T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜNÜN İNCE SPEKTRUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve ABAY

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ

Haziran 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜNÜN İNCE SPEKTRUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve ABAY

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ

Bu tez 04/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Selma ALTUNDAĞ Jüri Başkanı	Yrd.Doç.Dr. Mustafa ERÖZ Üye	Yrd.Doç.Dr. Betül USTA Üye

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimden itibaren danışmanlığımı üstlenen, her zaman yakın ilgi ve alaka gösteren, her türlü problemime fikirleriyle yardımcı olan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ'a; tüm içtenliğiyle hiç bir yardımı esirgemeyen değerli hocamlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ALTUNDAĞ'a ve Yrd. Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Ayrıca hayatım boyunca tarifi imkansız yardımları olan aileme ve her zaman yanımda olup desteklerini esirgemeyen Hasan TOK ve Hülya ERCAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayıları kümesi
l_1	: Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizi uzayı
l_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı
$D(T)$	: T operatörünün tanım kümesi
$R(T)$	: T operatörünün göüntü kümesi
$\overline{R(T)}$	: $R(T)$ nin kapanışı
$B(X,Y)$	: X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
T^*	: T operatörünün adjointi
X^*	: X normlu uzayının sürekli duali
$\rho(T)$	: T operatörünün resolvent kümesi
$\sigma(T)$	: T operatörünün spektrum kümesi
$\sigma_p(T)$	: T operatörünün nokta spektrumu kümesi
$\sigma_c(T)$	: T operatörünün sürekli spektrumu kümesi
$\sigma_r(T)$	: T operatörünün artık spektrumu kümesi
$\sigma_{ap}(T)$	: T operatörünün yaklaşık (approximate) nokta spektrumu kümesi
$\sigma_{co}(T)$	: T operatörünün sıkıştırma (compression) spektrumu kümesi
$\sigma_\delta(T)$	: T operatörünün hatalı (defect) spektrumu kümesi

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Spektrum, Bir Operatörün İnce Spektrumu, Bir Operatörün Nokta Spektrumu, Bir Operatörün Sürekli Spektrumu, Bir Operatörün Artık Spektrumu, l_1 ve l_∞ Dizi Uzayları

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. İlk dört bölüm ve altıncı bölüm literatür taramasıdır. Beşinci bölüm ve yedinci bölüm özgün kısımlardır.

Birinci bölümde, spektrumun matematikteki öneminden ve hangi operatörlerde incelendiğinden bahsedildi.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, asli köşegeninde (u_k) dizisinin ve ona paralel ikinci köşegende (v_k) dizisinin terimlerini ihtiva eden Δ_{uv} alt üçgensel matrisinin l_1 uzayındaki spektrumu ve ince spektrumu verildi.

Dördüncü bölümde, ikinci mertebeden genelleştirilmiş ileri fark operatörü Δ^2_{uvw} nın l_1 uzayındaki spektrumu, ince spektrumu, kendisinin ve adjoint operatörünün nokta spektrumu hesaplandı.

Beşinci bölümde, Δ^2_{uvw} operatörünün transpozesi olan $(\Delta^2_{uvw})^t$ genelleştirilmiş üst üçgensel üçlü bant matrisi tanımlanarak l_1 uzayındaki spektrumu ve ince spektrumu incelendi.

Altıncı bölümde, r, s kompleks parametre ve $s \neq 0$ olmak üzere genelleştirilmiş fark operatörü $B(r,s)$ nin γ uzayındaki spektrumu verildi.

Son bölümde, alt üçgensel ikili bant matrisi $B(r,s)$ nin daha genel hali olan $B(r,s,t)$ operatörünün yakınsak seri teşkil eden γ dizi uzayı üzerindeki spektrumu incelendi.

FINE SPECTRUM OF THE GENERALIZED DIFFERENCE OPERATOR OVER THE SOME SEQUENCE SPACES

SUMMARY

Key Words: Spektrum, Fine Spectrum of an Operator, Point Spectrum of an Operator, Continuous Spectrum of an Operator, Residual Spectrum of an Operator, l_1 and l_∞ Sequence Space.

This study contains seven chapters. The first four chapter and sixth chapter are literature review. Fifth chapter and seventh chapter are original parts.

In the first chapter, spectrum that studying on which operators was mentioned and it was mentioned importance of spectrum in mathematics.

In the second chapter, some basic definitions and theorems which are used in the following chapters were given.

In the third chapter, fine spectrum and spectrum of triangular matrice Δ_{uv} which contain term of (u_k) and (v_k) were given on the sequence space l_1 such that, (u_k) is in the principal diagonal and (v_k) is in the second dioganal parallel to (u_k).

In the fourth chapter, spectrum, fine spectrum of generalized second order forward difference operator Δ^2_{uvw}, own point spectrum and point spectrum of it's adjoint operator on sequence space l_1 were given.

In the fifth chapter, generalized upper triangular triple-band matrices $(\Delta^2_{uvw})^t$ which is transpoze of Δ^2_{uvw} was denoted. The spectrum and fine spectrum of $(\Delta^2_{uvw})^t$ over the sequence space l_1 were given.

In the sixth chapter, fine spectrum of generalized difference operator $B(r,s)$ where r, s are complex parameters and $s \neq 0$ on the sequence space γ were given.

Last chapter, spectrum of operator $B(r,s,t)$ which is more generalize than $B(r,s)$ that is triangular double-band matrix over the class of convergent series γ were given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Spektrum kavramı, Hilbert uzayında sürekli lineer dönüşümün spektrumu kavramının kompleks Banach cebirine genişlemesidir. Spektrum kavramı toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutar. Spektrum kavramının toplanabilme teorisindeki en önemli uygulaması, tamamen analitik yöntemlerle incelenmiş olan Mercerian Teoremlerinin analitik yöntemlerle kısa ve anlaşılır biçimde elde edilmesine imkan sağlamasıdır.

Lineer operatörler için spektral teori, fonksiyonel analizin ve operatör teorisinin en önemli konularından biridir. Aslında bir lineer operatör ile ilgili pek çok bilgi spektrumda saklıdır. Bu yüzden spektrumu bilmek operatörlerin özelliklerinin geniş bir bölümünü bilmektir.

Fiziğin, mekaniğin ve matematiksel fiziğin pek çok problemi operatörlerin spektral teorisiyle yakından ilgilidir. Uygulamalar açısından fark operatörlerin spektral teorisini incelemek önem taşımaktadır.

Normlu uzaylarda lineer operatörlerin spektral teorisi, modern fonksiyonel analizin ana dallarından birisi olup, ters operatörlerle bunların genel özelliklerine ve esas operatörlerle olan bağıntılarına ilişkindir. Bu çalışmanın devamında da göreceğimiz üzere operatörlerin spektral teorisi operatörlerin kendilerini anlayabilmemiz açısından önemlidir.

Bazı dizi uzaylarında, üçgensel matris olarak tanımlanan bazı lineer operatörlerin spektrumu ve ince spektrumları çalışıldı. Bu çalışmalardan biri, Gonzalez [1] tarafından çalışılan l_p $(1<p<\infty)$ uzayındaki Cesaro operatörünün spektrumudur. Reade [2] ise Cesaro operatörünü c_0 uzayında incelemiştir. Δ fark operatörünün ince spektrumu Altay ve Başar [3] tarafından c_0 ve c uzaylarında incelenmiştir. Aynı yazarlar [4] genelleştirilmiş fark operatörü $B(r,s)$ yi c_0 ve c uzaylarında incelemişlerdir. Δ operatörünün l_1 ve bv üzerindeki ince spektrumu Kayaduman ve Furkan [5] tarafından incelendi. Daha sonra $B(r,s)$ operatörü l_1 ve bv uzayındaki ince spektrumu Furkan ve çalışma grubu [6] tarafından incelendi. Son zamanlarda Furkan ve arkadaşları [7] $B(r,s,t)$ operatörünün c_0 ve c uzaylarındaki ince spekturumunu çalışmışlardır. Daha sonra $B(r,s)$ operatörünün transpozesi olan $U(r,s)$ operatörünün c_0 ve c uzaylarında ince spektrumu Karakaya ve Altun [8] tarafından incelendi. Sirvastava ve Kumar [9] Δ_{uv} genelleştirilmiş fark operatörünün ince spektrumunu l_1 uzayında inceledi. Yine bu operatörün transpozesi olan Δ^{uv} operatörünün ince spektrumu l_1 uzayında Fathi ve Lashkaripour [10] tarafından çalışıldı Bu çalışmaların devamında Panigrahi ve Srivastava [11] Δ^2_{uvw} genelleştirilmiş fark operatörünün ince spektrumu ve spektrumu l_1 uzayında, Dutta ve Tripathy [12] $B(r,s)$ operatörünün spektrumunu γ uzayında çalıştı.

Yukarıdaki çalışmaları temel alarak bu çalışmada $(\Delta^2_{uvw})^t$ operatörünün l_1 uzayındaki spektrumu ve $B(r,s,t)$ operatörünün γ uzayındaki spektrumu üzerinde çalışıldı.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. (Lineer (Vektör) Uzay)

X boş olmayan bir küme, $K(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad \cdot : K \times X \to X$$
$$(x,y) \to x+y \qquad\qquad (\lambda, x) \to \lambda x$$

ikili işlemleri $\forall \lambda, \mu \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

1. $x+y=y+x$
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$
3. $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.
4. $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.
5. $1 \cdot x = x$ $(1 \in K$ birim eleman$)$
6. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
7. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$
8. $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$

şartlarını sağlıyorsa $(X,+,\cdot)$ üçlüsüne , K üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir [19].

Tanım 2.2. (Metrik Uzay)

$X \neq \emptyset$ olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y, z \in X$ için

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ve $d(x,y) \geq 0$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

şartlarını sağlıyorsa d ye X de metrik fonksiyonu ve (X,d) ye de metrik uzay denir [13].

Tanım 2.3. (Normlu Uzay)

X, K cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun.

$$\| \ \| : X \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

N1. $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve $(X, \| \ \|)$ ikilisine normlu vektör uzayı denir [20].

Tanım 2.4. (Cauchy Dizisi)

$X = (X,d)$ bir metrik uzay ve (x_n), X uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m,n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [20].

Tanım 2.5. (Tamlık)

(X,d) metrik uzayında tanımlı her Cauchy dizisi, uzayın bir noktasına yakınsak ise bu uzaya bir tam uzay denir [19].

Tanım 2.6. (Banach Uzay)

Bir normlu lineer uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir [19].

Tanım 2.7. (Lineer Operatör)

X ve Y bir K cismi üzerinde tanımlı normlu uzaylar olsun. $T: X \to Y$ fonksiyonu, $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

şartlarını sağlıyorsa lineer operatör adını alır. X den Y ye bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X,Y)$ ile gösterilir. Değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar olan operatörlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.8.

$T: X \to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$Çek(T) = \{x \in D(T) : Tx = \theta\}$$

kümesine T operatörünün çekirdeği denir [21].

Tanım 2.9.

$D(T)$ uzayındaki farklı elemanları $R(T)$ uzayındaki farklı elemanlara taşıyan T dönüşümüne birebir dönüşüm denir.

Teorem 2.10. T lineer operatörünün birebir olması için gerek ve yeter şart

$ÇekT = \{\theta\}$ olmasıdır.

Tanım 2.11. (Sınırlı Lineer Operatör)

X ve Y aynı bir K cismi üzerinde normlu iki uzay ve $T: X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\|Tx\| \leq M\|x\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa T ye X den Y ye sınırlı lineer dönüşüm denir. X den Y ye tanımlı bütün sınırlı lineer dönüşümlerin sınıfı $B(X,Y)$ ile gösterilir. Eğer $X = Y$ ise $B(X)$ ile gösterilir. $\forall x \in X$ için $\|Tx\| \leq M\|x\|$ eşitsizliğindeki M sayılarının en büyük alt sınırına T nin normu denir. Bu norm

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır [21].

Tanım 2.12. (Sürekli Dual)

X bir K cismi üzerinde tanımlı bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı bütün sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X,K)$ uzayına X uzayının sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir [13].

Tanım 2.13. (Adjoint Operatör)

X bir K cismi üzerinde normlu uzay ve X^*, X uzayının sürekli dualini göstermek üzere yani $X^* = B(X,K)$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her $f \in X^*$ için

$$T^* : X^* \to X^*, \quad (T^* f)x = f(T(x))$$

biçiminde tanımlanan T^* operatörüne T operatörünün adjointi denir [21].

Teorem 2.14. T operatörünün yoğun bir görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart T^* operatörünün birebir olmasıdır [14].

Teorem 2.15. T^* operatörünün örten olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı bir terse sahip olmasıdır [14].

Tanım 2.16. (Dizi Uzayı)

w bütün dizilerin kümesi olsun. w kümesi, $((x_k),(y_k)) \to (x_k + y_k)$ ve $(\lambda,(x_k)) \to \lambda x_k$ ikili işlemleri ile K üzerinde bir vektör uzayıdır. w nın herhangi bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir.

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{\mathrm{k}} x_k \text{ mevcut} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k} x_k = 0 \right\}$$

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty, 1 \le p < \infty \right\}$$

$$bv_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty, 1 \le p < \infty \right\}$$

uzayları birer dizi uzaylarıdır.

Tanım 2.17. (Matris Dönüşümü)

λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

Eğer $\forall x \in \lambda$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayına ait ise A matrisi λ uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir.

(λ, μ) ile $A : \lambda \to \mu$ olan bütün A matrislerinin kümesini, $(\lambda, \mu; p)$ ile de limiti ya da toplamı koruyan $A : \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi gösterilir.

Özel olarak $A \in (c,c)$ ise A matrisine konservatif matris ve $A \in (c,c;p)$ ise A matrisine regüler matris denir.

Teorem 2.18. $A = (a_{nk})$ matrisinin l_1 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(l_1)$ dönüşümüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart A matrisinin bütün sütunlarının l_1 uzayında ve onların l_1 normlarının sınırlı olmasıdır [15].

T dönüşümünün normu, sütunların l_1 normlarının supremumudur.

Teorem 2.19. X normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X^*)$ ve $\|T\| = \|T^*\|$ dir [14].

Tanım 2.20. $T : X \to X$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer, $Tx = \alpha x$ olacak şekilde X de bir $x \neq \theta$ elemanı varsa α kompleks sayısına T nin özdeğeri ve $x \in X$ elemanına da bir özvektör denir.

Tanım 2.21. $X \neq \theta$ kompleks normlu uzay $T : D(T) \to X$ $(D(T) \subset X)$ lineer bir operatör ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. $T_\alpha = T - \alpha I$ şeklinde tanımlanır ve $T_\alpha^{-1} = (T - \alpha I)^{-1}$ operatörüne T operatörünün resolvent (çözücü) operatörü denir [3].

Tanım 2.22. $X \neq \theta$ kompleks normlu uzay ve $T : D(T) \to X$ bir lineer dönüşüm ve I da X üzerinde birim dönüşüm olsun. Eğer,

(R1) $(T - \alpha I)^{-1}$ mevcut,

(R2) $(T - \alpha I)^{-1}$ sınırlı,

(R3) $(T - \alpha I)^{-1}$ X 'de yoğun bir kümede tanımlı şartları sağlanıyorsa α kompleks sayısına T operatörünün regüler değeri ve bütün bu regüler değerlerin oluşturduğu $\rho(T)$ kümesine resolvent kümesi denir [3].

