

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKETLER
VE
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhsin ÇELİK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR

Mart 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKETLER
VE
UYGULAMALARI

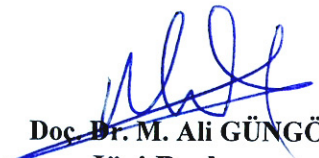
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhsin ÇELİK


Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 29/01/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.


Doc. Dr. M. Ali GÜNGÖR
Jüri Başkanı


Prof. Dr. Murat TOSUN
Üye


Yrd. Doç. Dr. Hakan YAKUT
Üye

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında desteğini gördüğüm, tezimin hazırlanmasında değerli fikirleri ve rehberliğiyle bana ışık tutan, yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e teőekkürlerimi belirtmek isterim.

Tezin bitiminde baştan sona okuyup gerekli düzeltmeler konusunda fikir veren değerli hocam Prof. Dr. Murat TOSUN'a ve tez çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen mesai arkadaşım Uzm. Selman HIZAL'a teőekkürü borç bilirim.

Desteęini her zaman yanımda hissettiğim değerli eşim Zeynep ÇELİK'e ve bu günlere gelmemde yıllarını, hayatlarını ve emeklerini esirgemeyen, daima güvenen sevgili aileme de sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Muhsin ÇELİK

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
SUMMARY.....	ix
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Temel Kavramlar.....	3
2.2. Bir Parametrelî Düzlem Hareketi.....	5
2.3. Hızlar ve Hızların Birleşimi.....	6
2.4. Dönme Polü Ve Pol Yörüngeleri.....	7
BÖLÜM 3.	
ÖKLİD DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HAREKETLER.....	8
3.1. Genel İki Parametrelî Hareket.....	8
3.2. Hareketin İvme Polü.....	16
3.3. Özel İki Parametrelî Hareket.....	17
3.4. Özel İki Parametrelî Hareketin İvme Polü.....	26

BÖLÜM 4.	
ÖKLİD DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKETLER	28
4.1. Genel İki Parametrelili Homotetik Hareket.....	28
4.2. Homotetik Hareketin İvme Polü.....	40
4.3. Özel İki Parametrelili Homotetik Hareket.....	43
4.4. Özel İki Parametrelili Homotetik Hareketin İvme Polü.....	52
BÖLÜM 5.	
ÖKLİD UZAYINDA BİR EĞRİ BOYUNCA İKİ PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKET.....	55
5.1. Homotetik Hareketin Yörünge Yüzeylerinin Parametrizasyonları.....	58
5.1.1. Homotetik Hareket Altında Silindir Yüzeyleri.....	58
5.1.2. Homotetik Hareket Altında Tor Yüzeyleri.....	61
5.1.3. Homotetik Hareket Altında Hiperboloid Yüzeyler.....	62
BÖLÜM 6.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	65
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	68

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{R}^2	: 2–boyutlu Öklid düzlemi
\mathbb{R}^3	: 3–boyutlu Öklid uzayı
E^n	: n –boyutlu Öklid uzayı
$\langle \rangle$: Öklid iç çarpımı
$\ \ $: Norm
\wedge	: Vektörel çarpım
E^2	: Hareketli Öklid düzlemi
E'^2	: Sabit Öklid düzlemi
E^3	: Hareketli Öklid uzayı
E'^3	: Sabit Öklid uzayı
M_I	: Bir parametrelili hareket
M_{II}	: İki parametrelili hareket
N_I	: Bir parametrelili homotetik hareket
N_{II}	: İki parametrelili homotetik hareket
$\varphi(s, t)$: E^3 ün E'^3 e göre genel iki parametrelili hareketi
$h(s, t)$: Homotetik sabiti
(y_1, y_2)	: E'^2 sabit düzleminin koordinat fonksiyonları
(x, y)	: E^2 hareketli düzleminin koordinat fonksiyonları
$A(s, t)$: Ortogonal matris
$\vec{d}(s, t)$: Öteleme vektörü
$O(2)$: 2×2 tipindeki ortogonal matrislerin cümlesi
$O(3)$: 3×3 tipindeki ortogonal matrislerin cümlesi

- $C(3)$: 3×3 tipindeki anti-simetrik matrislerin cümlesi
- \vec{V}_a : Mutlak hız
- \vec{V}_f : Sürüklenme hızı
- \vec{V}_r : Relatif hız
- $\bar{P}(\bar{x}_p, \bar{y}_p)$: Sabit düzlemdeki pol noktaları
- $P(x_{ip}, y_{ip})$: Hareketli düzlemdeki ivme polleri
- $\bar{P}(\bar{x}_{ip}, \bar{y}_{ip})$: Sabit düzlemdeki ivme polleri
- $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$: Frenet çatısı
- $\varphi_t \wedge \varphi_s$: p noktasının yörüngesinin çizdiği yüzeyin normal

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Sabit ve hareketli düzlemlerin birbirine göre durumları.....	5
Şekil 5.1.	Homotetik Silindir Yüzeyi $\{ \alpha(s) = (0,0,s) , h(s,t) = s^{sint cost} , 0 < s < 1 \}$	59
Şekil 5.2.	Silindir Yüzeyi $\{ h(s,t) = 1 \}$	59
Şekil 5.3.	Homotetik Silindir Yüzeyi $\{ \alpha(s) = (0,0,s) , h(s,t) = s + sint cost , -1 < s < 1 \}$	59
Şekil 5.4.	Silindir Yüzeyi $\{ h(s,t) = 1 \}$	59
Şekil 5.5.	Homotetik Silindir Yüzeyi $\{ \alpha(s) = (s,0,0) , h(s,t) = s^{sint cost} , 0 < s < 1 \}$	60
Şekil 5.6.	Silindir Yüzeyi $\{ h(s,t) = 1 \}$	60
Şekil 5.7.	Homotetik Tor Yüzeyi $\{ \alpha(s) = (r sin \theta, r cos \theta, 0) , h(s,t) = s + sint cost , 0 < s < 1 \}$	61
Şekil 5.8.	Tor Yüzeyi $\{ h(s,t) = 1 \}$	61
Şekil 5.9.	Homotetik Tor Yüzeyi $\{ h(s,t) = s + sint cost , 0 < s < 1 , -\pi < t, \theta < \pi \}$	62
Şekil 5.10.	Homotetik Tor Yüzeyi $\{ h(s,t) = s + sint cost , 0 < s < 1 , 0 < t, \theta < \pi \}$	62
Şekil 5.11.	Homotetik Hiperboloid Yüzeyi $\{ \alpha(s) = (0,0,s) , h(s,t) = s + sint cost , -1 < s < 1 \}$	63
Şekil 5.12.	Hiperboloid Yüzey $\{ h(s,t) = 1 \}$	63
Şekil 5.13.	Homotetik Hiperboloid Yüzeyi $\{ -2 < s < 2 \}$	63
Şekil 5.14.	Homotetik Hiperboloid Yüzey $\{ -20 < s < 20 \}$	63
Şekil 5.15.	Homotetik Hiperboloid Yüzeyi $\{ \alpha(s) = (s,0,0) , h(s,t) = s + sint cost , -1 < s < 1 \}$	64
Şekil 5.16.	Hiperboloid Yüzey $\{ h(s,t) = 1 \}$	64
Şekil 5.17.	Homotetik Hiperboloid Yüzeyi $\{ -2 < s < 2 \}$	64
Şekil 5.18.	Homotetik Hiperboloid Yüzey $\{ -20 < s < 20 \}$	64

ÖZET

Anahtar Kelimeler: İki parametrelili hareket, iki parametrelili homotetik hareket, düzlem hareketi, Öklid düzlemi ve Öklid uzayı

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde bu çalışma için gerekli temel kavramlar, teoremler ve bir parametrelili düzlem hareketi verildi.

Üçüncü bölümde Öklid düzleminde genel ve özel iki parametrelili hareketler verildi.

Dördüncü ve beşinci bölümler bu çalışmanın orijinal kısımlarıdır.

Dördüncü bölümde, Öklid düzleminde genel ve özel iki parametrelili homotetik hareketler tanımlandı. Bu homotetik hareketlerden elde edilen bir parametrelili homotetik hareketlerin $\forall(\lambda, \mu)$ konumundaki sürüklenme hızı, pol doğrusu, hodografi ve ivme polü bulundu. İki parametrelili hareketlerden elde edilen teorem ve sonuçlarının homotetik hareket altındaki karşılıkları incelendi.

Beşinci bölümde E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri boyunca iki parametrelili homotetik hareket tanımlandı ve bazı teoremler verildi. E^3 , Öklid uzayında yörünge yüzeylerinin homotetik hareket altında bazı karakterizasyonları elde edildi.

Altıncı bölümde ise bu çalışma ile ilgili sonuç ve öneriler verildi.

THE APPLICATIONS OF THE TWO PARAMETER HOMOTHETIC MOTIONS

SUMMARY

Keywords: Two parameter motion, Two parameter homothetic motion, planar motion, Euclidean plane and space.

This thesis consists of six chapters. First chapter is devoted to the introduction. Second chapter have given the fundamental concepts, theorems and one parameter planar motion.

Third chapter have given general and special two parameter motions.

Fourth and fifth chapters are the original part of the study.

In the fourth chapter, general and special two parameter homothetic motions in Euclidean plane are defined. Sliding velocity, pole line, hodograph and acceleration pole at each (λ, μ) position of the one parameter homothetic motions which are obtained from two parameter homothetic motion calculated. Correspondence in homothetic motion of theorems and results which are obtained two parameter motions are investigated.

In the last chapter, two parameter homothetic motion along a curve in Euclidean space E^3 is defined and some theorems are obtained. Characterizations at the homothetic motion of some orbit surface in E^3 are found.

In the sixth chapter were given corollary and suggestions of this study.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen mekaniğin bir dalıdır, yani kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi (veya cisim) nin zamana bağlı yer değiştirmesini inceler [1]. E^2 , 2-boyutlu Öklid uzayında (Öklid düzlemi) bir parametrelili düzlemsel hareket, bu hareketin türev denklemleri, hızları ve hızların lineer bileşimi, ivmeler ve ivmelerin lineer bileşimi ile birlikte pol noktaları H.R.Müller tarafından incelenmiştir.

Ayrıca H.R.Müller tarafından iki parametrelili düzlem hareketleri geniş bir şekilde incelenmiştir. E^2 , iki boyutlu Öklid uzayında bir parametrelili hareketler için verilen teoremlerin karşılıkları yine E^2 , 2-boyutlu Öklid uzayında iki parametrelili hareketler için verilmiştir. Düzlemde bir parametrelili hareketler için verilen pol noktalarına karşılık, iki parametrelili hareketlerden elde edilen bir parametrelili hareketler için pol eksenlerinin mevcut olduğu gösterilmiştir. E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında iki parametrelili hareketleri A.Karger ve O.Bottema geniş bir şekilde incelemiştir.

M.Kemal Karacan, Öklid ve Lorentz düzleminde genel ve özel iki parametrelili hareketler ve bu hareketlerden elde edilen bir parametrelili hareketlerin $\forall(\lambda, \mu)$ konumundaki sürüklenme hızı, pol doğrusu, hodografı ve ivme polünü vermiştir.

Biz bu tezde ilk olarak, yukarıda sözü edilen yazarların yaptıkları çalışmalardan esinlenerek, E^2 , 2-boyutlu Öklid uzayında iki parametrelili homotetik hareketleri tanımlayıp, iki parametrelili hareketler için verilen türev denklemleri, hızları ve hızların lineer bileşimi, ivmeler ile birlikte pol doğrularının $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda iki parametrelili homotetik hareketler altında karşılığını araştıracağız. Daha sonra elde

edilen sonuç ve teoremlerin özel iki parametrelili homotetik hareket altında karşılıklarını inceleyeceğiz. Son olarak E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında homotetik hareketleri tanımlayıp bazı yörünge yüzeylerinin karakterizasyonlarını araştıracağız.

İki parametrelili hareket ve homotetik hareketlerin Matematik, Fizik, Mekanik ve Robot Kinematığında önemli uygulama alanları vardır. Bir parametrelili hareketler geniş bir şekilde çalışılmıştır. Fakat iki veya daha fazla parametrelili hareketler için günümüzde fazla bir şey söylenememektedir. Bu tezde amacımız iki parametrelili homotetik hareketleri ve uygulamalarını tanımlayarak bu konudaki çalışmalara önemli katkı sağlamaktır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. A , boştan farklı bir cümle ve V de bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir, [6].

- i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$
- ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $f(P, Q) = \vec{\alpha}$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.2. A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \vec{x} = (x_i), \quad \vec{y} = (y_i), \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1)$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da Öklid uzayı adını alır. Özel olarak $A = \mathbb{R}^n$ noktalar cümlesi $V = \mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart vektör uzayı olarak alınırsa, Öklid iç çarpımı ile birlikte A, \mathbb{R}^n vektör uzayı ile birleştirilmiş bir n-boyutlu standart Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir, [6].

Tanım 2.3. $d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overline{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n , Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(X, Y)$ reel sayısına da $X, Y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir, [6].

Teorem 2.1. E^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir, [6].

Tanım 2.4. $d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overline{XY}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir.

\mathbb{R}^n , Öklid uzayında standart Öklid iç çarpımını $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\| \cos \theta$$

biçiminde yazabiliriz. Burada θ açısı $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ vektörleri arasındaki açı olup pozitif yönde ölçülür. Buradan

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\|}$$

yazılır. Böylece $\forall X, Y, Z \in E^n$ için \widehat{XYZ} açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overline{XY}, \overline{YZ} \rangle}{\|\overline{XY}\| \|\overline{YZ}\|} \quad (2.2)$$

den hesaplanan θ reel sayıdır, [6].

Tanım 2.5. E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine \mathbb{R}^n de karşılık gelen $\{\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \dots, \overline{P_0P_n}\}$ vektör n -lisi \mathbb{R}^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir, [6].

Tanım 2.6. E^n de $E_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$, \dots , $E_n = (0, 0, \dots, 1)$ olmak üzere $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir, [6].

Tanım 2.7. E^n de bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overline{E_0 X} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{E_0 E_i}$$

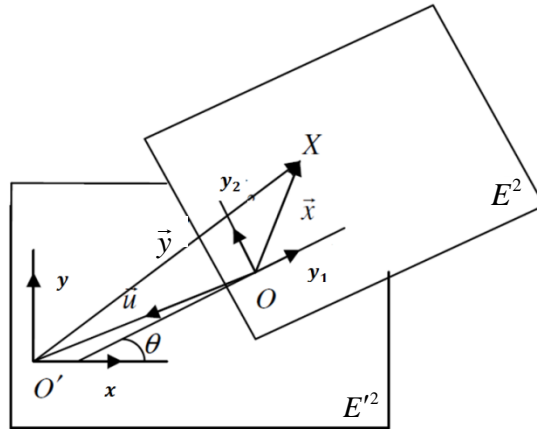
şekindedir öyle ki

$$x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n -lisine de E^n in Öklid koordinat sistemi adı verilir, [6].

2.2. Bir Parametrelî Düzlem Hareketi

Bir düzlem parçasının bir başka düzlem parçasına göre hareketini incelerken düzlemlerden birisini **hareketli** (E^2), diğerini **sabit** (E'^2) olarak düşüneceğiz.



Sekil 2.1. Sabit ve hareketli düzlemlerin birbirine göre durumları

Tanım 2.8. Genel bir düzlem hareketi

$$\begin{aligned} y_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ y_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta + b \end{aligned} \quad (2.3)$$

ile verilir. Eğer θ , a ve b ; t zaman parametresinin bir fonksiyonu ise hareket, bir parametrelî hareket adını alır.

Tanım 2.9. Bir parametrelili düzlem hareketi

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile verilir. $A \in O(2)$ olmak üzere, matris formunda

$$Y = AX + C \quad (2.4)$$

dir. Burada, \bar{y} ve \bar{x} , sırasıyla, sabit ve hareketli koordinat sistemine göre aynı X noktasının yer vektörleri ve C öteleme vektörüdür.

2.3. Hızlar ve Hızların Birleşimi

Şimdi bir parametrelili hareketler için hız kavramını açıklayalım. Hareketli düzlem, sabit düzleme göre hareket ederken, hareketli düzlemin sabit B noktası sabit düzlemde t zamanı ile bir eğri çizsin. B noktasının hareketli düzleme göre hız vektörüne, yani B noktası hareketli düzlemde yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza B noktasının izafi (rölatif) hızı denir ve \bar{V}_r ile gösterilir. Buna göre B noktası E'^2 sabit düzlemine göre sabit olacağından (2.4) denkleminin t ye göre türevi alınır

$$\bar{V}_r = A\dot{X}$$

dir. B noktasının sabit düzleme göre hızına ise mutlak hız denir ve \bar{V}_a ile gösterilir.

(2.4) denkleminin t ye göre türevinden

$$\bar{V}_a = \dot{Y} = \frac{dY}{dt} = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C} \quad (2.5)$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{V}_f = \dot{A}X + \dot{C}$$

vektörüne B noktasının sürüklenme hızı denir. Yani B noktası hareketli düzlemin bir sabit noktası olarak alınır, bu noktanın hızı sürüklenme hızı olur. Buna göre B noktası E^2 hareketli düzleminde sabit olacağından $\bar{V}_r = 0$ dir. Dolayısıyla mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur. Yani $\bar{V}_a = \bar{V}_f$ dir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2. Bir parametrelili bir harekette, bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$\vec{V}_a = \vec{V}_f + \vec{V}_r$$

dir.

2.4. Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri

Bir parametrelili harekette $\forall t$ anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım. Bu noktalar $\forall t$ anında yalnız hareketli düzlemde değil aynı zamanda sabit düzlemde de sabit olmak zorundadır. Bu noktalara hareketin $\forall t$ anındaki polü, dönme polü veya ani dönme merkezi denir.

