nabla_1 u + u\Delta_1 u = (\nabla_1 u)^2 + u\Delta_1 u$

$\int_{R_z} (\nabla_1 u)^2 dA = \int_{R_z} [\nabla_1 .(u\nabla_1 u) - u\Delta_1 u] dA = \int_{R_z} \nabla_1 .(u\nabla_1 u) dA$

$= \int_{R_z} \nabla_1 .(u\nabla_1 u) dA = \int_{\partial R_z} (u\nabla_1 u) n \, ds = \int_{C/\Gamma_o} (u\nabla u) \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\Gamma_z} -uu_x \, dy$

$F(z) = -\int_{\Gamma_z} uu_x \, dy$ olur. F'nin türevi

$F(z) = \int_{R_z} (\nabla_1 u)^2 dA = \int_z^z \int_{\Gamma_\varepsilon} (\nabla_1 u)^2 ds d\varepsilon$

$F'(z) = -\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 d\varepsilon$

$F'(z) = -\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 dy$ olarak bulunur. Herhangi bir k sabiti için

$$F'(z) + 2kF(z) = -\int_{\Gamma_z} [(\nabla_1 u)^2 + 2kuu_x] dy$$

$$= \int_{\Gamma_z} \left[u_x^2 + u_y^2 + 2kuu_x + k^2u^2 - k^2u^2\right] dy$$

$$= -\int_{\Gamma_z} (u_x + ku)^2 dy - \int_{\Gamma_z} \left(u_y^2 - k^2u^2\right) dy$$

$$\leq -\int_{\Gamma_z} \left(u_y^2 - k^2u^2\right) dy$$

$-F'(z) - 2kF(z) + \int_{\Gamma_z} k^2u^2dy \geq \int_{\Gamma_z} u_y^2dy$

$-F'(z) - 2kF(z) + \int_{\Gamma_z} k^2u^2dy \geq \pi^2h^{-2}(z) \int_{\Gamma_z} u^2dy$

$F'(z) + 2kF(z) \leq -(\pi^2h^{-2}(z) - k^2)\int_{\Gamma_z} u^2dy$, ($k = \pi^2h^{-2}(z)$)

$F'(z) + \pi^2h^{-2}(z)\ F(z) \leq 0$

eşitsizliğine ulaşılır. Eşitsizlik $e^{2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}$ ile çarpılıp [0, z] aralığında integre edilirse

$e^{2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}.F'(z)+e^{2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}.\,2\pi h^{-1}(z)F(z) \leq 0$

$\int_0^z(e^{2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}.\,F(z))' \leq 0$

$F(z) \leq F(0).\,e^{-2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}$ ifadesi elde edilir ve kanıt biter.

Problem 2.7.2. Problem 2.7.1. de sınır koşulları

u=0 $\quad C/\Gamma_0$ üzerinde

u=f(y) $\quad \Gamma_0$ üzerinde

olmak üzere o problemdekine benzer bir sonuç elde ediniz. Burada f(y) üzerinde integral kısıtlaması yoktur.

Çözüm: Problem 2.7.1.'e benzer şekilde Divergence teoremi uygulandığında

$F(z) = -\int_{\Gamma_z} uu_x dy$

olur. F'nin türevi

$F'(z) = -\int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2dy$

olur. Herhangi bir k sabiti için benzer işlemler yapılarak

$F'(z) + 2kF(z) \leq -(\pi^2h^{-2}(z) - k^2) \int_{\Gamma_z} u^2\,dy$

elde edilr. $k = \pi h^{-1}(z)$ alındığında

$F'(z) + 2\pi h^{-1}(z)F(z) \leq 0$

elde edilir. Eşitsizlik $e^{2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}$ ile çarpılıp [0, z] aralığında integre edildiğinde

$\int_0^z \left(e^{2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}.\,F(z)\right)' \leq 0$

$F(z) \leq F(0).\ e^{-2\pi\int_0^z h^{-1}(x)dx}$ olur. Buda problem 2.7.1.'e benzer bir eşitsizliktir yani istenilen eşitsizliktir.

Problem 2.7.3. Problem 2.7.1. ve problem 2.7.2. deki sınır koşullarını üç boyutlu bölge(örneğin dik silindir) için düşününüz ve o problemlerdekine benzer şekilde sonuç elde ediniz. (Bu problemlerde 2.7.1. için v_1 (serbest özdeğer), 2.7.2. için λ_1 (sabit, belirli özdeğer) olarak alınmalıdır.)

Çözüm: Problem 2.7.1. için

$\nabla_u^2 = 0$

ve sınır koşulları

$u_{x_3} = f,$ Γ_0 üzerinde

$u_{x_3} = 0,$ Γ_L üzerinde

$u_{x_3} = f,$ Γ_0 üzerinde

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$ $\mathcal{L}$ üzerinde

olmak üzere

$\int_{\Gamma_0} f\, dA = 0$ koşulu geçerli olan problem düşünülsün.

Divergence teoremi kullanılarak problem 2.7.1.'dekine benzer işlemlerle

$F(z) = -\int u u_{x_3} dA$

olarak bulunur. F'nin türevi

$F'(z) = -\int_{\Gamma_z} (\nabla u)^2 dA$

olur. Herhangi bir k sabiti için

$-F'(z) - 2kF(z) + \int_{\Gamma_z} k^2 u^2 dA \geq \int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 dA$

ifadesi elde edilir. Poincare sabiti V_1 alınarak Poincare eşitsizliği kullanıldığında

$F'(z) + 2kF(z) \leq -(V_1 - k^2) \int_{\Gamma_z} u^2 dA$

olur. Bu ifadede $k = \sqrt{V_1}$ seçildiğinde

$F'(z) + 2\sqrt{V_1} F(z) \leq 0$

eşitsizliği elde edilir. Her taraf $e^{2\sqrt{V_1}.z}$ ile çarpıldığında

$e^{2\sqrt{V_1}.z}. F'(z) + e^{2\sqrt{V_1}.z}. 2\sqrt{V_1}. F(z) \leq 0$

$F(z) \leq F(0) e^{-2\sqrt{V_1}.z}$

olarak bulunur.

Problem 2.7.2. için

$\nabla^2 u = 0$

ve sınır koşulları

$u = f,$ Γ_0 üzerinde

$u = 0,$ Γ_L üzerinde

$u = 0,$ $\mathcal{L}$ üzerinde

şeklinde olan problem düşünülsün. Aynı şekilde Divergence teoremi kullanılarak

$F(z) = -\int uu_{x_3} dA$ eşitsizliğine ulaşılır ve F'nin türevi

$F'(z) = -\int_{\Gamma_z} (\nabla u)^2 dA$ dir. Herhangi bir k sabiti için

$-F'(z) - 2kF(z) + \int_{\Gamma_z} k^2u^2 dA \geq \int_{\Gamma_z} (\nabla_1 u)^2 dA$

elde edilir. Bu ifadede Poincare sabiti λ_1 alınarak Poincare eşitsizliği uygulandığında

$F'(z) + 2kF(z) \leq -(\lambda_1 - k^2) \int_{\Gamma_z} u^2 dA$ olur. Burada $k = \sqrt{\lambda_1}$ seçilirse

$F'(z) + 2\sqrt{\lambda_1} F(z) \leq 0$

eşitsizliğine ulaşılır. Her taraf $e^{2\sqrt{\lambda_1}.z}$ ile çarpılıp [0, z] aralığında integre edilirse

$e^{2\sqrt{\lambda_1}.z}. F'(z) + e^{2\sqrt{\lambda_1}.z}. 2\sqrt{\lambda_1}. F(z) \leq 0$

$\int_0^z \frac{d}{dz}\left[F(z)e^{2\sqrt{\lambda_1}.z}\right] \leq 0$

$F(z) \leq F(0)e^{-2\sqrt{\lambda_1}.z}$ olarak bulunur.

Problem 2.7.4. (2.33) ile tanımlı problem,

$0 < r < r_1,\ 0 < \theta < \alpha$ olmak üzere sınır koşulları,

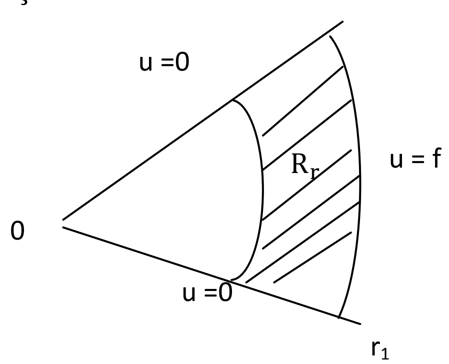
$u = 0,$ $\theta = 0,\ \theta = \alpha$ için,

u belirli, $r = r_1$ üzerinde

($r \to 0$ giderken bir koşul yok)

şeklinde düşünüldüğünde r azalırken Teorem 2.3'ün 2. kısmına benzer şekilde bir eşitsizlik elde edilecektir.

Çözüm:



Şekil 2.4. Problem 2.7.4. için verilen bölge

$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$

olmak üzere, u(r,θ) klasik bir çözüm olsun.

$F(r) = -\int_{r_r} u.u_r r d\theta$

$F(z) = \int (\nabla_1 u)^2 dA$

$F = \iint_{R_r} \left(u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2\right) r dr.d\theta$

olduğu biliniyor. F'nin türevi

$F'(r) = -\int_{r_r} (u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2) r d\theta$

olarak bulunur. Daha sonra Poincare ve Cauchy eşitsizlikleri uygulandığında

$F(r) = -\int_{r_r} u.u_r r d\theta$

$|F(r)| \leq \int_{r_r} |u.u_r|\, r d\theta$

$\leq \left(\int_{r_r} u^2 d\theta\right)^{1/2} . \left(\int_{r_r} u_r^2 r d\theta\right)^{1/2}$

$\leq \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) r. \left(\int_{r_r} r^{-2}u_r^2 r d\theta\right)^{1/2} . \left(\int_{r_r} u_r^2 r d\theta\right)^{1/2}$

$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) r. \int_{r_r} (u_r^2 + r^{-2}u_\theta^2) r d\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) r. F^1(r)$

$F'(r) + \frac{2\pi}{\alpha} r^{-1}|F(r)| \leq 0$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada F(r) ≥ 0 olarak seçilip bulunan eşitsizlikde her taraf $r^{2\pi/\alpha}$ ile çarpılıp $[r, r_1]$ aralığında integre edildiğinde

$F'(r)r^{2\pi/\alpha} + F(r)r^{2\pi/\alpha}\frac{2\pi}{\alpha} \leq 0$

$\int_r^{r_1} (F(r)r^{2\pi/\alpha})' \leq 0$

$F(r) > f(r_1)(\frac{r_1}{r})^{2\pi/\alpha} \Longrightarrow F(r) \geq \frac{f(r_1){r_1}^{2\pi/\alpha}}{r^{2\pi/\alpha}}$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde $F(r_2) < 0$ olacak şekilde $r_2 > 0$, $0 < r_2 < r_1$ var olsun $r < r_2 < r_1$ olmak üzere,

$\exists\, r_2 > 0 \Rightarrow F(r_2) < 0$

$F'(r_2) - \frac{2\pi}{\alpha} r^{-1}F(r_2) \leq 0 \Rightarrow F'(r_2) \leq 0$

$0 < r < r_2$ için $F'(r) < 0 \Rightarrow F$ azalan olur. Yani

$-F'(r) \geq -\frac{2\pi}{\alpha} r^{-1}F(r) \Longrightarrow (-F(r))' - \frac{2\pi}{\alpha} r^{-1}(-F(r)) \geq 0$ yazılabilir

Bulunan bu eşitsizlik $r^{-2\pi/\alpha}$ ile çarpılıp $[r, r_2]$ aralığında integre edildiğinde,

$\int_r^{r_2}(-F(r)r^{-2\pi/\alpha})' \geq 0$

$\left((-F(r))r_2^{-2\pi/\alpha}\right) - \left((-F(r)\right)r^{-2\pi/\alpha} \geq 0$

$(-F(r)) \leq \left(-F(r_2)\right).\left(\frac{r_2}{r}\right)^{-2\pi/\alpha} \geq 0$

$-F(r) \leq -F(r_2){r_2}^{-2\pi/\alpha}r^{2\pi/\alpha}$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $F(r) \leq 0$ olduğu görülür.

Problem 2.7.5. (2.46) başlangıç sınır-değer probleminin sınır koşulları aşağıdaki şekilde değiştirilerek tekrar ele alınacaktır. Sınır değerleri

$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \varphi, \quad \Gamma_0$ üzerinde

$\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad \Gamma_L$ üzerinde

$\int_{\Gamma_0} \varphi dA = 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \mathcal{L}$ üzerinde

olarak alınmaktadır. Burada $\frac{\partial}{\partial n}$ normal türevlerdir. Çözüm için u'nun ortalama değeri ū, $\bar{u}(x_3,t) = \frac{1}{A}\int_{\Gamma_z} udA$ şeklinde tanımlanmaktadır.