Tanım 2.23. $X \neq \theta$ kompleks normlu uzay $T: D(T) \rightarrow X$ $\left(D(T) \subset X\right)$ lineer bir operatör olsun. $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ kümesine T operatörünün spektrumu denir [3].

Spektrum, nokta spektrum, artık spektrum ve sürekli spektrum olmak üzere üç kümeye ayrılır.

Tanım 2.24. $X \neq \theta$ kompleks normlu uzay $T: D(T) \rightarrow X$ $\left(D(T) \subset X\right)$ lineer bir operatör olmak üzere;

$$\sigma_p = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : T_\alpha^{-1} \text{ mevcut değil}\right\}$$

kümesine nokta spektrumu denir ve bu kümenin elemanları öz değerlerden oluşur[22].

Tanım 2.25. $X \neq \theta$ kompleks normlu uzay $T: D(T) \rightarrow X$ $\left(D(T) \subset X\right)$ lineer bir operatör olmak üzere;

$$\sigma_c(T) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : T_\alpha^{-1} \text{ mevcut ve süreksiz, } \overline{R(T - \alpha I)} = X\right\}$$

kümesine sürekli spektrum denir[22].

Tanım 2.26. $X \neq \theta$ kompleks normlu uzay $T: D(T) \rightarrow X$ $\left(D(T) \subset X\right)$ lineer bir operatör olmak üzere;

$$\sigma_r(T) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : T_\alpha^{-1} \text{ mevcut, } \overline{R(T - \alpha I)} \neq X\right\}$$

kümesine artık (residual) spektrum denir [22].

Tanımlara göre $\rho(T), \sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$ kümeleri ayrık kümelerdir ve birleşimleri tüm kompleks düzlemi oluşturur. O halde,

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \tag{2.1}$$

dir. Diğer bir şekilde ifade edilecek olursa,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T) \tag{2.2}$$

dir.

Teorem 2.27. $\sigma_r(T,X) \subseteq \sigma_p(T^*, X^*) \subseteq \sigma_r(T,X) \cup \sigma_p(T,X)$ dır [14].

Şimdi, Appell [16] da belirtilen approximate nokta spektrumu, defect spektrumu, compression spektrumu ile ilgili bilgiler verilecektir.

X Banach uzayında T sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer, $\|x_k\| = 1$ ve $\|Tx_k\| \to 0, (k \to \infty)$ ise $(x_k) \in X$, T operatörü için bir Wely dizisi olarak adlandırılır.

$$\sigma_{ap}(T,X) := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha I - T \text{ için bir Wely dizisi mevcut}\} \tag{2.3}$$

kümesi T operatörünün yaklaşık (approximate) nokta spektrumudur.

$$\sigma_\delta(T,X) := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha I - T \text{ örten değildir}\} \tag{2.4}$$

kümesi T operatörünün hatalı (defect) spektrumu olarak adlandırılır.

$$\sigma_{co}(T,X) := \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \overline{R(\alpha I - T)} \neq X\right\}$$

olarak tanımlanan küme T operatörünün sıkıştırma (compression) spektrumu olarak adlandırılır.

(2.3) ve (2.4) den dolayı,

$$\sigma(T,X)=\sigma_{ap}(T,X)\cup\sigma_{\delta}(T,X)$$

dir [16]. Sıkıştırma spektrumu,

$$\sigma(T,X)=\sigma_{ap}(T,X)\cup\sigma_{co}(T,X)$$

verir [16].

Aşağıdaki kapsamalar

$$\sigma_{p}(T,X)\subseteq\sigma_{ap}(T,X) \text{ ve } \sigma_{co}(T,X)\subseteq\sigma_{\delta}(T,X)$$

mevcuttur [16]. Dahası, (2.2) deki ifadeyle kıyaslandığında

$$\sigma_{r}(T,X)=\sigma_{co}(T,X)\setminus\sigma_{p}(T,X)$$
$$\sigma_{c}(T,X)=\sigma(T,X)\setminus\left[\sigma_{p}(T,X)\cup\sigma_{co}(T,X)\right]$$

dir [16].

Önerme 2.28. $T\in B(X)$ operatörünün spektrumu ve alt spektrumları ve $T^{*}\in B(X^{*})$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

a) $\sigma(T^{*},X^{*})=\sigma(T,X)$

b) $\sigma_{c}(T^{*},X^{*})\subseteq\sigma_{ap}(T,X)$

c) $\sigma_{ap}(T^*,X^*)=\sigma_\delta(T,X)$

d) $\sigma_\delta(T^*,X^*)=\sigma_{ap}(T,X)$

e) $\sigma_p(T^*,X^*)=\sigma_{co}(T,X)$

f) $\sigma_{co}(T^*,X^*)\supseteq\sigma_p(T,X)$

g) $\sigma(T,X)=\sigma_p(T^*,X^*)\cup\sigma_{ap}(T,X)=\sigma_{ap}(T^*,X^*)\cup\sigma_p(T,X)$

dir [16].

Tanım 2.29. (İnce Spektrum)

X bir Banach uzayı ve $T\in B(X)$ olsun. Bu takdirde $R(T)$ ve T^{-1} için,

(A) $R(T)=X$,

(B) $R(T)\neq X$ fakat $\overline{R(T)}=X$,

(C) $\overline{R(T)}\neq X$

ve

(1) T^{-1} mevcut ve sınırlı,

(2) T^{-1} mevcut fakat sınırlı değil,

(3) T^{-1} mevcut değil,

durumları vardır.

Yukarıdaki bu olasılıklar birleştirilerek, $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ olmak üzere dokuz farklı durum elde edilir. Örneğin; $T\in C_2$ ise, $\overline{R(T)}\neq X$ ve T^{-1} mevcut fakat sınırlı değildir [14].

İnce spektrum için aşağıdaki tablo verilebilir:

Tablo 2.1. Goldberg sınıflandırması

	A	B	C
1	$\rho(T)$	$\rho(T)$	$\sigma_r(T)$
2	$\sigma_c(T)$	$\sigma_c(T)$	$\sigma_r(T)$
3	$\sigma_p(T)$	$\sigma_p(T)$	$\sigma_p(T)$

Lineer bir operatörün spektrumunun alt bölümleri ile ilgili olan tablo aşağıdaki gibidir [17].

Tablo 2.2 Spektrumun alt bölümleri

	1 T_α^{-1} mevcut ve sınırlı	2 T_α^{-1} mevcut fakat sınırlı değil	3 T_α^{-1} mevcut değil
A $R(T-\alpha I)=X$	$\alpha\in\rho(T,X)$		$\alpha\in\sigma_p(T,X)$ $\alpha\in\sigma_{ap}(T,X)$
B $\overline{R(T-\alpha I)}=X$	$\alpha\in\rho(T,X)$	$\alpha\in\sigma_\delta(T,X)$ $\alpha\in\sigma_c(T,X)$ $\alpha\in\sigma_{ap}(T,X)$	$\alpha\in\sigma_{ap}(T,X)$ $\alpha\in\sigma_p(T,X)$ $\alpha\in\sigma_\delta(T,X)$
C $\overline{R(T-\alpha I)}\neq X$	$\alpha\in\sigma_r(T,X)$ $\alpha\in\sigma_\delta(T,X)$ $\alpha\in\sigma_{co}(T,X)$	$\alpha\in\sigma_\delta(T,X)$ $\alpha\in\sigma_r(T,X)$ $\alpha\in\sigma_{ap}(T,X)$ $\alpha\in\sigma_{co}(T,X)$	$\alpha\in\sigma_{ap}(T,X)$ $\alpha\in\sigma_p(T,X)$ $\alpha\in\sigma_\delta(T,X)$ $\alpha\in\sigma_{co}(T,X)$

BÖLÜM 3. Δ_{uv} GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜNÜN l_1 UZAYINDAKİ İNCE SPEKTRUMU

Δ_{uv} genelleştirilmiş fark operatörünün l_1 uzayındaki ince spektrumu Srivastava ve Kumar [9] tarafından çalışıldı. Bu çalışmada Δ_{uv} operatörünün l_1 uzayındaki spektrumu, nokta spektrumu, artık spekturumu, sürekli spekturumu elde edildi. l_1 uzayındaki Δ_{uv} operatörü, $x=(x_n)\in l_1$ ve $x_{-1}=0$ şartları altında $\Delta_{uv}x=(u_n x_n + v_{n-1}x_{n-1})_{n=0}^{\infty}$ olarak tanımlanır.

$u=(u_k)$ ve $v=(v_k)$

i. u ya sabit dizi ya da terimleri farklı reel sayı dizisi, $U=\lim_{k\to\infty} u_k$,

ii. v terimleri sıfır olmayan reel sayı dizisi, $V=\lim_{k\to\infty} v_k \neq 0$,

iii. $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $|U-u_k|<|V|$,

şartlarını sağlayan iki dizi olsun.

Δ_{uv} operatörünün matris gösterimi,

$$\Delta_{uv}=\begin{bmatrix} u_0 & 0 & 0 & \cdots \\ v_0 & u_1 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & u_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.1. Δ_{uv} Operatörünün l_1 Uzayındaki Spektrumu ve Nokta Spektrumu

Teorem 3.1.1. $\Delta_{uv}: l_1 \to l_1$ sınırlı lineer operatördür ve $\|\Delta_{uv}\|_{(l_1,l_1)} = \sup_k(|u_k|+|v_k|)$ dir.

İspat: Teorem 2.18 den ispat açıkça görülür.

Teorem 3.1.2. $\sigma(\Delta_{uv}, l_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |U-\alpha| \leq |V|\}$ dir.

İspat: İlk önce, $\alpha \in \mathbb{C}$ için $|U-\alpha| > |V|$ iken $\alpha \notin \sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ olduğu gösterilecektir. Daha sonra, $\{\alpha \in \mathbb{C} : |U-\alpha| \leq |V|\} \subseteq \sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ olduğu gösterilecektir.

1.Kısım: $\alpha \in \mathbb{C}$ için $|U-\alpha| > |V|$ olsun. Buradan görülür ki $\alpha \neq U$ ve $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $\alpha \neq u_k$ dır. Dolayısıyla $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur. $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1} = (b_{nk})$ alınarak,

$$(b_{nk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(u_0-\alpha)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-v_0}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)} & \frac{1}{(u_1-\alpha)} & 0 & \cdots \\ \frac{v_0 v_1}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)} & \frac{-v_1}{(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)} & \frac{1}{(u_2-\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

bulunur.

$\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |b_{nk}| < \infty$ olduğunu göstermek için $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $\sum_{n=}^{\infty} |b_{nk}|$ serisinin yakınsak olduğu gösterilmelidir. $S_k = \sum_{n=}^{\infty} |b_{nk}|$ olsun.

$$S_0=\sum_{n=0}^{\infty}|b_{n0}|=\left|\frac{1}{u_0-\alpha}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{v_0v_1\ldots v_{n-1}}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)\ldots(u_n-\alpha)}\right|$$ serisi yakınsaktır. Çünkü,

$\alpha\in\mathbb{C}$ için $|U-\alpha|>|V|$ olup $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1,0}}{b_{n,0}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_n}{u_{n+1}-\alpha}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{V}{U-\alpha}\right|<1$ dir.

Benzer şekilde her $k=1,2,3,\ldots$ için $S_k=\sum_{n=}^{\infty}|b_{nk}|$ serisi yakınsaktır.

Şimdi $\sup_k S_k$ nın sonlu olduğu gösterilecektir.

$\beta=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{v_k}{u_{k+1}-\alpha}\right|$ olsun. Dolayısıyla $\beta=\left|\frac{V}{U-\alpha}\right|$ dır. $0<\beta<1$ ve $\frac{\beta}{|V|}=\left|\frac{1}{U-\alpha}\right|$ olduğunu görmek kolaydır.

S_k serisi açılırsa,

$$S_k=\left|\frac{1}{u_k-\alpha}\right|+\left|\frac{v_k}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)}\right|+\left|\frac{v_kv_{k+1}}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)}\right|+\ldots \tag{3.1}$$

elde edilir.

(3.1) in her iki tarafından limit alınırsa,

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{\beta}{|V|}\left(\frac{1}{1-\beta}\right)<\infty$$

bulunur.

(S_k) pozitif terimli reel dizi ve $\lim\limits_{k\to\infty} S_k < \infty$ olduğu için $\sup\limits_k S_k < \infty$ dır. Bu yüzden $\{\alpha \in \mathbb{C} : |U-\alpha| > |V|\}$ için

$$(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1} \in B(l_1) \tag{3.2}$$

dir.

Şimdi, $(\Delta_{uv} - \alpha I)$ operatörünün l_1 uzayında yoğun bir görüntüye sahip olduğu gösterilecektir.

$x \in l_1$ olsun. $(\Delta_{uv} - \alpha I)^* x = y$ eşitliğinden,

$$(u_0 - \alpha)x_0 + v_0 x_1 = 0,$$
$$(u_1 - \alpha)x_1 + v_1 x_2 = 0$$
$$\vdots$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan da $x = \theta$ bulunur. Dolayısıyla $(\Delta_{uv} - \alpha I)^*$ birebirdir ve Teorem 2.14. den $(\Delta_{uv} - \alpha I)$ operatörü yoğun bir görüntüye sahiptir.

Bu şartlar altında

$$\sigma(\Delta_{uv}, l_1) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |U-\alpha| \le |V|\} \tag{3.3}$$

bulunur.

2. Kısım: Kabul edelim ki $\alpha \in \mathbb{C}$ için $|U-\alpha| \le |V|$ olsun. Dolayısıyla $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur. Böylece $(R1)$ şartı sağlanmış olur.

İlk önce $\alpha \in \mathbb{C}$ için $|U-\alpha| < |V|$ olduğu kabul edilerek $(R2)$ şartının sağlanmadığı gösterilir. Bu kabul altında S_0 ıraksak olur. Bu yüzden $\sup_k S_k$ sınırlı değildir. Dolayısıyla $\{\alpha \in \mathbb{C} : |U-\alpha| < |V|\}$ için $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1} \notin B(l_1)$ dir.

$\alpha \in \mathbb{C}$ için $|U-\alpha| = |V|$ olsun.

(3.1) de eşitliğin her iki tarafından limit alınırsa,

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \left|\frac{1}{U-\alpha}\right| + \left|\frac{V}{(U-\alpha)^2}\right| + \left|\frac{V^2}{(U-\alpha)^3}\right| + \ldots = \left|\frac{1}{V}\right| + \left|\frac{1}{V}\right| + \ldots = \infty$$

olur. Bu da $\sup_k S_k$ nın sınırlı olmadığını gösterir. Bu yüzden $\{\alpha \in \mathbb{C} : |U-\alpha| = |V|\}$ için $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1} \notin B(l_1)$ dir.

Son olarak, $\alpha = U$ ve $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $\alpha = u_k$ şartları incelenecektir.