O halde $\vec{V}_f = 0$ denkleminin çözümü bize hareketli düzlemdeki $P = (x_p, y_p)$ pol noktalarını verir. Bu noktaların geometrik yeri hareketli pol eğrisidir. Bunun sabit düzlemdeki karşılığı $\bar{P} = (\bar{x}_p, \bar{y}_p)$ pol noktasıdır ve geometrik yeri sabit pol eğrisidir.

BÖLÜM 3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HAREKETLER

Bu bölümde Öklid düzleminde genel iki parametrelili hareketleri inceleyeceğiz.

3.1. Genel İki Parametrelili Hareket

Tanım 3.1 Genel iki parametrelili düzlem hareketi

$$\begin{aligned}y_1 &= x \cos \theta(\lambda, \mu) - y \sin \theta(\lambda, \mu) + a(\lambda, \mu) \\y_2 &= x \sin \theta(\lambda, \mu) + y \cos \theta(\lambda, \mu) + b(\lambda, \mu)\end{aligned}\tag{3.1}$$

ile verilir ve M_{II} ile gösterilir, [7]. Burada (y_1, y_2) sabit E'^2 düzleminin ve (x, y) de hareketli E^2 düzleminin koordinat fonksiyonlarıdır. Eğer λ ve μ , t zaman parametresinin fonksiyonları olarak alınır, bir parametrelili M_I hareketi elde edilir. Bu harekete M_{II} den elde edilen M_I hareketi denir.

(3.1) denkleminde

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta(\lambda, \mu) & -\sin \theta(\lambda, \mu) \\ \sin \theta(\lambda, \mu) & \cos \theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

seçilirse

$$Y = AX + C$$

yazabiliriz. Biz burada genelliği bozmayacak şekilde $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda iki düzlemin çakışması için

$$\theta(0, 0) = a(0, 0) = b(0, 0) = (0, 0)$$

alabiliriz.

Teorem 3.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur, [4].

İspat. A ve C matrislerinin t ye göre türevi alınır, $\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin çözümü, hareketli düzlemin pol noktalarını verir. Böylece hareketli düzlemin pol noktaları

$$P = (x_p, y_p) = X = -(\dot{A})^{-1} \dot{C}$$

dır. Buradan,

$$x_p = \frac{\sin \theta(\lambda, \mu)(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) - \cos \theta(\lambda, \mu)(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})} \quad (3.2)$$

$$y_p = \frac{\cos \theta(\lambda, \mu)(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) + \sin \theta(\lambda, \mu)(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})}$$

elde edilir. y_p den $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ çekilip x_p de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left[\cos \theta(\lambda, \mu) a_\mu \theta_\lambda + \sin \theta(\lambda, \mu) b_\mu \theta_\lambda - \cos \theta(\lambda, \mu) a_\lambda \theta_\mu - \sin \theta(\lambda, \mu) b_\lambda \theta_\mu \right] x_p \\ & + \left[\sin \theta(\lambda, \mu) a_\lambda \theta_\mu - \cos \theta(\lambda, \mu) b_\lambda \theta_\mu - \sin \theta(\lambda, \mu) a_\mu \theta_\lambda + \cos \theta(\lambda, \mu) b_\mu \theta_\lambda \right] y_p \\ & = \left[(\cos \theta(\lambda, \mu))^2 a_\lambda b_\mu - (\sin \theta(\lambda, \mu))^2 b_\lambda a_\mu - (\cos \theta(\lambda, \mu))^2 a_\mu b_\lambda + (\sin \theta(\lambda, \mu))^2 a_\lambda b_\mu \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) x_p + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) y_p = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda \quad (3.4)$$

doğrusu üzerinde bulunur, [4].

Teorem 3.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur, [4].

İspat. $P = (x_p, y_p)$ hareketli pol noktasının (3.2) ile verilen koordinatları $Y = AX + C$ denkleminde X yerine yazılırsa sabit düzlemin $\bar{P} = (\bar{x}_p, \bar{y}_p)$ polü bulunur. Böylece,

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta(\lambda, \mu) & -\sin\theta(\lambda, \mu) \\ \sin\theta(\lambda, \mu) & \cos\theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(\lambda, \mu) \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

denklemden

$$\bar{x}_p = -\frac{b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} + a(\lambda, \mu) \quad (3.5)$$

$$\bar{y}_p = \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} + b(\lambda, \mu)$$

elde edilir. \bar{y}_p den $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ çekilip \bar{x}_p de yerine yazılırsa

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) \bar{x}_p + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) \bar{y}_p = b(\lambda, \mu) (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) + a(\lambda, \mu) (a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) + a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda \quad (3.6)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) \bar{x}_p + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) \bar{y}_p = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda$$

doğrusu üzerinde bulunur, [4].

Sonuç 3.3. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğruları $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için çakışıktır, [4].

M_{II} den elde edilen M_I hareketinin pol doğrusunu hareketli düzlemdeki Oy -ekseni olarak seçelim. O halde $\lambda = \mu = 0$ için $x_p = 0$ olduğundan

$$x_p = -\frac{b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}}$$

eşitliğinden

$$b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} = 0$$

elde edilir. $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ bağımsız hareket parametreleri olduklarından sıfırdan farklıdır. O halde $b_\lambda = b_\mu = 0$ olmalıdır. Böylece,

$$x_p = 0 \quad y_p = \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu özel durum sabit düzlemin pol doğrusunun da, sabit düzlemin Oy -ekseni ile çakışmasını gerektirir. Yani,

$$\bar{x}_p = 0 \quad \bar{y}_p = \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}}$$

dır. Kabul edelim ki $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve pol eksenini Oy -ekseni (yani $b_\lambda = b_\mu = 0$) olsun. Bu durumda, hareketli düzlemde herhangi bir sabit $B(x, y)$ noktasının sürüklenme hızı $\vec{V}_f = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})y + a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= (\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})x \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir.

Teorem 3.3. Kabul edelim ki $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve pol eksenini Oy -ekseni (yani $b_\lambda = b_\mu = 0$) olsun. Bu takdirde, M_{II} den elde edilen M_I hareketinde P pol noktasından B noktasına giden pol ışını B noktasının \vec{V}_f sürüklenme hız vektörüne diktir, [4].

İspat. (3.7) denkleminde $P(x_p, y_p)$ hareketli pol noktası $P = \left(0, \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \right)$ ve

(3.8) denkleminde \vec{V}_f sürüklenme hızı

$$\vec{V}_f = \left(-(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})y + a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}, (\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})x \right)$$

olmak üzere,

$$\langle \vec{V}_f, \overline{PB} \rangle = -xy(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) + x(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) + xy(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) - x(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.4. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin \vec{V}_f sürüklenme hız vektörünün

boyu $\forall(\lambda, \mu)$ için

$$\|\vec{V}_f\| = |\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}| \|\overline{PB}\| = |\dot{\theta}| \|\overline{PB}\|$$

dır, [4].

İspat. $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = -(\dot{A})^{-1} \dot{C}$ eşitliğinden \dot{C} çekilip $\vec{V}_f = \dot{A}X + \dot{C}$ de yerine yazılırsa,

$$\vec{V}_f = \dot{\theta} \left(-\sin\theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \cos\theta(\lambda, \mu)(y - y_p), \cos\theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \sin\theta(\lambda, \mu)(y - y_p) \right)$$

bulunur. Buradan

$$\|\vec{V}_f\| = |\dot{\theta}| \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} = |\dot{\theta}| \|\overline{PB}\|$$

elde edilir.

Teorem 3.5. M_{II} den elde edilen M_I hareketi için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile \vec{V}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Ψ olmak üzere,

$\forall(\lambda, \mu)$ için $\Psi(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu)$ dır. İlave olarak, Bu iki vektörün dik olması

için $\theta(\lambda, \mu) = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) dır, [4].

İspat. Teorem 3.4. den

$$\vec{V}_f = \dot{\theta} \left(-\sin \theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \cos \theta(\lambda, \mu)(y - y_p), \cos \theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \sin \theta(\lambda, \mu)(y - y_p) \right)$$

şeklinde ve $\vec{PB} = (x - x_p, y - y_p)$ olduğundan

$$\langle \vec{PB}, \vec{V}_f \rangle = -\dot{\theta} \sin \theta(\lambda, \mu) \|\vec{PB}\|^2 \quad (3.9)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle \vec{PB}, \vec{V}_f \rangle = \|\vec{V}_f\| \|\vec{PB}\| \cos \Psi(\lambda, \mu)$$

dir. Son denklem (3.9) da yerine yazılırsa,

$$\|\vec{V}_f\| \|\vec{PB}\| \cos \Psi(\lambda, \mu) = -\dot{\theta} \sin \theta(\lambda, \mu) \|\vec{PB}\|^2$$

$$|\dot{\theta}| \|\vec{PB}\| \|\vec{PB}\| \cos \Psi(\lambda, \mu) = -\dot{\theta} \sin \theta(\lambda, \mu) \|\vec{PB}\|^2$$

$$\cos \Psi(\lambda, \mu) = -\sin \theta(\lambda, \mu)$$

$$\cos \Psi(\lambda, \mu) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu) \right)$$

bulunur. Böylece

$$\Psi(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu)$$

olur.

Tanım 3.2. (Hodograf) Sabit bir noktanın sürüklenme hız vektörleri, kendilerine paralel kalmak üzere başlangıç noktasına taşındığında, bu vektörlerin uç noktalarının geometrik yeri bir eğri olup bu eğriye hodograf denir, [8].

Şimdi de M_{II} den elde edilen M_I hareketindeki herhangi bir (x, y) noktasının hodografının geometrik yerini $\forall(\lambda, \mu)$ için araştıralım. Bunun için $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ alalım. (3.1) denkleminin t ye göre türevi alınır, $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ ye göre düzenlenirse

$$\dot{y}_1 = (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + a_\lambda) \dot{\lambda} + (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu) \dot{\mu}$$

$$\dot{y}_2 = (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + b_\lambda) \dot{\lambda} + (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu) \dot{\mu}$$

elde edilir. Cramer metodu yardımıyla $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ değerleri bulunup $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\Gamma = (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + a_\lambda) (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu) \\ - (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + b_\lambda) (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu)$$

olmak üzere

$$\left[(x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu)^2 + (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + b_\lambda)^2 \right] \dot{y}_1^2 \\ + \left[(-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu)^2 + (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + a_\lambda)^2 \right] \dot{y}_2^2 \\ + \left[(x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu) (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu) \right. \\ \left. + (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + a_\lambda) (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + b_\lambda) \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ = \Gamma^2 \quad (3.10)$$

denklemini elde edilir.

Kabul edelim ki $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve pol doğrusu Oy -ekseni (yani $b_\lambda = b_\mu = 0$) olsun.

Bu taktirde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6. M_{II} den elde edilen M_I hareketinde bir (x, y) noktasının hodografı bir elipstir, [4].

İspat. $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ alınır (3.10) denklemini

$$\left[x^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) \right] \dot{y}_1^2 + \left[y^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) - 2y (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) (a_\lambda^2 + a_\mu^2) \right] \dot{y}_2^2 \\ - 2 \left[-xy (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) + x (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ = \left[x (a_\lambda \theta_\mu + a_\mu \theta_\lambda) \right]^2 \quad (3.11)$$

halini alır. Bu ise bir elipstir. Gerçekten de,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey + F = 0$$

genel konik denklemi olmak üzere, (3.11) denkleminde kısalık için,

$$A = x^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2)$$

$$B = -xy (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) + x (\theta_\lambda a_\lambda + \theta_\mu a_\mu)$$

$$C = y^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) - 2y (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) (a_\lambda^2 + a_\mu^2)$$

seçilirse,

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = x^2 (\theta_\lambda a_\lambda - \theta_\mu a_\mu)^2 > 0$$

dır. Bu ise denklemin elips olduğunu gösterir. Bu elipsin alanı ise $\pi x (\theta_\lambda a_\mu - \theta_\mu a_\lambda)$ dır. Görüldüğü gibi bu alan sadece x 'e bağlıdır. O halde Oy -ekseni üzerindeki bir noktanın hodografinin oluşturduğu elipsin alanı sıfırdır.

Kabul edelim ki $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve pol doğrusu Oy -ekseni (yani $b_\lambda = b_\mu = 0$) olsun.

Bu taktirde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.7. M_{II} den elde edilen M_I hareketinde Ox -ekseni üzerinde bulunan simetrik iki noktanın hodografları aynı elipslerdir, [4].

İspat. $B_0(\ell, 0)$ noktası için (3.11) denkleminde

$$\left(\ell^2 (\theta_\mu^2 + \theta_\lambda^2) \right) \dot{y}_1^2 + (a_\lambda^2 + a_\mu^2) \dot{y}_2^2 - 2 \left(\ell (\theta_\lambda a_\lambda + \theta_\mu a_\mu) \right) \dot{y}_1 \dot{y}_2 = \left(\ell (\theta_\mu a_\lambda + \theta_\lambda a_\mu) \right)^2 \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir ki, bu bir elipstir. Bu elipsin alanı $\pi x (\theta_\mu a_\lambda - \theta_\lambda a_\mu)$ dir. Ayrıca $B_0(-\ell, 0)$ noktası içinde aynı elips elde edilir.

3.2. Hareketin İvme Polü

Hareketin sürüklenme ivmesinin sıfır olması yani $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin çözümü, hareketin ivme pollerinin koordinatlarını verir. Dolayısıyla,

$$X = P(x_{ip}, y_{ip}) = -(\ddot{A})^{-1} \ddot{C}$$

olacağından

$$\begin{aligned} x_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a}(\ddot{\theta} \sin \theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 \cos \theta(\lambda, \mu)) + \ddot{b}(-\ddot{\theta} \cos \theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 \sin \theta(\lambda, \mu)) \right)}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \\ y_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a}(\ddot{\theta} \cos \theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 \sin \theta(\lambda, \mu)) + \ddot{b}(-\ddot{\theta} \sin \theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 \cos \theta(\lambda, \mu)) \right)}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Özel olarak $\theta(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için

$$x_{ip} = \frac{(\ddot{a}\dot{\theta}^2 - \ddot{b}\ddot{\theta})}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \quad y_{ip} = \frac{(\ddot{a}\ddot{\theta} - \ddot{b}\dot{\theta}^2)}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \quad (3.14)$$

dir.

Teorem 3.8. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin ivme polleri, $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ için, sabit ve hareketli düzlemin pol doğrusu ile çakışır, [4].

İspat. (3.14) denklemlerinde y_{ip} den $\frac{\ddot{\lambda}}{\ddot{\mu}}$ çekilip x_{ip} de yerine yazılırsa (3.4) doğrusu elde edilir. Bu ise söz konusu doğrunun sabit ve hareketli düzlemin pol doğrusu ile çakışması demektir.

3.3. Özel İki Parametrelî Hareket

Şimdi genel olarak incelediğimiz iki parametrelî düzlem hareketini özel olarak Bottema'nın incelediği tarzda ele alalım.

Tanım 3.3. (3.1) denklemleri ile verilen genel iki parametrelî düzlemsel harekette, $\theta(\lambda, \mu) = \lambda$ ve $a(\lambda, \mu) = \ell\mu$ seçilirse, hareket özel iki parametrelî hareket adını alır ve

$$\begin{aligned} y_1 &= x \cos \lambda - y \sin \lambda + \ell \mu \\ y_2 &= x \sin \lambda + y \cos \lambda + b(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (3.15)$$

denklemleri ile verilir, [2].

λ ve μ , bir t parametresinin fonksiyonları iseler, bir parametrelî hareket elde edilir. Bu harekete M_{II} den elde edilen bir parametrelî hareket denir ve M_I ile gösterilir. $\lambda(t)$, $\mu(t)$ seçilişlerinin her biri bir parametrelî hareket verir. Yani burada

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda_1(t) & \mu(t) &= \mu_1(t) \\ \lambda(t) &= \lambda_2(t) & \mu(t) &= \mu_2(t) \\ & \vdots & & \vdots \\ \lambda(t) &= \lambda_\infty(t) & \mu(t) &= \mu_\infty(t) \end{aligned}$$

seçilişleri ayrı ayrı bir parametrelî hareketleri tanımlarlar. $b(\lambda, \mu)$ belirlendiğinde, t parametresine bağlı olarak λ ve μ fonksiyonları değiştiğinden sonsuz tane bir parametrelî hareket elde edilir. Yani iki parametrelî M_{II} hareketinden sonsuz tane bir parametrelî M_I hareketleri elde edilir.

Şimdi de M_{II} den elde edilen M_I hareketinin hız vektörlerini araştıralım. Bunun için hareketli düzlemdeki sabit bir $B(x, y)$ noktasının sürüklenme hızı \vec{V}_f olmak üzere aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin hareketli düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur, [4].

İspat. B noktası hareketli düzlemde sabit olacağından $\vec{V}_r = 0$ ve aynı nokta sabit düzlemde de sabit olacağı için $\vec{V}_f = 0$ olacaktır. Böylece, $\vec{V}_f = 0$ için

$$\dot{A}X + \dot{C} = 0$$

denkleminin çözümü hareketli düzlemin pol noktalarını verir. Dolayısıyla, hareketli düzlemin pol noktaları

$$P = (x_p, y_p) = X = -(\dot{A})^{-1} \dot{C} \quad (3.16)$$

dır.

Burada $\det \dot{A} \neq 0$ yani \dot{A} regülerdir ve $(\dot{A})^{-1}$ mevcuttur. Gerçekten (3.15) denklemi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l\mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

yazılır ve A nın t parametresine göre türevi alınırsa

$$\dot{A} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \dot{\mu}$$

elde edilir. Böylece,

$$(\dot{A})^{-1} = \frac{1}{\dot{\lambda}} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix}$$

ve C nin türevi alınırsa,

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} l\dot{\mu} \\ b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler (3.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$X = -(\dot{A})^{-1} \dot{C} = \frac{1}{\dot{\lambda}} \begin{bmatrix} l\dot{\mu} - \cos \lambda (b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}) \\ l\dot{\mu} \cos \lambda + \sin \lambda (b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece hareketli düzlem için $P = (x_p, y_p)$ pol noktasının koordinatları

$$x_p = \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \sin \lambda - \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} \cos \lambda$$

$$y_p = \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \cos \lambda + \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} \sin \lambda$$
(3.17)

olur. Şimdi de (3.17) denkleminde bulduğumuz y_p değerinden $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ değerini çekersek,

$$\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} = \frac{y_p - b_\lambda \sin \lambda}{b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda}$$

bulunur. Bu son eşitlik x_p de yerine yazılırsa

$$(b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda)x_p + (-\ell \sin \lambda + b_\mu \cos \lambda)y_p + \ell b_\lambda = 0 \quad (3.18)$$

doğru ailesi elde edilir. $\forall \lambda, \mu$ için bu denklemden bir doğru elde edilir.