$\bar{u}_t - \bar{u}_{33} = 0 \qquad (\propto)$

ve

$\bar{u}(x_3,0) = 0 \qquad (\beta)$

olduğu gösterilecektir. $(\propto)$ R_z'de integre edilip

$-\int_{\Gamma_z} u_3 dA = \int_{\Gamma_z} u_t dv$ elde edilecek, buradan

$\bar{u}_3(L.t) = 0 \qquad (\gamma)$

ve

$\bar{u}_3(0.t) = 0 \qquad (\delta)$

sonuçları elde edilecektir.

$(\propto), (\beta), (\gamma), (\delta)'$den $\bar{u}(x_3,t) = 0$ olduğunu kanıtla. (V_1 en küçük özdeğer)

Isı denklemi için maksimum prensibi;

$T > 0$ olsun u(x,t) fonksiyon

$\Omega = \{(x,t): 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq t \leq T\}$ kapalı bölgede sürekli olsun ve u fonksiyonu $0 < x < L,\ 0 < t \leq T$ için ısı denklemi sağlansın.

$u_t - u_{xx} = 0, \qquad x \in (0,L),\ \ 0 < t < T$

$u(x,0) = \emptyset(x), \qquad x \in (0,L)$

$u(0,t) = f_1(t), \qquad u(L,t) = f_2(t)$

Bu durumda u fonksiyonu maksimum(minumum) değerine t = 0 anında veya $\overline{\Omega}$'nın x = 0, x = L dik kenarlarında ulaşır.

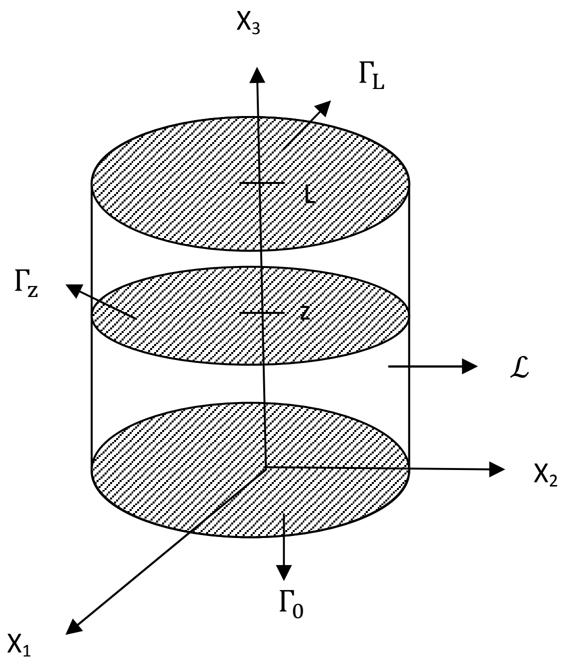
Çözüm:

$u_t - \Delta u = 0, \quad R \times (0,\infty)$

$\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_0} = g, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_L} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\mathcal{L}} = 0, \qquad u(x,0) = 0,\ x \in R$

$\int_{\Gamma_0} g dA = 0$



Şekil 2.5. Isı denklemi için silindirik bölge

$\bar{u}(x_3,t) = \frac{1}{A}\int_{\Gamma_z} u dA \Rightarrow \bar{u}_t - \bar{u}_{33} = 0$

$u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_3,t) = \frac{1}{A}\int_{\Gamma_z} \frac{\partial u}{\partial t} dA = \frac{1}{A}\int_{\Gamma_z} u_t dA$

$\frac{\partial}{\partial x_3}\bar{u}(x_3,t) = \frac{1}{A}\int_{\Gamma_z} \frac{\partial}{\partial x_3} u(x,t) dA = \frac{1}{A}\int_{\Gamma_z} u_3(x,t) dA$

$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\bar{u}(x_3,t)=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}u(x,t)dA=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}u_{33}dA$

$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\bar{u}=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}(u_t-u_{33})\,dA=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}(u_t-u_{11}-u_{22}-u_{33})dA$

$=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}(u_t-\Delta u)dA$. Buradan

$\bar{u}_t-\bar{u}_{33}=0 \qquad (\alpha)$

elde edilir.

$\bar{u}(x_3,t)=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}udA=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}u(x,t)dA$

$\bar{u}(x_3,t)=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}u(x,0)dA$

$\bar{u}(x_3,t)=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}u(x,0)dA=0$. Buradan

$\bar{u}(x_3,t)=0 \qquad (\beta)$

bulunur. Daha sonra (α) ve (β) kullanılarak

$\int_{R_z}(\bar{u}_t-\bar{u}_{33})dv=\int_{R_z}\bar{u}_t dv\int_z^L\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_3}\bar{u}_3dx_3d\varepsilon=\int_{R_z}\bar{u}_t dv+\int_{\Gamma_z}\bar{u}_3dA=0$

$\int_{R_z}\bar{u}_t dv=-\int_{\Gamma_z}\bar{u}_3dA$ eşitliği elde edilir. Buradan

$\bar{u}_3(L,t)=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}u_3(x_1,x_2,L,t)dA=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=L}dA=0$

$\bar{u}_3(L,t)=0 \quad (\gamma)$

ifadesine ulaşılır. Daha sonra

$\bar{u}_3(x_3,t)=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_z}u_3(x_1,x_2,x_3,t)dA$

$\int_{\Gamma_0}u_3\Big|_{\Gamma_0}=\int_{\Gamma_0}\varphi(x_1,x_2,0,t)=0$

$\bar{u}_3(0,t)=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_0}u_3(x_1,x_2,0,t)dA$

$\qquad\qquad=\frac{1}{A}\int_{\Gamma_0}gdA=0$

$\bar{u}_3(0,t)=0 \qquad (\delta)$

eşitliği bulunur. Son olarak $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ ve (δ) kullanılarak $\bar{u}_3(x_3,t)=0$ olduğu gösterilecek.

$\bar{u}$ fonksiyonu düşünüldüğünde t = 0 anında

$\bar{u}(x_3,0)=0 \qquad (\beta)$

bulunur ve

$x_3=0,\ x_3=L$ için

$\bar{u}_3(L,t)=0 \qquad (\gamma)$

$\bar{u}_3(0,t) = 0 \qquad (\delta)$

olur. O halde maksimum prensibinde ū fonksiyonu $\forall\ x_3$ için 0’dır. Yani $\bar{u}_3(0,t) = 0$ elde edilir. Teorem (2.5) bu problem için uygulandığında

E(z,t) $= \int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 dvdr + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dv, z \geq 0, t \geq 0$ olmak üzere

E(z,t) $\leq E(0,t)e^{(-2(\sqrt{\nabla_1})z)}$ olduğu gösterilmelidir. Divergence teoremi kullanılarak $\nabla.(u\nabla u) = \nabla u.\nabla u + u\Delta u = (\nabla u)^2 + u\Delta u$ eşitliğinde integral alınırsa

$$\int_0^t \int_{R_z} (\nabla u)^2 dvdr = \int_0^t \int_{R_z} \nabla(u\nabla u)dvdr - \int_0^t \int_{R_z} u\Delta u dvdr$$

$$= \int_0^t \int_{R_z} \nabla(u\nabla u)dvdr - \int_0^t \int_{R_z} u.u_t dvdr$$

$$= \int_0^t \left[\int_{\Gamma_z} F.ndv\right] d\Gamma - \int_0^t \int_{R_z} u.u_t dvdr$$

$$= \int_0^t \left[-\int_{\Gamma_z} uu_{x_3} dv + \int_{\Gamma_L} uu_{x_3} dv + \int_{\propto} u.\frac{\partial u}{\partial n} dv\right] d\Gamma - \int_0^t \int_{R_z} u.u_t dvdr$$

$$= \int_0^t \int_{R_z} uu_{x_3} dvd\Gamma - \frac{1}{2}\int_{R_z} \left[u^2 \Big|_0^t \right] dv = \int_0^t \int_{R_z} uu_{x_3} dvd\Gamma - \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dv + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0)$$

E(z, t) $= \int_0^t d\Gamma \int_{R_z} uu_{x_3} dA + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0)$ elde edilir. z’ye göre türev

E(z, t) $= \int_0^t d\Gamma \int_z^L \int_{\Gamma_\varepsilon} (\nabla u)^2 dsd\varepsilon + \frac{1}{2}\int_z^L \int_{\Gamma_\varepsilon} u^2 dsd\varepsilon$

$$E_z(z,t) = -\int_0^t d\Gamma \int_{\Gamma_z} (\nabla u)^2 dA - \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA$$

olarak bulunur. Herhangi bir k sabiti için

$$E_z + 2kE = -\int_0^t d\Gamma \int_{\Gamma_z} (\nabla u)^2 dA - \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dA + 2k\left(-\int_0^t d\Gamma \int_{R_z} uu_{x_3} dA + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2(x,0)dv\right)$$

$$= -\int_0^t d\Gamma \int_{\Gamma_z} \{(\nabla u)^2 + 2kuu_{x_3}\} dA - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_z} u^2 dA + k\int_{R_z} u^2(x,0)dv$$

ifadesi yazılır. Buradan sağ taraftaki ilk terim ele alındığında

$$\int_{\Gamma_z} \{(\nabla u)^2 + 2kuu_{x_3}\} dA = \int_{\Gamma_z} \left(u_{x_3} + ku\right)^2 dA + \int_{R_z} \{(\nabla_1 u)^2 - k^2u^2\} dA$$

bulunur. Bu ifadede sol taraf negatif değildir. Poincare eşitsizliği kullanıldığında

$$E_z + 2kE \leq k\int_{R_z} u^2(x,0)dv$$

elde edilir. İfade e^{2kz} ile çarpılıp [0, z] aralığında integre edildiğinde

$$\int_0^z \left(E.e^{2kz}\right)' ds \leq \int_0^z e^{2kz} kds \int_{R_s} u^2(x,0)dv$$

$$E(z,t) \leq E(0,t)e^{-2kz} + k\int_0^z dse^{2k(s-z)} \int u^2(x,0)dv$$

eşitsizliği bulunur. Burada kısmi integrasyon uygulandığında

$$u = \int_{R_s} u^2(x,0)dv, \qquad dv = e^{2k(s-z)}$$

$$du = -\int_{R_s} u^2(x,0)dv, \qquad v = \frac{e^{2k(s-z)}}{2k}\Big|_0^z$$

$$k\int_0^z dse^{2k(s-z)}\int_{R_s} u^2(x,0)dv = \frac{1}{2}\int_R u^2(x,0)dv - \frac{1}{2}\int_R u^2(x,0)dve^{-2kz}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^z e^{2k(s-z)}ds\int_{\Gamma_s} u^2(x,0)dv$$

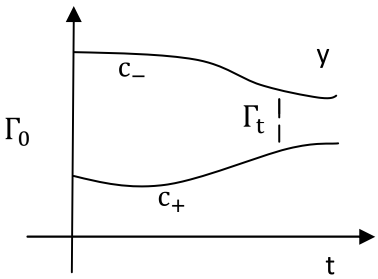
$$\leq \frac{1}{2}\int_{R_s} u^2(x,0)dv + \frac{1}{2}\int_0^z ds\int_{\Gamma_s} u^2(x,0)dA = \frac{1}{2}\int_R u^2(x,0)dv$$

$$E(z,t) \leq E(0,t)e^{-2kz} + \frac{1}{2}\int_R u^2(x,0)dv\,, \quad \left(k = \sqrt{V_1}\right)$$

$$E(z,t) \leq E(0,t)e^{-2\sqrt{V_1}.z}$$

eşitsizliği bulunur ve kanıt biter.

2.8. Basit Bir Lemma



Şekil 2.6. ty düzleminde t=0 apsisli Γ_0 doğru parçasıyla ve sırasıyla $y_+(t)$, $y_-(t)$ ile tanmlı C_+, C_- eğrileriyle sınırlı bir bölge

Sınırlı t-y uzayında,

i. $t = 0$ için Γ_0 doğru parçasıyla ve

ii. C_+, C_- eğrileri ile tanımlı,

ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $y = y_+(t)$, $y = y_-(t)$ eğrileri ile sınırlı,

α) tek değerli, sürekli diferansiyallenebilir fonksiyonlar

β) ve $y_+(t) > y_-(t)$ dir.