Durum (i): (u_k) sabit dizi olsun. Dolayısıyla $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k = U$ dır. Buradan,

$$(\Delta_{uv} - UI)x = \theta \text{ ise } \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 x_o \\ v_1 x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \theta \text{ olup } \forall i \in \mathbb{N}_0 \text{ için } x_i = \theta$$

bulunur. Bu, $(\Delta_{uv} - UI)$ operatörünün birebir olduğunu gösterir. Fakat $(\Delta_{uv} - UI)$ operatörü l_1 uzayında yoğun bir görüntüye sahip değildir. Yani $(R3)$ şartı sağlanmaz. Bu yüzden $U \in \sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ dir.

Durum (ii): Eğer (u_k) terimleri farklı reel sayı dizisi ise her $\alpha = u_k$ için S_0 serisi ıraksaktır ve bu yüzden $\sup_k S_k$ sınırlı değildir. Bu durumda $\alpha = u_k$ için $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1} \notin B(l_1)$ dir. Böylece $(R2)$ şartı sağlanmaz. Yani $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k \in \sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ dir.

(3.1) eşitliğinin her iki tarafından tekrar limit alınırsa,

$$\alpha = U \text{ için } \lim_{k\to\infty} S_k = \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha = U$ için $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1} \notin B(l_1)$ dir. Yani $U \in \sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ dir.

O halde,

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ için } u_k \in \sigma(\Delta_{uv}, l_1) \text{ ve } U \in \sigma(\Delta_{uv}, l_1)$$

dır. Bu yüzden,

$$\{\alpha \in \mathbb{C} : |U - \alpha| \le |V|\} \subseteq \sigma(\Delta_{uv}, l_1) \tag{3.4}$$

elde edilir.

(3.3) ve (3.4) den

$$\sigma(\Delta_{uv}, l_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |U - \alpha| \le |V|\}$$

eşitliği elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.1.3 $\sigma_p(\Delta_{uv}, l_1) = \varnothing$ dir.

İspat: $x=(x_k)\neq\theta$ ve $x=(x_k)\in l_1$ için $\Delta_{uv}x=\alpha x$ olsun. Bu eşitlikten,

$$
\begin{aligned}
&u_0x_0=\alpha x_0\\
&v_0x_0+u_1x_1=\alpha x_1\\
&\vdots\\
&v_{k-1}x_{k-1}+u_kx_k=\alpha x_k\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir. Bu teoremin ispatı ikiye ayrılarak incelenecektir:

Durum 1: Kabul edelim ki (u_k) sabit dizi olsun. $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $u_k=U$ dır. x_t, $x=(x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi olsun.

$$v_{t-1}x_{t-1}+Ux_t=\alpha x_t$$

eşitliğinde $\alpha=U$ olduğu görülür ve bu yüzden, $v_tx_t+Ux_{t+1}=\alpha x_{t+1}$ eşitliğinden $x_t=0$ bulunur. Bu, $x_t\neq 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$\sigma_p(\Delta_{uv},l_1)=\varnothing$$

dir.

Durum 2: (u_k) terimleri farklı pozitif reel sayı dizisi olsun. $\forall k\geq 1$ için,

$$x_k=\left(\frac{x_{k-1}}{\alpha-u_k}\right)x_{k-1}$$

dır.

Eğer $\alpha=u_0$ ise $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x_k}{x_{k-1}}\right|=\left|\frac{V}{u_0-U}\right|>1$ dir. Çünkü $|U-u_0|<|V|$ dir. Bu yüzden, $x_0\neq 0$ için $x\notin l_1$ dir.

Benzer şekilde, eğer $\forall k\geq 1$ için $\alpha=u_k$ ise $x_{k-1}=0, x_{k-2}=0,\ldots,x_0=0$ ve $\forall n\geq k$ için

$$x_{n+1}=\left(\frac{v_n}{u_k-u_{n+1}}\right)x_n$$

dir. Buradan,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\left|\frac{V}{u_k-U}\right|>1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $x_0\neq 0$ için $x\notin l_1$ dir.

Eğer $x_0=0$ ise $\forall k\geq 1$ için $x_k=\theta$ dır.

Bu yüzden,

$$\sigma_p(\Delta_{uv},l_1)=\varnothing$$

dır.

3.2. Δ_{uv} Operatörünün l_1 Uzayındaki Artık Spektrumu ve Sürekli Spektrum

Bu bölümde Δ_{uv} operatörünün l_1 uzayındaki artık spektrumu ve sürekli spektrumu hesaplamak için l_1^* uzayındaki Δ_{uv}^* nın nokta spektrumunun sonuçlarına ihtiyaç olacağı için ilk önce Δ_{uv}^* operatörünün l_1^* uzayındaki nokta spektrumu incelenecektir.

Teorem 3.2.1. $\sigma_p\left(\Delta_{uv}^*, l_1^*\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |U-\alpha| \le |V|\}$ dir.

İspat: $f \neq \theta$ ve $f \in l_1^* \cong l_\infty$ için $\Delta_{uv}^* f = \alpha f$ olsun. Burada,

$$\Delta_{uv}^* = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & v_1 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ ve } f = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dir. Buradan, $\forall k \ge 1$ için

$$f_k = \left[\frac{\alpha - u_{k-1}}{v_{k-1}}\right] f_{k-1} = \left[\frac{(\alpha - u_{k-1})(\alpha - u_{k-2})\ldots(\alpha - u_0)}{v_{k-1}v_{k-2}\cdots v_0}\right] f_0 \tag{3.5}$$

bulunur. Bu yüzden, $\forall k \ge 1$ için

$$|f_k| = \left|\frac{(\alpha - u_{k-1})(\alpha - u_{k-2})\ldots(\alpha - u_0)}{v_{k-1}v_{k-2}\cdots v_0}\right| |f_0|$$

dır. Eğer $|U-\alpha| < |V|$, $(\alpha \in \mathbb{C})$ ise (3.5) eşitliğinden,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_k}{f_{k-1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha - u_{k-1}}{v_{k-1}}\right| = \left|\frac{\alpha - U}{V}\right| < 1$$

elde edilir. Bu yüzden $f \in l_1$ ve sonuç olarak $f \in l_\infty$ dır.

Eğer $|U-\alpha| = |V|$ şartı altındaki $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_k}{f_{k-1}}\right|=1$$

dir. Dolayısıyla oran testi başarısızdır. Bu durumda, $f=(f_k)$ pozitif reel terimli azalan bir dizi olarak alırız ve $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_k}{f_{k-1}}\right|=1$ dir. Açıkça $f=(f_k)$ yakınsak bir dizidir ve bu yüzden $f\in l_\infty$ dır. Dolayısıyla ,

$$|U-\alpha|\le|V| \quad\Rightarrow\quad \sup_k|f_k|<\infty \tag{3.6}$$

dır.

Tersine, kabul edelim ki $\sup_k|f_k|<\infty$ olsun. $|f_k|=\left|\frac{(\alpha-u_{k-1})(\alpha-u_{k-2})\ldots(\alpha-u_0)}{v_{k-1}v_{k-2}\ldots v_0}\right||f_0|$ eşitliğinden, $\forall k\ge m$ için

$$\left|\frac{\alpha-u_{k-1}}{v_{k-1}}\right|\le 1$$

dir ve burada m pozitif tam sayıdır. Bu yüzden, $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-u_{k-1}}{v_{k-1}}\right|\le 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\sup_k|f_k|<\infty \quad\Rightarrow\quad |U-\alpha|\le|V| \tag{3.7}$$

dir. (3.6) ve (3.7) den $f\in l_1^*$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_k}{f_{k-1}}\right|=1$ ve $|U-\alpha|\le|V|$ koşullarını sağlayan $f_0\ne 0$, $f=(f_k)$ pozitif terimli azalan bir dizinin var olmasıdır. Bu yüzden

$$\sigma_p\left(\Delta_{uv}^*, l_1^*\right)=\{\alpha\in\mathbb{C}:|U-\alpha|\le|V|\}$$

dir.

Teorem 3.2.2. $\sigma_r(\Delta_{uv}, l_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |U - \alpha| \leq |V|\}$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı iki durumda incelenecektir.

Durum (i): Kabul edelim ki (u_k) sabit dizi olsun. O halde, $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k = U$ dır. $\alpha \in \mathbb{C}$ için $|U - \alpha| \leq |V|$ şartı altında $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur. Fakat Teorem 3.2.1. den dolayı $|U - \alpha| \leq |V|$ şartını sağlayan $\alpha \in \mathbb{C}$ için $(\Delta_{uv} - \alpha I)^*$ birebir değildir. Dolayısıyla Teorem 2.14. den $(\Delta_{uv} - \alpha I)$ operatörü l_1 uzayında yoğun bir görüntüye sahip değildir. O halde, $\sigma_r(\Delta_{uv}, l_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |U - \alpha| \leq |V|\}$ dir.

Durum (ii): Kabul edelim ki (u_k) terimleri farklı reel sayı dizisi olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ için $|U - \alpha| \leq |V|$ şartı altında $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1}$ mevcuttur.

Durum(i) deki gibi $(\Delta_{uv} - \alpha I)$ operatörü l_1 uzayında yoğun bir görüntüye sahip olmadığını görmek kolaydır. Bu yüzden

$$\sigma_r(\Delta_{uv}, l_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |U - \alpha| \leq |V|\}$$

dir.

Teorem 3.2.3. $\sigma_c(\Delta_{uv}, l_1) = \varnothing$ dir.

İspat: (2.2) deki eşitlikten ispat açıktır.

3.3. Δ_{uv} Operatörünün l_1 Uzayındaki İnce Spektrumu

Teorem 2.3.1. Eğer α , $|U-\alpha|>|V|$ şartını sağlıyorsa $(\Delta_{uv}-\alpha I)\in A_1$ dir.

İspat: $\alpha\neq U$ ve $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $\alpha\neq u_k$ olduğundan $(\Delta_{uv}-\alpha I)$ üçgenseldir ve dolayısıyla tersi mevcuttur.

Teorem 3.1.2 den dolayı $|U-\alpha|>|V|$ şartını sağlayan $\alpha\in\mathbb{C}$ için $(\Delta_{uv}-\alpha I)^{-1}$ operatörü sürekli idi. Ayrıca, $(\Delta_{uv}-\alpha I)x=y$ eşitliği $(\Delta_{uv}-\alpha I)^{-1}y=x$ eşitliğini verir. Bu yüzden, $\forall y\in l_1$ için $(\Delta_{uv}-\alpha I)x=y$ olacak şekilde $x\in l_1$ bulabiliriz. Çünkü $(\Delta_{uv}-\alpha I)^{-1}\in B(l_1)$ idi. O halde $(\Delta_{uv}-\alpha I)$ operatörü örtendir ve bu yüzden $(\Delta_{uv}-\alpha I)\in A_1$ dir.

Teorem 3.3.2. (u_k) sabit dizi olsun. O halde $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $u_k=U$ dır. Bu durumda $U\in C_1\sigma(\Delta_{uv},l_1)$ dir.

İspat: $\sigma_r(\Delta_{uv},l_1)=\{\alpha\in\mathbb{C}:|U-\alpha|\leq|V|\}$ olduğu için $U\in\sigma_r(\Delta_{uv},l_1)$ dir. Dolayısıyla $(\Delta_{uv}-\alpha I)$ operatörü l_1 de yoğun bir görüntüye sahiptir.

Verilen $y\in l_1^*$ için $(\Delta_{uv}-UI)^*x=y$ olacak şekilde $x\in l_1^*$ bulunmalıdır. $(\Delta_{uv}-UI)^*x=y$ eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
&v_0x_1=y_0\\
&v_1x_2=y_1\\
&\vdots\\
&v_{i-1}x_i=y_{i-1}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla $\forall n \geq 1$ için $v_{n-1}x_n = y_{n-1}$ olduğundan $\sup_n |x_n| < \infty$ dır. Çünkü $y \in l_\infty$ ve $v = (v_k)$ yakınsak bir dizidir. Bu da $(\Delta_{uv} - \alpha I)^*$ operatörünün örten olduğunu gösterir ve bu yüzden $U \in C_1\sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ dir.

Teorem 3.3.3. (u_k) sabit dizi, o halde $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k = U$ olduğunu söyleyebiliriz ve $\alpha \neq U$, $\alpha \in \sigma_r(\Delta_{uv}, l_1)$ olsun. Bu durumda $\alpha \in C_2\sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ dir.

İspat: $\alpha \neq U$ ve $\alpha \in \sigma_r(\Delta_{uv}, l_1)$ için Teorem 3.1.2. den $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1}$ sürekli değildir.

Teorem 3.3.4. (u_k) terimleri farklı pozitif reel sayı dizi ve $\alpha \in \sigma_r(\Delta_{uv}, l_1)$ olsun. O halde $\alpha \in C_2\sigma(\Delta_{uv}, l_1)$ dir.

İspat: $\alpha \in \sigma_r(\Delta_{uv}, l_1)$ olduğu için Teorem 3.1.2. den $(\Delta_{uv} - \alpha I)^{-1}$ sürekli değildir. İspat burada biter.

BÖLÜM 4. İKİNCİ MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ İLERİ FARK OPERATÖRÜ Δ^2_{uvw} NIN l_1 UZAYI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU VE İNCE SPEKTRUMU

Srivastava ve Panigrahi [11], Δ^2_{uvw} ikinci mertebeden genelleştirilmiş ileri fark operatörünün spektrumunu l_1 uzayı üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmada, l_1 uzayı üzerinde Δ^2_{uvw} operatörü $x_{-1}, x_{-2} = 0$ ve $x = (x_n) \in l_1$ için $\Delta^2_{uvw} x = \left(u_n x_n + v_{n-1} x_{n-1} + w_{n-2} x_{n-2}\right)_{n=0}^{\infty}$ olarak tanımlanır.

$U = \lim_{k\to\infty} u_k$ olacak şekilde $u = (u_k)$ ya sabit ya da monoton artan pozitif terimli reel dizi, $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $v_k \neq 0$ ve $V = \lim_{k\to\infty} v_k \neq 0$, $W = \lim_{k\to\infty} w_k \neq 0$ olacak şekilde $w = (w_k)$ artmayan pozitif terimli reel sayı dizisi ve $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $w_k \neq 0$ olsun.

Δ^2_{uvw} operatörünün matris gösterimi

$$\Delta^2_{uvw} = \begin{bmatrix} u_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ v_0 & u_1 & 0 & 0 & \cdots \\ w_0 & v_1 & u_2 & 0 & \cdots \\ 0 & w_1 & v_2 & u_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Bölüm 4 ve Bölüm 5 boyunca, eğer z karmaşık sayı ise $\sqrt{z}$ ile z nin reel kısmı negatif olmayan karekökü olarak alınacaktır. Eğer $\mathrm{Re}\left(\sqrt{z}\right) = 0$ ise $\sqrt{z}$, $\mathrm{Im}\left(\sqrt{z}\right) \geq 0$ olacak şekilde ki z nin karekökünü temsil eder.

4.1. Δ^2_{uvw} Operatörünün l_1 Uzayı Üzerindeki Spektrumu

Teorem 4.1.1. Δ^2_{uvw}, l_1 dizi uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatördür ve $\left\|\Delta^2_{uvw}\right\|_{(l_1,l_1)} = \sup_k \left(|u_k|+|v_k|+|w_k|\right)$ dır.

İspat: Teorem 2.18. gereğince $\|T\| = \sup_k \sum_n |a_{nk}|$ eşitliğinden $\left\|\Delta^2_{uvw}\right\|_{(l_1,l_1)} = \sup_k \left(|u_k|+|v_k|+|w_k|\right)$ elde edilir.