Sonuç 3.4. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\lambda = \mu = 0$ için,

$$\ell x_p + b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0 \quad (3.19)$$

doğrusu üzerinde bulunurlar, [4].

Gerçekten (3.18) denkleminde $\lambda = \mu = 0$ alınırsa bütün M_I hareketinin pol noktalarının geometrik yeri

$$\ell x_p + b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0$$

doğrusudur. Özel olarak $y_p = 0$ için

$$x_p = \frac{-\ell b_\lambda}{b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda}$$

elde edilir. Bu ise $\forall t$ anında pol doğruları, kesim noktası $\left(\frac{-\ell b_\lambda}{b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda}, 0 \right)$

olan bir doğru demeti oluşturur.

Teorem 3.10. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur, [4].

İspat. Elde edilen $P = (x_p, y_p)$ noktası $Y = AX + C$ denkleminde X yerine yazılırsa, sabit düzlemin $\bar{P} = (\bar{x}_p, \bar{y}_p)$ polü elde edilir. Böylece,

$$P = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_\lambda \cos \lambda + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} (\ell \sin \lambda - b_\mu \cos \lambda) \\ b_\lambda \sin \lambda + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} (b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\bar{P}(\bar{x}_p, \bar{y}_p) = \left(-b_\lambda + \ell \mu - b_\mu \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}, b(\lambda, \mu) + \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \right) \quad (3.20)$$

bulunur. \bar{y}_p değerinden $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ çekilip \bar{x}_p de yerine yazılırsa

$$\ell \bar{x}_p + b_\mu \bar{y}_p + \ell b_\lambda - \ell^2 \mu - b_\mu b(\lambda, \mu) = 0 \quad (3.21)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.5. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin, sabit düzlemdeki pol noktaları

$\lambda = \mu = 0$ için,

$$\ell \bar{x}_p + b_\mu \bar{y}_p + \ell b_\lambda = 0 \quad (3.22)$$

doğrusu üzerinde bulunurlar, [4].

Gerçekten (3.21) denkleminde $\lambda = \mu = 0$ alınırsa bütün M_I hareketinin sabit düzlemdeki pol noktalarının geometrik yeri olarak

$$\ell x_p + b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.6. Sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğruları $\lambda = \mu = 0$ konumunda çakışıktır, [4].

M_{II} den elde edilen M_I hareketinin sürüklenme hız vektörlerinin pol ışınına dik olup olmadığını araştıralım. Öncelikle O.Bottema'nın incelediği gibi pol eksenini Oy -ekseni olan ve M_{II} den elde edilen M_I hareketini ele alalım. Bunun için $\lambda = \mu = 0$, $b_\lambda = b_\mu = 0$ olmalıdır. O halde (3.17) den

$$\begin{aligned} x_p &= 0 \\ y_p &= \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

dır. Hareketli düzlemdeki herhangi bir sabit $B(x, y)$ noktasının sürüklenme hızı $\vec{V}_f = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ dir. Dolayısıyla $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $b_\lambda = b_\mu = 0$, $b(\lambda, \mu) \neq 0$ olduğu göz önüne alınır ve (3.15) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y\dot{\lambda} + \ell\dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= x\dot{\lambda} \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. Pol eksenini Oy -ekseni olan M_{II} den elde edilen M_I hareketinin sürüklenme hız vektörü için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.11. M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketi için $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda, P pol noktasından B noktasına giden pol ışını, \vec{V}_f sürüklenme hız vektörüne diktir, [4].

İspat. M_{II} hareketinde, $\vec{PB} = \left(x, y - \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \right)$, $\vec{V}_f = (-y\dot{\lambda} + \ell\dot{\mu}, x\dot{\lambda})$ olmak üzere

$$\langle \vec{V}_f, \vec{PB} \rangle = 0$$

elde edilir.

Bu ifade ederki, pol eksenini Oy -ekseni olan iki parametrelili M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketleri için \vec{PB} ile \vec{V}_f birbirine diktir. Bu eşitliğin bir parametrelili hareketler için daima sağlandığı [1] de gösterilmiştir.

Teorem 3.12. M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketlerinde \overline{V}_f sürüklenme hız vektörlerinin boyu

$$\|\overline{V}_f\| = |\dot{\lambda}| \|\overline{PB}\| \quad (3.25)$$

dır [4].

İspat. Bir önceki teoremin ispatında tanımlanan \overline{PB} ve \overline{V}_f vektörlerinin normları alınırsa

$$\|\overline{PB}\| = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}$$

ve

$$\|\overline{V}_f\| = |\dot{\lambda}| \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}$$

elde edilir. Buradan (3.25) eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 3.13. M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketleri için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile \overline{V}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Ψ olmak üzere, $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda $\Psi = \frac{\pi}{2} + \lambda$ bağıntısı vardır. Bu iki vektörün dik olması için $\lambda = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) olmalıdır, [4].

İspat. İlk olarak (3.15) hareketinin sürüklenme hızını bulalım. Hız vektörü pol noktaları cinsinden yazılırsa, (3.15) denkleminde

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = -(\dot{A})^{-1} \dot{C}$$

elde edilir, son denklemden kolayca görebiliriz ki

$$\dot{C} = -\dot{A} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

dir. Bu eşitlik $\overline{V}_f = \dot{A}X + \dot{C}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\vec{V}_f &= \dot{A}X + \dot{C} = \dot{A}X - \dot{A} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \dot{A} \left(X - \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \right) = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{bmatrix} \\ &= \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -(x - x_p) \sin \lambda - (y - y_p) \cos \lambda \\ (x - x_p) \cos \lambda - (y - y_p) \sin \lambda \end{bmatrix}\end{aligned}$$

veya

$$\vec{V}_f = \dot{\lambda} \left(-(x - x_p) \sin \lambda - (y - y_p) \cos \lambda, (x - x_p) \cos \lambda - (y - y_p) \sin \lambda \right) \quad (3.26)$$

bulunur.

$$\vec{PB} = (x - x_p, y - y_p) \quad (3.27)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{PB}, \vec{V}_f \rangle &= -\dot{\lambda} \sin \lambda \left((x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \right) \\ &= -\dot{\lambda} \sin \lambda \|\vec{PB}\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle \vec{PB}, \vec{V}_f \rangle = \|\vec{PB}\| \|\vec{V}_f\| \cos \Psi$$

olduğundan son iki denklem birbirine eşitlenirse

$$\|\vec{PB}\| \|\vec{V}_f\| \cos \Psi = -\dot{\lambda} \sin \lambda \|\vec{PB}\|^2$$

$$\|\vec{PB}\| \|\dot{\lambda}\| \|\vec{PB}\| \cos \Psi = -\dot{\lambda} \sin \lambda \|\vec{PB}\|^2$$

bulunur. Böylece $\cos \Psi = -\sin \lambda$ dir.

Bu eşitlik çözümlerse

$$\cos \Psi = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) = \cos \left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \right)$$

olacağından $\Psi = \frac{\pi}{2} + \lambda$ olur. Eğer $\lambda = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ise bu iki vektör birbirine dik, $\lambda \neq 2k\pi$ ise noktanın sürüklenme hız vektörüyle noktayı P polüne bağlayan vektör arasındaki açı Ψ olmak üzere Ψ ile λ arasında $\Psi = \frac{\pi}{2} + \lambda$ bağıntısı mevcuttur.

Şimdi özel olarak $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ alalım ve M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketlerindeki herhangi bir (x, y) noktasının hodografinin hangi cins konik olduğunu λ ve μ nün durumuna göre inceleyelim. Özel hareket denklemi (3.15) in t parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= (-x \sin \lambda - y \cos \lambda) \dot{\lambda} + \ell \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= (x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda) \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, son denklemden

$$\Gamma = \begin{vmatrix} -x \sin \lambda - y \cos \lambda & \ell \\ x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda & b_\mu \end{vmatrix}$$

yazılabilir. Buradan

$$\Gamma = b_\mu (-x \sin \lambda - y \cos \lambda) + \ell (-x \cos \lambda + y \sin \lambda - b_\lambda)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{\begin{vmatrix} \dot{y}_1 & \ell \\ \dot{y}_2 & b_\mu \end{vmatrix}}{\Gamma} = \frac{b_\mu \dot{y}_1 - \ell \dot{y}_2}{\Gamma} \\ \dot{\mu} &= \frac{\begin{vmatrix} -x \sin \lambda - y \cos \lambda & \dot{y}_1 \\ x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda & \dot{y}_2 \end{vmatrix}}{\Gamma} = \frac{(-x \sin \lambda - y \cos \lambda) \dot{y}_2 - (x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda) \dot{y}_1}{\Gamma}\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}& (b_\mu^2 + x^2 \cos^2 \lambda + y^2 \sin^2 \lambda + b_\lambda^2 - 2xy \sin \lambda \cos \lambda + 2xb_\lambda \cos \lambda - 2yb_\lambda \sin \lambda) \dot{y}_1^2 \\ & + (\ell^2 + x^2 \sin^2 \lambda + y^2 \cos^2 \lambda + 2xy \sin \lambda \cos \lambda) \dot{y}_2^2 \\ & + (-2\ell b_\mu + 2xy \sin \lambda \cos \lambda - 2xy \sin^2 \lambda + 2xb_\lambda \sin \lambda + 2xy \cos^2 \lambda - 2y^2 \sin \lambda \cos \lambda + 2yb_\lambda \cos \lambda) \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ & = \Gamma^2\end{aligned}\tag{3.28}$$

elde edilir. Bu denklem; $\forall(\lambda, \mu)$ konumundaki hodografin genel denklemdir ve elips veya çember olma hallerini aşağıdaki teoremlerle verebiliriz.

Teorem 3.14. M_{II} den elde edilen M_I hareketinde herhangi bir (x, y) noktasının $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ için hodografı bir elipstir, [4].

İspat. Özel olarak (3.28) denkleminde $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ seçilirse

$$x^2 \dot{y}_1^2 + (\ell^2 + y^2) \dot{y}_2^2 + 2xy \dot{y}_1 \dot{y}_2 = x^2 \ell^2 \quad (3.29)$$

denklemini elde edilir ki bu bir elips denklemdir. Gerçekten de,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genel konik denklemini olmak üzere, (3.29) denkleminde kısalık için

$$A = x^2 \quad B = xy \quad C = y^2 + \ell^2$$

alınırsa,

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = x^2 \ell^2 > 0$$

dır. Bu ise denklemin elips olduğunu gösterir.

Teorem 3.15. Ox -ekseni üzerinde bulunan simetrik iki noktanın, $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ için hodografı aynı çemberlerdir, [4].

İspat. $B_0(\ell, 0)$ noktası için (3.29) denkleminde

$$\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 = \ell^2$$

elde edilir. Bu ise yarıçapı ℓ olan bir çemberdir. Burada sadece $B_0(\ell, 0)$ için değil aynı zamanda $B_0(-\ell, 0)$ için de bu noktanın hodografı bir çemberdir.

$B_0(\ell, 0)$ noktasının yörüngesi için (3.15) denkleminde

$$y_1 = \ell \cos \lambda + \ell \mu$$

$$y_2 = \ell \sin \lambda + b(\lambda, \mu)$$

bulunur. $\forall(\lambda, \mu)$ ye göre bu yörünge değişir. $B_0(\ell, 0)$ noktası için (3.24) denkleminde

$$\dot{y}_1 = \ell \dot{\mu} \quad \dot{y}_2 = \ell \dot{\lambda}$$

elde edilir ki buradan da

$$\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 = \ell^2$$

bulunur. B_0 noktasının skalar hızı ise

$$\|(\dot{y}_1, \dot{y}_2)\| = \ell$$

olup sabittir. Kolayca gösterilebilir ki (3.29) elipsinin alanı $\pi \ell |x|$ dir. Bu alan sadece x 'e bağlıdır. O halde pol doğrusu üzerindeki bir nokta için elipsin alanı sıfırdır.

3.4. Özel İki Parametrelili Hareketin İvme Polü

Şimdi de sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaların geometrik yerini araştıralım. Bunun için

$$\ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \quad (3.30)$$

denklemini çözelim. M_{II} den elde edilen M_I hareketinde

$$P(x_{ip}, y_{ip}) = -(\ddot{A})^{-1} \ddot{C}$$

ifadesi ivme pollerinin koordinatları verir. Buradan

$$\begin{bmatrix} x_{ip} \\ y_{ip} \end{bmatrix} = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \begin{bmatrix} \ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda & -\ddot{\lambda} \cos \lambda + (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda \\ \ddot{\lambda} \cos \lambda + (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda & \ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda \end{bmatrix}$$

elde edilir, öyle ki

$$x_{ip} = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \left[\ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda (\ell \ddot{\mu}) + (-\ddot{\lambda} \cos \lambda + (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda) (b_{\lambda\lambda} (\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu} (\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu}) \right]$$

$$y_{ip} = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \left[\ddot{\lambda} \cos \lambda - (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda (\ell \ddot{\mu}) + (-\ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda) (b_{\lambda\lambda} (\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu} (\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu}) \right]$$

değerleri (λ, μ) konumundaki ivme polünün koordinatlarıdır. $\lambda = \mu = 0$ özel durumunda

$$\begin{aligned} x_{ip} &= \frac{\ell \ddot{\mu} (\dot{\lambda})^2}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \left(b_{\lambda\lambda} (\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu} (\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu} \right) \\ y_{ip} &= \frac{\ell \ddot{\mu} \ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \left(b_{\lambda\lambda} (\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu} (\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

olur.

Teorem 3.16. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin ivme polleri $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ için sabit ve hareketli düzlemin pol doğrusu ile çakışır, [4].

İspat. (3.31) denkleminde

$$\begin{aligned} x_{ip} &= -\frac{\ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} (b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu}) \\ y_{ip} &= \frac{\ell \ddot{\mu} \ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, y_{ip} den $\frac{\ddot{\mu}}{\ddot{\lambda}}$ çekilip x_{ip} de yerine yazılırsa

$$\ell x_{ip} + b_{\mu} y_{ip} + \ell b_{\lambda} = 0$$

elde edilir. Son denklem ifade eder ki sabit ve hareketli düzlemin pol doğruları çakışır.

BÖLÜM 4. ÖKLİD DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HAREKETLER

Bu bölüm tezin orijinal kısmı olup iki parametrelî düzlemsel hareketler ve uygulamaları incelenecektir.

4.1. Genel İki Parametrelî Homotetik Hareket

$Y = AX + C$ şeklindeki genel iki parametrelî hareket önceki bölümde incelendi. Bu çalışmada $h(\lambda, \mu) \neq sbt$ için

$$Y = hAX + C \quad (4.1)$$

homotetik hareket incelenecektir. Ayrıca $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $h(\lambda, \mu)$ homotetik sabiti için bazı özel sonuçları verilecektir.

Tanım 4.1. Genel iki parametrelî homotetik hareket

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \cos\theta(\lambda, \mu) & -\sin\theta(\lambda, \mu) \\ \sin\theta(\lambda, \mu) & \cos\theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \text{ ve } h(\lambda, \mu) \neq sbt$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = h(\lambda, \mu) \begin{bmatrix} \cos\theta(\lambda, \mu) & -\sin\theta(\lambda, \mu) \\ \sin\theta(\lambda, \mu) & \cos\theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(\lambda, \mu) \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= h(\lambda, \mu) x \cos\theta(\lambda, \mu) - h(\lambda, \mu) y \sin\theta(\lambda, \mu) + a(\lambda, \mu) \\ y_2 &= h(\lambda, \mu) x \sin\theta(\lambda, \mu) + h(\lambda, \mu) y \cos\theta(\lambda, \mu) + b(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (4.2)$$

genel iki parametrelî homotetik hareket denklemleri tanımlanmış olur ve N_{II} ile gösterilir.

Burada (y_1, y_2) noktası E'^2 sabit düzleminin ve (x, y) noktasıda E^2 hareketli düzleminin koordinat fonksiyonlarıdır. Eğer λ ve μ , t zaman parametresinin fonksiyonları olarak alınırsa, bir parametrelili N_I homotetik hareketi elde edilir. Bu harekete N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi denir.

Burada $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $\theta(0, 0) = a(0, 0) = b(0, 0) = (0, 0)$ başlangıç anında E^2 hareketli ve E'^2 sabit düzlemlerinin koordinat sistemleri çakışmıştır.

Teorem 4.1. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktalarının denklemini

$$\begin{aligned} & \left(h\dot{a}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{h}\dot{a} \sin \theta + h\dot{b}\dot{\theta} \sin \theta - \dot{h}\dot{b} \cos \theta \right) x_p \\ & + \left(-h\dot{a}\dot{\theta} \sin \theta + \dot{h}\dot{a} \cos \theta + h\dot{b}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{h}\dot{b} \sin \theta \right) y_p = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

dır.