R bölgesi düşünülsün. Γ_t, bölge içerisinde t değişkenine bağlı eğriler arasında kalan doğru parçasını göstersin. $\Psi(t,y)$, C_+, C_- üzerinde $f_+(t)$, $f_-(t)$ değerlerini alan ikinci dereceden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\emptyset(u), u$ argumentine göre ikinci dereceden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

Lemma 2.1.

Yukarıdaki bilgilere göre

$$F(t) = \int_{\Gamma_t} \emptyset(\Psi_y)dy \tag{2.58$_1$}$$

fonksiyonu

$$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\emptyset}\,\Psi_t\Psi_{yy}dy + \{\dot{\emptyset}F' - (\dot{\emptyset}\Psi_y - \emptyset)y'\}\Big] \tag{2.58$_2$}$$

eşitliğini sağlar.] işareti ilgili ifadenin C_+ve C_- eğrilerinin sınırları üzerindeki uç noktalardaki integrallerinin farkının sembolik olarak gösterilmesi anlamındadır.

İspat:

Leibniz teoremi $f(t, y)$ fonksiyonu için

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_t} f(t, y)dy = \int_{\Gamma_t} f_t dy + fy']$$

şeklindedir. Bu teorem uygulandığında

$$F'(t) = \int_{\Gamma_t} \dot{\emptyset}\Psi_{yt}dy + \emptyset(\Psi_y)y'\Big] \tag{2.59}$$

olarak bulunur. Kısmi integrasyon uygulandığında

$u = \emptyset$ $\qquad\qquad$ $dv = \Psi_{yt}dy$

$du = \ddot{\emptyset}\Psi_{yy}dy$ $\qquad\qquad$ $v = \Psi_t$

$$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\emptyset}\Psi_t\,\Psi_{yy}dy + (\emptyset y' + \dot{\emptyset}\Psi_t)\Big] \tag{2.60}$$

eşitliği bulunur. Sınır koşulu

$$\Psi(t, y, (t)) = F(t)$$

$$\Psi_t + \Psi_y y' = F' \tag{2.61}$$

olmak üzere bu eşitlik (2.60)'da yerine yazıldığında

$$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\emptyset}\Psi_t\,\Psi_{yy}dy + (\emptyset y' + \dot{\emptyset}(F' - \Psi_y y'))\Big]$$

$$= -\int_{\Gamma_t} \ddot{\emptyset}\Psi_t\,\Psi_{yy}dy + \{\dot{\emptyset}F' - (\emptyset\Psi_y - \dot{\emptyset})y'\}\Big]$$

olur ve kanıt biter.

Eğer $\emptyset$ akıllıca seçilirse Lemma'dan ilginç sonuçlar ortaya çıkar. Örneğin, $\ddot{\emptyset}(u) \geq 0$ ve $\emptyset(0) = 0$ ise $\emptyset$ konveks olduğundan

$\emptyset(a) + \frac{\emptyset(b)-\emptyset(a)}{b-a}(x-a) \geq \emptyset(x) \geq \emptyset(a) + \emptyset'(a)(x-a)$

$\emptyset'(a) \leq \frac{\emptyset(x)-\emptyset(a)}{x-a}$ çıkar.

$a \to x$, $x \to b$

$\emptyset'(x) \leq \frac{\emptyset(b)-\emptyset(x)}{b-x} \Longrightarrow (b-x).\emptyset' \leq \emptyset(b) - \emptyset(x)$

$b = 0,$

$-x\emptyset'(x) \leq -\emptyset(x) \Longrightarrow x\emptyset'(x) \geq \emptyset(x)$ olur yani

$$u\dot{\emptyset} - \emptyset \geq 0 \qquad (2.62)$$

ifadesine ulaşılır.

Problem 2.8.1. Lemma 2.1.'i kullanıp, t yerine x alındığında aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız. C_+ ve C_- üzerinde Ψ sabit olmak üzere,

i. $F(x) = \int_{\Gamma_t} \Psi_y^2 dy$

ise

$$F'(x) = \int_{\Gamma_x} \left(\Psi_y \Psi_{xy} - \Psi_x \Psi_{yy}\right) dy$$

dir.

ii. $F_q(x) = \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q} dy$ (q pozitif tamsayı)

ise

$$F_q'(x) = (2q-1)\int_{\Gamma_z} \Psi_y^{2q-2}\left(\Psi_y \Psi_{xy} - \Psi_x \Psi_{yy}\right) dy$$

dir.

Çözüm:

i. $F(x) = \int_{\Gamma_t} \Psi_y^2 dy$

ifadesinde Leibniz Teoremi kullanılırsa

$F'(x) = \int_{\Gamma_x} 2\Psi_y \Psi_{yx} dy + \Psi_y^2 y'\big]$

elde edilir. C_+ ve C_- üzerinde Ψ sabit olduğundan $\Psi_y^2 y'\big] = 0'$dır. Kısmi integrasyon uygulandığında

$$u = \Psi_y, \qquad dv = \Psi_{yx} dy$$

$du = \Psi_{yy}, \qquad v = \Psi_x$

$F'(x) = \int_{\Gamma_x} \Psi_y \Psi_{yx} dy + \int_{\Gamma_x} \Psi_y \Psi_{yx} dy$

$= \Psi_y \Psi_x] - \int_{\Gamma_x} \Psi_{yy} \Psi_x + \int_{\Gamma_x} \Psi_y \Psi_{yx}$

olur. Burada $\Psi_y \Psi_x] = 0$' dır.

$F'(x) = \int_{\Gamma_x} \left(\Psi_y \Psi_{yx} - \Psi_x \Psi_{yy}\right) dy$ olur.

ii. $F_q(x) = \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q} dy$

ifadesinde Leibniz Teoremi uygulandığında

$F_q'(x) = 2q \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q-1} . \Psi_{yx} + \Psi_y^{2q} . y' \Big]$

olur. C_+ ve C_- üzerinde Ψ sabit olduğundan $\Psi_y^{2q} . y' \Big] = 0$' dır. Kısmi integrasyon uygulandığında

$u = \Psi_y^{2q-1}, \qquad dv = \Psi_{yx} dy$

$du = (2q-1) \Psi_y^{2q-2} \Psi_{yy} dy, \qquad v = \Psi_x$

$F_q'(x) = \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q-1} . \Psi_{yx} dy + (2q-1) \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q-1} . \Psi_{yx} dy$

$= \Psi_y^{2q-1} . \Psi_x \Big] - (2q-1) \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q-2} . \Psi_{yy} . \Psi_x dy + (2q-1) \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q-1} . \Psi_{yx} dy$

olarak bulunur. Burada $\Psi_y^{2q-1} . \Psi_x \Big] = 0$ dır.

$F_q'(x) = (2q-1) \int_{\Gamma_x} \Psi_y^{2q-2} \left(\Psi_y \Psi_{xy} - \Psi_x \Psi_{yy}\right) dy$

olur ve kanıt biter.

Teorem 2.6.

$\emptyset(0) = 0$ olmak üzere, $\emptyset(0)$ negatif olmayan, kesin konveks $(\ddot{\emptyset} > 0)$ fonksiyon olsun ve f(t,y) verilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\Psi_t \Psi_{yy} = \left\{\ddot{\emptyset}\left(\Psi_y\right)\right\}^{-1} f(t, y) \qquad (2.63_1)$$

den oluşan başlangıç değer probleminin ikinci dereceden sürekli diferansiyellenebilir çözümü olsun. R bölgesinde başlangıç koşulu,

Ψ (veya Ψ_y) belirli $\quad \Gamma_0$ üzerinde $\qquad (2.63_2)$

dir. Sınır koşulları

$\Psi = \text{sabit} \qquad C_+$ ve C_- üzerinde $\qquad (2.63_3)$

dir. Bu yanal sınırlar

$y'_+(t) \geq 0, \qquad y'_-(t) \leq 0$

$F(0) - \int_0^t \int_{\Gamma_t} f(t, y)dtdy < 0$ (2.63₄)

olmak üzere, çözümün bazı datalar ve t' nin değerleri için varlığı söylenemez. Bu sonuç yanal sınırlar üzerinde sabit olmayan sınır koşulları olduğu zamanda sağlanır.

2.9. Lineer Difüzyon Eşitlikleri

Monotonluk (Maximum) Prensibi:

$$\Psi_t = \Psi_{yy}$$

bir boyutlu ısı denkleminden bazı özellikler türetmek için Lemma3.1. kullanılacaktır. Uzaysal bir bölge de zamana göre değişen ısının gradientinin uzaysal normlarını elde etmek için bazı monotonluk prensipleri kullanılır.

Bozulmuş Ortamda Difüzyon:

Sınırlar $t \geq 0$ için $y = y_-(t)$, $y = y_+(t)$ olan bozulmuş bir boyutlu ısı denkleminin davranışı düşünülün ve bu fonksiyonlar Lemma'da belirlendiği gibi olsun. v(y, t) hız alanı olduğu varsayılsın, Ψ(y, t)'nin ısı yayılımı,

$$\Psi_t + v\Psi_y = \Psi_{yy}, \qquad y_- < y < y_+ \tag{2.64}$$

şeklindedir. (2.64)'ün sınır koşulları

$$\Psi = 0, \qquad y = y_-(t) \text{ ve } y = y_+(t) \tag{2.65$_1$}$$

ve başlangıç koşulu

$$\Psi \text{ belirli} \tag{2.65$_2$}$$

şeklindedir. Şimdi Ψ'nin integral kurulumları elde edilecektir.

$$F(t) = \int \Psi_y^2 dy \tag{2.66}$$

için bir üst sınır bulunmaya çalışılacaktır.

$\emptyset(u) = u^2$ alalım, (2.64) ve Lemma kullanıldığında

$F(t) = \int_{\Gamma_t} \emptyset(\Psi_y)dy$

$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} \ddot{\emptyset}\, \Psi_t\Psi_{yy}dy + \{\dot{\emptyset}F' - (\dot{\emptyset}\Psi_y - \emptyset)y'\}]$

C_+ ve C_- üzerinde Ψ sabit olduğundan $\{\dot{\emptyset}F' - (\dot{\emptyset}\Psi_y - \emptyset)y'\}]$= 0 olur. Buradan

$F'(t) = -\int_{\Gamma_t} 2\, \Psi_t\Psi_{yy}dy$

$$F'(t) = -\int [2\Psi_{yy}^2 + v_y\Psi_y^2]dy \tag{2.67}$$

olur. $\int \Psi_y dy = 0$ koşulu ve $\int_0^l \varphi''^2 dx \geq \pi^2 l^{-2} \int_0^l \varphi'^2 dx$ eşitsizliği kullanıldığında

$\int \Psi_{yy}^2 dy \geq \pi^2 l^{-2}(t) \int \Psi_y^2 dy$

(2.68)

elde edilir. Buradan

$-2 \int \Psi_{yy}^2 dy \leq -2\pi^2 l^{-2}(t) \int \Psi_y^2 dy$

olur. l(t) = $y_+(t) - y_-(t)$ t zamanına bağlı genişlik olmak üzere

$-2 \int \Psi_{yy}^2 dy - \int v_y \Psi_y^2 dy \leq -2\pi^2 l^{-2}(t) \int \Psi_y^2 dy - \int v_y \Psi_y^2 dy$

F'(t) ≤ $-2\pi^2 l^{-2}(t) \int \Psi_y^2 dy - \int v_y \Psi_y^2 dy$

F'(t) ≤ $-(2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)F(t)$ (2.69)

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.7.

(2.64) –(2.65) ile tanımlı bozulmuş ortamda bir boyutlu ısı denkleminin davranışı

$F(t) \leq F(0)\exp\left[-\int_0^t (2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)\, dy\right]$ (2.70)

eşitsizliğini sağlar.

İspat:

F'(t) ≤ $-(2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)F(t)$

eşitsizliğinde her taraf $e^{\int_0^t (2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)dt}$ ile çarpılıp [0, t] aralığında integre edildiğinde

$e^{\int_0^t (2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)dt} F'(t) + e^{\int_0^t (2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)dt}(2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)F(t) \leq 0$

$\int_0^t \left(F(t) e^{\int_0^t (2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)dt}\right)' \leq 0$

$F(t) \leq F(0)\, e^{-\int_0^t (2\pi^2 l^{-2}(t) + \min_y v_y)dt}$

bulunur ve böylece teorem kanıtlanır.

2.10. Lineer Olmayan Difüzyon Eşitlikleri: Nonexistence

Birinci mertebeden diferansiyel eşitlikler içeren basit argümanlar çözümlerin yokluğunu(nonexistence) elde etmek için yeterlidir.

$$u_t + (u^{2m}u_x)_x = 0, \qquad 0 < x < 1 \tag{2.71$_1$}$$

$m > 0$ olmak üzere zamana bağlı eşitliğinin negatif olmayan u(x, t) çözümleri düşünülsün. Burada sınır koşulu

$$u(0, t) = u(1,t) \tag{2.71$_2$}$$

ve başlangıç koşulu

$$u(x, 0) \quad \text{belirli(negatif değil)} \tag{2.71$_3$}$$

dir.