Teorem 4.1.2 S kümesi, $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \dfrac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} \leq 1 \right\}$ şeklinde tanımlansın ve $\sqrt{V^2} = -V$ olsun. Δ^2_{uvw} operatörünün l_1 uzayı üzerindeki spektrumu $\sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1) = S$ dir.

İspat: Bu ispat iki bölümde incelenecektir. Birinci kısımda $\sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1) \subseteq S$ olduğu gösterilecektir. İkinci kısımda $S \subseteq \sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1)$ olduğu gösterilecektir.

1. Kısım: $\alpha \notin S$ olsun. Dolayısıyla $\alpha \neq U$ ve $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $\alpha \neq u_k$ dır. Bu takdirde, $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)$ alt üçgensel matristir ve bu yüzden terse sahiptir. $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)^{-1} = b_{nk}$ alınarak,

$$(b_{nk})=\begin{bmatrix} \frac{1}{u_0-\alpha} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-v_0}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)} & \frac{1}{u_1-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{v_0v_1}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)}-\frac{-w_0}{(u_0-\alpha)(u_2-\alpha)} & \frac{-v_1}{(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)} & \frac{1}{u_2-\alpha} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir ve $b_{n,k}=\dfrac{-v_{n-1}b_{n-1,k}-w_{n-2}b_{n-2,k}}{(u_n-\alpha)}$ dır.

Eğer $\sup_k\sum_{n=0}^{\infty}|b_{nk}|<\infty$ ise Teorem 2.18 den dolayı $(\Delta^2_{uvw}-\alpha I)^{-1}\in B(l_1,l_1)$ dir.

$\sup_k\sum_{n=0}^{\infty}|b_{nk}|<\infty$ olduğunu göstermek için $\sum_{n=0}^{\infty}|b_{nk}|$ serisinin $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için yakınsak olduğu ispatlanacaktır.

Bunun için,

$$S_k=\sum_{n=0}^{\infty}|b_{nk}|=|b_{k,k}|+|b_{k+1,k}|+|b_{k+2,k}|+\ldots \tag{4.1}$$

dır. Açıkça her k için seri

$$\begin{aligned} S_k=&\left|\frac{1}{(u_k-\alpha)}\right|+\left|\frac{(-1)v_k}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)}\right|+\left|\frac{(-1)^2v_kv_{k+1}}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)}+\frac{(-1)w_k}{(u_k-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)}\right| \\ &+\left|\frac{(-1)^3v_kv_{k+1}v_{k+2}}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)(u_{k+3}-\alpha)}+\frac{(-1)^2w_kw_{k+2}}{(u_k-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)(u_{k+3}-\alpha)}+\frac{(-1)^2v_kw_{k+2}}{(u_k-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)(u_{k+3}-\alpha)}\right| \\ &+\cdots \end{aligned}$$

dır.

Kabul edelim ki $r_1 = \dfrac{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}{2(U-\alpha)}$ ve $r_2 = \dfrac{-V-\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}{2(U-\alpha)}$ olsun. O halde,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(u_k-\alpha)} = \frac{1}{U-\alpha} = a_1 = \frac{1}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\left[(r_1)-(r_2)\right]$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{-v_k}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)} = \frac{-V}{(U-\alpha)^2} = a_2 = \frac{1}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\left[(r_1)^2-(r_2)^2\right]$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{v_k v_{k+1}}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)} - \frac{w_k}{(u_k-\alpha)(u_{k+2}-\alpha)} = \frac{V^2}{(U-\alpha)^3} - \frac{W}{(U-\alpha)^2}$$

$$= a_3 = \frac{1}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\left[(r_1)^3-(r_2)^3\right]$$

elde edebilebilir.

Açıkça $n=1,2,3,\ldots$ için $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\left[(r_1)^n-(r_2)^n\right]$ dir.

$\alpha \notin S$ olduğundan dolayı $|r_1|<1$ dir.

$|r_1| = \left|\dfrac{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}{2(U-\alpha)}\right| < 1$ olduğundan $\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right| < |2(U-\alpha)|$ dır.

$\sqrt{V^2} = -V$ olduğu kullanılarak $\left|1+\sqrt{\dfrac{V^2-4W(U-\alpha)}{V^2}}\right| < \left|\dfrac{2(U-\alpha)}{-V}\right|$ elde edilir.

$\forall z \in \mathbb{C}$ için $\left|1-\sqrt{z}\right| \le \left|1+\sqrt{z}\right|$ olduğundan $|r_2|<1$ dir.

İlk önce $V^2 \neq 4W(U-\alpha)$ durumunu ele alınsın. Bu durumda $|r_2|<|r_1|$ dir.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(r_1)^{k+2}-(r_2)^{k+2}}{(r_1)^{k+1}-(r_2)^{k+1}}\right|$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\frac{\left|(r_1)^{k+2}\right|+\left|(r_2)^{k+2}\right|}{\left|(r_1)^{k+1}\right|-\left|(r_2)^{k+1}\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left|(r_1)\right|^{k+2}\left(1+\left|\frac{r_2}{r_1}\right|^{k+2}\right)}{\left|(r_1)\right|^{k+1}\left(1-\left|\frac{r_2}{r_1}\right|^{k+1}\right)} = |r_1| < 1$$

olduğu için S_k serisi yakınsaktır. Dolayısıyla her $k \in \mathbb{N}_0$ için S_k serisi yakınsaktır.

Şimdi $\sup_k S_k < \infty$ olduğu gösterilecektir.

(4.1) de S_k nin her iki tarafından limit alınır ve $|r_1| < 1$, $|r_2| < 1$ olduğu için

$\lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|r_1|^n + \sum_{n=1}^{\infty}|r_2|^n\right) < \infty$ dır. (S_k) pozitif terimli reel dizi ve $\lim_{k\to\infty} S_k < \infty$ olduğu için $\sup_k S_k < \infty$ dır.

Kabul edelim ki $V^2 = 4W(U-\alpha)$ olsun. Bu durumda $a_n = \left(\frac{2n}{-V}\right)\left(\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right)^n$ dir.

$\alpha \notin S$ olduğu için $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right| < 1$ dır. Dolayısıyla S_k yakınsaktır. Bu yüzden her $k \in \mathbb{N}_0$ için S_k yakınsaktır.

$\lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2n}{-V}\right|\left|\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right|^n$ dır. Oran testi ve $\left(\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right) < 1$ olduğu kullanılarak $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2n}{-V}\right|\left|\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right|^n < \infty$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha \notin S$ iken $\sup_k S_k < \infty$ dır.

Bu şartlar altında $\alpha \notin S$ iken $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)^{-1} \in B(l_1, l_1)$ dir.

$\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)$, l_1 de yoğun bir görüntüye sahiptir.

Bu durumda $\alpha \notin \sigma\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right)$ olup

$$\sigma(\Delta_{uvw}^2, l_1) \subseteq S \tag{4.2}$$

dır.

2. Kısım: Burada $S \subseteq \sigma\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right)$ olduğu gösterilecektir.

$\alpha \in S$ olsun. $\alpha \neq U$ ve $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $\alpha \neq u_k$ olsun. Dolayısıyla $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)$ alt üçgensel matristir ve bu yüzden $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur.

$V^2 \neq 4W(U-\alpha)$ alalım. Dolayısıyla $|r_2| < |r_1|$ dir.

Kabul edelim ki $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} < 1$ olsun. $|r_1| > 1$ olduğu için,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(r_1)^{k+2}-(r_2)^{k+2}}{(r_1)^{k+1}-(r_2)^{k+1}}\right|\leq\lim_{k\to\infty}\frac{\left|(r_1)^{k+2}\right|+\left|(r_2)^{k+2}\right|}{\left|(r_1)^{k+1}\right|-\left|(r_2)^{k+1}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|(r_1)\right|^{k+2}\left(1+\left|\frac{r_2}{r_1}\right|^{k+2}\right)}{\left|(r_1)\right|^{k+1}\left(1-\left|\frac{r_2}{r_1}\right|^{k+1}\right)}=|r_1|>1$$

dir. Bu, $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için S_k serisinin ıraksak olduğunu gösterir. Bu yüzden $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}<1$ şartı altında $\alpha\in\mathbb{C}$ için $\left(\Delta_{uvw}^2-\alpha I\right)^{-1}\notin B(l_1)$ dir.

Şimdi $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}=1$ durumu incelenecektir. $|r_1|=1$ ve $|r_2|<1$ dir. Bu yüzden

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(r_1)^{k+2}-(r_2)^{k+2}}{(r_1)^{k+1}-(r_2)^{k+1}}\right|\leq\lim_{k\to\infty}\frac{\left|(r_1)^{k+2}\right|+\left|(r_2)^{k+2}\right|}{\left|(r_1)^{k+1}\right|-\left|(r_2)^{k+1}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|(r_1)\right|^{k+2}\left(1+\left|\frac{r_2}{r_1}\right|^{k+2}\right)}{\left|(r_1)\right|^{k+1}\left(1-\left|\frac{r_2}{r_1}\right|^{k+1}\right)}=|r_1|=1$$

elde edilir. Raabe testinden dolayı $\forall k\geq 1$ için

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right|-1\right)=0<1$$

dir. Yani her $k\in\mathbb{N}_0$ için S_k serisi ıraksaktır. Dolayısıyla $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}=1$ şartı altında $\alpha\in\mathbb{C}$ için $\left(\Delta_{uvw}^2-\alpha I\right)^{-1}\notin B(l_1)$ dir.

$V^2=4W(U-\alpha)$ alalım. Bu durumda $a_n=\left(\frac{2n}{-V}\right)\left(\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right)^n$ dır. $\left|\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right|>1$ iken,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right|=\left|\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right|$$

olduğundan her $k\in\mathbb{N}_0$ için S_k serisi ıraksaktır. Fakat $\left|\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right|=1$ iken, Raabe testinden $\forall k\geq 1$ için

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right|-1\right)=0<1$$

dir. Bu yüzden, her $k\in\mathbb{N}_0$ için S_k serisi ıraksaktır. Dolayısıyla $(R2)$ şartı sağlanmaz.

Sonuç olarak, $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}\leq 1$ şartı altında $\alpha\in\mathbb{C}$ için $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^{-1}\notin B(l_1)$ dir.

Son olarak, $\alpha=U$ ve $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $\alpha=u_k$ olsun.

$$\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)x=\begin{bmatrix}(u_0-\alpha)x_0\\ v_0x_0+(u_1-\alpha)x_1\\ w_0x_0+v_1x_1+(u_2-\alpha)x_2\\ w_1x_1+v_2x_2+(u_3-\alpha)x_3\\ \vdots\end{bmatrix}$$

dir.

Durum 1: Eğer (u_k) sabit bir dizi ise $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k = U$ olduğu söylenebilir ve $(\Delta^2_{uvw} - UI)x = 0 \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots$ dır. Bu da $(\Delta^2_{uvw} - UI)$ operatörünün birebir olduğunu gösterir. Fakat $(\Delta^2_{uvw} - UI)$, l_1 de yoğun bir görüntüye sahip değildir. Bu yüzden $U \in \sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1)$ dir.

Durum 2: Eğer (u_k) monoton artan pozitif reel terimli dizi ise k sabiti için $(\Delta^2_{uvw} - u_k I)x = 0$ olup $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_{k-1} = 0, x_{k+1} = \left(\dfrac{-v_k}{u_{k+1} - u_k} \right) x_k$ dır. $x_k \neq 0$ alınırsa $(\Delta^2_{uvw} - u_k I)$ nın sıfırdan farklı köklerini elde ederiz. Bu, $(\Delta^2_{uvw} - u_k I)$ birebir olmadığını gösterir. Bu yüzden $(R1)$ şartı sağlanmaz. Dolayısıyla $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k \in \sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1)$ dir. Yani

$$S \subseteq \sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1) \tag{4.3}$$

dir.

(4.2) ve (4.3) den

$$\sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1) = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \frac{2|U - \alpha|}{\left| -V + \sqrt{V^2 - 4W(U - \alpha)} \right|} \leq 1 \right\}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3. Eğer $\sqrt{V^2} = V$ ise $\sigma(\Delta^2_{uvw}, l_1) = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \dfrac{2|U - \alpha|}{\left| -V - \sqrt{V^2 - 4W(U - \alpha)} \right|} \leq 1 \right\}$

dir.

Teorem 4.1.4. $\sigma_p\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right) = \begin{cases} \varnothing, & u_k \text{ sabit dizi ise} \\ \{u_0, u_1, \ldots\}, & u_k \text{ monoton artan dizi} \end{cases}$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı iki duruma ayrılır.

1. Durum: Kabul edelim ki u_k sabit dizi ve $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k = U$ olsun. $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots) \in l_1$ için $\Delta^2_{uvw}x = \alpha x$ denklemi çözülerek,

$$\begin{aligned} &u_0 x_0 = \alpha x_0 \\ &v_0 x_0 + u_1 x_1 = \alpha x_1 \\ &w_0 x_0 + v_1 x_1 + u_2 x_2 = \alpha x_2 \\ &w_1 x_1 + v_2 x_2 + u_3 x_3 = \alpha x_3 \\ &\vdots \\ &w_{k-2} x_{k-2} + v_{k-1} x_{k-1} + u_k x_k = \alpha x_k \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir.

$x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi (x_t) olsun. Yani $w_{t-2}x_{t-2} + v_{t-1}x_{t-1} + u_t x_t = \alpha x_t$ dir. Buradan $\alpha = U$ elde edilir. Bir adım daha ilerlenince $w_{t-1}x_{t-1} + v_t x_t + U x_{t+1} = \alpha x_{t+1}$ den $x_t = 0$ olur. Bu da $x_t \neq 0$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden

$$\sigma_p\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right) = \varnothing$$

dir.

2. Durum: (u_k) monoton artan dizi olsun. $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots) \in l_1$ için $\Delta^2_{uvw}x = \alpha x$ denklemini alalım. Bu (4.4) denklem sistemini verir.

Eğer $\forall k \geq 1$ için $\alpha = u_k$ ise $\left(\Delta_{uvw}^2 - u_k I\right)x = 0$ dir ve buradan

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_{k-1} = 0,\ x_{k+1} = \left(\frac{-v_k}{u_{k+1} - u_k}\right)x_k$$

eşitlikleri elde edilir.

Eğer $x_k \neq 0$ ise $x_{k+1} \neq 0, x_{k+2} \neq 0, \ldots$ dır. Böylece $\left(\Delta_{uvw}^2 - u_k I\right)x = 0$ denkleminin sıfırdan farklı çözümleri mevcuttur. Bu durumda $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)$ birebir olmadığından

$$\sigma_p\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$$

dir.

Matris temsili A olan $T : X \to X$ sınırlı lineer operatörünün $T^* : X^* \to X^*$ adjoint operatörü, A matrisinin transpozu ile tanımlı A' matris temsiline sahiptir.

Teorem 4.1.5. $\sigma_p\left(\Delta_{uvw}^{2*}, l_1^*\right) = S$ dir.

İspat: Bu teoremde ilk önce $\sigma\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) \subset \sigma_p\left(\Delta_{uvw}^{2*}, l_1^*\right)$ olduğu gösterilecektir.

$\alpha \in S = \sigma\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right)$ olsun. Dolayısıyla $\left|\frac{1}{r_1}\right| = \frac{2|U-\alpha|}{\left|-V + \sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}\right|} \leq 1$ dir.

Kabul edelim ki $\theta \neq f \in l_1^* \cong l_\infty$ için

$$\Delta_{uvw}^{2*} = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & v_1 & w_1 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 & v_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olduğunu göz önünde bulundurup $\Delta^{2*}_{uvw} f = \alpha f$ kullanılarak

$$\begin{aligned} &u_0 f_0 + v_0 f_1 + w_0 f_2 = \alpha f_0 \\ &u_1 f_1 + v_1 f_2 + w_1 f_3 = \alpha f_1 \\ &u_2 f_2 + v_2 f_3 + w_2 f_4 = \alpha f_2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.5}$$

denklem sistemi elde edillir. (4.5) denklem sistemi çözülerek

$$f_k = \left(b_{k-1,0} f_1 - b_{k-1,1} f_0\right) \frac{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)\dots(u_{k-1}-\alpha)}{w_0 w_1 \dots w_{k-2}}$$

elde edilir. $b_{n,k}$ Teorem 4.1.2. de tanımlandı.

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve $u = (u_k)$ monoton artan dizi ve $w = (w_k)$ artmayan pozitif reel terimli dizi olduğu için

$$\left|\frac{u_n-\alpha}{w_n}\right| = \frac{1}{|w_n|}\left((u_n-\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{|W|}\left((U-\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (n = 0,1,\dots,k-2)$$

alınabilir. O halde,

$$|f_k| \le |b_{k-1,0} f_1 - b_{k-1,1} f_0| |U-\alpha| \left|\frac{U-\alpha}{W}\right|^{k-1} \tag{4.6}$$

dir. (4.6) nın her iki tarafından limit alınarak ve $f_0 = 1$ ve $f_1 = \dfrac{1}{r_1}$ seçilerek,

$$\lim_{k\to\infty} |f_k| \le \lim_{k\to\infty}\left\{|a_k f_1 - a_{k-1} f_0| \left|\frac{U-\alpha}{W}\right|^{k-1} |U-\alpha|\right\} = \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{\left|\left(r_1^k - r_2^k\right) f_1 - \left(r_1^{k-1} - r_2^{k-1}\right) f_0\right|}{\left|\sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}\right|} \left|\frac{U-\alpha}{W}\right|^{k-1} |U-\alpha|\right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{|r_2|^{k-1}|r_1-r_2|}{|r_1|\left|\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}\left|\frac{U-\alpha}{W}\right|^{k-1}|U-\alpha|\right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{|r_2|^{k-1}}{|r_1|}\left|\frac{U-\alpha}{W}\right|^{k-1}$$

olduğu görülür.

$$\frac{U-\alpha}{W} = \frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}} \times \frac{2(U-\alpha)}{-V-\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}} = \frac{1}{r_1r_2} \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{k\to\infty}|f_k| \le \lim_{k\to\infty}\frac{|r_2|^{k-1}}{|r_1|}\left|\frac{U-\alpha}{W}\right|^{k-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{|r_2|^{k-1}}{|r_1|}\frac{1}{|r_1r_2|^{k-1}} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{r_1}\right|^k$$

dir. $\alpha \in S$ olduğu için de

$$\lim_{k\to\infty}|f_k| < \infty$$

dir. Bu yüzden

$$\sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right) \subset \sigma_p\left(\Delta^{2*}_{uvw}, l_1^*\right) \tag{4.7}$$

dir.

Şimdi $\sigma_p\left(\Delta^{2*}_{uvw}, l_1^*\right) \subset \sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ olduğu gösterilecektir.

Açıkça $\sigma_p\left(\Delta^{2*}_{uvw}, l_1^*\right) \subset \sigma\left(\Delta^{2*}_{uvw}, l_1^*\right)$ dir ve Önerme 2.28 den $\sigma\left(\Delta^{2*}_{uvw}, l_1^*\right) = \sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ dir. Dolayısıyla

$$\sigma_p\left(\Delta_{uvw}^{2*},l_1^*\right)\subset\sigma\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right) \tag{4.8}$$

dir.

(4.7) ve (4.8) den

$$\sigma_p\left(\Delta_{uvw}^{2*},l_1^*\right)=S$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6. $\sigma_r\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)=\begin{cases} S, & u_k \text{ sabit dizi ise} \\ S\setminus\{u_0,u_1,\ldots\}, & u_k \text{ monoton artan dizi ise} \end{cases}$ dır.

İspat: Bu teoremin ispatı iki durumda incelenecektir.

1. Durum: (u_k) sabit bir dizi olsun. $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $u_k=U$ olduğu söyleyenebilir. Teorem 4.1.4. den dolayı $\left(\Delta_{uvw}^{2}-\alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur. Fakat Teorem 4.1.5. den dolayı $\alpha\in S$ için $\left(\Delta_{uvw}^{2}-\alpha I\right)^{*}$ birebir değildir. Bu yüzden Teorem 2.14. gereğince $\left(\Delta_{uvw}^{2}-\alpha I\right)$ operatörü l_1 de yoğun bir görüntüye sahip değildir. Sonuç olarak

$$\sigma_r\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}\leq 1\right\}$$

dir.

2.Durum: (u_k) monoton artan dizi olsun. $\alpha \in S$ için $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur. $\alpha = u_k$ $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$ için Teorem 4.1.4. den $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)^{-1}$ mevcut değildir. 1.durumdaki gibi $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)$operatörü l_1 de yoğun bir görüntüye sahip değildir. Bu yüzden,

$$\sigma_r\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} \leq 1\right\} \setminus \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$$

dir.

Teorem 4.1.7. $\sigma_c\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) = \varnothing$ dir.

İspat: $\sigma\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) = \sigma_p\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) \cup \sigma_r\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) \cup \sigma_c\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right)$ olduğu kullanılarak $\sigma_c\left(\Delta_{uvw}^2, l_1\right) = \varnothing$ elde edilir.

Teorem 4.1.8. Eğer $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} > 1$ koşulunu sağlayan $\alpha \in \mathbb{C}$ mevcut ise, $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right) \in A_1$ dir.

İspat: $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)$ operatörünün birebir, örten ve $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} > 1$ şartı altındaki $\alpha \in \mathbb{C}$ için terse sahip olduğunu göstermek gereklidir. $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} > 1$ olduğu için $\alpha \neq U$ dır. Dolayısyla $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)$ operatörü alt üçgenseldir. Bu yüzden $\left(\Delta_{uvw}^2 - \alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur.

Teorem 4.1.2. den dolayı $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}>1$ olacak şekildeki $\alpha\in\mathbb{C}$ için $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^{-1}$ operatörü süreklidir. Ayrıca $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)x=y$ den $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^{-1}y=x$ elde edilir. Bu yüzden $\forall y\in l_1$ için $x\in l_1$ bulabiliriz. Çünkü $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^{-1}\in B(l_1)$ dir. O halde $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)$ operatörü örtendir ve bu yüzden $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)\in A_1$ dir.

4.2. Δ^2_{uvw} Operatörünün l_1 Uzayı Üzerindeki İnce Spektrumu

Teorem 4.2.1. (u_k) sabit dizi ve $u_k=U$ ve $\alpha=U$ olsun. Bu takdirde $\alpha\in C_1\sigma\left(\Delta^2_{uvw},l_1\right)$ dir.

İspat: $\sigma_p\left(\Delta^{2*}_{uvw},l_1^*\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}\leq 1\right\}$ idi. $\alpha=U$ için $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^*$ birebir değildir. Teorem 2.14. gereğince $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)$ operatörü l_1 uzayında yoğun bir görüntüye sahip değildir. Teorem 4.1.4. den $\alpha=U$ için $\alpha\notin\sigma_p\left(\Delta^2_{uvw},l_1\right)$ dir. Bu yüzden $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)$ operatörü terse sahiptir.

Şimdi $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^{-1}$ sürekli olduğunu gösterelim. Teorem 2.15. den dolayı $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^*$ operatörünün örten olduğunu göstermek yeterlidir. Yani verilen $y\in l_1^*$ için $\left(\Delta^2_{uvw}-\alpha I\right)^*x=y$ eşitiliğini sağlayan $x=(x_n)\in l_1^*$ bulunmalıdır. $\left(\Delta^2_{uvw}-UI\right)^*x=y$ olsun. Bu eşitlikten

$$
\begin{aligned}
&v_0x_1+w_0x_2=y_0\\
&v_1x_2+w_1x_3=y_1\\
&\vdots\\
&v_{i-1}x_i+w_{i-1}x_{i+1}=y_{i-1}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\forall n \geq 1$ için $v_{n-1}x_n + w_{n-1}x_{n+1} = y_{n-1}$ dir. Dolayısıyla $y \in l_\infty$ olduğu için $\sup_n |x_n| < \infty$ sağlanır. Bu $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)^*$ operatörünün örten olduğunu gösterir ve bu yüzden $\alpha \in C_1\sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ dir.

Teorem 4.2.2. (u_k) sabit dizi ve $u_k = U$ ve $\alpha \neq U$, $\alpha \in \sigma_r\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ olsun. Bu durumda $\alpha \in C_2\sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ dir.

İspat: $\alpha \neq U$ olduğu için $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)$ operatörü alt üçgenseldir. Dolayısıyla $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur. $\alpha \in S$ ve $U \neq \alpha$ olduğu kullanılarak Teorem 4.1.2. deki gibi $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)^{-1}$ sürekli değildir.

Yine Teorem 4.1.5. den dolayı $\dfrac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} \leq 1$ olacak şekildeki $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)^*$ birebir değildir. Teorem 2.14. gereği $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)$ operatörü l_1 de yoğun bir görüntüye sahip değildir. Bu durumda $\alpha \in C_2\sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ dir.

Teorem 4.2.3. (u_k) sabit dizi olsun. Eğer $\forall k$ için $|w_k| < |v_k|$ ise $U \in C_1\sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ dir. Eğer $\forall k$ için $|w_k| \geq |v_k|$ ise $U \in C_2\sigma\left(\Delta^2_{uvw}, l_1\right)$ dir.

İspat: Eğer $\alpha = U$ ise Teorem 4.1.6. dan $\left(\Delta^2_{uvw} - \alpha I\right)$ operatörü ya C_1 yada C_2 durumuna aittir. Δ^2_{uvw} nın sol tersi

$$B=\left(\Delta_{uvw}^{2}-UI\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{v_0} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{-w_0}{v_0v_1} & \frac{1}{v_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{w_0w_1}{v_0v_1v_2} & \frac{-w_1}{v_1v_2} & \frac{1}{v_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir. B matrisi $|w_k|<|v_k|$ için $B\in B(l_1)$ dir. Fakat $|w_k|\geq|v_k|$ için $B\notin B(l_1)$ dir. $|w_k|<|v_k|$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ için $\left(\Delta_{uvw}^{2}-UI\right)^{-1}$ süreklidir, $|w_k|\geq|v_k|$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ için sürekli değildir. Dolayısıyla

$k\in\mathbb{N}_0$ için $|w_k|<|v_k|$ ise $U\in C_1\sigma\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)$, $k\in\mathbb{N}_0$ için $|w_k|\geq|v_k|$ ise $U\in C_2\sigma\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)$ dir.

Teorem 4.2.4. (u_k) sabit dizi olmasın ve $\alpha\in\sigma_r\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)$ olsun. O halde $\alpha\in C_2\sigma\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)$ dir.

İspat: $\sigma_r\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}\leq 1\right\}\setminus\{u_0,u_1,u_2,\ldots\}$ idi. $\forall k$ için $\alpha\neq u_k$ olduğundan $\left(\Delta_{uvw}^{2}-\alpha I\right)$ operatörü alt üçgenseldir ve dolayısıyla tersi mevcuttur. $\frac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}\leq 1$ şartını sağlayan $u_k\neq\alpha\in\mathbb{C}$ için Teorem 4.1.2. den dolayı $\left(\Delta_{uvw}^{2}-\alpha I\right)^{-1}$ sürekli değildir.

Teorem 4.2.3. den dolayı da $\left(\Delta_{uvw}^{2}-\alpha I\right)$ operatörü l_1 uzayında yoğun bir görüntüye sahip değildir.

O halde $\alpha\in C_2\sigma\left(\Delta_{uvw}^{2},l_1\right)$ dir.

BÖLÜM 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÜST ÜÇGENSEL ÜÇLÜ BANT MATRİSİ $\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t$ NİN l_1 UZAYI ÜZERİNDEKİ İNCE SPEKTRUMU

Bu bölümde, $\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t : l_1 \to l_1$ operatörünün sınırlı lineer operatör olduğu gösterildi ve $\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t$ operatörünün l_1 uzayındaki spektrumu, nokta spektrumu, sürekli spektrumu, artık spektrumu, yaklaşık (approximate) nokta spektrumu, hatalı (defect) spektrumu ve sıkıştırma (compression) spektrumu hesaplandı.

$\lim\limits_{k\to\infty} u_k = U$ olacak şekilde $u = (u_k)$ ya sabit dizi ya da terimleri farklı pozitif reel sayı dizisi ve $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k \neq 0$, $v = (v_k)$ dizisi $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = V$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $v_k \neq 0$ olacak şekilde pozitif reel terimli dizi ve $w = (w_k)$ dizisi $\lim\limits_{k\to\infty} w_k = W$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $w_k \neq 0$ olacak şekilde pozitif reel terimli dizi ve $\sup\limits_k u_k < U + V$ olsun. $\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t$ operatörünün matris gösterimi,

$$\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & v_1 & w_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 & v_2 & w_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir.

Eğer $u = (r), v = (s), w = (t)$ alınırsa, $\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t$ operatörü $A(r,s,t)$ operatörüne indirgenir [18]. Dolayısıyla, bu konunun sonuçları birçok üst üçgensel üçlü bant matrislerinin sonuçlarını geneller.

5.1. Genelleştirilmiş Üst Üçgensel Üçlü Bant Matrisi $\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t$ nin l_1 Uzayındaki Spektrumu

Teorem 5.1.1. $\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t : l_1 \to l_1$ operatörü sınırlı lineer operatördür ve

$\left\|\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right\|_{(l_1,l_1)} = \sup_k \left(|w_k| + |v_{k+1}| + |u_{k+2}|\right)$ dir.

İspat: $\|T\| = \sup_k \sum_n |a_{nk}|$ eşitliğinden $\left\|\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right\|_{(l_1,l_1)} = \sup_k \left(|u_{k+2}| + |v_{k+1}| + |w_k|\right)$ elde edilir.

Teorem 5.1.2. $\sigma_p\left(\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^*, l_1^*\right) = \varnothing$ dir.

İspat: $f \neq \theta$ ve $f \in l_\infty$ için $\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^* f = \alpha f$ olsun. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&u_0 f_0 = \alpha f_0 \\
&v_0 f_0 + u_1 f_1 = \alpha f_1 \\
&w_0 f_0 + v_1 f_1 + u_2 f_2 = \alpha f_2 \\
&w_1 f_1 + v_2 f_2 + u_3 f_3 = \alpha f_3 \\
&\vdots \\
&w_{k-2} f_{k-2} + v_{k-1} f_{k-1} + u_k f_k = \alpha f_k \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

elde edilir.

Durum 1: Kabul edelim ki (u_k) sabit dizi olsun. $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $u_k = U$ dır. (f_n) dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi f_m olsun. (5.1) den $f_m = 0$ elde edilir. Bu da $f_m \neq 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$\sigma_p\left(\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^*, l_1^*\right) = \varnothing$$

dır.

Durum 2: Kabul edelim ki (u_k) terimleri farklı pozitif reel sayı dizisi olsun. (5.1) göz önüne alınırsa, $\alpha \notin \{u_0, u_1, \ldots\}$ için $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $f_k = 0$ dır. Böyle bir durumda çelişkiye varılır.

Kabul edelim ki bazı m için $\alpha = u_m$ olsun. O halde $f_0 = f_1 = \ldots = f_{m-1} = 0$ dır.

Eğer $f_m = 0$ ise ise $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $f_k = 0$ dır. Çelişkiye varılır.

Eğer $f_m \neq 0$ ise,

$$f_{k+1} = \frac{-v_k}{u_{k+1} - u_m} f_k, \quad (k \geq m)$$

elde edilir ve $u_m < V + U$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \right| = \left| \frac{V}{u_m - U} \right| > 1, \qquad (k \geq m)$$

olur. Bu yüzden $f \notin l_1^*$ dır. Dolayısıyla

$$\sigma_p\left(\left((\Delta_{uvw}^2)^t \right)^*, l_1^* \right) = \varnothing$$

dır.

Teorem 5.1.3. $\sigma_r\left(\left((\Delta_{uvw}^2)^t \right)^*, l_1^* \right) = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \left| \dfrac{2(U-\alpha)}{-V + \sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}} \right| < 1 \right\} = S_1$ dir.

İspat: $\left((\Delta_{uvw}^2)^t\right)^* = \Delta_{uvw}^2$ dır. Dolayısıyla bu teoremin ispatı için Δ_{uvw}^2 operatörü kullanılabilir.

Teorem 5.1.2. den dolayı $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için $\Delta_{uvw}^2 - \alpha I$ birebirdir.

Kabul edelim ki $y \neq \theta$ ve $y \in l_1$ için $(\Delta_{uvw}^2)^* y = \alpha y$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} &u_0 y_0 + v_0 y_1 + w_0 y_2 = \alpha y_0 \\ &u_1 y_1 + v_1 y_2 + w_1 y_3 = \alpha y_1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir.

Eğer $y_0 = y_1 = 0$ ise $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $y_k = \theta$ dır. Bu yüzden $y_0 \neq 0, y_1 \neq 0$ olsun. (5.2) deki denklem sistemi çözülerek,

$$y_k = \left(b_{k-1,0} y_1 - b_{k-1,1} y_0\right) \frac{(u_0 - \alpha)(u_1 - \alpha)\cdots(u_{k-1} - \alpha)}{w_0 w_1 \cdots w_{k-2}}$$

elde edilir. $b_{k-1,0}$ ve $b_{k-1,1}$ Bölüm 4 de tanımlandı.

$y_0 = 1$ ve $y_1 = \frac{1}{r_1}$ olsun. Bu kabuller altında

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_k - \alpha}{w_{k-1}}\right| \left|\frac{b_{k,0} y_1 - b_{k,1} y_0}{b_{k-1,0} y_1 - b_{k-1,1} y_0}\right| = \left|\frac{1}{r_1}\right|$$

dir.

$|r_1|>1$ için $y=(y_k)\in l_1$ dir. Bu da $(\Delta^2_{uvw})^* - \alpha I$ operatörünün birebir olmadığını gösterir.

Teorem 2.14. den dolayı $(\Delta^2_{uvw})-\alpha I$ yoğun bir görüntüye sahip değildir.

O halde, $\sigma_r\left(\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^*, l_1^*\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right|<1\right\}$ dır.

Teorem 5.1.4. $\sigma_p\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right|<1\right\}=S_1$ dir.

İspat: Teorem 2.27 den yararlanılarak ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.5. $\sigma_p\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(U-\alpha)}{-V-\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right|<1\right\}=S_2$ dir.

İspat: Teorem 5.1.4. gibi yapılır.

Teorem 5.1.6. $\sigma_r\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right)=\varnothing$ dır.

İspat: Teorem 5.1.2. den dolayı bütün α lar için $\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^* - \alpha I$ operatörü birebir değildir. Bu yüzden Teorem 2.14. den dolayı $(\Delta^2_{uvw})-\alpha I$ yoğun bir görüntüye sahip değildir. Sonuç olarak $\sigma_r\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right)=\varnothing$ dır.

Teorem 5.1.7. Kabul edelim ki $\sqrt{V^2}=-V$ ve

$$\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right|\leq 1\right\}=S_3 \text{ olsun. } \sigma\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t,l_1\right)=S_3 \text{ dır.}$$

İspat: $y=(y_k)\in l_\infty$ ve $\alpha\notin S_3$ olsun. $\left[\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^*-\alpha I\right]x=y$ denklem sistemi çözülerek

$$\begin{aligned}
&(u_0-\alpha)x_0=y_0\\
&v_0x_0+(u_1-\alpha)x_1=y_1\\
&w_0x_0+v_1x_1+(u_2-\alpha)x_2=y_2\\
&\vdots\\
&w_kx_k+v_{k+1}x_{k+1}+(u_{k+2}-\alpha)x_{k+2}=y_{k+2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$x_0=\frac{y_0}{u_0-\alpha},$$

$$x_1=\frac{1}{u_1-\alpha}y_1+\frac{-v_0}{(u_1-\alpha)(u_0-\alpha)}y_0,$$

$$x_2=\frac{1}{u_2-\alpha}y_2+\frac{-v_1}{(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)}y_1+\left(\frac{v_0v_1}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)}-\frac{w_0}{(u_2-\alpha)(u_0-\alpha)}\right)y_0$$

$$\vdots$$

elde edilir.

$\alpha\notin S_3$ olduğundan $\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $\alpha\neq u_k$ ve $\alpha\neq U$ dır. Bu yüzden $\left(\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^*-\alpha I\right)^{-1}=(b_{nk})$ mevcuttur ve

$$b_{nk}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{u_0-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{-v_0}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)} & \dfrac{1}{u_1-\alpha} & 0 & \cdots \\ \dfrac{v_0v_1}{(u_0-\alpha)(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)}-\dfrac{w_0}{(u_0-\alpha)(u_2-\alpha)} & \dfrac{-v_1}{(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)} & \dfrac{1}{u_2-\alpha} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dır.

$\forall k\in\mathbb{N}_0$ için $b_{k,k}=\dfrac{1}{u_k-\alpha}$, $b_{k+1,k}=\dfrac{-v_k}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)}$,... olsun. Buradan

$$x_n=b_{n,0}y_0+b_{n,1}y_1+\cdots+b_{n,n}y_n=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}y_k$$

olduğu görülür.

$$r_1=\frac{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}{2(U-\alpha)} \quad \text{ve} \quad r_2=\frac{-V-\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}{2(U-\alpha)} \quad \text{için}$$

$$a_n=\frac{(r_1)^n-(r_2)^n}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}} \quad (n=1,2,3,\ldots) \text{ dir.}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{u_k-\alpha}=\frac{1}{U-\alpha}=a_1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-v_k}{(u_k-\alpha)(u_{k+1}-\alpha)}=\frac{-V}{(U-\alpha)^2}=a_2,\ \ldots$$

elde edilebilir.

Kabul edelim ki $V^2 \neq 4W(U-\alpha)$ olsun. $\alpha \notin S_3$ olduğundan $|r_1|<1$ dir. $|r_1|<1$ olduğundan $\left|1+\sqrt{1-\dfrac{4W(U-\alpha)}{V^2}}\right|<\left|\dfrac{2(U-\alpha)}{-V}\right|$ dır. $z\in\mathbb{C}$ için $|1-\sqrt{z}|\leq|1+\sqrt{z}|$ olduğundan $|r_2|<1$ ve $|r_2|<|r_1|$ şartını sağlayan

$$\left|1-\sqrt{1-\frac{4W(U-\alpha)}{V^2}}\right|<\left|\frac{2(U-\alpha)}{-V}\right|$$

eşitsizliği elde edilir.

Her $n\in\mathbb{N}_0$ için $|x_n|\leq\sum_{k=0}^{n}|b_{n,n-k}||y_k|$ olduğunu görmek kolaydır. Bu eşitsizliğin her iki tarafından limit alınarak,

$$\|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty \sum_{k=0}^{\infty}|b_{n,k}|$$

elde edilir.

$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{(r_1)^{k+2}-(r_2)^{k+2}}{(r_1)^{k+1}-(r_2)^{k+1}}\right|=|r_1|$ olduğu için $|r_1|<1$ şartıyla $\left(\left((\Delta^2_{uvw})^t\right)^*-\alpha I\right)$ örtendir. Dolayısıyla Teorem 2.15. den $|r_1|<1$ için $\left((\Delta^2_{uvw})^t-\alpha I\right)$ sınırlı terse sahiptir.

Eğer $V^2=4W(U-\alpha)$ ise $a_n=\left(\dfrac{2n}{-V}\right)\left(\dfrac{-V}{2(U-\alpha)}\right)^n$, $(n\geq 1)$ dir. Benzer şekilde $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için $|x_n|\leq\sum_{k=0}^{n}|b_{n,k}||y_k|$ dir ve eşitsizliğin her iki tarafından limit alınırsa,

$$\|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty \sum_{k=0}^{\infty}|b_{n,n-k}|$$

bulunur ve $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+1,k}}{b_{2k,k}}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{-V}{2(U-\alpha)}\right|$ olduğu için $|r_1|<1$ şartıyla $\left(\left((\Delta_{uvw}^2)^t\right)^* - \alpha I\right)$ örtendir. Dolayısıyla Teorem 2.15. den $|r_1|<1$ için $\left((\Delta_{uvw}^2)^t - \alpha I\right)$ sınırlı terse sahiptir. Yani, bu durumda $\alpha \notin \sigma_c\left((\Delta_{uvw}^2)^t, l_1\right)$ dir. O halde

$$\sigma_c\left((\Delta_{uvw}^2)^t, l_1\right) \subseteq \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right| \le 1\right\} = S_3 \tag{5.3}$$

dir.

Teorem 5.1.4. den,

$$\sigma_p\left((\Delta_{uvw}^2)^t, l_1\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right| < 1\right\} \subseteq \sigma\left((\Delta_{uvw}^2)^t, l_1\right) \tag{5.4}$$

elde edilir.

Herhangi sınırlı lineer operatörün spektrumu kapalı olduğundan dolayı,

$$\left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right| \le 1\right\} \subseteq \sigma\left((\Delta_{uvw}^2)^t, l_1\right) \tag{5.5}$$

dır ve Teorem 5.1.4., 5.1.6. ve (5.3) den

$$\sigma\left((\Delta_{uvw}^2)^t, l_1\right) \subseteq \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right| \le 1\right\} \tag{5.6}$$

bulunur. (5.5) ve (5.6) nın birleşiminden ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.9. $\sigma_c\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\dfrac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right|=1\right\}$ dir.

İspat: Bu teoremim ispatı, Teorem 5.1.4., 5.1.6. ve 5.1.7. kullanılarak basit bir şekilde görülür.

5.2. Genelleştirilmiş Üst Üçgensel Üçlü Bant Matrisi $\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t$ nin l_1 Uzayı Üzerindeki İnce Spektrumu

Teorem 5.2.2. $\sqrt{V^2}=-V$ olsun. Eğer $\left|2(U-\alpha)\right|<\left|-V-\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|$ ise $\alpha\in A_3\sigma\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right)$ dir.

İspat: Sonuç 5.1.5. den $\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t-\alpha I\right)^{-1}$ mevcut değildir. $y=(y_0,y_1,\ldots)\in l_1$ olsun. $\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t-\alpha I\right)x=y$ eşitliği açılarak,

$$
\begin{aligned}
&(u_0-\alpha)x_0+v_o x_1+w_0x_2=y_0\\
&(u_1-\alpha)x_1+v_1x_2+w_1x_3=y_1\\
&(u_2-\alpha)x_2+v_2x_3+w_2x_4=y_2\\
&\qquad\vdots\\
&(u_k-\alpha)x_k+v_kx_{k+1}+w_kx_{k+2}=y_k\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir.

$x_0=0$ ve $x_1=0$ olsun. Bu yüzden

$$x_2=\frac{1}{w_0}y_0,$$

$$x_3 = \frac{1}{w_1} y_1 + \frac{-v_1}{w_o w_1} y_0 ,$$

$$x_4 = \frac{1}{w_2} y_2 + \frac{-v_2}{w_1 w_2} y_1 + \left(\frac{v_2 v_1}{w_0 w_1 w_2} - \frac{(u_2 - \alpha)}{w_0 w_2} \right) y_0$$

$$\vdots$$

elde edilir.

$c_{k,k+2} = \frac{1}{w_k}$, $c_{k,k+3} = \frac{-v_{k+1}}{w_k w_{k+1}}$, $c_{k,k+4} = \frac{v_{k+2} v_{k+1}}{w_k w_{k+1} w_{k+2}} - \frac{(u_{k+2} - \alpha)}{w_k w_{k+2}}, \ldots$ olsun. Bu şartlar altında

$$x_k = c_{0,k} y_0 + c_{1,k} y_1 + \cdots + c_{k-2,k} y_{k-2} = \sum_{n=0}^{k-2} c_{n,k} y_n$$

olduğu söylenebilir.

$\sum_k |x_k| \le \sup_k (R_k) \sum_k |y_k|$ olup $k \in \mathbb{N}_0$ için

$R_k = \frac{1}{|w_k|} + \left| \frac{-v_{k+1}}{w_k w_{k+1}} \right| + \left| \frac{v_{k+2} v_{k+1}}{w_k w_{k+1} w_{k+2}} - \frac{u_{k+2} - \alpha}{w_{k+2} w_k} \right| + \cdots$ dir.

$r_1 = \frac{-V + \sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}}{2(U-\alpha)}$ ve $r_1 = \frac{-V - \sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}}{2(U-\alpha)}$ olduğu kullanılarak,

$$\lim_{k\to\infty} c_{k,k+2} = \frac{1}{W} = t_1 = \frac{1}{\sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}} (-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$\lim_{k\to\infty} c_{k,k+3} = \frac{-V}{W^2} = t_2 = \frac{1}{\sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}} (-1)^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right),$$

$$\lim_{k\to\infty} c_{k,k+4} = \frac{V^2}{W^3} = t_3 = \frac{1}{\sqrt{V^2 - 4W(U-\alpha)}} (-1)^3 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right),$$

$$\lim_{k\to\infty} c_{k,k+5} = \frac{-V^3}{W^4} = t_4 = \frac{1}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}(-1)^4\left(\frac{1}{r_1^4}-\frac{1}{r_2^4}\right),$$

$$\vdots$$

elde edilebilir. Burada $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}(-1)^n\left(\dfrac{1}{r_1^n}-\dfrac{1}{r_2^n}\right)$ $n=1,2,3,\ldots$ dir.

$|r_2|>1$ olduğu için, $|r_1|>1$ dir.

Kabul edelim ki $V^2 \neq 4W(U-\alpha)$ olsun.

Her $k\in\mathbb{N}$ için R_k yakınsaktır. Çünkü $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_{k,2k+2}}{c_{k,2k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{t_{k+1}}{t_k}\right| = \left|\dfrac{1}{r_2}\right| < 1$ dir.

$$\lim_{k\to\infty} R_k = \sum_{n=1}^{\infty}|t_n| \le \frac{1}{\left|\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{r_1}\right|^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{r_2}\right|^n\right) < \infty \text{ dır.}$$

(R_k) dizisi yakınsak ve $\lim\limits_{k\to\infty} R_k < \infty$ olduğundan $\sup\limits_k R_k < \infty$ dır. Bu da $x=(x_k)\in l_1$ olduğunu gösterir.

Eğer $V^2 = 4W(U-\alpha)$ ise $t_n = \dfrac{1}{-W}n\left(\dfrac{2(U-\alpha)}{-V}\right)^{n-1}(-1)^n$ dır. Dolayısıyla

$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_{k,2k+2}}{c_{k,2k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{t_{k+1}}{t_k}\right| = \dfrac{2|U-\alpha|}{|-V|} < 1$ dır. Bu yüzden, her $k\in\mathbb{N}$ için R_k yakınsaktır ve

$$\lim_{k\to\infty} R_k = \sum_{n=1}^{\infty}|t_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{W}\right|\left|\frac{2(U-\alpha)}{-V}\right|^{n-1} < \infty \text{ dır.}$$

(R_k) yakınsak bir dizi ve $\lim_{k\to\infty} R_k < \infty$ dır. Dolayısıyla $\sup_k R_k < \infty$ dır. Yani $x = (x_k) \in l_1$ dir. O halde $\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t - \alpha I\right)$ örtendir. Bundan dolayı $\alpha \in A_3\sigma\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right)$ elde edilir.

5.3. $\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t$ Operatörünün l_1 Uzayındaki Yaklaşık (Approximate) Nokta Spektrumu, Sıkıştırma (Compression) Spektrumu, Hatalı (Defect) Spektrumu

Teorem 5.3.1. $\sqrt{V^2} = -V$ olsun. Aşağıdakiler mevcuttur;

i. $\sigma_{ap}\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right) = S_3$

ii. $\sigma_{co}\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right) = \varnothing$.

İspat: i. Tablo 2.2. den dolayı

$$\sigma_{ap}\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right) = \sigma\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right) / C_1\sigma\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right)$$

dir.

Teorem 5.1.6. dan dolayı

$$C_1\sigma\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right) = C_2\sigma\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right) = \varnothing$$

olur. O halde $\sigma_{ap}\left(\left(\Delta_{uvw}^2\right)^t, l_1\right) = S_3$ dir.

ii. Tablo 2.2. den

$\sigma_{co}\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right) = C_1\sigma\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right) \cup C_2\sigma\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right) \cup C_3\sigma\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right)$ dır. Teorem 5.1.2. gereğince $\sigma_{co}\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right) = \varnothing$ elde edilir.

Teorem 5.3.2. $\sigma_c\left(\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^*, l_1^*\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \dfrac{2|U-\alpha|}{\left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|} = 1\right\}$ dır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 5.1.9. daki gibi yapılır.

Teorem 5.3.3. $\sqrt{V^2} = -V$ olsun. Eğer $|2(U-\alpha)| < \left|-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}\right|$ ise $\alpha \in C_1\sigma\left(\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^*, l_1^*\right)$ dir.

İspat: Teorem 5.1.2. den $\left(\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t\right)^* - \alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur. Teorem 5.1.3. ve 4.3.2. den ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.4. $\sigma_\delta\left(\left(\Delta^2_{uvw}\right)^t, l_1\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{2(U-\alpha)}{-V+\sqrt{V^2-4W(U-\alpha)}}\right| = 1\right\}$ dır.

İspat: Önerme 2.28.-(c) şıkkından sonuç kolaylıkla görülür.

BÖLÜM 6. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK OPERATÖRÜ $B(r,s)$ NİN γ UZAYI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Genelleştirilmiş fark operatörü $B(r,s)$ nin γ dizi uzayındaki spektrumu Dutta ve Tripathy [12] tarafından çalışıldı. Bu çalışmada $B(r,s)$ operatörünün γ dizi uzayı üzerindeki spektrumu, nokta spektrumu, sürekli spektrumu, artık spektrumu incelendi.

γ uzayı da $\gamma = \left\{ (x_k) \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c \right\}$ olarak tanımlanır.

Genelleştirilmiş fark operatörü $B(r,s)$,

$$B(r,s) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (s \neq 0)$$

şeklindedir.

Eğer $T:\gamma \to \gamma$ operatörü A matrisi ile sınırlı lineer ise $T^*:\gamma^* \to \gamma^*$ adjoint operatörü, A matrisinin transpozu tarafından tanımlanır ve γ, $\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ normu ile l_1 e izomorftur.

Şimdi verilecek olan teorem, normu tanımlayamaya yardım eder ve $B(r,s) \in B(\gamma)$ olduğunu kanıtlar.

Teorem 6.1. $B(r,s):\gamma \to \gamma$ operatörü $\|B(r,s)\|_{(\gamma,\gamma)} \leq |r| + |s|$ normu ile sınırlı ve lineerdir.

İspat: $B(r,s)$ lineer olduğunu göstermek kolaydır.

$$\|B(r,s)x\|_{(\gamma,\gamma)} = \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} sx_{k-1} + rx_k\right| \leq \sup_n |s| \left|\sum_{k=0}^{n} x_{k-1}\right| + \sup_n |r| \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| \leq (|s|+|r|)\|x\|_\gamma$$

dir. Dolayısıyla $\|B(r,s)\|_{(\gamma,\gamma)} \leq |r|+|s|$. Yani $B(r,s):\gamma \to \gamma$ sınırlı ve lineerdir.

Şimdi, $B(r,s)$ operatörünün γ uzayındaki spektrumu, nokta spektrumu, sürekli spektrumu, artık spektrumu incelenecektir.

Teorem 6.2. $\sigma(B(r,s),\gamma) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| \leq s\}$ dir.

İspat: $|\alpha - r| > |s|$ iken $(B(r,s)-\alpha I)^{-1} \in B(\gamma)$ olduğu gösterilmelidir ve sonra $|\alpha - r| \leq |s|$ için $(B(r,s)-\alpha I)$ operatörünün terslenebilir olmadığı gösterilmelidir.

$|\alpha - r| > |s|$ olsun. $(B(r,s)-\alpha I)$ alt üçgensel matris olduğundan $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}$ mevcuttur. $(B(r,s)-\alpha I)x = y$ denklemi çözülerek,

$$x_0 = \frac{1}{r-\alpha} y_0$$

$$x_1 = \frac{1}{r-\alpha} y_1 - \frac{s}{(r-\alpha)^2} y_0$$

$$x_2 = \frac{1}{r-\alpha} y_2 - \frac{s}{(r-\alpha)^2} y_1 + \frac{s^2}{(r-\alpha)^3} y_0$$

$\vdots$

$$x_n = \sum_{k\leq n} \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}} y_k$$

$\vdots$

elde edilir. $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}$ tarafından tanımlanan (a_{nk}) matrisi,

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{n-k+1}}, & n\leq k \text{ ise}\\ 0, & n>k \text{ ise}\end{cases}$$

şeklindedir.

$$\left\|(B(r,s)-\alpha I)^{-1}\right\|_{(\gamma,\gamma)}=\sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{r-k+1}}\right|=\frac{1}{r-\alpha}\sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n-k}=\frac{1}{r-\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n}<\infty$$

elde edilir. Bu yüzden $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}\in B(\gamma)$ dır.

$|\alpha-r|\leq|s|$ ve $\alpha\neq r$ olsun. Dolayısıyla

$$\left\|(B(r,s)-\alpha I)^{-1}\right\|_{(\gamma,\gamma)}=\sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-s)^{n-k}}{(r-\alpha)^{r-k+1}}\right|=\frac{1}{r-\alpha}\sup_n\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n-k}=\frac{1}{r-\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{s}{r-\alpha}\right|^{n}=\infty$$

dır. Bu yüzden $(B(r,s)-\alpha I)^{-1}\notin B(\gamma)$ dır.

Şimdi $|\alpha-r|\leq|s|$ ve $\alpha=r$ olsun. Bu durumda $(B(r,s)-\alpha I)$ matrisi,

$$B(s)=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots\\ s&0&0&\cdots\\ 0&s&0&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

şeklindedir. $(B(r,s)-\alpha I)x=\theta$ olduğundan $x=\theta$ elde ederiz. Dolayısıyla $B(s)$ matrisi birebirdir.

$B(s)^{*}x=\theta$ iken $x\neq\theta$ olduğundan $B(s)$ yoğun bir görüntüye sahip değildir. Ayrıca $B(s)$ matrisi $|\alpha-r|\leq|s|$ için terslenebilir değildir. Bu, ispatı tamamlar.

Teorem 6.3. $\sigma_p(B(r,s),\gamma)=\varnothing$

İspat: $x\neq\theta$ ve $x\in\gamma$ için $B(r,s)x=\alpha x$ olsun.

$$
\begin{aligned}
& rx_0=\alpha x_0 \\
& sx_0+rx_1=\alpha x_1 \\
& \vdots \\
& sx_k+rx_{k+1}=\alpha x_{k+1} \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

$\alpha\neq r$ ise $x_0=0$ dır. Dolayısıyla $x=\theta$ olur. Bu da $x\neq\theta$ olmasıyla çelişir. $\alpha=r$ dir.

Eğer x_i, $x=(x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi ise $sx_i+rx_{i+1}=\alpha x_{i+1}$ eşitliğinden $s\neq 0$ olduğundan $x=\theta$ dir. Bu da $x\neq\theta$ olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla $\sigma_p(B(r,s),\gamma)=\varnothing$ dir.

Teorem 6.4. $\sigma_p\left(B(r,s)^{*},\gamma^{*}\right)=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|<|s|\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $x\neq\theta$, $x\in\gamma^{*}\cong l_1$ için $B(r,s)^{*}x=\alpha x$ olsun.

$$B(r,s)^* = \begin{bmatrix} r & s & 0 & \cdots \\ 0 & r & s & \cdots \\ 0 & 0 & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} &rx_0 + sx_1 = \alpha x_0 \\ &rx_1 + sx_2 = \alpha x_1 \\ &\vdots \\ &rx_k + sx_{k+1} = \alpha x_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülerek $x_n = \left(\dfrac{\alpha - r}{s}\right)^n x_0 \ ,(n \in \mathbb{N})$ bulunur. Dolayısıyla $x = (x_n) \in \gamma^*$ olması için gerek ve yeter koşul $|\alpha - r| < |s|$ dir. İspat tamamlanır.

Teorem 6.5. $\sigma_r\left(B(r,s),\gamma\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$ dir.

İspat: Teorem 6.4. den dolayı $|\alpha - r| < |s|$ için $\left(B(r,s)^* - \alpha I\right)$ birebir değildir. Teorem 2.14. den dolayı $\left(B(r,s) - \alpha I\right)$ operatörü γ uzayında yoğun bir görüntüye sahip değildir. $\alpha \neq r$ için $\left(B(r,s) - \alpha I\right)$ alt üçgensel matris olduğundan dolayı terse sahiptir. Dolayısıyla

$$\sigma_r\left(B(r,s),\gamma\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| < |s|\}$$

dir.

Teorem 6.6. $\sigma_c\left(B(r,s),\gamma\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - r| = |s|\}$ dır.

İspat: $\sigma(X,T) = \sigma_p(X,T) \cup \sigma_r(X,T) \cup \sigma_c(X,T)$ olduğundan dolayı

$$\sigma_c\left(B(r,s),\gamma\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:|\alpha-r|=|s|\right\}$$

elde edilir.

BÖLÜM 7. $B(r,s,t)$ MATRİSİNİN YAKINSAK SERİ TEŞKİL EDEN γ DİZİ UZAYI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde $B(r,s,t)$ operatörünün γ uzayındaki spektrumu, ince spektrumu, nokta spektrumu, sürekli spektrumu, artık spektrumu, yaklaşık (approximate) nokta spektrumu, hatalı (defect) spektrumu, sıkıştırma (compression) spektrumu incelenmektedir.

γ uzayı, $\gamma = \left\{ x_k \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c \right\}$ şeklinde tanımlanan yakınsak seri teşkil eden dizi uzayıdır.

Eğer $T : \gamma \to \gamma$ sınırlı lineer operatörünün matris temsili A ise $T^* : \gamma^* \to \gamma^*$ adjoint operatörü A matrisinin transpozu ile tanımlanır. Burada γ nın dual uzayı γ^* ın l_1 e izomorfik olarak izomorf olduğuna dikkat edilmelidir.

$B(r,s,t)$ operatörünün matris gösterimi, r, s, t kompleks parametre ve $s \neq 0$, $t \neq 0$ olmak üzere,

$$B(r,s,t) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ t & s & r & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & t & s & r & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & t & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir.

7.1. $B(r,s,t)$ Matrsinin γ Dizi Uzayı Üzerindeki Spektrumu

Teorem 7.1.1. $B(r,s,t):\gamma\to\gamma$ sınırlı lineer operatördür ve

$\|B(r,s,t)\|_{(\gamma,\gamma)}\leq|r|+|s|+|t|$ dir.

İspat: Teorem 6.1. deki gibi yapılır.

Teorem 7.1.2. $\sqrt{s^2}=-s$ ve $L_1=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\dfrac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right|\leq 1\right\}$ şartları altında

$\sigma(B(r,s,t),\gamma)=L_1$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı için ilk önce $\alpha\notin L_1$ için $(B(r,s,t)-\alpha I)^{-1}$ mevcut olduğu ve $(B(r,s,t)-\alpha I)^{-1}\in B(\gamma)$ olduğu gösterilecektir. Daha sonra $\alpha\in L_1$ için $(B(r,s,t)-\alpha I)^{-1}$ mevcut olmadığı gösterilecektir.

Kabul edelim ki $\alpha\notin L_1$ olsun. Bu yüzden $\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\dfrac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right|>1\right\}$ olup

$\alpha\neq r$ dir. $\alpha\neq r$ olduğu için $B(r,s,t)-\alpha I$ üçgenseldir ve dolayısıyla $(B(r,s,t)-\alpha I)^{-1}$ mevcuttur.

$[B(r,s,t)-\alpha I]x=y$ eşitliğini açıldığında,

$$(r-\alpha)x_0=y_0$$

$$sx_0+(r-\alpha)x_1=y_1$$

$$tx_o+sx_1+(r-\alpha)x_2=y_2$$

$$\vdots$$

elde edilir. Buradan da

$$x_0 = \frac{y_0}{r-\alpha},$$
$$x_1 = \frac{1}{r-\alpha} y_1 + \frac{-s}{(r-\alpha)^2} y_o,$$
$$x_2 = \frac{1}{r-\alpha} y_2 + \frac{-s}{(r-\alpha)^2} y_1 + \frac{s^2-(r-\alpha)t}{(r-\alpha)^3} y_0,$$
$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir.

$a_1 = \dfrac{1}{r-\alpha}$, $a_2 = \dfrac{-s}{(r-\alpha)^2}, \ldots, a_n = \dfrac{-\left(sa_{n-1}+ta_{n-2}\right)}{r-\alpha}$, $(n \geq 3)$ olsun. Dolayısıyla,

$$(B(r,s,t)-\alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olur.

$a_n = x^n$ diyelim. $x^n = \dfrac{-\left(sx^{n-1}+tx^{n-2}\right)}{r-\alpha}$ olur. $n=2$ için $x^2\left(r-\alpha\right)+sx+t=0$ dır. Bu denklem çözülürse, $\Delta = s^2-4t\left(r-\alpha\right)$ ve $x_1 = \dfrac{-s+\sqrt{\Delta}}{2\left(r-\alpha\right)}$, $x_2 = \dfrac{-s-\sqrt{\Delta}}{2\left(r-\alpha\right)}$ olmak üzere genel terim $a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n$ olur. $n=1$ ve $n=2$ denklemde yerine koyularak çözülürse,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{s^2-4t\left(r-\alpha\right)}} \left\{ \left[\frac{-s+\sqrt{s^2-4t\left(r-\alpha\right)}}{2\left(r-\alpha\right)} \right]^n - \left[\frac{-s-\sqrt{s^2-4t\left(r-\alpha\right)}}{2\left(r-\alpha\right)} \right]^n \right\} \quad \left(n \geq 1\right)$$

elde edilir. $u_1 = \dfrac{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}{2(r-\alpha)}$ ve $u_2 = \dfrac{-s-\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}{2(r-\alpha)}$ alınırsa

$a_n = \dfrac{(u_1)^n-(u_2)^n}{\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}$ olur.

Kabul edelim ki $s^2 \neq 4t(r-\alpha)$ olsun. $\alpha \notin L_1$ olduğu için $|u_1|<1$ dir. Bu yüzden $|u_2|<|u_1|$ dir. Yani $|u_2|<1$ bulunur.

$|u_1|<1$ ve $|u_2|<1$ olduğundan,

$$\left\|\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)^{-1}\right\|_{(\gamma,\gamma)} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq \frac{1}{\left|\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}\right|}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(|u_1|^k+|u_2|^k\right)\right)<\infty$$

elde edilir. O halde $\sigma\left(B(r,s,t),\gamma\right)\subseteq L_1$ dir.

$\alpha \in L_1$ ve $\alpha = r$ olsun. Bu yüzden,

$$\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ t & s & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & t & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir. $\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)$ yoğun bir görüntüye sahip olmadığından terslenebilir değildir.

Eğer $s^2=4t(r-\alpha)$ ise her $n\geq 1$ için $a_n=\left(\dfrac{2n}{-s}\right)\left(\dfrac{-s}{2(r-\alpha)}\right)^n$ dir. $\left|\dfrac{-s}{2(r-\alpha)}\right|\geq 1$ olduğundan $\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)^{-1}\notin B(\gamma)$ dir.

Kabul edelim ki $\alpha \neq r$ ve $s^2 \neq 4t(r-\alpha)$ olsun. $\alpha \neq r$ olduğu için $\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)^{-1}$ mevcut fakat $s^2 \neq 4t(r-\alpha)$ olduğu için $\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)^{-1} \notin B(\gamma)$ dir. Dolayısıyla $S_1 \subseteq \sigma(B(r,s,t),\gamma)$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.1.3. $\sigma_p(B(r,s,t),\gamma)=\varnothing$ dir.

İspat: $x \neq \theta$ ve $x \in \gamma$ için $B(r,s,t)x=\alpha x$ olsun. Bu eşitlik bize

$$
\begin{aligned}
&rx_0=\alpha x_0\\
&sx_0+rx_1=\alpha x_1\\
&tx_0+sx_1+rx_2=\alpha x_2\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

verir.

Eğer $x=(x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi x_{n_0} ise $\alpha=r$ dır ve $tx_{n_0-1}+sx_{n_0}+rx_{n_0+1}=\alpha x_{n_0+1}$ eşitliğinden $x_{n_0}=0$ sonucuna varılır ki bu $x_{n_0}\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $\sigma_p(B(r,s,t),\gamma)=\varnothing$ dir.

Teorem 7.1.4. $L_2=\left\{\alpha \in \mathbb{C}:\left|\dfrac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right|<1\right\}$ olmak üzere $\sigma_p\left(B(r,s,t)^*,\gamma^*\right)=S_2$ dir.

İspat: $x\neq\theta$, $x\in\gamma^*\cong l_1$ için $B(r,s,t)^*x=\alpha x$ olsun. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&rx_0+sx_1+tx_2=\alpha x_0\\
&rx_1+sx_2+tx_3=\alpha x_1\\
&rx_2+sx_3+tx_4=\alpha x_2\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

denklem sistemine ulaşılır.

Eğer $\alpha = r$ ise $x_0 \neq 0$ olmak üzere $x = (x_0, 0, 0, 0, \dots)$, $\alpha = r$ ye karşılık gelen öz vektördür.

Kabul edelim ki $\alpha \neq r$ olsun. $P_n = a_n (r-\alpha)^n$ olmak üzere

$$x_n = \frac{P_{n-1}}{t^{n-1}}(\alpha - r)x_0 + \frac{P_n}{t^{n-1}}x_1 \; ; \; (n \geq 2) \tag{7.1}$$

dir.

$\alpha \in L_2$ olsun. Dolayısıyla $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}$ olarak seçebiliriz. Bu seçimle birlikte $x_2 = (x_1)^2$, $x_3 = (x_1)^3, \dots, x_n = (x_1)^n, \dots$ $(n \geq 2)$ dir. O halde, $\left| \dfrac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}} \right| < 1$ olduğu için $x \in \gamma^*$ dır. Yani,

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \left| \frac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}} \right| < 1 \right\} \subseteq \sigma_p(B(r,s,t)^*, \gamma^*) \text{ dır.}$$

Şimdi $\alpha \notin L_2$ olsun. $|u_1| \leq 1$ ve $\alpha \neq r$ olduğu görülür. (7.1) den

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{r-\alpha}{t}\right)\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\left(\frac{-x_0 + \dfrac{a_{n+1}}{a_n}x_1}{-x_0 + \dfrac{a_n}{a_{n-1}}x_1}\right) \text{ dir.}$$

Durum 1. $|u_2| = |u_1| < 1$ olsun.

Bu durumda $s^2 = 4t(r-\alpha)$ olur. Bu yüzden $a_n = \left(\dfrac{2n}{-s}\right)\left(\dfrac{-s}{2(r-\alpha)}\right)^n$ dir. Dolayısıyla $(x_n) \notin l_1$ dır. Çünkü $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = u_2 = u_1$ ve $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \dfrac{1}{|u_2|} > 1$ dir.

Durum 2. $|u_2| = |u_1| = 1$ olsun.

Burada $s^2 = 4t(r-\alpha)$ dir. Kabul edelim ki $x \neq \theta$ ve $x \in \gamma^*$ için $\alpha \in \sigma_p(B(r,s,t)^*, \gamma^*)$ olsun. Yine (7.1) den $x_n = \left(\frac{-s}{2t}\right)^{n-1}\left((1-n)\left(\frac{-s}{2t}\right)x_0 + x_1\right)$ elde edilir. $\lim_{n\to\infty}|x_n| = 0$ olduğu için $x = \theta$ dır. Fakat bu $x \neq \theta$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\alpha \notin \sigma_p(B(r,s,t)^*, \gamma^*)$ dır.

Durum 3. $|u_2| < |u_1| \leq 1$ olsun.

Bu durumda $s^2 \neq 4t(r-\alpha)$ dır. $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}$ olduğu için $-x_0 + u_1 x_1 = 0$ dir. Yani, $x_n = \dfrac{1}{u_1^{\,n}} x_0$. dir. $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \dfrac{1}{|u_2|} > 1$ olduğu için $(x_n) \notin l_1$ dir.

O halde, durum 1, durum 2 ve durum 3 den

$$\sigma_p(B(r,s,t)^*, \gamma^*) \subseteq \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right| < 1\right\}$$ elde edilir.

Teorem 7.1.5. $\sigma_r\left(B(r,s,t), \gamma\right) = L_2$ dir.

İspat: Teorem 7.1.4. den dolayı $\alpha \in L_2$ için $B(r,s,t)^* - \alpha I$ birebir değildir. Bu yüzden, Teorem 2.14. e göre $\alpha \in L_2$ için $B(r,s,t) - \alpha I$ operatörü γ da yoğun bir görüntüye sahip değildir.

Ayrıca $\left(B(r,s,t) - \alpha I\right)^{-1}$ mevcuttur.

Teorem 7.1.6. $\sigma_c\left(B(r,s,t), \gamma\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right| = 1\right\}$ dır.

İspat: (2.2) den ispat açıktır.

Teorem 7.1.7. $\alpha = r$ ve $|t| < |s|$ olsun. O halde $\alpha \in C_1\sigma\left(B(r,s,t),\gamma\right)$ dir.

İspat: Eğer $\alpha = r$ ise $\alpha \in \sigma_r\left(B(r,s,t),\gamma\right)$ olup $B(r,s,t)-\alpha I$ ya C_1 ya da C_2 aittir. $\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)^{-1}$ nin matris gösterimi,

$$\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{-t}{s^2} & \frac{1}{s} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{(-t)^2}{s^3} & \frac{-t}{s^2} & \frac{1}{s} & \cdots \\ 0 & \frac{(-t)^3}{s^4} & \frac{(-t)^2}{s^3} & \frac{-t}{s^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $|t| < |s|$ için $\left(B(r,s,t)-\alpha I\right)^{-1} \in B(\gamma)$ dır. Yani, $|t| < |s|$ için $\alpha \in C_1\sigma\left(B(r,s,t),\gamma\right)$ dır.

Teorem 7.1.8. Eğer $\alpha = r$ ve $|t| \geq |s|$ ise $\alpha \in C_2\sigma\left(B(r,s,t),\gamma\right)$ dır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 7.1.7. deki gibidir.

7.2. $B(r,s,t)$ Matrsinin γ Dizi Uzayı Üzerindeki Yaklaşık (Approximate) Nokta Spektrumu, Sıkıştırma (Compression) Spektrumu, Hatalı (Defect) Spektrumu

Şimdi verilecek olan teoremlerde, γ uzayındaki $B(r,s,t)$ operatörünün yaklaşık (approximate) nokta spektrumunu, hatalı (defect) spektrumunu, sıkıştırma (compression) spektrumunu incelenmektedir.

Teorem 7.2.1. $\sigma_{ap}(B(r,s,t),\gamma)=\begin{cases} S_1/\{r\}, & |t|<|s| \\ S_1, & |t|\geq|s| \end{cases}$ dır.

İspat: Tablo 2.2. den $\sigma_{ap}\left(B(r,s,t),\gamma\right)=\sigma\left(B(rs,t),\gamma\right)/C_1\sigma\left(B(r,s,t),\gamma\right)$ dır. Dolayısıyla

$$\sigma_{ap}(B(r,s,t),\gamma)=\begin{cases} S_1/\{r\}, & |t|<|s| \\ S_1, & |t|\geq|s| \end{cases}$$

dır.

Teorem 7.2.2. $\sigma_{\delta}(B(r,s,t),\gamma)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right|\leq 1\right\}$ dır.

İspat: $\sigma_{\delta}\left(B(r,s,t),\gamma\right)=\sigma\left(B(rs,t),\gamma\right)/A_3\sigma\left(B(r,s,t),\gamma\right)$ ve Teorem 7.1.2. ve 7.1.3. den dolayı $\sigma_{\delta}(B(r,s,t),\gamma)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right|\leq 1\right\}$ dır.

Teorem 7.2.3. $\sigma_{co}(B(r,s,t),\gamma)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right|<1\right\}$ dır

İspat: Teorem 7.1.4. ve Önerme 2.28.-(e) den

$$\sigma_{co}(B(r,s,t),\gamma)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}:\left|\frac{2(r-\alpha)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}}\right|<1\right\}$$

dir.

KAYNAKLAR

[1] GONZALEZ, M., The fine spectrum of the Cesaro operator in $l_p, (1 < p < \infty)$, Arch. Math, 44, 355-358, 1985.

[2] READE, J. B., On the spectrum of the Cesaro operator, Bull. London Math. Soc. 17, 263-267, 1985.

[3] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the fine spectrum of the difference operatör Δ on c_0 and c, Inform. Sci., 168, 217-224, 2004.

[4] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c, Int. J. Math. Math. Sci., 18, 3005-3013, 2005.

[5] KAYADUMAN, K., FURKAN, H., The fine spectra of difference operator Δ over the sequence spaces l_1 and bv, Int. Math. Forum, 24, 1153-1160, 2006.

[6] FURKAN, H., BİLGİÇ, H., KAYADUMAN, K., On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces l_1 and bv, Hokkaido Math. J, 35, 897-908, 2006.

[7] FURKAN, H., BİLGİÇ, H., ALTAY, B., On the fine spectrum of the operator B(r,s,t) over c_0 and c, Comput. Math. Appl., 53, 989-998, 2007.

[8] KARAKAYA, V., ALTUN, M., Fine spectra of upper triangular double-band matrices, J. Comput. Appl. Math., 234, 1387-1394, 2010.

[9] SRIVASTAVA, P.D., KUMAR, S., Fine spectrum of generalized difference operator Δ_{uv} on sequence space l_1, Appl. Math. Comput., 21, 6407-6414, 2012.

[10] FATHI, J., LASHKARIPOUR, R., On the fine spectrum of generalized upper double-band matrices Δ^{uv} over the sequence space l_1, Mat. Vesnik, 65 (1), 64-73, 2013.

[11] PANIGRAHI, B. L., SRIVASTAVA, P. D., Spectrum and fine spectrum of generalized second order forward difference operator Δ^2_{UVW} on sequence space l_1, Demonstratio Math., 45 (3), 593-609, 2012.

[12] DUTTA, A. J., TRIPATHY, B. C., Fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the class of convergent series, International Journal of Analysis, 1-4, 2013.

[13] MADDOX, I. J., Elements of functional analysis. Cambridge University Pres, 1970.

[14] GOLDBERG, S., Unbounded Linear Operator, Dover publications, Inc. New York, 1985.

[15] TAYLOR, A. E., Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York, 1958.

[16] APPELL, J., PASCALE, E., VINGOLI, A., Nonlinear Spectral Theory, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 10, Walter de Gruyter, Berlin, Germany, 2004.

[17] KARAISA, A., Fine spectrum of upper triangular triple-band matrices over the sequence space l_p, $(0<p<\infty)$, Abstr. Appl. Anal., vol. 2013, Article ID 34282, 10 pages, 2013.

[18] YILMAZ, O., ABAY, M., ALTUNDAĞ, S., The fine spectrum of upper triangular double-band matrices $U(r,s)$ over the class of convergent series, İnternational Mathematical Forum, 9 (17), 773-784, 2014.

[19] KIZMAZ, H., Fonksiyonel Analize Giriş, Karadeniz Technical University Pres, 1993.

[20] BAYRAKTAR, M., Fonksiyonel Analiz, Atatürk University Pres, 1994.

[21] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc, New York, 1978.

[22] ŞUHUBİ, E. S., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Pres, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Merve Abay, 19.06.1990 da Sakarya da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya da tamamladı. 2008 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik bölümünü 2012 yılında bitirdi. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek lisans eğitimine başladı. Halen aynı üniversitede Yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.