İspat. $Y = hAX + C$ homotetik hareket denkleminin, t parametresine göre türevi alınırsa, $\dot{h}AX + h\dot{A}X + \dot{C} = 0$ elde edilir. Bu denklemin çözümü hareketli düzlemin pol noktalarını verir. O halde hareketli düzlemin pol noktaları,

$$P(x_p, y_p) = -[\dot{h}A + h\dot{A}]^{-1} \dot{C}$$

dır. $\det[\dot{h}A + h\dot{A}]^{-1} = \dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2 \neq 0$ olduğundan $[\dot{h}A + h\dot{A}]$ matrisi regülerdir, yani tersi mevcuttur. Dolayısıyla

$$P(x_p, y_p) = -[\dot{h}A + h\dot{A}]^{-1} \dot{C} = \begin{bmatrix} \frac{h\dot{\theta} \sin \theta - \dot{h} \cos \theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} & \frac{-h\dot{\theta} \cos \theta - \dot{h} \sin \theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \\ \frac{h\dot{\theta} \cos \theta + \dot{h} \sin \theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} & \frac{h\dot{\theta} \sin \theta - \dot{h} \cos \theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix}$$

denkleminin çözümünden ivme polünün koordinatları

$$\begin{aligned}
x_p &= \frac{h\dot{a}\dot{\theta} \sin \theta - \dot{h}\dot{a} \cos \theta - h\dot{b}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{h}\dot{b} \sin \theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \\
y_p &= \frac{h\dot{a}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{h}\dot{a} \sin \theta + h\dot{b}\dot{\theta} \sin \theta - \dot{h}\dot{b} \cos \theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dir. Buradan $\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2$ ifadesi çekilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat biter.

Ayrıca N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ olmak üzere

$$P = (x_p, y_p) = \left(-\frac{h\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2}, \frac{h\dot{a}\dot{\theta} - \dot{h}\dot{b}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \right) \tag{4.5}$$

dir. Böylece, pol noktalarının denklemi

$$(h\dot{a}\dot{\theta} - \dot{h}\dot{b})x_p + (h\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a})y_p = 0 \tag{4.6}$$

olur.

O halde $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin hareketli düzlemdeki pol noktaları ile ilgili aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1. Hareketli düzlemdeki pol noktaları $\theta(\lambda, \mu)$ sabit olduğunda

$$(h_\mu b_\lambda - h_\lambda b_\mu)x_p + (h_\lambda a_\mu - h_\mu a_\lambda)y_p = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda \tag{4.7}$$

doğrusu üzerinde bulunur.

Sonuç 4.2. Hareketli düzlemdeki pol noktaları $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğunda

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu)x_p + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu)y_p = \frac{1}{h}(a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda) \tag{4.8}$$

doğrusu üzerinde bulunur.

Sonuç 4.3. Hareketli düzlemdeki pol noktaları $h(\lambda, \mu) = 1$ olduğunda

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu)x_p + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu)y_p = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda \tag{4.9}$$

doğrusu üzerinde bulunur, [4].

Teorem 4.2. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin, sabit düzlemdeki pol noktalarının denklemi

$$\left(h\dot{a}\dot{\theta} - \dot{h}\dot{b}\right)\bar{x}_p + \left(h\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a}\right)\bar{y}_p = a\left(\dot{h}\dot{b} - h\dot{a}\dot{\theta}\right) - b\left(\dot{h}\dot{a} + h\dot{b}\dot{\theta}\right) \quad (4.10)$$

dır.

İspat. (4.4) ile verilen $P = (x_p, y_p)$ pol noktasını (4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$P(\bar{x}_p, \bar{y}_p) = h(\lambda, \mu) \begin{bmatrix} \cos\theta(\lambda, \mu) & -\sin\theta(\lambda, \mu) \\ \sin\theta(\lambda, \mu) & \cos\theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(\lambda, \mu) \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_p \\ \bar{y}_p \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h\dot{a}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{h}\dot{a}\cos\theta - h\dot{b}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{h}\dot{b}\sin\theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \\ \frac{h\dot{a}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{h}\dot{a}\sin\theta + h\dot{b}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{h}\dot{b}\cos\theta}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla sabit düzlemin pol noktasının koordinatları

$$\bar{x}_p = h \left(-\frac{h\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \right) + a \quad \bar{y}_p = h \left(\frac{h\dot{a}\dot{\theta} - \dot{h}\dot{b}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \right) + b$$

olmak üzere sabit düzlemin pol noktası

$$P = (\bar{x}_p, \bar{y}_p) = \left(-\frac{h^2\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}h\dot{a}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} + a, \frac{h^2\dot{a}\dot{\theta} - \dot{h}h\dot{b}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} + b \right) \quad (4.11)$$

dir. \bar{x}_p ile \bar{y}_p koordinatlarında $\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2$ ifadeleri çekilip birbirine eşitlenirse sabit düzlemdeki pol noktalarının denklemin

$$\left(h\dot{a}\dot{\theta} - \dot{h}\dot{b}\right)\bar{x}_p + \left(h\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a}\right)\bar{y}_p = a\left(\dot{h}\dot{b} - h\dot{a}\dot{\theta}\right) - b\left(\dot{h}\dot{a} + h\dot{b}\dot{\theta}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ olmak üzere N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.4. Sabit düzlemdeki pol noktaları $\theta(\lambda, \mu)$ sabit olduğunda

$$(h_\mu b_\lambda - h_\lambda b_\mu) \bar{x}_p + (h_\lambda a_\mu - h_\mu a_\lambda) \bar{y}_p = h(a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda) \quad (4.12)$$

doğrusu üzerinde bulunur.

Sonuç 4.5. Sonuç 4.4 de özel olarak $h(\lambda, \mu) = 1$ alınırsa sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğruları $\theta(\lambda, \mu)$ sabit olduğunda çakışıktır.

Sonuç 4.6. Sabit düzlemin pol noktaları $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğunda (4.9) doğrusu üzerinde bulunur, [4].

Sonuç 4.7. Sonuç 4.2 de özel olarak $h(\lambda, \mu) = 1$ alındığında hareketli düzlemin pol doğrusu, Sonuç 4.6 da verilen sabit düzlemin pol doğrusu ile çakışık olur.

N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinin pol doğrusu Oy -ekseni olarak seçilsin. Bu taktirde, $\lambda = \mu = 0$ için $x_p = 0$ olduğundan,

$$x_p = -\frac{h\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} = 0$$

dır. Bu durumda $h\dot{b}\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a} = 0$ olur. Bu denklemden $h\dot{\theta} = \frac{-\dot{h}\dot{a}}{\dot{b}}$ ifadesi çekilip (4.4)

ile verilen y_p de yerine yazılırsa,

$$y_p = \frac{-\frac{\dot{h}\dot{a}^2}{\dot{b}} - \dot{h}\dot{b}}{\dot{h}^2 + \left(\frac{-\dot{h}\dot{a}}{\dot{b}}\right)^2} = \frac{-\dot{h}(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)}{\dot{b}} \frac{\dot{b}^2}{\dot{h}^2(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)} = -\frac{\dot{b}}{\dot{h}} = \frac{\dot{a}}{h\dot{\theta}}$$

bulunur. Böylece $P = (x_p, y_p)$ pol noktasının koordinatları

$$x_p = 0 \quad \text{ve} \quad y_p = \frac{\dot{a}}{h\dot{\theta}} = \frac{1}{h} \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}}$$

dir. Bu özel durum, hareketli düzlemin pol doğrusunun h katının, sabit düzlemin pol doğrusuna eşit olmasını gerektirir. Yani,

$$\bar{y}_p = \frac{h^2 \dot{a} \dot{\theta} - h \dot{h} \dot{b}}{\dot{h}^2 + h^2 \dot{\theta}^2} + b$$

ifadesi $\lambda = \mu = 0$ ve $h \dot{b} \dot{\theta} + \dot{h} \dot{a} = 0$ durumunda $\bar{y}_p = \frac{\dot{a}}{\dot{\theta}}$ halini alır. Dolayısıyla,

$$\bar{y}_p = h y_p$$

olur.

Şimdi hareketli düzlemin herhangi bir $B(x, y)$ noktasının $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için $\vec{V}_f = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ sürüklenme hızını araştıralım. (4.2) denkleminde t parametresine göre türevler alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{h}(x \cos \theta - y \sin \theta) - h \dot{\theta} x \sin \theta - h \dot{\theta} y \cos \theta + \dot{a} \\ \dot{y}_2 &= \dot{h}(x \sin \theta + y \cos \theta) + h \dot{\theta} x \cos \theta - h \dot{\theta} y \sin \theta + \dot{b} \end{aligned}$$

elde edilir. $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{h}x - h \dot{\theta}y + \dot{a} \\ \dot{y}_2 &= \dot{h}y + h \dot{\theta}x + \dot{b} \end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. Buradan sürüklenme hızı,

$$\vec{V}_f = (\dot{y}_1, \dot{y}_2) = (\dot{h}x - h \dot{\theta}y + \dot{a}, \dot{h}y + h \dot{\theta}x + \dot{b}) \tag{4.14}$$

elde edilir.

Teorem 4.3. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve Oy -ekseni pol eksemi olması durumunda $P(x_p, y_p)$ pol noktasından $B(x, y)$ noktasına giden pol ışını ile, $B(x, y)$ noktasının \vec{V}_f sürüklenme hızı arasında,

$$\langle \vec{V}_f, \overrightarrow{PB} \rangle = \dot{h}(x^2 + y^2) + 2\dot{b}y - \frac{\dot{a}\dot{b}}{h\dot{\theta}} \tag{4.15}$$

bağıntısı vardır.

İspat. Pol eksenini Oy -ekseni olduğunda $P = (x_p, y_p)$ hareketli pol noktası,

$$x_p = 0 \quad \text{ve} \quad y_p = \frac{\dot{a}}{h\dot{\theta}}$$

denklemlerinden $P = \left(0, \frac{\dot{a}}{h\dot{\theta}}\right)$ olur. Dolayısıyla, herhangi bir $B(x, y)$ noktası için

$\overrightarrow{PB} = \left(x, y - \frac{\dot{a}}{h\dot{\theta}}\right)$ dir. Böylece (4.14) denklemi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{V_f}, \overrightarrow{PB} \rangle &= \left\langle (\dot{h}x - h\dot{\theta}y + \dot{a}, \dot{h}y + h\dot{\theta}x + \dot{b}), \left(x, y - \frac{\dot{a}}{h\dot{\theta}}\right) \right\rangle \\ &= \dot{h}x^2 - h\dot{\theta}xy + \dot{a}x + \frac{(\dot{h}y + h\dot{\theta}x + \dot{b})(h\dot{\theta}y - \dot{a})}{h\dot{\theta}} \\ &= \frac{\dot{h}h\dot{\theta}x^2 - h^2\dot{\theta}^2xy + h\dot{\theta}\dot{a}x + \dot{h}h\dot{\theta}y^2 + \dot{h}\dot{a}y - h^2\dot{\theta}^2xy - h\dot{\theta}\dot{a}x + hb\dot{\theta}y - \dot{a}\dot{b}}{h\dot{\theta}} \\ &= \frac{\dot{h}h\dot{\theta}(x^2 + y^2) + 2hb\dot{\theta}y - \dot{a}\dot{b}}{h\dot{\theta}} \\ &= \dot{h}(x^2 + y^2) + 2\dot{b}y - \frac{\dot{a}\dot{b}}{h\dot{\theta}} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 4.8. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve Oy -ekseni pol eksenini olması durumunda, $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere P pol noktasından B pol ışınına giden pol ışını, B noktasının $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörüne diktir.

İspat. Pol eksenini Oy -ekseni ise $hb\dot{\theta} + \dot{h}\dot{a} = 0$ olur. O halde $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı olduğundan $\dot{b}\dot{\theta} = 0$ dir. Böylece homotetik hareket, sırf öteleme hareket olmadığından $\dot{b} = 0$ dır. Dolayısıyla (4.15) denklemi göz önüne alınırsa

$$\langle \overrightarrow{V_f}, \overrightarrow{PB} \rangle = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.4. N_{II} den elde edilen N_I homotetik hareketinin \vec{V}_f sürüklenme hız vektörünün boyu $\forall(\lambda, \mu)$ için,

$$\|\vec{V}_f\| = \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \|\overline{PB}\| \quad (4.16)$$

dır.

İspat. $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = -[\dot{h}A + h\dot{A}]^{-1} \dot{C}$ eşitliğinde \dot{C} çekilip $\vec{V}_f = \dot{h}AX + h\dot{A}X + \dot{C}$ de yerine yazılırsa,

$$\vec{V}_f = \begin{pmatrix} (\dot{h} \cos \theta - h\dot{\theta} \sin \theta)(x - x_p) - (\dot{h} \sin \theta + h\dot{\theta} \cos \theta)(y - y_p) \\ (\dot{h} \sin \theta + h\dot{\theta} \cos \theta)(x - x_p) + (\dot{h} \cos \theta - h\dot{\theta} \sin \theta)(y - y_p) \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan ise \vec{V}_f sürüklenme vektörünün normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \|\vec{V}_f\| &= \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} \\ &= \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \|\overline{PB}\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.9. $h(\lambda, \mu) = 1$ olması durumunda $\|\vec{V}_f\| = |\dot{\theta}| \|\overline{PB}\|$ elde edilir, [4].

Teorem 4.5. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile \vec{V}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Φ olmak üzere $\forall(\lambda, \mu)$ için

$$\cos \Phi(\lambda, \mu) = \frac{\dot{h} \cos \theta - h\dot{\theta} \sin \theta}{\sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2}} \quad (4.17)$$

bağıntısı vardır.

İspat. $\overrightarrow{PB} = (x - x_p, y - y_p)$ pol ışını ile \vec{V}_f sürüklenme hız vektörü arasında

$$\langle \overrightarrow{PB}, \vec{V}_f \rangle = (\dot{h} \cos \theta - h \dot{\theta} \sin \theta) \|\overrightarrow{PB}\|^2$$

bağıntısı vardır, diğer taraftan P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile \vec{V}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Φ olduğundan

$$\langle \overrightarrow{PB}, \vec{V}_f \rangle = \|\vec{V}_f\| \|\overrightarrow{PB}\| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

dir. Bu iki ifade eşitlenir ve Teorem 4.4. göz önüne alınır

$$(\dot{h} \cos \theta - h \dot{\theta} \sin \theta) \|\overrightarrow{PB}\|^2 = \|\vec{V}_f\| \|\overrightarrow{PB}\| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

$$(\dot{h} \cos \theta - h \dot{\theta} \sin \theta) \|\overrightarrow{PB}\|^2 = \sqrt{\dot{h}^2 + h^2 \dot{\theta}^2} \|\overrightarrow{PB}\| \|\overrightarrow{PB}\| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

$$\dot{h} \cos \theta - h \dot{\theta} \sin \theta = \sqrt{\dot{h}^2 + h^2 \dot{\theta}^2} \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\cos \Phi(\lambda, \mu) = \frac{\dot{h} \cos \theta - h \dot{\theta} \sin \theta}{\sqrt{\dot{h}^2 + h^2 \dot{\theta}^2}}$$

olur.

Sonuç 4.10. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile \vec{V}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Φ ve $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı sabit olmak üzere

$$\Phi(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu)$$

bağıntısı vardır. Bu iki vektörün dik olması için $\theta = 2k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$) olmalıdır.

İspat. $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan

$$\dot{h} = 0$$

dır. Teorem 4.5 de bu değer yerine yazılırsa

$$-h \dot{\theta} \sin \theta = |h \dot{\theta}| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

$$-\sin \theta(\lambda, \mu) = \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

$$\cos \Phi(\lambda, \mu) = \cos \left[\frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu) \right]$$

yani

$$\Phi(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu) \quad , \quad \theta = 2k\pi \quad (k = 0, 1, \dots)$$

olur.

Şimdi N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketindeki bir (x, y) noktasının hodografinin geometrik yerini $\forall(\lambda, \mu)$ için araştıralım. Bunun için $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ alalım. (4.2) denkleminin t parametresine göre türevi alınıp $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ ye göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (h_\lambda x \cos \theta - h_\lambda y \sin \theta - h\theta_\lambda x \sin \theta - h\theta_\lambda y \cos \theta + a_\lambda) \dot{\lambda} \\ &\quad + (h_\mu x \cos \theta - h_\mu y \sin \theta - h\theta_\mu x \sin \theta - h\theta_\mu y \cos \theta + a_\mu) \dot{\mu} \\ &= m_1 \dot{\lambda} + m_2 \dot{\mu} \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= (h_\lambda x \sin \theta + h_\lambda y \cos \theta + h\theta_\lambda x \cos \theta - h\theta_\lambda y \sin \theta + b_\lambda) \dot{\lambda} \\ &\quad + (h_\mu x \sin \theta + h_\mu y \cos \theta + h\theta_\mu x \cos \theta - h\theta_\mu y \sin \theta + b_\mu) \dot{\mu} \\ &= m_3 \dot{\lambda} + m_4 \dot{\mu} \end{aligned}$$

elde edilir. Kısalık için

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= m_1 \dot{\lambda} + m_2 \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= m_3 \dot{\lambda} + m_4 \dot{\mu} \end{aligned}$$