Uygun (kabul edilebilir) çözümlerin karakterize edilmesi:

Şimdi çözümün yokluğu problemini ele alalım. Bu aşamada

$$F(t) = \int_0^1 u^2 dx \tag{2.72}$$

ölçümüne dikkat edelim. Türev alınıp (2.71$_1$) kullanıldığında

$$F'(t) = 2\int_0^1 uu_t dx$$

$$= -2\int_0^1 u\,(u^{2m}u_x)_x dx \tag{2.73}$$

olur. Kısmi türev alınıp (2.71$_2$) kullanıldığında

$$u = u, \qquad dv = (u^{2m}u_x)_x dx$$

$$du = u_x, \qquad v = u^{2m}u_x$$

$$F'(t) = \underbrace{-2uu^{2m}u_x}_{0} + 2\int_0^1 u_x^2 u^{2m} dx$$

$$F'(t) = 2\int_0^1 u_x^2 u^{2m} dx = \frac{2}{(m+1)^2}\int_0^1 \left(\frac{du^{m+1}}{dx}\right)^2 dx \tag{2.74}$$

olur. Daha sonra $\int_0^l \varphi'^2 dx \geq \pi^2 l^{-2} \int_0^l \varphi^2\, dx$ eşitsizliği kullanılarak

$$F'(t) \geq \frac{2\pi^2}{(m+1)^2}\int_0^1 u^{2m+2} dx \tag{2.75}$$

ifadesine ulaşılır. Burada Hölder eşitsizliği kullanıldığında

$$\int_0^1 1.u^2 dx \leq \left(\int_0^1 1^{\frac{m+1}{m}} dx\right)^{m/m+1} \left(\int_0^1 (u^2)^{m+1} dx\right)^{1/m+1}$$

$q = m+1, \qquad p = \frac{m+1}{m}$ olarak alınırsa

$$\left(\int_0^1 u^2 dx\right)^{m+1} \leq \int_0^1 u^{2m+2} dx$$

$$2\pi^2(m+1)^{-2}\left(\int_0^1 u^2 dx\right)^{m+1} \leq 2\pi^2(m+1)^{-2}\int_0^1 u^{2m+2} dx \leq F'(t)$$

$$F'(t) \geq 2\pi^2(m+1)^{-2}F^{m+1} \tag{2.76}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik [0, t] aralığında integre edildiğinde

$$\int_0^t \frac{F'(t)}{F^{m+1}} dt \ \geq \ \int_0^t 2\pi^2 (m+1)^{-2}$$

$$\int_0^t \frac{1}{-m} \frac{d}{dt} (F^{-m}) dt \ \geq \ 2\pi^2 (m+1)^{-2} t$$

$$-\frac{1}{m} F^{-m}(t) + \frac{1}{m} F^{-m}(0) \geq \ 2\pi^2 (m+1)^{-2} t$$

$$F^{-m}(t) \ + \ F^{-m}(0) \ \geq \ 2\pi^2 (m+1)^{-2} t$$

$$F^{-m}(0) - 2\pi^2 (m+1)^{-2} t \geq \ F^{-m}(t) \qquad (2.77)$$

elde edilir.

Teorem 2.8.

F(0), (2.71_3) ve (2.72) ile belirli olmak üzere,

$$t \geq \ (2\pi^2 m)^{-1} \ (m+1)^2 F^{-m}(0) \qquad (2.78)$$

eşitsizliğini sağlayan t'ler için (2.71) başlangıç sınır-değer probleminin çözümü yoktur.

İspat:

(2.77)'den $F^{-m}(0) - 2\pi^2 (m+1)^{-2} t \ \geq \ F^{-m}(t)$ olduğu biliniyor. Bu ifade biraz düzenlendiğinde

$$\frac{1}{F^m(0)} - 2\pi^2 (m+1)^{-2} t \ \geq \ \frac{1}{F^m(t)}$$

$$\frac{1 - 2\pi^2 (m+1)^{-2} t F^m(0)}{F^m(0)} \ \geq \ \frac{1}{F^m(t)}$$

$F^m(t) \ \geq \ \dfrac{F^m(0)}{1 - 2\pi^2 (m+1)^{-2} t F^m(0)}$ olur. Burada

$2\pi^2 (m+1)^{-2} t F^m(0) \ \geq 1$ olmalıdır. O halde

$$t \geq \ (2\pi^2 m)^{-1} \ (m+1)^2 F^{-m}(0) \qquad (2.79)$$

olarak bulunur. Bu da (2.79)'u sağlayan t'ler için çözümün patladığını gösterir. (2.78)'den

$$F^m(t) \ \geq \ \frac{F^m(0)}{1 - 2\pi^2 (m+1)^{-2} F^m(0) t} \qquad (2.80)$$

yazabiliriz.

Tüm sınır koşullar aynı olmak üzere,

$$u_t - \ (u^{2m} u_x)_x = 0 \qquad (2.81)$$

eşitliği düşünülsün ve

$F(t) = \int_0^1 u^2 dx$

olarak tanımlı olsun. Burada türev alınırsa

$F'(t) = 2\int_0^1 uu_t dx$

$\quad = -2\int_0^1 u\,(u^{2m}u_x)_x dx$

olur. Kısmi integrayon uygulandığında

$u = u, \qquad dv = (u^{2m}u_x)_x dx$

$du = u_x, \qquad v = u^{2m}u_x$

$F'(t) = \underbrace{2uu^{2m}u_x}_{0} - 2\int_0^1 u_x^2 u^{2m} dx$

$F'(t) = -2\int_0^1 u_x^2 u^{2m} dx = -\frac{2}{(m+1)^2}\int_0^1 \left(\frac{du^{m+1}}{dx}\right)^2 dx$

olarak bulunur. Burada $\int_0^l \varphi'^2 dx \geq \pi^2 l^{-2}\int_0^l \varphi^2\, dx$ eşitsizliği kullanılarak

$F'(t) \leq -\frac{2\pi^2}{(m+1)^2}\int_0^1 u^{2m+2} dx$

ifadesine ulaşılır. Hölder eşitsizliği kullanıldığında

$F'(t) \leq 2\pi^2(m+1)^{-2}F^{m+1}$

elde edilir. Bu eşitsizlik [0, t] aralığında integre edildiğinde

$\int_0^t \frac{F'(t)}{F^{m+1}} dt \leq -\int_0^t 2\pi^2(m+1)^{-2}$

$\int_0^t \frac{1}{-m}\frac{d}{dt}(F^{-m})dt \leq -2\pi^2(m+1)^{-2}t$

$-\frac{1}{m}F^{-m}(t) + \frac{1}{m}F^{-m}(0) \leq -2\pi^2(m+1)^{-2}t$

$-F^{-m}(t) + F^{-m}(0) \leq -2\pi^2(m+1)^{-2}t$

$F^{-m}(0) + 2\pi^2(m+1)^{-2}t \leq F^{-m}(t)$

$\frac{1 + 2\pi^2(m+1)^{-2}tF^m(0)}{F^m(0)} \leq \frac{1}{F^m(t)}$

$F^m(t) \leq \frac{F^m(0)}{1+2\pi^2(m+1)^{-2}tF^m(0)}$

$F(t) \leq F(0)\left(1 + 2\pi^2(m+1)^{-2}tF^m(0)\right)^{-\frac{1}{m}}$ (2.82)

elde edilir. $m \to 0$ için,

$F(t) \leq F(0)\exp(-2\pi^2 t)$ (2.83)

eşitsizliğine ulaşılır.

$u_t + u_{xx} = u^{2m+1}, \qquad 0 < x < 1$ (2.84_1)

(m pozitif tamsayı) sınır koşulu,

$u(0, t) = u(1, t) = 0$ (2.84$_2$)

ve başlangıç koşulu,

$u(x, 0)$ belirli (2.84$_3$)

olmak üzere zamana bağlı difüzyon denklemi düşünülsün.

$F(t) = \int_0^1 u^2 dx$ olarak tanımlanmaktadır. Türev alındığında

$$F'(t) = 2\int_0^1 u u_t dx$$

$$= 2\int_0^1 u\, u^{2m+1} dx - 2\int_0^1 u\, u_{xx} dx$$ olur. Kısmi integrasyon uygulandığında

$$u = u, \qquad dv = u_{xx} dx$$

$$du = u_x, \qquad v = u_x$$

$$F'(t) = 2\int_0^1 u^{2m+2}\, dx + 2\int_0^1 u_x^2 dx$$

$$F'(t) \geq 2\int_0^1 u^{2m+2}\, dx + 2\pi^2 \int_0^1 u^2 dx$$

$$F'(t) \geq 2\pi^2 F + 2F^{m+1} \qquad (2.85)$$

bulunur. Bu eşitsizlikte sağ taraftaki ilk ifade ihmal edilip [0, t] aralığında integre edildiğinde

$$\frac{F'(t)}{F^{m+1}} \geq 2$$

$$\int_0^t \frac{F'(t)}{F^{m+1}} dt \geq 2\int_0^t dt$$

$$\int_0^t \frac{1}{-m} \frac{d}{dt} (F^{-m}) dt \geq 2t$$

$$F^{-m}(0) - 2mt \geq F^{-m}(t) \qquad (2.86)$$

elde edilir.

Teorem 2.9.

F(0), (2.72) ve (2.84$_3$) ile belirli olmak üzere,

$$t \geq (2m)^{-1} F^{-m}(0) \qquad (2.87)$$

eşitsizliğini sağlayan t'ler için (2.84) ile verilen başlangıç sınır-değer probleminin çözümü yoktur.

İspat:

(2.86) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$\frac{1}{F^m(0)} - 2mt \geq \frac{1}{F^m(t)}$

$F^m(t) \geq \frac{F^m(0)}{1-2mtF^m(0)}$

$2mtF^m(0) \geq 1$

$t \geq (2m)^{-1} F^{-m}(0)$

olarak bulunur. Bu eşitsizliği sağlayan t’ler için (2.84) probleminin çözümü yoktur.

BÖLÜM 3.PHRAGMEN-LİNDELÖF İLE İLGİLİ PROBLEMLER

3.1. Sönümlü Dalga Problemi

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemi ele alınsın.

$u_{tt} - \Delta u + au_t = 0\ ,\quad x \in \Omega,\ \ a \in lR^-$

$u|_{\partial\Omega}\ = 0$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0\ ,\ \ x \in \Omega$

$\Omega = \{x \in\ R^n : x_n\ \in\ R^+, x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in D_{x_n} \subset\ R^{n-1}\}\ , z > 0\ ,\ D_z \subset R^{n-1}$ olmak üzere ∂D_z sınırları yeterince düzgündür. Burada $\frac{\partial u}{\partial n} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} n_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ normal türevi gösterir. $S_z \coloneqq \{x \in R^n, x' \in\ \partial D_{x_n}, z\ \le\ x_n < \infty\}$. $\Omega_z = \Omega \cap \{x \in R^n : 0 < x_n < z\}$, $R_z = \Omega \cap \{x \in R^n : z < x_n < \infty\}$ olarak ifade edilir. Bu durumda Problemin u(x,t) trivial olmayan çözümü üstel hızla sıfıra gider.

Çözüm:

Denklem u_t ile çarpılıp R_z bölgesinde integre edildiğinde

$u_t.u_{tt} - u_t\Delta u + au_t u_t = 0$

$\int_{R_z} u_t.u_{tt}dv - \int_{R_z} u_t\Delta u dv + \int_{R_z} au_t^2 dv = 0$

$\frac{d}{dt}\int_{R_z}\frac{1}{2}u_t^2 dv + \int_{R_z} \nabla u_t \Delta u dv - \int_{\partial R_z} u_t\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int_{R_z} au_t^2 dv = 0$

$\frac{d}{dt}\int_{R_z}\frac{1}{2}u_t^2 dv + \frac{d}{dt}\int_{R_z}\frac{1}{2}(\nabla u)^2 dv + \int_{R_z} au_t^2 - \int_{\partial R_z} u_t\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int_{D_z} u_t.u_3 dv = 0$

$\frac{d}{dt}\left[\int_{R_z}\frac{1}{2}u_t^2 dv + \int_{R_z}\frac{1}{2}(\nabla u)^2 dv\right] + \int_{R_z} au_t^2 dv + \int_{D_z} u_t.u_3 dv = 0$

elde edilir. $[0,t]$ aralığında integre edildiğinde

$\frac{1}{2}\int_{R_z}(u_t^2 + |\nabla u|^2)dv + a\int_0^t\int_{R_z} u_t^2 dvdr = -\int_0^t\int_{D_z} u_t.u_3 dvd\Gamma$

eşitliğine ulaşılır. Sol taraftaki ikinci terim biraz düzenlendiğinde

$$a\int_0^t\int_{R_z} u_t^2 dvdr \le \left|\int_{D_z} u_t . u_3 dv\right|$$

$$\le \int_0^t [\left(\int_{D_z}(u_t)^2\right)^{1/2} . \left(\int_{D_z}(u_3)^2\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^t\int_{D_z}(u_t^2 + u_3^2)dvd\Gamma$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^t\int_{D_z}(u_1^2 + u_3^2 + u_1^2 + u_2^2)dvd\Gamma$$

$$a\int_0^t\int_{R_z} u_t^2 dvd\Gamma \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_{D_z}(u_t^2 + |\nabla u|^2)dvd\Gamma \qquad (*)$$

ifadesi bulunur.

$E(z) = \int_0^t\int_{R_z}(u_t^2 + |\nabla u|^2)dvd\Gamma$ $\quad\Rightarrow$ (*)’dan

$$a\int_0^t\int_{R_z} u_t^2 dvd\Gamma + a\int_0^t\int_{R_z}|\nabla u|^2 dvd\Gamma \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_{D_z}(u_t^2 + |\nabla u|^2)dvd\Gamma$$

olduğu görülür. $\int_{R_z} f = \int_Z^\infty \int_{D_s} fdsd\xi$ olduğundan

$2aE(z) + E'(z) \le 0$ ifadesi elde edilir. Her taraf e^{2az} ile çarpılıp [0, z] aralığında integre edildiğinde

$$e^{2az}. 2aE(z) + e^{2az}. E'(z) \le 0$$

$$\int_0^z (E(z). e^{2az})' \le 0$$

$$E(z)e^{2az} - E(0) \le 0$$

$$E(z) \le E(0). e^{-2az}$$

elde edilir. O halde u(x,t) üstel hızla sıfıra gider.

3.2. Homojen Olmayan Sınır Koşullu Dalga Problemi

Başlangıç sınır değer probleminin aşağıdaki şekilde olsun.

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t = 0, \qquad x \in \Omega \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta\frac{\partial u}{\partial t} + f(u) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \alpha, \beta \in R^+ \qquad (3.2)$$

$$u|_{D_0} = 0 \qquad (3.3)$$

$$F(u) = \int_0^u f(\zeta)d\zeta \ge c_0 u f(u), \qquad c_0 > 0 \qquad (F_1)$$

$$uf(u) \ge \gamma|u|^{2p}, \qquad 2p > 1, \qquad \gamma > 0 \qquad (F_2)$$

$\Omega = \{x \in R^n : x_n \in R^+, x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in D_{x_n} \subset R^{n-1}\}$, $z > 0$, $D_z \subset R^{n-1}$ olmak üzere ∂D_z sınırları yeterince düzgün ve

$0 < m_0 \le \inf_z |D_z| \le \sup_z |D_z| \le m_1 < \infty, \quad \forall z \in R^+$

koşulunu sağlar. Burada $\frac{\partial u}{\partial n} := \sum_{i=1}^{n} n_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ normal türevi gösterir. $S_z := \{x \in R^n, x' \in \partial D_{x_n}, z \leq x_n < \infty\}$. $\Omega_z = \Omega \cap \{x \in R^n : 0 < x_n < z\}$, $R_z = \Omega \cap \{x \in R^n : z < x_n < \infty\}$ olarak ifade edilir.

Lemma 3.1.

Ψ, fonksiyonu $\Psi(0) = 0$, $\lim_{\Gamma\to\infty} \Psi(\Gamma) = +\infty$ koşullarını sağlayan Ψ monoton artan bir fonksiyon olsun. $z(\Gamma) \leq \Psi(z'(\Gamma))$, $\Gamma > 0$ koşulunu sağlayan $z(\Gamma) > 0$ fonksiyonu $\Gamma \to \infty$ olduğunda $+\infty$' a gider.

a) Belli bir c ve $m > 1$ için eğer $\Psi(\Gamma) \leq c\Gamma^m$ ise $\liminf_{\Gamma\to\infty} \Gamma^{-(m/(m-1))} z(\Gamma) > 0$ eşitsizliği geçerlidir.

b) Belli bir c ve $\Gamma \geq \Gamma_1$ için eğer $\Psi(\Gamma) < c\Gamma$ ise $\liminf_{\Gamma\to\infty} z(\Gamma) e^{-\Gamma/c} > 0$ eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.1.

$g(x', t) \equiv 0$, $t \in [0, t]$ olmak üzere, u, $(1)-(3)$ probleminin trivial olmayan çözümü olsun. f(u), F_1 ve F_2 koşullarını sağlasın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$\liminf_{z\to\infty} z^{-(p+1)/(1-2p)} E(z) > 0$, $\quad \frac{1}{2} < p < 1$ ise

$\lim_{z\to\infty} E(z) e^{-\frac{z}{c}} > 0$, $\quad 1 \leq p$ ise

Burada $c^{-1} = \frac{2+M_1 a}{2a} + M_2 C N_1(p)$'dir.

Çözüm:

Problemin trivial olmayan bir çözümü u ve $g(x', t) = 0$ olsun.

(3.1) ifadesi $u_t + \varepsilon u$ ile çarpılıp Ω_z de integre edildiğinde

$$(u_t + \varepsilon u)\, u_{tt} - (u_t + \varepsilon u)\Delta u + (u_t + \varepsilon u)\alpha u_t = 0$$

$$u_t u_{tt} + \varepsilon u u_{tt} - u_t \Delta u - \varepsilon u \Delta u + \alpha u_t u_t + \varepsilon \alpha u u_t = 0 \qquad (3.4)$$

$$\int_{\Omega_z} u_t u_{tt} dV + \varepsilon \int_{\Omega_z} u u_{tt} dV - \int_{\Omega_z} u_t \Delta u dV - \varepsilon \int_{\Omega_z} u \Delta u dV$$

$$+ \alpha \int_{\Omega_z} u_t u_t dV + \varepsilon\alpha \int_{\Omega_z} u u_t dV = 0 \qquad (3.5)$$

elde edilir. Buradaki terimler ele alınıp düzenlendiğinde

$$\int_{\Omega_z} u_t \Delta u dV = -\int_{\Omega_z} \nabla u_t \nabla u dV + \int_{\partial\Omega_z} u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$= -\frac{d}{dt}\int_{\Omega_z} \frac{1}{2} (\nabla u)^2 \, dv + \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u_t(-\beta u_t - f(u)) ds d\varsigma + \int_{D_z} u_t u_3 dA$$

$$\int_{\Omega_z} u \Delta u dV = \varepsilon \left[-\int_{\Omega_z} \nabla u \nabla u dV + \int_{\partial\Omega_z} u \frac{\partial u}{\partial n} ds \right]$$

$$= \varepsilon \left[-\int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 \, dv + \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u_t(-\beta u_t - f(u)) ds d\varsigma + \int_{D_z} u u_3 dA \right]$$

$$u u_{tt} = (u u_t)_t - u_t^2$$

ifadeleri bulunur. Bu eşitlikler (3.5)’de yerine yazıldığında

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} (u_t)^2 dV + \frac{d}{dt}\varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t dV - \varepsilon \int_{\Omega_z} u_t^2 dV + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV +$$

$$\beta \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u_t u_t ds d + \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u_t f(u) ds d\varsigma - \int_{D_z} u_t u_3 dA + \varepsilon \int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV +$$

$$\varepsilon\beta \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u u_t ds d\varsigma + \varepsilon \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u f(u) ds d\varsigma - \varepsilon \int_{D_z} u u_3 dA + \alpha \int_{\Omega_z} u_t u_t dV +$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\varepsilon\alpha \int_{\Omega_z} (u)^2 dV = 0$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra

$$\int_{\partial D} u_t f(u) ds = \int_{\partial D} \left(\frac{d}{dt} \int_0^u f(u) ds \right) = \frac{d}{dt} \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} F(u) ds d\varsigma$$

eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}\Bigg[\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} (u_t)^2 dV +$$

$$\varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t dV + \frac{1}{2}\int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV + \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} F(u) ds d\varsigma + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha \int_{\Omega_z} (u)^2 dV +$$

$$\varepsilon\beta \frac{1}{2} \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} (u)^2 ds d\varsigma \Bigg] + (\alpha - \varepsilon) \int_{\Omega_z} u_t^2 dV + \varepsilon \int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV + \beta \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} (u_t)^2 ds d\varsigma +$$

$$\varepsilon \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u f(u) ds d\varsigma = \int_{D_z} u_t u_3 dA + \varepsilon \int_{D_z} u u_3 dA$$

elde edilir. $[0, t]$ aralığında integre edilip ve (F_1) kullanıldığında

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} (u_t)^2 dV + \frac{1}{2}\int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV + c_0 \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u f(u) ds d\varsigma + \varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t dV +$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon\alpha \int_{\Omega_z} (u)^2 dV + \varepsilon\beta \frac{1}{2} \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} (u)^2 ds d\varsigma + (\alpha - \varepsilon) \int_0^T \int_{\Omega_z} u_t^2 dV \, d\Gamma +$$

$$\varepsilon\int_0^T\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV d\Gamma+\varepsilon\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\varsigma} uf(u)ds d\varsigma\, d\Gamma+\beta\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\varsigma}(u_t)^2 ds d\varsigma\, d\Gamma$$

$$\leq\int_0^T\int_{D_z} u_t u_3 dA\, d\Gamma+\varepsilon\int_0^T\int_{D_z} uu_3 dA\ \ d\Gamma$$

ifadesine ulaşılır.

$$\varepsilon\int_{\Omega_z} uu_t dV\geq-\frac{1}{4}\int_{\Omega_z}(u_t)^2 dV-\varepsilon^2\int_{\Omega_z}(u)^2 dV$$

eşitsizliği $\varepsilon=\frac{\alpha}{2}$ olarak alınıp kullanıldığında

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega_z} uu_t dV\geq-\frac{1}{4}\int_{\Omega_z}(u_t)^2 dV-\frac{\alpha^2}{4}\int_{\Omega_z}(u)^2 dV$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki bazı ifadeler ihmal edilip yukarıdaki eşitsizlik yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_z}(u_t)^2 dV-\frac{1}{4}\int_{\Omega_z}(u_t)^2 dV-\frac{\alpha^2}{4}\int_{\Omega_z}(u)^2 dV+\frac{\alpha^2}{4}\int_{\Omega_z}(u)^2 dV+$$

$$\varepsilon\beta\frac{1}{2}\int_0^z\int_{\partial D_\varsigma}(u)^2 ds d\varsigma+\frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_{\Omega_z} u_t^2 dV\, d\Gamma+\frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV d\Gamma+$$

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\varsigma} uf(u)ds d\varsigma\, d\Gamma+\beta\int_0^T\int_0^z\int_{\partial D_\varsigma}(u_t)^2 ds d\varsigma\, d\Gamma\leq\int_0^T\int_{D_z} u_t u_3 dA\, d\Gamma+$$

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_{D_z} uu_3 dA\ \ d\Gamma$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki bazı ifadeler ihmal edilirse

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^T\left[\int_{\Omega_z}(u_t)^2 dV+\frac{1}{2}\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV+\int_0^z\int_{\partial D_\varsigma} uf(u)ds d\varsigma\right]d\,\Gamma\ \ \leq\ \ \int_0^T\int_{D_z} u_t u_3 dA\, d\Gamma+$$

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_{D_z} uu_3 dA\ \ d\Gamma$$

elde edilir. Eşitsizlik $\frac{2}{\alpha}$ ile çarpıldığında

$$\int_0^T\left[\int_{\Omega_z}(u_t)^2 dV+\frac{1}{2}\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV+\int_0^z\int_{\partial D_\varsigma} uf(u)ds d\varsigma\right]d\,\Gamma\leq$$

$$\frac{2}{\alpha}\int_0^T\int_{D_z} u_t u_3 dA\, d\Gamma+\int_0^T\int_{D_z} uu_3 dA\ \ d\Gamma \qquad (3.6)$$

elde edilir. (3.6)'in sağ tarafındaki ilk ifade de Cauchy-Schwarz ve aritmetik-geometrik eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^T\int_{D_z} u_t u_3 dA\, d\Gamma\leq\int_0^T\left[\left(\int_{D_z}(u_t)^2\right)^{1/2}\left(\int_{D_z}(u_3)^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\leq\ \frac{1}{2}\int_0^T\int_{D_z} u_t^2 dA\, d\Gamma+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{D_z} u_3^2 dA\, d\Gamma+\int_0^T\int_{D_z}(u_1^2+u_2^2)dA\, d\Gamma$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^T\int_{D_z} u_t^2 dA\, d\Gamma+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{D_z}(\nabla u)^2 dA d\Gamma \qquad (3.7)$$

elde edilir. İkinci ifade de Poincare eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^T|(u,u_3)_{\ D_z}|d\Gamma\leq\int_0^T\|u\|_{\ D_z}\|u_3\|_{\ D_z}d\Gamma \qquad (3.8)$$