biçiminde yazarsak,

$$\Gamma = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{vmatrix} = m_1 m_4 - m_2 m_3$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
\Gamma = & h_\lambda h_\mu x^2 \sin \theta \cos \theta - h_\lambda h_\mu xy \cos^2 \theta + h_\lambda hx^2 \theta_\mu \cos^2 \theta - h_\lambda hxy \theta_\mu \sin \theta \cos \theta \\
& - h_\lambda h_\mu xy \sin^2 \theta + h_\lambda h_\mu y^2 \sin \theta \cos \theta - h_\lambda hxy \theta_\mu \sin \theta \cos \theta + h_\lambda hy^2 \theta_\mu \sin^2 \theta \\
& - hh_\mu x^2 \theta_\lambda \sin^2 \theta + hh_\mu xy \theta_\lambda \sin \theta \cos \theta - h^2 x^2 \theta_\lambda \theta_\mu \sin \theta \cos \theta + h^2 xy \theta_\lambda \theta_\mu \sin^2 \theta \\
& - h h_\mu xy \sin \theta \cos \theta \theta_\lambda + hh_\mu y^2 \theta_\mu \cos^2 \theta - h^2 xy \theta_\lambda \theta_\mu \cos^2 \theta + h^2 y^2 \theta_\lambda \theta_\mu \sin \theta \cos \theta \\
& - h_\lambda h_\mu x^2 \sin \theta \cos \theta + h_\lambda h_\mu xy \sin^2 \theta + h_\lambda hx^2 \theta_\mu \sin^2 \theta + h_\lambda hxy \theta_\mu \sin \theta \cos \theta \\
& - h_\lambda h_\mu xy \cos^2 \theta + h_\lambda h_\mu y^2 \sin \theta \cos \theta + h_\lambda hxy \theta_\mu \sin \theta \cos \theta + h_\lambda hy^2 \theta_\mu \cos^2 \theta \\
& - h h_\mu x^2 \theta_\lambda \cos^2 \theta + hh_\mu xy \theta_\lambda \sin \theta \cos \theta + h^2 x^2 \theta_\lambda \theta_\mu \sin \theta \cos \theta + h^2 xy \theta_\lambda \theta_\mu \cos^2 \theta \\
& + h h_\mu xy \theta_\lambda \sin \theta \cos \theta - hh_\mu y^2 \theta_\mu \sin^2 \theta - h^2 xy \theta_\lambda \theta_\mu \sin^2 \theta - h^2 y^2 \theta_\lambda \theta_\mu \sin \theta \cos \theta \\
& + a_\lambda h_\mu x \sin \theta - a_\lambda h_\mu y \cos \theta + a_\lambda h_\mu x \cos \theta - a_\lambda h_\mu y \sin \theta + a_\lambda b_\mu + b_\mu h_\lambda x \cos \theta \\
& - b_\mu h_\lambda y \sin \theta - b_\mu hx \theta_\lambda \sin \theta - b_\mu hy \theta_\lambda \cos \theta - a_\mu h_\lambda x \sin \theta - a_\mu hy \cos \theta - a_\mu hx \theta_\lambda \cos \theta \\
& + a_\mu hy \theta_\lambda \cos \theta - a_\mu b_\lambda - b_\mu h_\mu x \cos \theta + b_\mu h_\mu y \sin \theta + b_\mu hx \theta_\mu \sin \theta + b_\mu hy \theta_\mu \cos \theta
\end{aligned}$$

elde edilir. $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma = & h(x^2 + y^2)(h_\lambda \theta_\mu - h_\mu \theta_\lambda) + hx(a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) + hy(b_\lambda \theta_\mu - b_\mu \theta_\lambda) \\
& + x(h_\lambda b_\mu - h_\mu b_\lambda) - y(h_\lambda a_\mu - h_\mu a_\lambda) + a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda
\end{aligned}$$

olur. $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ değerleri Cramer metodu ile

$$\dot{\lambda} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{y}_1 & m_2 \\ \dot{y}_2 & m_4 \end{vmatrix}}{\Gamma}, \quad \dot{\mu} = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & \dot{y}_1 \\ m_3 & \dot{y}_2 \end{vmatrix}}{\Gamma}$$

şeklinde hesaplanır ve $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$(m_3^2 + m_4^2) \dot{y}_1^2 - 2(m_1 m_3 + m_2 m_4) \dot{y}_1 \dot{y}_2 + (m_1^2 + m_2^2) \dot{y}_2^2 = \Gamma^2$$

veya açık haliyle

$$\begin{aligned}
& \left[h^2 x^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) + y^2 (h_\lambda^2 + h_\mu^2) + 2hxy (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) + 2hx (b_\lambda \theta_\lambda + b_\mu \theta_\mu) \right. \\
& \left. + 2y (h_\lambda b_\lambda + h_\mu b_\mu) + (b_\lambda^2 + b_\mu^2) \right] \dot{y}_1^2 + \left[x^2 (h_\lambda^2 + h_\mu^2) + h^2 y^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) \right. \\
& \left. - 2hxy (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) + 2x (h_\lambda a_\lambda + h_\mu a_\mu) - 2hy (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) + (a_\lambda^2 + a_\mu^2) \right] \dot{y}_2^2 \\
& - 2 \left[h(x^2 - y^2) (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) + xy (h_\lambda^2 + h_\mu^2 - h^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2)) + hx (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) \right. \\
& \left. - hy (b_\lambda \theta_\lambda + b_\mu \theta_\mu) + x (h_\lambda b_\lambda + h_\mu b_\mu) + y (h_\lambda a_\lambda + h_\mu a_\mu) + a_\lambda b_\lambda + a_\mu b_\mu \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\
& = \Gamma^2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinde herhangi bir (x, y) noktasının $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için hodografı bir elipstir.

İspat: (4.19) denkleminde genel konik denklemi göz önüne alındığında

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

olduğundan öyle ki burada

$$A = h^2 x^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) + y^2 (h_\lambda^2 + h_\mu^2) + 2hxy (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) \\ + 2hx (b_\lambda \theta_\lambda + b_\mu \theta_\mu) + 2y (h_\lambda b_\lambda + h_\mu b_\mu) + (b_\lambda^2 + b_\mu^2)$$

$$B = h^2 x^2 (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) - hy^2 (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) + hx (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) - hy (b_\lambda \theta_\lambda + b_\mu \theta_\mu) \\ + xy (h_\lambda^2 + h_\mu^2 - h^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2)) + y (h_\lambda a_\lambda + h_\mu a_\mu) + x (h_\lambda b_\lambda + h_\mu b_\mu) + a_\lambda b_\lambda + a_\mu b_\mu$$

$$C = x^2 (h_\lambda^2 + h_\mu^2) + h^2 y^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) - 2hxy (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) - 2hy (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) \\ + 2x (h_\lambda a_\lambda + h_\mu a_\mu) + (a_\lambda^2 + a_\mu^2)$$

dır. O halde

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \left(h(x^2 + y^2)(h_\lambda \theta_\lambda - h_\mu \theta_\mu) + hx(a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) + hy(b_\lambda \theta_\mu - b_\mu \theta_\lambda) \right)^2 \\ - \left(-y(h_\lambda a_\mu - h_\mu a_\lambda) + x(h_\lambda b_\mu - h_\mu b_\lambda) + (a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda) \right)^2 > 0$$

olduğundan genel konik denklemi bir elips denklemdir.

Teorem 4.7. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinde $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için Ox -ekseni üzerinde bulunan simetrik iki noktanın hodografı aynı elipslerdir.

İspat: (4.19) denkleminde $B_o(\ell, 0)$ noktası için

$$\left[h^2 \ell^2 (\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) + 2h\ell (b_\lambda \theta_\lambda + b_\mu \theta_\mu) + (b_\lambda^2 + b_\mu^2) \right] \dot{y}_1^2 \\ + \left[\ell^2 (h_\lambda^2 + h_\mu^2) + 2\ell (h_\lambda a_\lambda + h_\mu a_\mu) + (a_\lambda^2 + a_\mu^2) \right] \dot{y}_2^2 \\ - 2 \left[h\ell^2 (h_\lambda \theta_\lambda + h_\mu \theta_\mu) + h\ell (a_\lambda \theta_\lambda + a_\mu \theta_\mu) + \ell (h_\lambda b_\lambda + h_\mu b_\mu) + a_\lambda b_\lambda + a_\mu b_\mu \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ = \left[h\ell^2 (h_\lambda \theta_\mu - h_\mu \theta_\lambda) + h\ell (a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) + \ell (h_\lambda b_\mu - h_\mu b_\lambda) + a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda \right]^2$$

denklemini elde edilir. Bu ise bir elipstir. Bu elipsin alanı ise

$$\pi \left[h\ell^2 (h_\lambda \theta_\mu - h_\mu \theta_\lambda) + h\ell (a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) + \ell (h_\lambda b_\mu - h_\mu b_\lambda) + a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda \right]$$

dir. $B_0(-\ell, 0)$ noktası içinde benzer işlemler yapılırsa aynı elips elde edilir.

4.2. Homotetik Hareketin İvme Polü

Hareketin sürüklenme ivmesinin sıfır olması yani $(\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A})X + \ddot{C} = 0$ denkleminin çözümü ivme pollerinin koordinatlarını verir. İlk olarak

$$\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \cos \theta - h\ddot{\theta} \sin \theta - 2\dot{h}\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{h} \sin \theta + h\dot{\theta}^2 \sin \theta - h\ddot{\theta} \cos \theta - 2\dot{h}\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{h} \sin \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta + h\ddot{\theta} \cos \theta + 2\dot{h}\dot{\theta} \cos \theta & \dot{h} \cos \theta - h\dot{\theta}^2 \cos \theta - h\ddot{\theta} \sin \theta - 2\dot{h}\dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix}$$

ifadesinin determinantı hesaplanırsa

$$\det [\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A}] = (\ddot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2 \neq 0$$

dır. Bu ifade eder ki bu matris regülerdir, yani tersi mevcuttur.

Böylece

$$P(x_{ip}, y_{ip}) = -(\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A})^{-1} \ddot{C}$$

ivme polününün koordinatları hesaplanırsa

$$\begin{aligned} x_{ip} &= \frac{\ddot{a}(-\dot{h} \cos \theta + h\dot{\theta}^2 \cos \theta + h\ddot{\theta} \sin \theta + 2\dot{h}\dot{\theta} \sin \theta) - \ddot{b}(\dot{h} \sin \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta + h\ddot{\theta} \cos \theta + 2\dot{h}\dot{\theta} \cos \theta)}{(\ddot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2} \\ y_{ip} &= \frac{\ddot{a}(\dot{h} \sin \theta - h\dot{\theta}^2 \sin \theta + h\ddot{\theta} \cos \theta + 2\dot{h}\dot{\theta} \cos \theta) + \ddot{b}(-\dot{h} \cos \theta + h\dot{\theta}^2 \cos \theta + h\ddot{\theta} \sin \theta + 2\dot{h}\dot{\theta} \sin \theta)}{(\ddot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Bununla beraber $\theta(\lambda, \mu) = (0, 0) = 0$ için

$$P(x_{ip}, y_{ip}) = \left(\frac{-\ddot{h}\ddot{a} - 2\dot{h}\ddot{b}\dot{\theta} + h(\ddot{a}\dot{\theta}^2 - \ddot{b}\ddot{\theta})}{(\ddot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2}, \frac{-\ddot{h}\ddot{b} + 2\dot{h}\ddot{a}\dot{\theta} + h(\ddot{b}\dot{\theta}^2 + \ddot{a}\ddot{\theta})}{(\ddot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2} \right) \quad (4.21)$$

olur.

Teorem 4.8. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin hareketli düzlemdeki ivme pollerinin denklemi, $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ için,

$$(h\ddot{a}\ddot{\theta} - \ddot{h}\ddot{b})x_{ip} + (\ddot{h}\ddot{a} + h\ddot{b}\ddot{\theta})y_{ip} = 0 \quad (4.22)$$

dır.

İspat. (4.20) denklemlerinde $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ yazılıp düzenlenirse

$$x_{ip} = -\frac{\ddot{h}\ddot{a} + h\ddot{b}\ddot{\theta}}{\ddot{h}^2 + h^2\ddot{\theta}^2} \quad y_{ip} = \frac{-\ddot{h}\ddot{b} + h\ddot{a}\ddot{\theta}}{\ddot{h}^2 + h^2\ddot{\theta}^2}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.22) denklemi elde edilir.

Böylece $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi için aşağıdaki sonuçları verilebilir.

Sonuç 4.11. Hareketli düzlemdeki ivme polleri $\theta(\lambda, \mu)$ sabit ise (4.7) doğrusu üzerinde bulunur. Böylece hareketli düzlemin pol doğrusu ile ivme pollerinin doğrusu çakışıktır.

Sonuç 4.12. Hareketli düzlemdeki ivme polleri $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit ise (4.8) doğrusu üzerinde bulunur. Dolayısıyla hareketli düzlemin pol doğrusu ile ivme pollerinin doğrusu çakışıktır.

Sonuç 4.13. Hareketli düzlemdeki ivme polleri $h(\lambda, \mu) = 1$ ise (4.9) doğrusu üzerinde bulunur, [4].

Teorem 4.9. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin sabit düzlemdeki ivme pollerinin denklemi $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ için,

$$(h\ddot{a}\ddot{\theta} - \ddot{h}\ddot{b})\bar{x}_{ip} + (\ddot{h}\ddot{a} + h\ddot{b}\ddot{\theta})\bar{y}_{ip} = 0 \quad (4.23)$$

dır.

İspat. Sabit düzlemin ivme polleri $P(x_{ip}, y_{ip})$ noktasını $Y = hAX + C$ denkleminde

X yerine yazılır ve $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ alınır

$$\bar{P}(\bar{x}_{ip}, \bar{y}_{ip}) = \left(h \cdot \frac{-\ddot{h}\ddot{a} - 2\dot{h}\ddot{b}\dot{\theta} + h(\ddot{a}\dot{\theta}^2 - \ddot{b}\ddot{\theta})}{(\dot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2} + a, h \cdot \frac{-\ddot{h}\ddot{b} + 2\dot{h}\ddot{a}\dot{\theta} + h(\ddot{b}\dot{\theta}^2 + \ddot{a}\ddot{\theta})}{(\dot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2} + b \right) \quad (4.24)$$

bulunur. Burada \bar{x}_{ip} ve \bar{y}_{ip} koordinatlarında $(\dot{h} - h\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\theta} + h\ddot{\theta})^2$ ifadeleri çekilip birbirine eşitlenmesiyle (4.23) denklemi elde edilir.

N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinde $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.14. Sabit düzlemdeki ivme polleri $\theta(\lambda, \mu) = sbt$ ise (4.12) doğrusu üzerinde bulunur. Böylece sabit düzlemin pol doğrusu ile ivme pollerinin doğrusu çakışıkır.

Sonuç 4.15. Sonuç 4.14 de özel olarak $h(\lambda, \mu) = 1$ alınır sabit ve hareketli düzlemdeki ivme pollerinin doğruları $\theta(\lambda, \mu)$ sabit ise çakışıkırlar.

Sonuç 4.16. Sabit düzlemdeki ivme polleri $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğunda (4.9) doğrusu üzerinde bulunur. Dolayısıyla sabit düzlemin pol doğrusu ile ivme pollerinin doğrusu çakışıkır.

Sonuç 4.17. Sonuç 4.12 da verilen hareketli düzlemin ivme pollelerinin doğrusu ile Sonuç 4.14 de verilen sabit düzlemin ivme pollerinin doğrusu $h(\lambda, \mu) = 1$ durumunda çakışıkır.

4.3. Özel İki Parametrelili Homotetik Hareket

Şimdi genel olarak incelenen iki parametrelili homotetik düzlem hareketini özel olarak Bottema'nın incelediği tarzda ele alalım.

Tanım 4.2. (4.1) denklemindeki genel iki parametrelili homotetik harekette eğer $\theta(\lambda, \mu) = \lambda$ ve $a(\lambda, \mu) = \ell\mu$ alınırsa bu harekete özel iki parametrelili homotetik hareket denir ve

$$\begin{aligned} y_1 &= hx\cos\lambda - hysin\lambda + \ell\mu \\ y_2 &= hxsin\lambda + hycos\lambda + b(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (4.25)$$

denklemleri ile verilir.

Şimdi N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin hız vektörünü araştıralım. Bunun için hareketli düzlemdeki sabit bir $B(x, y)$ noktasının sürüklenme hızı \vec{V}_f olmak üzere aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.10. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktalarının denklemi

$$\begin{aligned} & (h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda}\cos\lambda + h\dot{\ell}\dot{\mu}\sin\lambda + h\dot{b}\dot{\lambda}\sin\lambda - h\dot{b}\dot{\cos}\lambda)x_p \\ & + (-h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda}\sin\lambda + h\dot{\ell}\dot{\mu}\cos\lambda + h\dot{b}\dot{\lambda}\cos\lambda + h\dot{b}\dot{\sin}\lambda)y_p = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

dır.

İspat. $B(x, y)$ noktası hareketli düzlemde sabit olacağından $\vec{V}_r = 0$ ve aynı nokta sabit düzlemde de sabit olacağı için $\vec{V}_f = 0$ olacaktır. O halde $\vec{V}_f = 0$ için $h\dot{A}X + h\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin çözümü hareketli düzlemin pol noktalarını verir. Dolayısıyla, hareketli düzlemin pol noktaları,

$$P(x_p, y_p) = -[\dot{h}A + h\dot{A}]^{-1} \dot{C}$$

dir. $\det[\dot{h}A + h\dot{A}]^{-1} = \dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2 \neq 0$ olduğundan $[\dot{h}A + h\dot{A}]$ matrisi regülerdir, yani tersi mevcuttur. Böylece (4.1) denklemi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = h(\lambda, \mu) \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan pol noktasının koordinatları

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{h\ell\dot{\mu}\lambda \sin \lambda - \dot{h}\ell\dot{\mu} \cos \lambda - h\dot{b}\dot{\lambda} \cos \lambda - \dot{h}\dot{b} \sin \lambda}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2} \\ y_p &= \frac{h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} \cos \lambda + \dot{h}\ell\dot{\mu} \sin \lambda + h\dot{b}\dot{\lambda} \sin \lambda - \dot{h}\dot{b} \cos \lambda}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

olur. Böylece x_p ve y_p koordinatlarında $\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2$ ifadelerini çekip birbirine eşitlenirse (4.26) denklemi elde edilir.

N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için,

$$P(x_p, y_p) = \left(-\frac{\dot{h}\ell\dot{\mu} + h\dot{b}\dot{\lambda}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2}, \frac{h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} - \dot{h}\dot{b}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2} \right) \quad (4.28)$$

olur. İlave olarak pol noktalarının $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için denklemi

$$(h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} - \dot{h}\dot{b})x_p + (h\dot{b}\dot{\lambda} + \dot{h}\ell\dot{\mu})y_p = 0 \quad (4.29)$$

dır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Sonuç 4.18. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğunda

$$h\ell x_p + h\dot{b}_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0 \quad (4.30)$$

doğrusu üzerinde bulunur.