$\|u\|_{D_z}^2 \leq \frac{1}{\lambda_z}\int_{D_z}|\nabla_1 u|^2 dA + \frac{1}{|D_z|}\left[\int_{D_z} udA\right]^2$

ifadesine ulaşılır. $|D_z|$, D_z'nin alanı ve λ_z Poincare sabitidir. Eşitsizliğin terim terim kareökü alındığında

$\int_{D_z} udA \leq \frac{1}{\lambda_z{}^{1/2}}\int_{D_z}|\nabla_1 u|dA + \frac{1}{|D_z|^{1/2}}\left[\int_{D_z} udA\right]$

elde edilir. Bu eşitsizlik (3.8)'de kullanılırsa ve $m_0 \leq |D_z|$ olduğundan $|D_z|$ yerine m_0 yazıldığında

$$\int_0^T\int_{D_z} uu_3 dA\, d\Gamma \leq \int_0^T\left\{\frac{1}{\lambda_z{}^{1/2}}\int_{D_z}\nabla_1 udA + \frac{1}{m_0{}^{1/2}}\left|\int_{D_z} udA\right|\right\}\int_{D_z} u_3 dAd\Gamma \qquad (3.9)$$

elde edilir. Horgan ve Payne[4] makalelerinden elde edilen aşağıdaki sonuç ve Hölder Eşitsizliği kullanıldığında

$$\left|\int_{D_z} udA\right| \leq \frac{\Gamma\mu}{2}\int_{\partial D_z}|u|ds + \frac{I_z^{1/2}}{2}\left(\int_{D_z}|\nabla_1 u|^2 dA\right)^{1/2} \qquad (3.10)$$

$$\int_{\partial D_z}|u1|ds \leq \left[\int_{\partial D_z}|u|^{2p}ds\right]^{1/2p}\left[\int_{\partial D_z} 1^{2p/2p-1}ds\right]^{2p-1/2p}$$

$$\int_{\partial D_z}|u|ds \leq \left[\int_{\partial D_z}|u|^{2p}ds\right]^{1/2p} L^{2p-1/2p} \qquad (3.11)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada L_z, ∂D_z' nin yüzey alanı ve

$$\Gamma^2\mu(z) = \max_{D_z}|x'|^2, \; I_z = \int_{D_z}|x'|^2 dA, \; |x'|^2 = |(x_1, x_2)|^2$$

olarak belirlidir. Şimdi (3.10) ve (3.11), (3.9)' de yerine yazıldığında

$$\int_0^T\int_{D_z} uu_3 dA\, d\Gamma \leq$$

$$\int_0^T\left\{\frac{1}{\lambda_z{}^{1/2}}\|\nabla_1 u\|_{D_z} + \frac{1}{m_0{}^{1/2}}\left(\frac{\Gamma\mu}{2}\int_{\partial D_z}|u|ds + \frac{I_z^{1/2}}{2}\left(\int_{D_z}|\nabla_1 u|^2 dA\right)^{1/2}\right)\right\}\|u_3\|_{D_z}\, d\Gamma$$

$$\leq \int_0^T\left[\left(\frac{1}{\lambda_z{}^{1/2}} + \frac{I_z^{1/2}}{2|m_0|^{1/2}}\right)\|\nabla_1 u\|_{D_z} + \frac{\Gamma\mu}{2m_0{}^{1/2}}\int_{\partial D_z}|u|ds\right]\|u_3\|_{D_z}\, d\Gamma$$

$$\leq \int_0^T\left[\left(\frac{1}{\lambda_z{}^{1/2}} + \frac{I_z^{1/2}}{2|m_0|^{1/2}}\right)\|\nabla_1 u\|_{D_z} + \frac{\Gamma\mu}{2m_0{}^{1/2}}\left(\int_{\partial D_z}|u|^{2p}ds\right)^{1/2p} L^{2p-1/2p}\right]\|u_3\|_{D_z}\, d\Gamma$$

elde edilir. Sağ taraftaki ikinci terim $\gamma^{1/2p}\gamma^{-1/2p}$ ile çarpılıp,

$$\leq \int_0^T\left[\left(\frac{1}{\lambda_z{}^{\frac{1}{2}}} + \frac{I_z^{1/2}}{2|m_0|^{\frac{1}{2}}}\right)\|\nabla_1 u\|_{D_z} + \gamma^{\frac{1}{2p}}\gamma^{\frac{-1}{2p}}\frac{\Gamma\mu}{2m_0{}^{1/2}} L^{\frac{2p-1}{2p}}\left(\int_{\partial D_z}|u|^{2p}ds\right)^{1/2p}\right]\|u_3\|_{D_z} d\Gamma$$

$$\Gamma\mu = \max_z \Gamma\mu(z), \qquad \lambda_0 = \min_z \lambda_z$$

$$I = \max_z I_z, \qquad L = \max_z L_z$$

$$M_1 = \frac{1}{\lambda_z{}^{1/2}} + \frac{I_z^{1/2}}{2|m_0|^{1/2}}, \qquad M_2 = \Gamma\mu L^{\frac{2p-1}{2p}}\left(2|m_0|^{1/2}\gamma^{1/2p}\right)^{-1}$$

olarak ifade edildiğinde

$$\int_0^T \int_{D_z} u u_3 dA\, d\Gamma \le \int_0^T \left[M_1 \|\nabla_1 u\|_{D_z} + \gamma^{\frac{1}{2p}} M_2 \left(\int_{\partial D_z} |u|^{2p} ds \right)^{1/2p} \right] \|u_3\|_{D_z} d\Gamma \quad (3.12)$$

ifadesine ulaşılır. (3.12)'ye problemde verilen (F_2) eşitsizliği uygulanıp daha sonra elde edilen eşitsizliğin sağ taraftaki ilk terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$\int_0^T \int_{D_z} u u_3 dA\, d\Gamma \le M_1 \int_0^T \|\nabla_1 u\|_{D_z} \|u_3\|_{D_z} d\Gamma + M_2 \int_0^T \left(\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right)^{1/2p} \|u_3\|_{D_z}$$

$$\le \frac{M_1}{2} \int_0^T \left[\|\nabla_1 u\|_{D_z}^2 + \|u_3\|_{D_z}^2 \right] d\Gamma + M_2 \int_0^T \left(\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right)^{1/2p} \|u_3\|_{D_z}$$

$$\le \frac{M_1}{2} \int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 d\Gamma + M_2 \int_0^T \left(\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right)^{1/2p} \|u_3\|_{D_z} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.12)'nin sağ tarafının ikinci teriminin bir üst sınırı belirlendiğinde

$$\left[\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right]^{1/2p} \left[\int_{D_z} u_3^2 dA \right]^{1/2} = \left\{ \left[\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right]^{1/p+1} \left[\int_{D_z} u_3^2 dA \right]^{p/p+1} \right\}^{\frac{p+1}{2p}}.$$

elde edilir. Young eşitsizliği kullanılırsa

$$c^{\Gamma} d^{1-\Gamma} \le \Gamma c \mu + (1-\Gamma) d \mu^{-\Gamma/1-\Gamma} \quad (3.14)$$

μ pozitif sabit ve $0 < \Gamma < 1$ aralığında geçerli olmak üzere, (3.14)' de $\Gamma = \frac{1}{p+1}$, $\mu = p^{\frac{p}{p+1}}$ olsun

$$\left[\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right]^{\frac{1}{p+1}} \left[\int_{D_z} u_3^2 dA \right]^{\frac{p}{p+1}} \le \frac{1}{p+1} p^{\frac{p}{p+1}} \int_{\partial D_z} u f(u) ds + \frac{p}{p+1} \left(p^{\frac{p}{p+1}} \right)^{\frac{-1}{p}} \int_{D_z} u_3^2 dA$$

$$\le (p+1)^{-1} p^{\frac{p}{p+1}} \int_{\partial D_z} u f(u) ds + \frac{p}{p+1} p^{-\frac{1}{p+1}} \int_{D_z} u_3^2 dA$$

elde edilir. $N(p) = (p+1)^{-1} p^{\frac{p}{p+1}}$ olarak belirlendiğinde

$$\left[\int_{\partial D_z} u f(u) ds \right]^{1/2p} \left[\int_{D_z} u_3^2 dA \right]^{1/2} \le \left\{ N(p) \left[\int_{\partial D_z} u f(u) ds + \int_{D_z} u_3^2 dA \right] \right\}^{\frac{p+1}{2p}} d\Gamma \quad (3.15)$$

olur. $N_1(p) = (N(p))^{\frac{p+1}{2p}}$ olarak belirlensin ve (3.12)'ye (3.14) uygulandığında

$$\int_0^T |(u, u_3)_{D_z}| d\Gamma \le \frac{M_1}{2} \int_0^T \|\nabla u\|_{D_z}^2 d\Gamma + M_2 C\, N_1(p) \left\{ \int_0^T \int_{\partial D_z} u f(u) ds\, d\Gamma + \int_0^T \|u_3\|_{D_z}^2 d\Gamma \right\}^{\frac{p+1}{2p}} \quad (3.16)$$

olur. (3.7), (3.16) ve (6) birlikte kullanıldığında

$$\int_0^T \left[\|u_t\|_{\Omega_z}^2 + \|\nabla u\|_{\Omega_z}^2 + \int_0^z \int_{\partial D_\varsigma} u f(u) ds d\varsigma \right] d\Gamma \le$$

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^T \left| (u_t, u_3)_{D_z} \right| d\Gamma + \int_0^T \left| (u, u_3)_{D_z} \right| d\Gamma$$

$\int_0^T \left[\|u_t\|^2_{\Omega_z} + \|\nabla u\|^2_{\Omega_z} + \int_0^z \int_{\partial D_ç} uf(u)dsdç\right] d\Gamma \leq \frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|u_t\|^2_{D_z} d\Gamma + \right.$

$\left.\frac{1}{2}\int_0^T \|\nabla u\|^2_{D_z} d\Gamma\right) +$

$\frac{M_1}{2}\int_0^T \int_{D_z} |\nabla u|^2 dA\, d\Gamma + M_2 C N_1(p)\left\{\int_0^T \int_{\partial D_z} uf(u)ds\, d\Gamma + \int_0^T \int_{D_z} |u_3|^2_{D_z} dA\, d\Gamma\right\}^{\frac{p+1}{2p}}$

elde edilir. Eşitsizliğinin sağ tarafına bazı terimler eklendiğinde

$\leq a^{-1}\left[\int_0^T \|u_t\|^2_{D_z} d\Gamma + \left(\frac{M_1 a}{2} + 1\right)\int_0^T \|\nabla u\|^2_{D_z} d\Gamma + \int_0^T \int_{\partial D_z} uf(u)ds\, d\Gamma\right] +$

$M_2 C N_1(p)\left\{\int_0^T \int_{\partial D_z} uf(u)ds\, d\Gamma + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{D_z} d\Gamma + \int_0^T \|u_t\|^2_{D_z} d\Gamma\right\}^{\frac{p+1}{2p}}$ (3.18)

ifadesine ulaşılır.

$E(z) = \int_0^T \|u_t\|^2_{\Omega_z} d\Gamma + \int_0^T \|\nabla u\|^2_{\Omega_z} d\Gamma + \int_0^T \int_0^z \int_{\partial D_ç} uf(u)dsdç\, d\Gamma$ (3.19)

olsun. Bu ifade (3.17) eşitsizliğinde kullanıldığında

$E(z) \leq \left(\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{a}\right)E'(z) + M_2 C N_1(p)[E'(z)]^{\frac{p+1}{2p}}$ (3.20)

elde edilir. (3.19)'in sağ tarafında $\Psi(\Gamma)$ fonksiyonu $\Psi(\Gamma) = c_1\Gamma + c_2\Gamma^{\frac{p+1}{2p}}$ olarak tanımlansın. İlk olarak $\frac{1}{2} < p < 1$ olma durumu ele alınacaktır.

$1 < 2p < 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2p} < 1$ dir. Buradan $1 < \frac{p+1}{2p} < \frac{3}{2}$ olarak bulunur.