Teorem 4.11. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinin, sabit düzlemdeki pol noktalarının denklemi

$$(h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} - \dot{h}\dot{b})\bar{x}_p + (h\dot{b}\dot{\lambda} + \dot{h}\ell\dot{\mu})\bar{y}_p = \ell\mu(\dot{h}\dot{b} - h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda}) - b(\dot{h}\ell\dot{\mu} + h\dot{b}\dot{\lambda}) \quad (4.31)$$

dır.

İspat. Hareketli düzlemin $P = (x_p, y_p)$ pol noktası, $Y = hAX + C$ denkleminde X yerine yazılırsa, sabit düzlemin $\bar{P} = (\bar{x}_p, \bar{y}_p)$ polü bulunur. Böylece,

$$\bar{P}(\bar{x}_p, \bar{y}_p) = h(\lambda, \mu) \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_p \\ \bar{y}_p \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} \sin \lambda - \dot{h}\ell\dot{\mu} \cos \lambda - h\dot{b}\dot{\lambda} \cos \lambda - \dot{h}\dot{b} \sin \lambda}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2} \\ \frac{h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} \cos \lambda + \dot{h}\ell\dot{\mu} \sin \lambda + h\dot{b}\dot{\theta} \sin \lambda - \dot{h}\dot{b} \cos \lambda}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla sabit pol noktasının koordinatları,

$$\bar{x}_p = -\frac{h^2\dot{b}\dot{\lambda} + \dot{h}h\ell\dot{\mu}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2} + \ell\mu \quad \bar{y}_p = \frac{h^2\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} - \dot{h}h\dot{b}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2} + b \quad (4.32)$$

olur ve $\dot{h}^2 + h^2\dot{\lambda}^2$ ifadelerini çekip birbirine eşitleyerek sabit düzlemdeki pol noktalarının denklemi

$$(h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda} - \dot{h}\dot{b})\bar{x}_p + (h\dot{b}\dot{\lambda} + \dot{h}\ell\dot{\mu})\bar{y}_p = \ell\mu(\dot{h}\dot{b} - h\ell\dot{\mu}\dot{\lambda}) - b(\dot{h}\ell\dot{\mu} + h\dot{b}\dot{\lambda})$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.19. (4.32) denklemlerinde $h(\lambda, \mu)$ sabit ise

$$\bar{x}_p = -\frac{\dot{b}}{\dot{\lambda}} + \ell\mu \quad \bar{y}_p = \frac{\ell\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} + b$$

dir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\ell x_p + b_\mu y_p + \ell b_\lambda - b b_\mu - \ell^2 \mu = 0 \quad (4.33)$$

denklemi elde edilir. $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için

$$\ell x_p + b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0 \quad (4.34)$$

olur.

Sonuç 4.20. (4.30) denkleminde özel olarak $h(\lambda, \mu) = 1$ alınırsa sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğruları $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $h(\lambda, \mu)$ sabit olduğunda çakışık olurlar.

Şimdi N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinin sürüklenme hız vektörlerinin pol ışınına dik olup olmadığını araştıralım. Öncelikle O.Bottema'nın incelediği gibi pol eksenini Oy -ekseni olan ve N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketini ele alalım. Bunun için $\lambda = \mu = 0$ ve $\dot{h}\ell\dot{\mu} + h\dot{b}\dot{\lambda} = 0$ olmalıdır. Böylece (4.27) denklemlerinden

$$x_p = 0$$

$$y_p = \frac{\ell\dot{\mu}}{h\dot{\lambda}}$$

dır.

Hareketli düzlemdeki herhangi bir sabit $B(x, y)$ noktasının sürüklenme hızı $\vec{V}_f = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ dir. Dolayısıyla $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $\dot{h}\ell\dot{\mu} + h\dot{b}\dot{\lambda} = 0$ olduğu göz önüne alınır ve (4.25) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{h}x - h\dot{\lambda}y + \ell\dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= \dot{h}y + h\dot{\lambda}x + \dot{b} \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.12. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketi $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve Oy -ekseni pol eksenini olması durumunda P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile, B noktasının \vec{V}_f sürüklenme hızı arasında,

$$\langle \vec{V}_f, \overline{PB} \rangle = \dot{h}(x^2 + y^2) + 2\dot{b}y - \frac{\ell\dot{\mu}\dot{b}}{h\dot{\lambda}} \quad (4.36)$$

bağıntısı vardır.

İspat. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinde pol eksenini Oy -ekseni seçilirse $P = (x_p, y_p) = \left(0, \frac{\ell\dot{\mu}}{h\dot{\lambda}}\right)$ ve dolayısıyla $\overline{PB} = \left(x, y - \frac{\ell\dot{\mu}}{h\dot{\lambda}}\right)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{V_f}, \overrightarrow{PB} \rangle &= \left\langle \left(\dot{h}x - h\dot{\lambda}y + \ell\dot{\mu}, \dot{h}y + h\dot{\lambda}x + \dot{b} \right), \left(x, y - \frac{\ell\dot{\mu}}{h\dot{\lambda}} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\dot{h}h\dot{\lambda}x^2 - h^2\dot{\lambda}^2xy + h\dot{\lambda}\ell\dot{\mu}x + \dot{h}h\dot{\lambda}y^2 + \dot{h}\ell\dot{\mu}y - h^2\dot{\lambda}^2xy - h\dot{\lambda}\ell\dot{\mu}x + h\dot{b}\dot{\lambda}y - \ell\dot{\mu}\dot{b}}{h\dot{\lambda}} \\
&= \frac{\dot{h}h\dot{\lambda}(x^2 + y^2) + 2h\dot{b}\dot{\lambda}y - \ell\dot{\mu}\dot{b}}{h\dot{\lambda}} \\
&= \dot{h}(x^2 + y^2) + 2\dot{b}y - \frac{\ell\dot{\mu}\dot{b}}{h\dot{\lambda}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 4.21. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve Oy -ekseni pol ekseni olması durumunda, eğer $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit ise P pol noktasından B pol ışımına giden pol ışını, B noktasının $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörüne diktir.

İspat. Pol ekseni Oy -ekseni olması durumunda $h\dot{b}\dot{\lambda} + \dot{h}\ell\dot{\mu} = 0$ ve $h(\lambda, \mu)$ nin sıfırdan farklı sabit olma durumları göz önüne alınırsa $\dot{b}\dot{\lambda} = 0$ elde edilir. Burada homotetik hareketin sırf öteleme hareketi olmaması için $\dot{b} = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla (4.15) denklemini göz önüne alınırsa

$$\langle \overrightarrow{V_f}, \overrightarrow{PB} \rangle = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.13. N_{II} den elde edilen N_I hareketinin $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörlerinin boyları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda,

$$\|\overrightarrow{V_f}\| = |\dot{h} + h\dot{\lambda}| \|\overrightarrow{PB}\|$$

dır.

İspat. $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = -[\dot{h}A + h\dot{A}]^{-1} \dot{C}$ eşitliğinde \dot{C} çekilip $\vec{V}_f = \dot{h}AX + h\dot{A}X + C$ ifadesinde

yerine yazılırsa,

$$\vec{V}_f = \begin{bmatrix} (\dot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda} \sin \lambda)(x - x_p) - (\dot{h} \sin \lambda + h\dot{\lambda} \cos \lambda)(y - y_p) \\ (\dot{h} \sin \lambda + h\dot{\lambda} \cos \lambda)(x - x_p) + (\dot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda} \sin \lambda)(y - y_p) \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan ise

$$\|\vec{V}_f\| = |\dot{h} + h\dot{\lambda}| \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} = |\dot{h} + h\dot{\lambda}| \|\overline{PB}\|$$

elde edilir.

Teorem 4.14. N_{II} den elde edilen N_I homotetik hareketi için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile \vec{V}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Φ olmak üzere $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda

$$\cos \Phi(\lambda, \mu) = \frac{\dot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda} \sin \lambda}{|\dot{h} + h\dot{\lambda}|} \quad (4.37)$$

bağıntısı vardır.

İspat. $P(x_p, y_p)$ pol noktasından $B(x, y)$ noktasına giden pol ışını,

$$\overline{PB} = (x - x_p, y - y_p)$$

ve sürüklenme hız vektörü

$$\vec{V}_f = \begin{bmatrix} (\dot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda} \sin \lambda)(x - x_p) - (\dot{h} \sin \lambda + h\dot{\lambda} \cos \lambda)(y - y_p) \\ (\dot{h} \sin \lambda + h\dot{\lambda} \cos \lambda)(x - x_p) + (\dot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda} \sin \lambda)(y - y_p) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\langle \overline{PB}, \vec{V}_f \rangle = (\dot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda} \sin \lambda) \|\overline{PB}\|^2$$

dir. Diğer taraftan

$$\langle \overline{PB}, \vec{V}_f \rangle = \|\vec{V}_f\| \|\overline{PB}\| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

olduğundan son iki denklemden

$$(\dot{h} \cos \lambda - h \dot{\lambda} \sin \lambda) \|\overline{PB}\|^2 = \|\overline{V}_f\| \|\overline{PB}\| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

elde edilir. Teorem 4.13. de $\|\overline{V}_f\| = |\dot{h} + h \dot{\lambda}| \|\overline{PB}\|$ olduğundan

$$(\dot{h} \cos \lambda - h \dot{\lambda} \sin \lambda) \|\overline{PB}\|^2 = |\dot{h} + h \dot{\lambda}| \|\overline{PB}\| \|\overline{PB}\| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

$$(\dot{h} \cos \lambda - h \dot{\lambda} \sin \lambda) = |\dot{h} + h \dot{\lambda}| \cos \Phi(\lambda, \mu)$$

bulunur. Buradan,

$$\cos \Phi(\lambda, \mu) = \frac{\dot{h} \cos \lambda - h \dot{\lambda} \sin \lambda}{|\dot{h} + h \dot{\lambda}|}$$

elde edilir.

Sonuç 4.22. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I homotetik hareketi için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile \overline{V}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Φ ve $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı sabit olmak üzere

$$\Phi(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{2} + \lambda$$

bağıntısı vardır. Bu iki vektörün dik olması için $\lambda = 2k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$) olmalıdır.

Şimdi özel olarak $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ alalım ve N_{II} homotetik hareketinden elde edilen bütün N_I hareketlerindeki herhangi bir (x, y) noktasının hodografinin hangi cins konik olduğunu λ ve μ konumuna göre inceleyelim. Özel hareket denklemi (4.25) in t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (h_\lambda x \cos \lambda - h_\lambda y \sin \lambda - h x \sin \lambda - h y \cos \lambda) \dot{\lambda} + (h_\mu x \cos \lambda + h_\mu y \sin \lambda + \ell) \dot{\mu} \\ \dot{y}_1 &= (h_\lambda x \sin \lambda + h_\lambda y \cos \lambda + h x \cos \lambda - h y \sin \lambda + b_\lambda) \dot{\lambda} + (h_\mu x \sin \lambda + h_\mu y \cos \lambda + b_\mu) \dot{\mu} \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. Buradan $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için,

$$\Gamma = b_\mu (h_\lambda x - h y) - b_\lambda (h_\mu x - \ell) - h_\mu h (x^2 + y^2) - \ell (h_\lambda y + h x) \quad (4.39)$$

bulunur. Cramer metodu ile $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ değerleri bulunup $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ de yerine yazıldığında hodografin genel denklemini elde edilir.

Teorem 4.15. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketindeki herhangi bir (x, y) noktasının $\lambda = \mu = 0$ ve $\dot{h}\ell\dot{\mu} + h\dot{b}\dot{\lambda} = 0$ için hodografı bir elipstir.

İspat. $\lambda = \mu = 0$ ve $\dot{h}\ell\dot{\mu} + h\dot{b}\dot{\lambda} = 0$ seçildiğinde,

$$\Gamma = b_{\mu}(h_{\lambda}x - hy) - b_{\lambda}(h_{\mu}x - \ell) - h_{\mu}h(x^2 + y^2) - \ell(h_{\lambda}y + hx)$$

olur. Böylece hodografin denklemi

$$\begin{aligned} & \left[h^2x^2 + y^2(h_{\lambda}^2 + h_{\mu}^2) + 2h_{\lambda}hxy + 2hb_{\lambda}x + 2y(h_{\lambda}b_{\lambda} + h_{\mu}b_{\mu}) + b_{\lambda}^2 + b_{\mu}^2 \right] \dot{y}_1^2 \\ & + \left[x^2(h_{\lambda}^2 + h_{\mu}^2) + h^2y^2 - 2h_{\lambda}hxy + 2h_{\mu}\ell x + \ell^2 \right] \dot{y}_2^2 \\ & - 2 \left[h_{\lambda}h(x^2 - y^2) + xy(h_{\lambda}^2 + h_{\mu}^2 - h^2) + x(h_{\lambda}b_{\lambda} + h_{\mu}b_{\mu}) + y(h_{\mu}\ell - hb_{\lambda}) + \ell b_{\mu} \right] \dot{y}_1\dot{y}_2 \\ & = \left[b_{\mu}(h_{\lambda}x - hy) - b_{\lambda}(h_{\mu}x - \ell) - h_{\mu}h(x^2 + y^2) - \ell(h_{\lambda}y + hx) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

dir. Bu denklem bir elips belirtir. Gerçekten

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genel konik denklemi olmak üzere, (4.40) denkleminde

$$A = h^2x^2 + y^2(h_{\lambda}^2 + h_{\mu}^2) + 2h_{\lambda}hxy + 2hb_{\lambda}x + 2y(h_{\lambda}b_{\lambda} + h_{\mu}b_{\mu}) + b_{\lambda}^2 + b_{\mu}^2$$

$$B = h_{\lambda}h(x^2 - y^2) + xy(h_{\lambda}^2 + h_{\mu}^2 - h^2) + x(h_{\lambda}b_{\lambda} + h_{\mu}b_{\mu}) + y(h_{\mu}\ell - hb_{\lambda}) + \ell b_{\mu}$$

$$C = (h_{\lambda}^2 + h_{\mu}^2)x^2 + h^2y^2 - 2h_{\lambda}hxy + 2h_{\mu}\ell x + \ell^2$$

seçilirse,

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \left[b_{\mu}(h_{\lambda}x - hy) - b_{\lambda}(h_{\mu}x - \ell) - h_{\mu}h(x^2 + y^2) - \ell(h_{\lambda}y + hx) \right]^2 > 0$$

olur. Bu ise denklemin elips olduğunu ifade eder.

Teorem 4.16. Eğer $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit ve pol eksenini Oy -ekseni olmak üzere, Ox -ekseni üzerinde bulunan simetrik iki noktanın $\lambda = \mu = 0$ için hodografları (sırf öteleme olmaması durumunda) aynı çemberlerdir.

İspat. (4.40) denkleminde $B_0(\ell, 0)$ noktası için

$$\begin{aligned} & \left[h^2 \ell^2 + 2hb_\lambda \ell + b_\lambda^2 + b_\mu^2 \right] \dot{y}_1^2 + \left[\ell^2 (h_\lambda^2 + h_\mu^2) + 2h_\mu \ell^2 + \ell^2 \right] \dot{y}_2^2 \\ & - 2 \left[h_\lambda h \ell^2 + \ell (h_\lambda b_\lambda + h_\mu b_\mu) + \ell b_\mu \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 = \left[\ell (h_\lambda b_\mu - h_\mu b_\lambda + b_\lambda) - h \ell^2 (h_\mu + 1) \right]^2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada eğer $h(\lambda, \mu)$ nin sıfırdan farklı bir sabit olduğu göz önüne alınırsa

$$\left[h^2 \ell^2 + 2hb_\lambda \ell + b_\lambda^2 + b_\mu^2 \right] \dot{y}_1^2 + \ell^2 \dot{y}_2^2 - 2\ell b_\mu \dot{y}_1 \dot{y}_2 = \left[\ell b_\lambda - h \ell^2 \right]^2 \quad (4.41)$$

elde edilir. Pol eksenini Oy -ekseni olduğundan $h\dot{b}\dot{\lambda} + \dot{h}\ell\dot{\mu} = 0$ dır. O halde $h(\lambda, \mu)$ nin sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $h\dot{b}\dot{\lambda} = 0$ olur. Burada sırf öteleme olmaması için $\dot{b} = 0$ olmalıdır. Böylece $\dot{b} = b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} = 0$ olduğundan $b_\lambda = b_\mu = 0$ dır. Dolayısıyla (4.41) denklemi

$$h^2 \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 = h^2 \ell^2 \quad (4.42)$$

şeklini alır. Bu ise yarıçapı $h\ell$ olan bir çember denklemdir. (4.41) denkleminde aynı işlemler yapılırsa $B_0(-\ell, 0)$ noktası içinde aynı çember denklemini elde ederiz.

$B_0(\ell, 0)$ noktasının yörüngesi için (4.25) denkleminde

$$y_1 = h\ell \cos \lambda + \ell \mu$$

$$y_2 = h\ell \sin \lambda + b(\lambda, \mu)$$

bulunur. $\forall(\lambda, \mu)$ ye göre bu yörünge değişir. $B_0(\ell, 0)$ noktası için (4.35) denkleminde

$$\dot{y}_1 = \ell \dot{\mu} \quad \dot{y}_2 = h\ell \dot{\lambda}$$

elde edilir. Bu değerler $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$h^2 \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 = h^2 \ell^2$$

bulunur. Böylece B_0 noktasının skalar hızı

$$\|\vec{V}_f\| = \|(\dot{y}_1, \dot{y}_2)\| = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} = \sqrt{\ell^2 \dot{\mu}^2 + h^2 \ell^2 \dot{\lambda}^2} = \ell \sqrt{\dot{\mu}^2 + h^2 \dot{\lambda}^2}$$

olur. Özel olarak $h=1$ alınırsa skalar hız

$$\|\vec{V}_f\| = \ell$$

dir.