$\Psi(\Gamma) = c_1\Gamma + c_2\Gamma^{\frac{p+1}{2p}}$

$\Psi(E(z)) = c_1(E'(z)) + c_2(E'(z))^{\frac{p+1}{2p}}$

Lemma 1 a)'dan

$m = \frac{p+1}{2p} \Longrightarrow \frac{m}{m-1} = \frac{p+1}{1-p}$ olur. Belirlenen $\Psi(\Gamma)$ fonksiyonunda sağ tarafta ikinci terim daha büyük olduğundan ilk terim alınmayacaktır.

$\liminf_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{m/m-1}} = \liminf_{z\to\infty} E(z) z^{-(p+1)/(1-p)} > 0$

$\liminf_{z\to\infty} z^{-(p+1)/(1-p)} E(z) > 0, \qquad \frac{1}{2} < p < 1$

olur.

$1 \leq p$ olma durumu ele alınırsa $2p \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{2p} \leq \frac{1}{2}$ olur, buradan da $\frac{p+1}{2p} \leq 1$ elde edilir.

Lemma 1 b)'den

$\lim_{z\to\infty} E(z) e^{-\frac{z}{c}} > 0, \qquad 1 \leq p$

olur.

3.3. p-Laplasyen Terim İçeren Bir Dalga Denklemi Problemi

$$u_{tt} - \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \Delta u_t \quad x \in \Omega, \ t \in [0,T] \tag{3.21}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.22}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T] \tag{3.23}$$

$$u(x',0,t) = f(x_1,x_2,t), \quad t \in [0,T] \tag{3.24}$$

başlangıç sınır değer probleminde $\Omega \in R^3$ olmak üzere $u(x,t)$ çözümünün p nin farklı durumlarına göre ne şekilde arttığı ($\to \infty$) gösterilecektir. Daha sonra çözümün sıfıra gittiği de gösterilecektir.

$\Omega = \{x \in R^n : x_n \in R^+, x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in D_{x_n} \subset R^{n-1}\}$, $z > 0$, $D_z \subset R^{n-1}$ olmak üzere ∂D_z sınırları yeterince düzgün ve

$$0 < m_0 \leq \inf_z |D_z| \leq \sup_z |D_z| \leq m_1 < \infty, \qquad \forall z \in R^+$$

koşulunu sağlar. Burada $\frac{\partial u}{\partial n} := \sum_{i=1}^{n} n_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ normal türevi gösterir. $S_z := \{x \in R^n, x' \in \partial D_{x_n}, z \leq x_n < \infty\}$. $\Omega_z = \Omega \cap \{x \in R^n : 0 < x_n < z\}$, $R_z = \Omega \cap \{x \in R^n : z < x_n < \infty\}$ olarak ifade edilir.

Çözüm:

Bu amaçla denklem $u_t + \varepsilon u$ ile çarpılıp Ω_z'de integre edildiğinde

$$\int_{\Omega_z} u_t u_{tt} dV + \varepsilon \int_{\Omega_z} u u_{tt} dV - \int_{\Omega_z} u_t \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) dV - \varepsilon \int_{\Omega_z} u \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\, dV -$$
$$\int_{\Omega_z} u_t \Delta u_t dV - \varepsilon \int_{\Omega_z} u \Delta u_t\, dV = 0 \tag{3.25}$$

olur. Buradaki terimler düzenlendiğinde

$$\int_{\Omega_z} u_t u_{tt}\, dV = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_z} {u_t}^2 dV$$

$$\int_{\Omega_z} u u_{tt}\, dV = \frac{d}{dt}\varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t\, dV - \varepsilon \int_{\Omega_z} {u_t}^2 dV$$

$$\int_{\Omega_z} u_t \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) dV = -\int_{\Omega_z} |\nabla u|^{p-2}\nabla u_t dV + \int_{\partial\Omega_z} u_t |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} dV$$
$$= -\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_z} |\nabla u|^p\, dV + \underbrace{\int_{\partial\Omega_z} u_t |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} ds}_{0} + \int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds$$
$$= -\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_z} |\nabla u|^p\, dV + \int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds$$

$$\varepsilon \int_{\Omega_z} u \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\, dV = \varepsilon\left\{-\int_{\Omega_z} |\nabla u|^{p-1}\nabla u dV + \int_{\partial\Omega_z} u|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} dV\right\}$$

$$= -\varepsilon \int_{\Omega_z} |\nabla u|^p \, dV \underbrace{\int_{\partial\Omega_z} u|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} ds}_{0} + \varepsilon \int_{D_z} u u_3^{p-1} ds$$

$$= -\varepsilon \int_{\Omega_z} |\nabla u|^p \, dV + \varepsilon \int_{D_z} u u_3^{p-1} ds$$

$$\int_{\Omega_z} u_t \Delta u_t dV = -\int_{\Omega_z} \nabla u_t \nabla u_t dV + \int_{\partial\Omega_z} u_t \frac{\partial u_t}{\partial n} ds$$

$$= -\int_{\Omega_z} (\nabla u_t)^2 dV + \underbrace{\int_{\partial\Omega_z} u_t \frac{\partial u_t}{\partial n} ds}_{0} + \int_{D_z} u_t u_{3t} ds$$

$$= -\int_{\Omega_z} (\nabla u_t)^2 dV + \int_{D_z} u_t u_{3t} ds$$

$$\varepsilon \int_{\Omega_z} u \Delta u_t \, dV = -\int_{\Omega_z} \nabla u \nabla u_t dV + \int_{\partial\Omega_z} u \frac{\partial u_t}{\partial n} ds$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV + \underbrace{\varepsilon \int_{\partial\Omega_z} u \frac{\partial u_t}{\partial n} ds}_{0} + \varepsilon \int_{D_z} u u_{3t} ds$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV + \varepsilon \int_{D_z} u u_{3t} ds$$

eşitlikleri bulunur. Bulunan bu eşitlikleri (3.25) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} {u_t}^2 dV + \varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t \, dV + \frac{1}{p}\int_{\Omega_z} |\nabla u|^p \, dV + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV\right] - \varepsilon \int_{\Omega_z} {u_t}^2 dV +$$
$$\varepsilon \int_{\Omega_z} |\nabla u|^p \, dV + \int_{\Omega_z} (\nabla u_t)^2 dV \;\leq \left|\int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds\right| + \left|\varepsilon \int_{D_z} u u_3^{p-1} ds\right| +$$
$$\left|\int_{D_z} u_t u_{3t} ds\right| + \left|\varepsilon \int_{D_z} u u_{3t} ds\right| \tag{3.26}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik t'ye göre [0,T] aralığında integre edildiğinde

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} {u_t}^2 dV + \varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t \, dV + \frac{1}{p}\int_{\Omega_z} |\nabla u|^p \, dV + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_z} (\nabla u)^2 dV - \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega_z} {u_t}^2 dV \, d\Gamma$$
$$+\varepsilon \int_0^T \int_{\Omega_z} |\nabla u|^p \, dV d\Gamma + \int_0^T \int_{\Omega_z} (\nabla u_t)^2 dV d\Gamma \leq \left|\int_0^T \int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds d\Gamma\right| +$$
$$\varepsilon \left|\int_0^T \int_{D_z} u u_3^{p-1} ds d\Gamma\right| + \left|\int_0^T \int_{D_z} u_t u_{3t} ds d\Gamma\right| + \varepsilon \left|\int_0^T \int_{D_z} u u_{3t} ds d\Gamma\right| \tag{3.27}$$

ifadesine ulaşılır. Sol taraftaki $\varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t \, dV$ terimi için $\delta > 0$ olmak üzere, Cauchy ve Poincare eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t \, dV \leq \varepsilon \int_{\Omega_z} \frac{u^2}{2} dV + \varepsilon \int_{\Omega_z} \frac{u_t^2}{2} dV$$

$$\leq \frac{\varepsilon\delta}{2} \int_{\Omega_z} \frac{u^2}{2} dV + \frac{\varepsilon}{2\delta} \int_{\Omega_z} \frac{u_t^2}{2} dV$$

$$\leq \frac{\varepsilon\delta\lambda}{2} \int_{\Omega_z} \frac{\nabla u^2}{2} dV + \frac{\varepsilon}{2\delta} \int_{\Omega_z} \frac{u_t^2}{2} dV$$

$$\varepsilon \int_{\Omega_z} u u_t \, dV \geq -\frac{\varepsilon\delta\lambda}{2} \int_{\Omega_z} \frac{\nabla u^2}{2} dV - \frac{\varepsilon}{2\delta} \int_{\Omega_z} \frac{u_t^2}{2} dV$$

olur. Bu eşitsizlik (3.27) de yerine yazıldığında ifadenin sol tarafı,

$\frac{1}{2}\int_{\Omega_z} u_t{}^2 dV - \frac{\varepsilon\delta\lambda}{2}\int_{\Omega_z}\frac{\nabla u^2}{2} dV - \frac{\varepsilon}{2\delta}\int_{\Omega_z}\frac{u_t^2}{2} dV + \frac{1}{p}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV =$

$\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)\int_{\Omega_z} u_t{}^2 dV + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon\delta\lambda}{2}\right)\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV + \frac{1}{p}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV$

olur. Burada $\frac{\varepsilon}{\delta} < 1 \Longrightarrow \delta > \varepsilon$ ve $1 - \lambda\delta > 0 \Longrightarrow \delta < \frac{1}{\lambda}$ alınsın, yani $\varepsilon < \delta < \frac{1}{\lambda}$ olarak seçilirse

$\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)\int_{\Omega_z} u_t{}^2 dV + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon\delta\lambda}{2}\right)\int_{\Omega_z}(\nabla u)^2 dV + \frac{1}{p}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV \geq 0$ olur.

$$\int_0^T\left[-\varepsilon\int_{\Omega_z} u_t{}^2 dV + \varepsilon\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV\right] d\Gamma \leq \left|\int_0^T\int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds d\Gamma\right| +$$

$$\varepsilon\left|\int_0^T\int_{D_z} u u_3^{p-1} ds d\Gamma\right| + \left|\int_0^T\int_{D_z} u_t u_{3t} ds d\Gamma\right| + \varepsilon\left|\int_0^T\int_{D_z} u u_{3t} ds d\Gamma\right| \tag{3.28}$$

olur. Sol taraftaki ifadede Poincare eşitsizliği kullanıldığında

$$\int_0^T\left[\varepsilon\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV - \varepsilon\int_{\Omega_z} u_t{}^2 dV\right] d\Gamma$$

$$\geq \int_0^T\left[\int_{\Omega_z}\varepsilon\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + (\nabla u_t)^2 dV - \varepsilon\lambda\int_{\Omega_z}\nabla u_t{}^2 dV\right] d\Gamma$$

$$= \int_0^T\left[\varepsilon\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + (1 - \varepsilon\lambda)\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV\right] d\Gamma$$

elde edilir. Burada $1 - \varepsilon\lambda > 0 \Longrightarrow \varepsilon < \frac{1}{\lambda}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{1+\lambda}$ olarak seçilsin, $1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}$ olur.

$$= \int_0^T\left[\frac{1}{1+\lambda}\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \frac{1}{1+\lambda}\int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV\right] d\Gamma$$