4.4. Özel İki Parametrelili Homotetik Hareketin İvme Polü

Hareketin sürüklenme ivmesinin sıfır olması yani $(\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A})X + \ddot{C} = 0$ denkleminin çözümü ivme pollerinin koordinatlarını verir. İlk olarak

$$\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda}^2 \cos \lambda - h\ddot{\lambda} \sin \lambda - 2\dot{h}\dot{\lambda} \sin \lambda & -\ddot{h} \sin \lambda + h\dot{\lambda}^2 \sin \lambda - h\ddot{\lambda} \cos \lambda - 2\dot{h}\dot{\lambda} \cos \lambda \\ \ddot{h} \sin \lambda - h\dot{\lambda}^2 \sin \lambda + h\ddot{\lambda} \cos \lambda + 2\dot{h}\dot{\lambda} \cos \lambda & \ddot{h} \cos \lambda - h\dot{\lambda}^2 \cos \lambda - h\ddot{\lambda} \sin \lambda - 2\dot{h}\dot{\lambda} \sin \lambda \end{bmatrix}$$

ifadesinin determinantı hesaplanırsa

$$\det[\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A}] = (\ddot{h} - h\dot{\lambda}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\lambda} + h\ddot{\lambda})^2 \neq 0$$

dir. O halde bu matris regülerdir, yani tersi mevcuttur.

Böylece

$$P(x_{ip}, y_{ip}) = -(\ddot{h}A + h\ddot{A} + 2\dot{h}\dot{A})^{-1} \ddot{C}$$

ivme polününün koordinatları hesaplanırsa $\lambda = \mu = 0$ için

$$\begin{aligned} x_{ip} &= \frac{-\ell \ddot{h} \dot{\mu} - 2\dot{h} \ddot{b} \dot{\lambda} + h(\ell \ddot{\mu} \dot{\lambda}^2 - \ddot{b} \ddot{\lambda})}{(\ddot{h} - h\dot{\lambda}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\lambda} + h\ddot{\lambda})^2} \\ y_{ip} &= \frac{-\ddot{h} \ddot{b} + 2\dot{h} \ddot{\mu} \dot{\lambda} + h(\ddot{b} \dot{\lambda}^2 + \ell \ddot{\mu} \ddot{\lambda})}{(\ddot{h} - h\dot{\lambda}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\lambda} + h\ddot{\lambda})^2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

elde edilir.

Teorem 4.17. N_{II} den elde edilen N_I homotetik hareketinin hareketli düzlemdeki ivme pollerinin denklemi, $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ olması durumunda

$$(\ell h \ddot{\lambda} \ddot{\mu} - \ddot{h} \ddot{b}) x_{ip} + (\ell \ddot{h} \ddot{\mu} + h \ddot{b} \ddot{\lambda}) y_{ip} = 0 \quad (4.44)$$

dır.

İspat. (4.43) denklemlerinde $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ yazılır ve tekrar düzenlenirse

$$x_{ip} = -\frac{\ell \ddot{h} \ddot{\mu} + h \ddot{b} \ddot{\lambda}}{\ddot{h}^2 + h^2 \ddot{\lambda}^2} \quad y_{ip} = \frac{-\ddot{h} \ddot{b} + \ell h \ddot{\mu} \ddot{\lambda}}{\ddot{h}^2 + h^2 \ddot{\lambda}^2} \quad (4.45)$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında (4.44) denklemini elde ederiz.

Sonuç 4.23. Hareketli düzlemdeki ivme polleri $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ ve $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğunda (4.30) doğrusu üzerinde bulunur.

Sonuç 4.24. Hareketli düzlemdeki ivme polleri $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ ve $h(\lambda, \mu) = 1$ olduğunda (4.34) doğrusu üzerinde bulunur.

Sonuç 4.25. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinin, hareketli düzlemdeki ivme polleri $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ konumunda hareketli düzlemin pol doğrusu ile çakışır.

Teorem 4.18. N_{II} den elde edilen N_I homotetik hareketinin sabit düzlemdeki ivme pollerinin denklemi, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ olması durumunda

$$(\ell h \ddot{\lambda} \ddot{\mu} - \ddot{h} \ddot{b}) \bar{x}_{ip} + (\ell \ddot{h} \ddot{\mu} + h \ddot{b} \ddot{\lambda}) \bar{y}_{ip} = 0 \quad (4.46)$$

dır.

İspat. Sabit düzlemin ivme polleri $P(x_{ip}, y_{ip})$ noktasını $Y = hAX + C$ denkleminde X yerine yazdığımızda $\bar{P} = (\bar{x}_{ip}, \bar{y}_{ip})$ polü bulunur.

O halde

$$\begin{aligned}\bar{x}_{ip} &= h \frac{-\ddot{h}\ell\ddot{\mu} - 2\dot{h}\ddot{b}\dot{\lambda} + h(\ell\ddot{\mu}\dot{\lambda}^2 - \ddot{b}\ddot{\lambda})}{(\dot{h} - h\dot{\lambda}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\lambda} + h\ddot{\lambda})^2} + \ell\mu \\ \bar{y}_{ip} &= h \frac{-\ddot{h}\ddot{b} + 2\dot{h}\ell\ddot{\mu}\dot{\lambda} + h(\ddot{b}\dot{\lambda}^2 + \ell\ddot{\mu}\ddot{\lambda})}{(\dot{h} - h\dot{\lambda}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\lambda} + h\ddot{\lambda})^2} + b\end{aligned}\quad (4.47)$$

dır. Bu son denklemde $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ yazılıp düzenlenirse

$$(\ell h \ddot{\lambda} \ddot{\mu} - \ddot{h} \ddot{b}) \bar{x}_{ip} + (\ell \ddot{h} \ddot{\mu} + h \ddot{b} \ddot{\lambda}) \bar{y}_{ip} = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.26. Sabit düzlemdeki ivme polleri $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ ve $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğunda (4.34) doğrusu üzerinde bulunur.

Sonuç 4.27. (4.30) denklemde özel olarak $h(\lambda, \mu) = 1$ alınırsa hareketli düzlemin ivme pollelerinin doğrusu, $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere (4.34) denklemi ile verilen sabit düzlemin ivme pollerinin doğrusu ile $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ konumunda çakışıktır.

Sonuç 4.28. N_{II} homotetik hareketinden elde edilen N_I hareketinin, sabit düzlemdeki ivme polleri $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ için sabit düzlemin pol doğrusu ile çakışır.

BÖLÜM 5. ÖKLİD UZAYINDA BİR EĞRİ BOYUNCA İKİ PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKET

Bu bölümde Öklid uzayında, bir eğri boyunca iki parametrelili homotetik uzay hareketi tanımlandı ve bazı yörünge yüzeylerinin karakterizasyonu elde edildi.

E^3 hareketli Öklid uzayı ve E'^3 de sabit Öklid uzayı olmak üzere E^3 ün E'^3 ye göre hareketi, 6 bağımsız değişkene bağlıdır. Bunlardan ilk 3'ü dönmeyi temsil eden ortogonal matrisin 3 bileşeni ve diğer 3'ü de ötelemeyi veren vektörün 3 bileşenidir.

E^3 ün E'^3 ye göre iki parametrelili homotetik hareketinde parametreler s ve t ile gösterilsin. Bu durumda genel olarak bir noktanın geometrik yeri bir yüzeydir.

E^3 ün E'^3 ye göre genel iki parametrelili hareketi,

$$\varphi(s,t) = A(s,t)\vec{p} + \vec{d}(s,t) \quad (5.1)$$

ile verilir. Burada $A(s,t)$ bir ortogonal matris ile $d(s,t)$ öteleme vektörünün özel seçimiyle bazı yörünge yüzeylerinin parametrizasyonları verilecektir. İlk olarak, $A(s,t)$ nin özel seçimini verelim. 3×3 tipindeki ortogonal matrislerin cümlesini $O(3)$ ve 3×3 tipindeki anti-simetrik matrislerin cümlesi $C(3)$ ile gösterilsin. $C(3)$ bir vektör uzayı yapısına sahip olduğundan,

$$C(3) = \left\{ C = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}, c_i \in R \right\}$$

cümlesi yazılabilir.

$\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ için \vec{p} ye karşılık gelen sütun matrisi P ve \vec{c} ye karşılık gelen anti-simetrik matris C olmak üzere

$$C.P = \vec{c} \wedge \vec{p}$$

olarak yazılabilir. Yani iki vektörün vektörel çarpımı, bu vektörlere karşılık gelen matrislerin çarpımlarına eşittir. Her bir $c_i(s)$ bileşeni $s \in \mathbb{R}$ ye göre

differentiyellenebilir fonksiyonlar olan $\vec{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ bileşenli vektör değerli bir fonksiyon $\vec{c}(s)$ olsun. Buna göre, $\vec{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ ve bir $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ için

$$\mathbf{C}(s) \cdot \mathbf{P}(s) = \vec{c}(s) \wedge \vec{p}(s) \quad (5.2)$$

eşitliğini sağlayan

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} 0 & c_3(s) & -c_2(s) \\ -c_3(s) & 0 & c_1(s) \\ c_2(s) & -c_1(s) & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı ve $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için doğru olan tek türlü bir \mathbf{C} anti-simetrik matrisi vardır. $\vec{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ vektörüne karşılık gelen $\mathbf{C}(s)$ anti-simetrik matris yardımı ile tanımlanan ortogonal matris,

$$\mathbf{A}(s, t) = \mathbf{I} + (\sin t) \mathbf{C} + (1 - \cos t) \mathbf{C}^2 \quad (5.3)$$

dır, [9].

Bir $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ noktasının yer vektörünü \vec{p} ve matris formunu da \mathbf{P} ile gösterilsin. Buna göre (5.3) denkleminde,

$$\mathbf{A}(s, t) \vec{p} = \mathbf{A}(s, t) \mathbf{P} = [\mathbf{I} + (\sin t) \mathbf{C} + (1 - \cos t) \mathbf{C}^2] \mathbf{P} \quad (5.4)$$

elde edilir. Ayrıca $\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = \vec{c} \wedge \vec{p}$ ve $\vec{c} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{p}) = \langle \vec{c}, \vec{p} \rangle \vec{c} - \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \vec{p}$ olduğundan (5.3) ve (5.4) denklemleri kullanılarak

$$\mathbf{A}(s, t) \vec{p} = \vec{p} \cos t + \langle \vec{c}, \vec{p} \rangle \vec{c} (1 - \cos t) + (\vec{c} \wedge \vec{p}) \sin t \quad (5.5)$$

bulunur.

Tanım 5.1. (İki Parametrelili Homotetik Hareket) $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Öklid uzayında iki parametrelili homotetik hareket

$$\varphi(s, t) = h(s, t) \mathbf{A}(s, t) \vec{p} + \alpha(s)$$

şeklinde tanımlanır.

$\alpha(s)$ eğrisinin p noktasındaki Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere eğri boyunca iki parametrelili hareket altında bir p noktasının $\varphi(s,t)(p)$ yörüngesi bir yüzey belirtir. Bu yüzeyin denklemi, (5.3) ve (5.5) denklemlerinden

$$\varphi(s,t)(p) = \vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t + \alpha(s)$$

olur. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı Öklid uzayında iki parametrelili homotetik hareketi ise

$$\varphi(s,t)(p) = h(s,t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] + \alpha(s) \quad (5.6)$$

dir. Şimdi p noktasının yörüngesinin çizdiği yüzeyin normalini bulalım. Frenet formülleri

$$\vec{T}' = k_1 \vec{N} \quad , \quad \vec{N}' = -k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B} \quad , \quad \vec{B}' = -k_2 \vec{N}$$

olduğundan, (5.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \varphi_t &= h_t(s,t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] \\ &\quad + h(s,t) \left[-\vec{p} \sin t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} \sin t + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \cos t \right] \\ \varphi_s &= h_s(s,t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] \\ &\quad + h(s,t) \left[k_1 \sin t (\vec{N} \wedge \vec{p}) + (1 - \cos t) k_1 \langle \vec{N}, \vec{p} \rangle \vec{T} + (1 - \cos t) \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle k_1 \vec{N} \right] + \vec{T} \end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{p} = \lambda \vec{N}$ seçilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (h_t \lambda \cos t - h \lambda \sin t) \vec{N} + (h_t \lambda \sin t + h \lambda \cos t) \vec{B} \\ \varphi_s &= [h k_1 \lambda (1 - \cos t) + 1] \vec{T} + h_s \lambda \cos t \vec{N} + h_s \lambda \sin t \vec{B} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\varphi_t \wedge \varphi_s = \begin{vmatrix} & T & N & B \\ 0 & h_t \lambda \cos t - h \lambda \sin t & h_t \lambda \sin t + h \lambda \cos t & \\ h(1 - \cos t) k_1 \lambda + 1 & h_s \lambda \cos t & h_s \lambda \sin t & \end{vmatrix}$$

$$= \left[-h_s h \lambda^2 \right] \vec{T} + \left[h k_1 \lambda^2 (h_s \sin t + h \cos t)(1 - \cos t) + h_s \lambda \sin t + h \lambda \cos t \right] \vec{N} \\ + \left[h k_1 \lambda^2 (h \sin t - h_s \cos t)(1 - \cos t) - h_s \lambda \cos t + h \lambda \sin t \right] \vec{B}$$

şeklinde bulunur. Bu çarpım p noktasının yörüngesinin çizdiği yüzeyin normalidir. Bu yüzeyin normali, $\alpha(s)$ eğrisinin \vec{T} teğet vektör alanına dik olan normal düzlemindedir.

5.1. Homotetik Hareketin Yörünge Yüzeylerinin Parametrizasyonları

Bu bölümde Öklid uzayında iki parametrelili homotetik hareketler yardımıyla bazı yörünge yüzeylerinin parametrizasyonlarını elde edilecektir.

5.1.1. Homotetik Hareket Altında Silindir Yüzeyleri

a) $\alpha(s) = (0, 0, s)$ eğrisini göz önüne alalım ve $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere bu değerler (5.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\varphi(s, t)(p) = h(s, t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] + \alpha(s) \\ = (h p_1 \cos t - h p_2 \sin t, h p_2 \cos t + h p_1 \sin t, h p_3 + s)$$

elde edilir. $p = (p_1, p_2, 0)$ seçilirse

$$\varphi(s, t)(p) = (h p_1 \cos t - h p_2 \sin t, h p_2 \cos t + h p_1 \sin t, s)$$

bulunur. $p_1 = r \sin \theta$ ve $p_2 = r \cos \theta$ olduğundan,

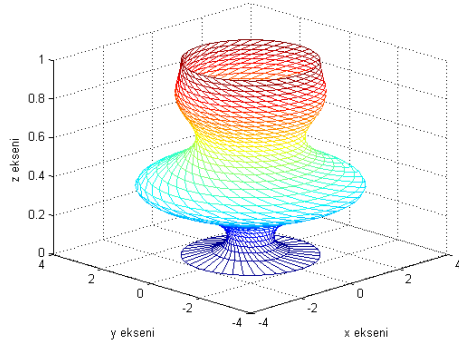
$$\varphi(s, t)(p) = (h r \sin \theta \cos t - h r \cos \theta \sin t, h r \cos \theta \cos t + h r \sin \theta \sin t, s)$$

$$\varphi(s, t)(p) = (h r \sin(\theta - t), h r \cos(\theta - t), s) \quad (5.7)$$

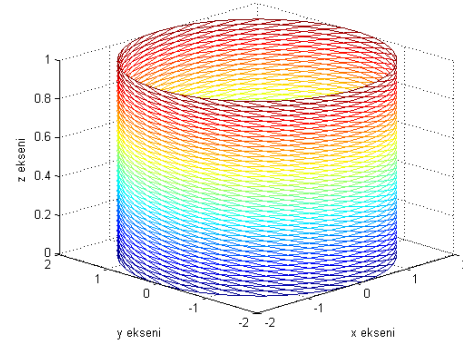
bulunur.

Sonuç 5.1. (5.7) denkleminde $0 < s < 1$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s^{sintcost}$ alınrsa şekil 5.1 deki homotetik silindir yüzeyi elde edilir.

Sonuç 5.2. Sonuç 5.1 de $h(s, t) = 1$ alınrsa şekil 5.2 deki silindir yüzeyi elde edilir.



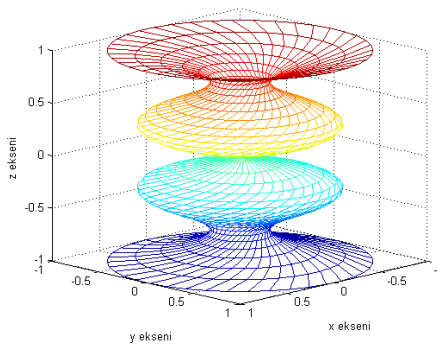
Şekil 5.1 Homotetik Silindir Yüzeyi



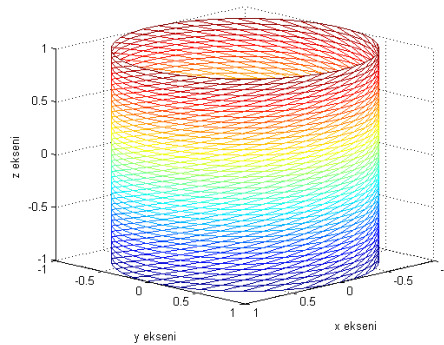
Şekil 5.2 Silindir Yüzeyi

Sonuç 5.3. (5.7) denkleminde $-1 < s < 1$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + sintcost$ alınrsa şekil 5.3 deki homotetik silindir yüzeyi elde edilir.

Sonuç 5.4. Sonuç 5.3 de $h(s, t) = 1$ alınrsa şekil 5.4 deki silindir yüzeyi elde edilir.