Bu ifade (3.28)'de yerine yazılıp (3.28) $1 + \lambda$ ile çarpıldığında

$$\int_0^T\left[\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV\right] d\Gamma \leq (1 + \lambda)\left|\int_0^T\int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds d\Gamma\right| +$$

$$\left|\int_0^T\int_{D_z} u u_3^{p-1} ds d\Gamma\right| + (1 + \lambda)\left|\int_0^T\int_{D_z} u_t u_{3t} ds d\Gamma\right| + \left|\int_0^T\int_{D_z} u u_{3t} ds d\Gamma\right| \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.29)'un sağ tarafındaki integraller düzenlenirse sağ taraftaki ilk ifadede sıraıyla Hölder, Young ve Poincare Eşitsizlikleri uygulandığında

$$\left|\int_{D_z} u_t u_3^{p-1} ds\right| \leq \left(\int_{D_z}|u_t|^p ds\right)^{1/p}\left(\left(\int_{D_z}|u_3|^{p-1} ds\right)^{p/p-1}\right)^{p-1/p}$$

$$= \left(\int_{D_z}|u_t|^p ds\right)^{1/p}\left(\int_{D_z}|u_3|^p ds\right)^{p-1/p}$$

$$\leq \frac{1}{p}\int_{D_z}|u_t|^p ds + \frac{p-1}{p}\int_{D_z}|u_3|^p ds$$

$$\leq \frac{\lambda_1{}^p}{p}\left(\int_{D_z}|\nabla u_t|^p ds\right)^{p/2} + \frac{p-1}{p}\int_{D_z}|\nabla u|^p ds$$

olur. İkinci ifadede Hölder ve Poincare eşitsizlikleri uygulandığında

$$\left|\int_{D_z} uu_3^{p-1}ds\right| \le \left(\int_{D_z}|u|^p ds\right)^{1/p}\left(\left(\int_{D_z}|\nabla u|^{p-1}ds\right)^{p/p-1}\right)^{p-1/p}$$
$$\le \left(\lambda_2\int_{D_z}|u|^p ds\right)^{1/p}\left(\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\right)^{p-1/p}$$
$$\le \lambda_2^{\ 1/p}\int_{D_z}|u|^p ds$$

olarak bulunur. Benzer şekilde üçüncü ifadede Cauchy ve Poincare Eşitsizlikleri uygulandığında

$$\left|\int_{D_z} u_t u_{3t} ds\right| \le \frac{1}{2}\int_{D_z} u_t^2 ds + \frac{1}{2}\int_{D_z} u_{t3}^2 ds$$
$$\le \frac{\lambda_3}{2}\int_{D_z}(\nabla u_t)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{D_z}(\nabla u_t)^2 ds$$
$$\le \frac{1+\lambda_3}{2}\int_{D_z}(\nabla u_t)^2 ds$$

elde edilir. Dördüncü ifadede Cauchy, Poincare ve Hölder eşitsizlikleri uygulandığında

$$\int_{D_z} uu_{3t} ds \le \frac{1}{2}\int_{D_z} u^2 ds + \frac{1}{2}\int_{D_z} u_{t3}^2 ds$$
$$\le \frac{\lambda_4}{2}\int_{D_z}\nabla u^2 ds + \frac{1}{2}\int_{D_z}\nabla u_t^{\ 2} ds$$
$$\le \frac{\lambda_4}{2}\left(\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\right)^{2/p}\underbrace{\left(\int_{D_z} 1^{p/p-2} ds\right)^{p-2/p}}_{L_z} + \frac{1}{2}\int_{D_z}\nabla u_t^{\ 2} ds$$
$$\le \frac{\lambda_4 L_z}{2}\left(\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\right)^{2/p} + \frac{1}{2}\int_{D_z}\nabla u_t^{\ 2} ds$$

elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeler (3.29)'da yerine yazıldığında

$$\int_0^T\left[\int_{\Omega_z}|\nabla u|^p\, dV + \int_{\Omega_z}(\nabla u_t)^2 dV\right]d\Gamma \le (1+\lambda)\frac{\lambda_1^{\ p}}{p}\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u_t|^p ds\, d\Gamma\right)^{p/2} +$$
$$(1+\lambda)\frac{p-1}{p}\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\, d\Gamma + \lambda_2^{\ 1/p}\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\, d\Gamma$$
$$+ (1+\lambda)\frac{1+\lambda_3}{2}\int_0^T\int_{D_z}(\nabla u_t)^2 ds\, d\Gamma + \frac{\lambda_4 L_z}{2}\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\, d\Gamma\right)^{2/p} + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{D_z}\nabla u_t^{\ 2} ds$$
$$\le (1+\lambda)\frac{\lambda_1^{\ p}}{p}\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u_t|^2 ds\, d\Gamma + \int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\, d\Gamma\right)^{p/2} +$$
$$\left((1+\lambda)\left(\frac{p-1}{p}\right) + \lambda_2^{\ 1/p}\right)\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\, d\Gamma + \left((1+\lambda)\left(\frac{1+\lambda_3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$$
$$\int_0^T\int_{D_z}(\nabla u_t)^2 ds\, d\Gamma + \frac{\lambda_4 L_z}{2}\left(\int_0^T\int_{D_z}|\nabla u|^p ds\, d\Gamma + \int_0^T\int_{D_z}(\nabla u_t)^2 ds\right)^{2/p} \qquad (3.30)$$

ifadesine ulaşılır.

$m_0 = \left((1+\lambda)\frac{p-1}{p} + \lambda_2^{\ 1/p},\ \ (1+\lambda)\left(\frac{1+\lambda_3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$ olarak seçilsin ve

$m_1 = (1+\lambda)\frac{\lambda_1{}^p}{p}$, $\quad m_2 = \frac{\lambda_4 L_z}{2}$ olsun.

$$\int_0^T \left[\int_{\Omega_z} |\nabla u|^p \, dV + \int_{\Omega_z} (\nabla u_t)^2 dV\right] d\Gamma \leq m_1 \left(\int_0^T \int_{D_z} |\nabla u_t|^2 ds\, d\Gamma + \int_0^T \int_{D_z} |\nabla u|^p ds\right)^{p/2}$$
$$+ m_0 \left(\int_0^T \int_{D_z} |\nabla u_t|^2 ds\, d\Gamma + \int_0^T \int_{D_z} |\nabla u|^p ds\right)$$
$$+ m_2 \left(\int_0^T \int_{D_z} |\nabla u|^p ds\, d\Gamma + \int_0^T \int_{D_z} (\nabla u_t)^2 ds\right)^{2/p} \quad (3.31)$$

$E(z) = \int_0^T \int_{\Omega_z} |\nabla u_t|^2 ds\, d\Gamma + \int_0^T \int_{\Omega_z} |\nabla u|^p ds\, d\Gamma$ olduğundan

$$E(z) \leq m_1 (E'(z))^{p/2} + m_0 E'(z) + m_2 (E'(z))^{2/p} \quad (3.32)$$

elde edilir. (3.32) için $\Psi(\Gamma)$ fonksiyonu

$$\Psi(\Gamma) = m_0 \Gamma + m_1 \Gamma^{p/2} + m_2 \Gamma^{2/p}$$

olarak tanımlansın.

$p > 2$ ise, Lemma 3.1.'den $m = \frac{p}{2}$ ve $\frac{m}{m-1} = \frac{p}{p-2}$ olur. O halde

$$\liminf_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{m/m-1}} = \liminf_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{p/p-2}} = \liminf_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(p/p-2)} \geq 0$$

$$\liminf_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(p/p-2)} \geq 0\,, \qquad p > 2$$

olarak bulunur. Eğer $p = 2$ ise, Lemma 3.1.'den

$$\liminf_{z\to\infty} E(z) e^{-\frac{z}{c}} > 0\,, \qquad p = 2$$

elde edilir. $p < 2$ ise, Lemmadan , $m = \frac{2}{p}$ ve $\frac{m}{m-1} = \frac{2}{2-p}$ olur.

$$\liminf_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{m/m-1}} = \liminf_{z\to\infty} \frac{E(z)}{z^{2/2-p}} = \liminf_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(2/2-p)} \geq 0$$

$$\liminf_{z\to\infty} E(z)\, z^{-(2/2-p)} \geq 0\,, \qquad p < 2$$

olarak bulunur.

Şimdi problem R_z bölgesinde ele alınırsa, yani sonsuzda ne şekilde değiştiği gösterilecek. Bunun için denklem $u_t + \varepsilon u$ ile çarpılıp ve R_z'de integre edilip, yukarıdakine benzer işlemler yapılırsa sonuç olarak,

$$E(z) \leq m_1 (-E'(z))^{p/2} + m_0(-E'(z)) + m_2(-E'(z))^{2/p}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlik benzer şekilde p'nin üç farklı durumu için gösterilecektir.

$p > 2$ için,

$E(z) \leq m_2 (-E'(z))^{2/p}$ eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik integre edildiğinde

$$\left(E(z)\right)^{p/2} \leq (m_2)^{p/2} \left(-E'(z)\right)$$

$\int_0^z \frac{(-E'(z))}{(E(z))^{p/2}} \geq \int_0^z m_2{}^{-p/2}$

$\int_0^z \frac{2}{p-2}\frac{d}{dt}\left(E^{2-p/2}\right) \geq m_2{}^{-p/2}z$

$\frac{2}{p-2}\left(E(z)\right)^{2-p/2} - \frac{2}{p-2}\left(E(0)\right)^{2-p/2} \geq m_2{}^{-p/2}z$

$\left(E(z)\right)^{2-p/2} \geq \left(E(0)\right)^{2-p/2} + C_0 z$

$\left(E(z)\right)^{p-2/2} \leq \frac{1}{(E(0))^{2-p/2}+C_0 z}$

$E(z) \leq \frac{1}{\left((E(0))^{2-p/2}+C_0 z\right)^{2/p-2}}$

olarak blunur. Buradan E(z)'nin sıfıra gittiği görülür.

$p < 2$ için,

$E(z) \leq m_1(-E'(z))^{p/2}$ eşitsizliği geçerlidir. İntegre edildiğinde

$\left(E(z)\right)^{2/p} \leq (m_1)^{2/p}\left(-E'(z)\right)$

$\int_0^z \frac{(-E'(z))}{(E(z))^{2/p}} \geq \int_0^z m_1{}^{-p/2}$

$\int_0^z \frac{p}{p-2}\frac{d}{dt}\left(E^{p-2/p}\right) \geq m_1{}^{-2/p}z$

$\frac{p}{2-p}\left(E(z)\right)^{p-2/p} - \frac{p}{2-p}\left(E(0)\right)^{p-2/p} \geq m_1{}^{-2/p}z$

$\left(E(z)\right)^{p-2/p} \geq \left(E(0)\right)^{p-2/p} + C_1 z$

$\left(E(z)\right)^{2-p/p} \leq \frac{1}{(E(0))^{p-2/p}+C_1 z}$

$E(z) \leq \frac{1}{\left((E(0))^{p-2/p}+C_0 z\right)^{p/2-p}}$

ifadesi elde edilir. Buradan da E(z)'nin sıfıra gittiği görülür.

$p = 2$ için,

$E(z) \leq -mE'(z)$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitsizlik $e^{z/m}$ ile çarpıldığında

$e^{z/m}\, E'(z) + e^{z/m}\, m^{-1}E(z) \leq 0$

$\int_0^z \frac{d}{dz}[E(z)e^{z/m}] \leq 0$

$E(z)e^{z/m} - E(0) \leq 0$

$E(z) \leq E(0)\, e^{-z/m}$

olarak bulunur. Buradan da E(z)'nin sıfıra gittiği görülür.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde Phragmen-Lindelöf tipi azalım kestirimlerinin yarı sonsuz dikdörtgensel bir alanda nasıl elde edildiği gösterilmektedir. Yani, bir ölçümün verilen bir üstel fonksiyondan daha hızlı ve asimptotik olarak artmadığı biliniyorsa, o çözümün ölçümü sonsuza doğru gidildikçe üstel olarak azalıyor anlamına gelmektedir.

Homojen başlangıç ve sınır koşulları altında p-Laplasyen terim içeren denklemin çözümünün uzaysal davranışı incelenmiş ve p'nin durumlarına göre çözümlerin asimptotik davranışları gösterilmektedir. Homojen olmayan sınır koşulları altında dalga denklemiyle verilen bir başlangıç sınır-değer problemi incelenmiş ve f fonksiyonunun sağladığı koşula göre çözümü içeren E(z)'nin polinomik hızla sonsuza veya üstel hızla sıfıra doğru gittiği görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] FLAVIN, J. N., RIONERO, S., ‘Qualitative Estimates for Partial Differrantial Equations’, CRC Press, (1996).

[2] CELEBİ, A. O., KALANTAROV, V. K., Spatial behavior estimates fort he wave equation under nonlinear boundary conditions, Mathematical and Computer Modelling 34(2001) 527-532.

[3] BRAUER, F., NOBEL, J. A., ‘The Qualitative Theory of Ordinary Differantial Equation’, Power Publications, (1989).

[4] LANGHAAR, H. L., ‘Energy Methods in Applied Mechanics’, john Wiley and Sons, (1962).

[5] KNOWLES, J. K., On Saint-Venant’s principle in the two-dimensional linear theory of elasticity, Arch. Ration. Mech. Anal., 21, 1, 1965.

[6] TOUPIN, R. A., Saint-Venant’s principle, Adv. in Appl. Mech., 23, 179, 1983.

[7] HORGAN, C. O., KNOWLES, J. K., Recent developments concerning Saint-Venant’s principle in the two-dimensional linear theory of elasticity, Arch. Ration. Mech. Anal., 21, 1, 1965.

[8] EVANS, L. C., ‘Partial Differantial Equations’, Graduate Studies in Math. Vol. 19, AMS(1998).

ÖZGEÇMİŞ

Emel Aydın, 25.06.1985 de Gölpazarı'nda doğdu. İlköğretimi ve lise eğitimini Geyve'de tamamladı. Bir yılı hazırlık olmakla beraber beş yıllık lisans eğitimini Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik bölümünde 2010 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans programına başladı. Şu anda Sapanca Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakfı'nda Büro Görevlisi olarak çalışmaktadır.