Şekil 5.3 Homotetik Silindir Yüzeyi



Şekil 5.4 Silindir Yüzeyi

b) $\alpha(s) = (s, 0, 0)$ eğrisi göz önüne alalım ve $\vec{T} = (1, 0, 0)$ ve $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ şeklinde verilsin. $\vec{c} = \vec{T}$ olmak üzere bu değerler (5.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi(s, t)(p) &= h(s, t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] + \alpha(s) \\ &= (hp_1 + s, hp_2 \cos t - hp_3 \sin t, hp_3 \cos t + hp_2 \sin t) \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $p = (0, p_2, p_3)$ alınırsa

$$\varphi(s, t)(p) = (s, hp_2 \cos t - hp_3 \sin t, hp_3 \cos t + hp_2 \sin t)$$

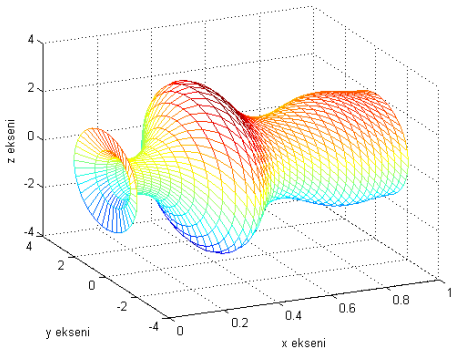
bulunur. $p_2 = r \cos \theta$ ve $p_3 = r \sin \theta$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \varphi(s, t)(p) &= (s, hr \cos \theta \cos t - hr \sin \theta \sin t, hr \sin \theta \cos t + hr \cos \theta \sin t) \\ \varphi(s, t)(p) &= (s, hr \cos(\theta + t), hr \sin(\theta + t)) \end{aligned} \quad (5.8)$$

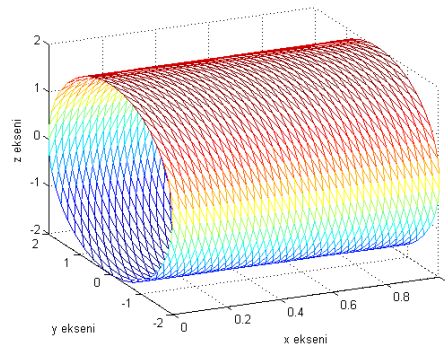
bulunur.

Sonuç 5.5. (5.8) denkleminde $0 < s < 1$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s^{\sin t \cos t}$ alınırsa şekil 5.5 deki homotetik silindir yüzeyi elde edilir.

Sonuç 5.6. Sonuç 5.5 de $h(s, t) = 1$ alınırsa şekil 5.6 biçiminde silindir yüzeyi elde edilir.



Şekil 5.5 Homotetik Silindir Yüzeyi



Şekil 5.6 Silindir Yüzeyi

5.1.2. Homotetik Hareket Altında Tor Yüzeyleri

xOy düzleminde r yarıçaplı çember olarak $\alpha(s) = (r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$ eğrisini göz önüne alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin p noktasındaki Frenet çatisı

$$\vec{T} = (\cos \theta, -\sin \theta, 0)$$

$$\vec{N} = (-\sin \theta, -\cos \theta, 0)$$

$$\vec{B} = (0, 0, -1)$$

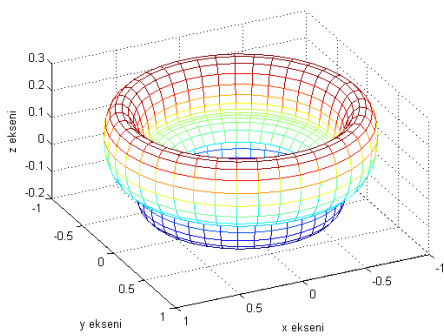
ve $\vec{p} = \lambda \vec{N}$ olmak üzere bulunan bu değerler (5.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi(s, t)(p) &= h(s, t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] + \alpha(s) \\ &= (r \sin \theta - h\lambda \sin \theta \cos t, r \cos \theta - h\lambda \cos \theta \cos t, -h\lambda \sin t) \\ &= (\sin \theta [r - h\lambda \cos t], \cos \theta [r - h\lambda \cos t], -h\lambda \sin t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

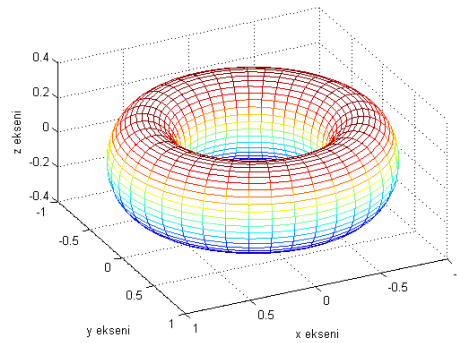
bulunur. Şimdi tor yüzeyinin denklemi olan (5.9) ifadesinin grafiğini inceleyelim.

Sonuç 5.7. (5.9) denkleminde $0 < s < 1$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.7 deki homotetik tor yüzeyi elde edilir.

Sonuç 5.8. Sonuç 5.7 de $h(s, t) = 1$ alınırsa şekil 5.8 biçiminde tor yüzeyi elde edilir.



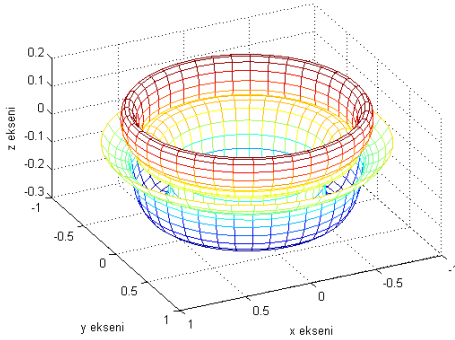
Şekil 5.7 Homotetik Tor Yüzeyi



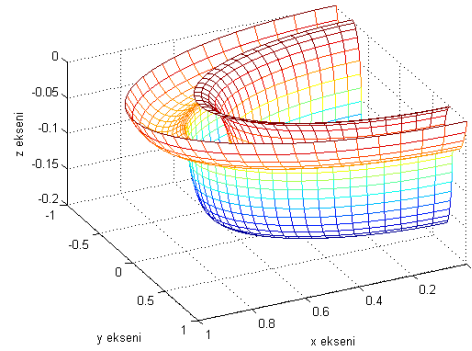
Şekil 5.8 Tor Yüzeyi

Sonuç 5.9. (5.9) denkleminde $0 < s < 1$ ve $-\pi < t, \theta < \pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.9 daki homotetik tor yüzeyi elde edilir.

Sonuç 5.10. (5.9) denkleminde $0 < s < 1$ ve $0 < t, \theta < \pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.10 daki homotetik tor yüzeyi elde edilir.



Şekil 5.9 Homotetik Tor Yüzeyi



Şekil 5.10 Homotetik Tor Yüzeyi

5.1.3. Homotetik Hareket Altında Hiperboloid Yüzeyler

a) Özel olarak $\alpha(s) = (0, 0, s)$ ve $p(s) = (1, s, 0)$ olarak alınır ve bu değerler (5.6) denkleminde yerine yazılırsa (5.10) ifadesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \varphi(s, t)(p) &= h(s, t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] + \alpha(s) \\ &= (h \cos t - h s \sin t, h s \cos t + h \sin t, s) \end{aligned} \quad (5.10)$$

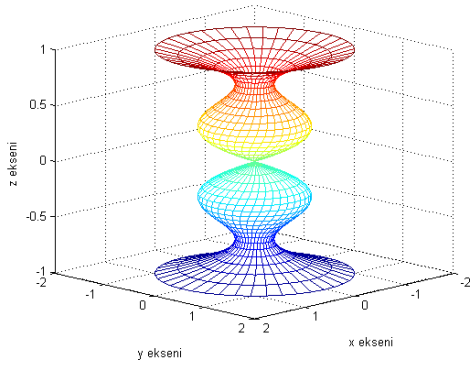
b) $\alpha(s) = (s, 0, 0)$ ve $p(s) = (1, s, 0)$ olarak alınır ve bu değerler (5.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi(s, t)(p) &= h(s, t) \left[\vec{p} \cos t + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge \vec{p}) \sin t \right] + \alpha(s) \\ &= (h + s, h s \cos t, h s \sin t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

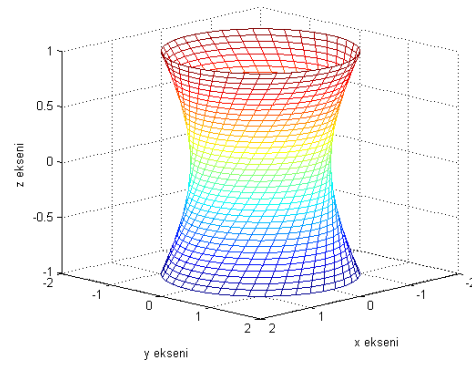
bulunur.

Sonuç 5.11. (5.10) denkleminde $-1 < s < 1$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.11 biçiminde homotetik hiperboloid yüzey elde edilir.

Sonuç 5.12. Sonuç 5.11 de $h(s, t) = 1$ olarak alınırsa şekil 5.12 biçiminde hiperboloid yüzey elde edilir.



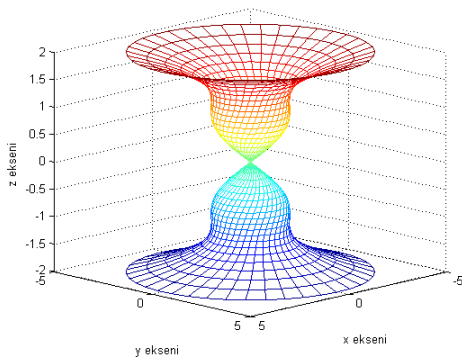
Şekil 5.11 Homotetik Hiperboloid Yüzey



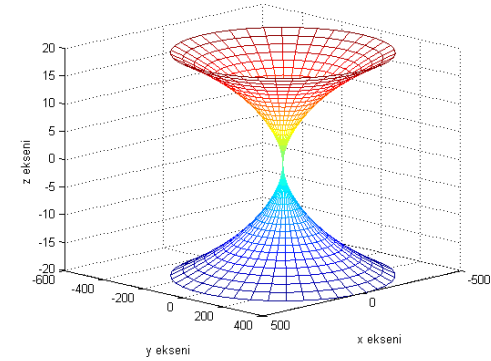
Şekil 5.12 Hiperboloid Yüzey

Sonuç 5.13. (5.10) denkleminde $-2 < s < 2$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.13 deki homotetik hiperboloid yüzey elde edilir.

Sonuç 5.14. (5.10) denkleminde $-20 < s < 20$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.14 deki homotetik hiperboloid yüzey elde edilir.



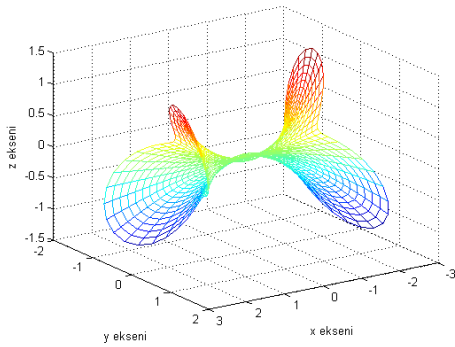
Şekil 5.13 Homotetik Hiperboloid Yüzey



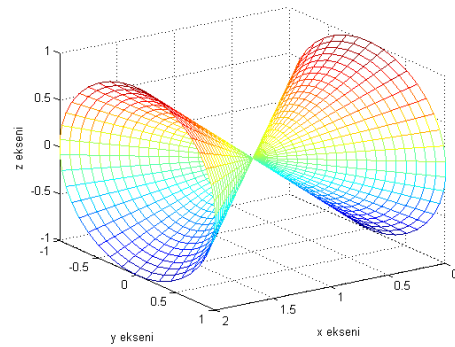
Şekil 5.14 Homotetik Hiperboloid Yüzey

Sonuç 5.15. (5.11) denkleminde $-1 < s < 1$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.15 biçiminde homotetik hiperboloid yüzey elde edilir.

Sonuç 5.16. Sonuç 5.15 de $h(s, t) = 1$ alınırsa şekil 5.16 biçiminde hiperboloid yüzey elde edilir.



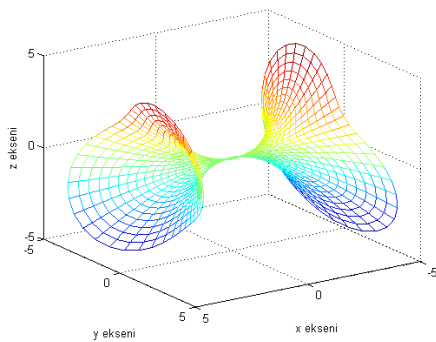
Şekil 5.15 Homotetik Hiperboloid Yüzey



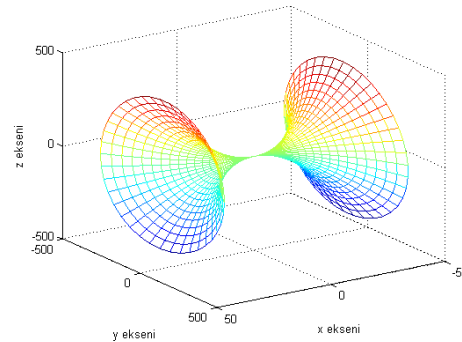
Şekil 5.16 Hiperboloid Yüzey

Sonuç 5.17. (5.11) denkleminde $-2 < s < 2$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.17 biçiminde homotetik hiperboloid yüzey elde edilir.

Sonuç 5.18. (5.11) denkleminde $-20 < s < 20$ ve $0 < t, \theta < 2\pi$ olmak üzere, $h(s, t) = s + \sin t \cos t$ alınırsa şekil 5.18 biçiminde homotetik hiperboloid yüzey elde edilir.



Şekil 5.17 Homotetik Hiperboloid Yüzey



Şekil 5.18 Homotetik Hiperboloid Yüzey

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kinematik, cismin hareketlerinin geometrik ve zamana bağlı özelliklerinin araştırılmasında önemli rol oynar. Kinematik kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen mekaniğin bir dalıdır, yani kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi (cisim) nin zamana bağlı yer değiştirmesini inceler, [1]. Kinematik , makine yapımındaki teknik kullanımlar ve mekanik ile ilişkiler bakımından başlangıçta Öklid düzleminin ve 3-boyutlu Öklid uzayındaki dik sistemlerin hareketleri ile bağlantılıdır. H.R.Müller tarafından, 2-boyutlu Öklid uzayında (Öklid düzlemi) bir parametrelili düzlemsel hareketler ve iki parametrelili düzlem hareketleri geniş bir şekilde incelenmiştir. Düzlemde bir parametrelili hareketler için verilen pol noktalarına karşılık, iki parametrelili hareketlerden elde edilen bir parametrelili hareketler için pol eksenlerinin mevcut olduğu gösterilmiştir. 3-boyutlu Öklid uzayında ise iki parametrelili hareketleri A.Karger ve O.Bottoma geniş bir şekilde incelemiştir.

M.Kemal Karacan, Öklid ve Lorentz düzleminde genel ve özel iki parametrelili hareketler ve bu hareketlerden elde edilen bir parametrelili hareketlerin $\forall(\lambda, \mu)$ konumundaki sürüklenme hızı, pol doğrusu, hodografı ve ivme polünü vermiştir.

Tezde ilk olarak M.Kemal Karacan [4] tarafından verilen iki parametrelili hareketlerin iki parametrelili homotetik hareketlere genelleştirilmesi sunulmuş ve elde edilen sonuçlar hareketin homotetik oranına bağlı olarak bulunmuştur. Homotetik oranın 1 olması durumunda M.Kemal Karacan [4] tarafından verilen sonuç özel bir durum olarak elde edilmiştir. Daha sonra, 3-boyutlu Öklid uzayında homotetik hareket altında, Silindir, Tor ve Hiperboloid gibi bazı yörünge yüzeylerinin karakterizasyonları incelenmiştir.

Ayrıca Öklid düzleminin dışında Lorentz düzleminde de benzer bir çalışma yapılmıştır. Bununla ilgili olarak Lorentz düzleminde iki parametrelili homotetik hareket ve yörünge yüzeyleri incelenmiş ve bir makale olarak düzenlenerek bir dergiye sunulmuştur.

İki parametrelili hareket ve homotetik hareketlerin Matematik, Fizik, Mekanik ve Robot Kinematiğinde önemli uygulama alanları vardır. Bir parametrelili hareketler geniş bir şekilde çalışılmıştır. Fakat iki veya daha fazla parametrelili hareketler için günümüzde fazla bir şey söylenememektedir. Bu tezde amacımız iki parametrelili homotetik hareketleri ve uygulamalarını vererek bu konudaki çalışmalara önemli katkı sağlamaktır.

KAYNAKLAR

- [1] MULLER, HR., 'Kinematik Dersleri', Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1963; Um.96-Mat No:2,.
- [2] BOTTEMA, O., ROTH, B., 'Theoretical Kinematics', North Holland publ. Com., 1979.
- [3] KARGER, A., NOVÁK, J., 'Space Kinematics And Lie Groups', Breach Science Publishers S.A. Switzerland, 1985.
- [4] KARACAN, MK., 'İki Paramatrel Hareketlerin Kinematik Uygulamaları', Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2004.
- [5] BÜKÇÜ, B., 'Öklid Uzayında Genel Cayley Dönüşümü Ve Dönme Matrisleri', Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 2006; 22(1-2), 194-202.
- [6] HACISALİHOĞLU, H., 'Diferensiyel Geometri', Cilt I. A.Ü. Fen Fakültesi, 1992.
- [7] STANIŠIĆ, MM., PENNOCK, GR., 'The Canonical Inverse Velocity and Acceleration Solutions of a Planar Two-Link Open Chain', The International Journal of Robotics Research, 1986; 5(2), 82-90.
- [8] ŞUHUBİ, ES., 'Rijid Cisimler Dinamiği', İst. Tek. Üniv. Kütüphanesi Sayı:1175. Fatih Yayınevi Matbaası, 1981.
- [9] KULA, L., 'Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları', Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Muhsin ÇELİK, 08.07.1982 tarihinde Sakarya'nın Adapazarı ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Sakarya'nın Adapazarı ilçesinde Sabihahanım İlkokulunda, ortaöğrenimini Ali Dilmen Lisesinde tamamladı. 2001 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2005 yılında tamamladı. 2005 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans programını ise 2006 yılında tamamladı. 2003 ve 2009 yılları arasında Sakarya'nın Adapazarı ilçesinde çeşitli dershanelerde Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Uzaktan Eğitim Araştırma ve Uygulama Merkezinde Öğretim Görevlisi olarak göreve başladı. Halen, aynı kurumda Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır.