T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER KARMA MODEL ALTINDA BLUE VE BLUP

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melike YİĞİT

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER**

Haziran 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER KARMA MODEL ALTINDA BLUE VE BLUP

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melike YİĞİT

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 26/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Yrd. Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Halim ÖZDEMİR	**Nesrin GÜLER**	**Güldem ÜRER**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Çalışmamın tüm aşamalarında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardımlarını benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e, maddi ve manevi destekleriyle daima yanımda olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{n\times 1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$A,B,C,...$	: Matrisler
$(A:B)$	: Parçalanmış matris
(a_{ij})	: Elemanları a_{ij} olan matris
$x,y,z,...$	: Vektörler; $x=(x_i)\in\mathbb{R}^{n\times 1}$
I	: Birim matris
A'	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^{-}	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A^{+}	: A matrisinin Moore-Penrose tersi
$A^{\perp}$	: A matrisinin ortogonal (dik) tümleyeni
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$C(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$C(A)^{\perp}$	: $C(A)$ sütun uzayının dik tümleyeni
$N(A)$	: A matrisinin sıfır uzayı
P_A	: $C(A)$ sütun uzayının dik izdüşüm matrisi
$U\oplus V$	: U ve V vektör uzaylarının direkt toplamı
$boy(U)$	: U vektör uzayının boyutu
max	: Maksimum
min	: Minimum
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü

ÖZET

Anahtar kelimeler: Lineer Model, Lineer Karma Model, *BLUE* , *BLUP*, Sabit Etki, Rasgele Etki.

Çalışmada, sabit etkileri içeren lineer modeller altında parametrelerin tahmini ve hem sabit hem rasgele etkileri içeren lineer karma modeller altında sabit ve rasgele etkilerin tahminleri ele alınmıştır. Özellikle sabit etkili lineer modele bazı kısıtların eklenmesiyle elde edilen (artırılmış) model vasıtasıyla En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici (Best Linear Unbiased Estimator- *BLUE*) ve En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin Edicinin (Best Linear Unbiased Predictor- *BLUP* 'ın) tüm temsillerinin elde edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca bu yöntem kullanılarak, farklı kovaryans matrislerine sahip iki lineer karma model altında *BLUE* ve *BLUP* ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

İlk bölümde, lineer modeller ve lineer karma modeller genel olarak tanıtılmış ve bu modellerle ilgili kısa bir literatür bilgisi verilerek uygulama alanlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın bütününde kullanılan bazı temel kavram ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, lineer modeller altında sabit etkilerin tahmini ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Benzer şekilde lineer karma modeller altında rasgele etkilerin tahmini ile ilgili bazı sonuçlar da dördüncü bölümde elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise, farklı kovaryans matrislerine sahip iki lineer karma model ele alınarak, modellerin biri altında sabit etkiler için *BLUE* ve rasgele etkiler için *BLUP*' ın diğer model altında da *BLUE* ve *BLUP* kalmaya devam etmesi için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Son bölümde, sonuç ve öneriler sunulmuştur.

BLUE AND BLUP UNDER LINEAR MIXED MODEL

SUMMARY

Key Words: Linear Model, Linear Mixed Model, *BLUE* , *BLUP* , Fixed Effect, Random Effect.

The estimation of parameters under linear models including fixed effects and the estimations of fixed and random effects under linear mixed models including both fixed and random effects have been considered in the study. Particularly, it has been shown all representations of the Best Linear Unbiased Estimator (*BLUE*) and the Best Linear Unbiased Predictor (*BLUP*) can be obtained through the (augmented) model which obtained by adding some restrictions to fixed effect linear model. Furthermore, some results related to the *BLUE* and the *BLUP* have been given under two linear mixed models having different covariance matrices by using this method.

In the first chapter, linear models and linear mixed models have been introduced in general and the fields of application have been mentioned by giving short literature information related to these models. In the second chapter, some fundamental concepts and theorems which will be used in the whole of the work have been given. In chapter three, some results have been obtained related to the estimation of fixed effects under linear models. Similarly, some results have been obtained related to the estimation of random effects under linear mixed models in the fourth chapter. In chapter five, it has been given necessary and sufficient conditions that the *BLUE* for fixed effects and the *BLUP* for random effects under one of these models continue to be the *BLUE* and the *BLUP* also under the other model by considering two linear mixed models having different covariance matrices. In the last chapter, conclusion and proposals have been presented.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin ilgili olduğu alanın kavram ve kanunlarıyla ifade edilmesine model denir. Bu problemlerin çözümü için en çok kullanılan modeller matematiksel ve istatistiksel modellerdir. Matematiksel model bir sistemin matematik diliyle ifade edilmesidir. İstatistiksel model ise, gözlemler veya deneylerle elde edilen verilerin tanımlanması, veri yapısının belirlenmesi ve bir veya birden fazla değişkenin başka değişkenlerle ilişkisini matematiksel denklemler vasıtasıyla belirleyen modeldir.

Genel olarak bir lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{1.1}$$

biçiminde ifade edilir. Sabit etkileri içeren lineer modeller, değişkenler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarma ve geleceğe yönelik tahmin yapma açısından önemli yere sahiptir. Bu modeller ekonomi, sosyoloji ve sağlık gibi birçok alanda uygulanmaktadır. Olayların lineer model olarak modellenmesi sırasında y, X ve β değişik şekillerde anlamlandırılmaktadır. Örneğin, bazı modellerde y bir ekonomi değişkeni, bazılarında ise bir tarım ürünün verimi ile ilgili gözlem vektörü olabilir.

Lineer karma model ise genel olarak

$$y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada β parametre vektörünün bileşenleri sabit etkileri, γ vektörünün bileşenleri ise rasgele etkileri ifade etmektedir. Hem sabit hem rasgele etkileri içeren lineer karma modeller, modelleme açısından kolaylık sağlamasına rağmen model üzerindeki varsayımların çok olduğu durumlarda bazı dezavantajlara sahiptir. Ancak, bu modeller özellikle genetik ile ilgili uygulamalarda çok sık kullanılmaktadır.

Karma model tanımı ilk olarak Eisenhart [1] tarafından verilmiştir. Eisenhart yapmış olduğu çalışmada sabit ve rasgele etkili modelleri sırasıyla Model I ve Model II olarak sınıflandırırken hem sabit hem de rasgele etkileri içeren karma modelleri Model III olarak tanımlamıştır. Lineer karma modellerle ilgili yapılan ilk çalışmalar 20. yüzyılın ortalarında hayvan ıslahı ve genetik alanındadır. Bu çalışmaların başlıcaları Henderson [2,3] tarafından yapılmıştır. Henderson tarafından elde edilen sonuçlar farklı yaklaşımlar kullanılarak Harville [4,5] tarafından genelleştirilmiştir. Lineer karma modellerde sabit etkilerin tahmini problemi ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan başlıcaları; Rao [6], Mitra ve Moore [7], Puntanen ve Styan [8], Zyskind [9] ve Kala [10] tarafından yapılan çalışmalardır. Rasgele etkilerin tahmini problemi ise literatürde daha az yere sahiptir ve son yıllarda özellikle Haslett ve Puntanen [11,12] ve Liu ile çalışma arkadaşları [13] tarafından ele alınmıştır. Lineer karma modeller genetik alanında örneğin, yetiştirilecek bir sonraki hayvan ırkının en verimli dölleri verecek şekilde üretilebilmesi amacıyla, genetik değerlerinin tahminleri en iyi olacak şekilde elde edilen ebeveynlerin seçimi için kullanılmaktadır. Bir hayvanın et, süt ve yumurta verimi gibi performansları hem hayvanın genetik yapısı hem de çevre şartlarının etkisiyle oluşur. Rasgele etkilerin tahmini ile farklı yıl, sürü ve mevsim arasındaki sabit faktörlere ait etkiler eş zamanlı değerlendirilip genetik ilişki sağlanarak genetik ve çevresel etki birbirinden ayrılır [14,15].

Lineer model ve lineer karma modelleri birbirinden ayıran en önemli özellik ise araştırmacının model kurma amacının farklılığıdır. Genel lineer modelin amacı; y bağımlı değişken vektörünün ortalama vektör yapısını β parametre vektörünü kullanarak modellemek iken, lineer karma modelin amacı; y bağımlı değişken vektörünün varyans-kovaryans matris yapısını γ rasgele etki terimleri vektörüne bağlı olarak modelleyebilmektir [14].

Bu çalışmada, istatistiksel analizlerde en sık kullanılan sabit etkili lineer modeller ile hem rasgele hem de sabit etkileri içeren lineer karma modeller ele alınarak sabit ve rasgele etkilerin tahminleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. Özel olarak farklı kovaryans matrislerine sahip iki lineer ve lineer karma model ele alınarak, öncelikle iki lineer modelde, modellerin biri altında sabit etkiler için en iyi lineer yansız tahmin edici $(BLUE)$ ifadesinin diğer model altında da $BLUE$ kalmaya devam etmesi ve benzer biçimde iki lineer karma modelde modellerin biri altında rasgele etkiler için en iyi lineer yansız ön tahmin edici $(BLUP)$ ifadesinin diğer model altında da $BLUP$ kalmaya devam etmesi ile ilgili gerek ve yeter şartlar elde edilmektedir. Daha sonra iki lineer karma model altında $BLUE$ ve $BLUP$ ifadeleri beraber ele alınarak modellerin biri altında sabit etkiler için $BLUE$ ve rasgele etkiler için $BLUP$'ın diğer model altında da sabit etkiler için $BLUE$ ve rasgele etkiler için $BLUP$ kalmaya devam etmesi ile ilgili gerek ve yeter şartlar verilmektedir.

BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilecektir.

2.1. Bir Matrisin Sütun Uzayı, Sıfır Uzayı ve Rankı

Tanım 2.1.1. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri için $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ skalerleri bulunamıyorsa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsız, aksi takdirde lineer bağımlıdır denir [16,17].

Tanım 2.1.2. A matrisi $m\times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektörü için $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösteririr. A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen tüm vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $C(A)$ ile gösterilir. $C(A)$, A matrisinin sütunları tarafından üretilir ve

$$C(A) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{m\times 1} : y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \right\}$$

şeklinde ifade edilir [17,18].

Tanım 2.1.3. A matrisinin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$ in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $C(A')$ olarak gösterilir [17,18].

Tanım 2.1.4. A matrisinin sıfır uzayı,

$$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^{n\times 1}: Ax=0\}\subseteq\mathbb{R}^{n\times 1}$$

şeklinde tanımlanır [19].

Teorem 2.1.5. A matrisi $m\times n$ boyutlu bir matris ve C matrisi, A matrisinin satır indirgenmiş eşolan biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C matrisinin satır uzayı aynıdır [17,18].

Tanım 2.1.6. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı, satır uzayının boyutuna ise A matrisinin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşolan biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir [17,18].

Teorem 2.1.7. A matrisi $m\times n$ boyutlu bir matris olsun. A matrisinin satır rankı, sütun rankı ve rankı eşittir [17].

Teorem 2.1.8. Uygun boyutlu A, B, K ve M matrisleri için aşağıdakiler doğrudur:

a) $C(A:B)=C(A)+C(B)$,

b) $C(AB)\subseteq C(A)$,

c) $C(AA')=C(A)$,

d) $C(K)\subseteq C(M)\Leftrightarrow$ Uygun boyutlu herhangi bir N matrisi için K matrisi MN biçimindedir,

e) $boy(C(A))=r(A)$,

f) Eğer $C(A)\subseteq C(B)$ ve $r(A)=r(B)$ ise $C(A)=C(B)$ dir. Özellikle, $C(I_n)=\mathbb{R}^{n\times 1}$ dir,

g) $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ için $r(A)\leq\min\{m,n\}$,

h) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$,

i) $r(A) = r(A') = r(AA') = r(A'A)$ [16, 18, 20].

2.2. Tersler ve Genelleştirilmiş Tersler

Eğer $AB = I$ ise, B matrisine A matrisinin sağ tersi denir ve A^{-R} ile gösterilir. A matrisine ise, B matrisinin sol tersi denir ve B^{-L} ile gösterilir. A matrisinin sağ tersi A tam satır ranklı olduğunda, B matrisinin sol tersi ise B tam sütun ranklı olduğunda vardır. Sağ ters veya sol ters tek olmayabilir. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ üçgensel bir matris olmak üzere, rank şartları gösterir ki, $m > n$ olduğunda sağ ters ve $m < n$ olduğunda sol ters olmayabilir. Aslında her iki tersin olması için gerek ve yeter şart A matrisinin kare matris ve tam ranklı olmasıdır. Bu durumda, A^{-L} ve A^{-R} tersleri tek ve birbirine eşittir. Bu özel matrise, nonsingüler A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. O halde, bir A matrisinin tersinin olmasının gerek ve yeter şartı A matrisinin nonsingüler olmasıdır. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dır. Eğer A ve B matrislerinin her ikisi de nonsingüler ve aynı boyutlu ise, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

Herhangi bir A matrisi için $ABA = A$ ise, B matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A^{-} ile gösterilir. Eğer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ise, $A^{-} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dir. Her matris en az bir genelleştirilmiş terse sahiptir. Her simetrik matrisin ise en az bir simetrik genelleştirilmiş tersi vardır. Genel olarak, A^{-} tek değildir. A^{-} matrisinin tek olması için gerek ve yeter şart A matrisinin nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $A^{-} = A^{-1}$ dir.

Herhangi bir A matrisi için,

a) $ABA = A$

b) $BAB = B$

c) $AB = (AB)'$

d) $BA = (BA)'$

koşulları sağlayan B matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi denir ve A^+ ile gösterilir. Bir matrisin Moore-Penrose tersi tektir ve A tersinir ise $A^+ = A^{-1}$ dir [18].

Tanım 2.2.1. Eğer $P^2 = P$ olacak şekilde bir P matrisi varsa, P matrisine idempotent matris denir [18].

Teorem 2.2.2. A , B ve K uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

a) $\left(A^+\right)^+ = A$ ve $\left(A'\right)^+ = \left(A^+\right)'$,

b) AA^+ ve A^+A idempotenttir,

c) $r(A) = r(A^+) = r(AA^+) = r(A^+A)$

d) $A'AA^+ = A' = A^+AA'$ ve $A'\left(A^+\right)'A^+ = A^+ = A^+\left(A^+\right)'A'$,

e) $A = 0 \Leftrightarrow A^+ = 0, AB = 0 \Leftrightarrow B^+A^+ = 0$ ve $A^+B = 0 \Leftrightarrow A'B = 0$,

f) $r(A) = r(A^-A) = r(AA^-) \le r(A^-)$,

g) BA^-K matrisinin, A matrisinin genelleştirilmiş tersinin seçimine göre değişmez olmasının gerek ve yeter şartı $C\left(B'\right) \subseteq C\left(A'\right)$ ve $C\left(K\right) \subseteq C\left(A\right)$ dır,

h) A^-A ve AA^- idempotenttir,

i) A matrisi simetrik ve idempotent ise $I - A$ matrisi de simetrik ve idempotenttir [16, 18, 19].

2.3. Vektör Uzayları, İzdüşüm Matrisi ve Ortogonal İzdüşümler

$S \in \mathbb{R}^{n\times1}$ olsun. Her $u, v \in S$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $au + bv \in S$ oluyorsa, S kümesi bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^{n\times1}$ vektör uzayının her alt vektör uzayı 0 vektörünü içerir. Eğer $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{n\times1}$ vektör uzayları için, $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ ise S_1 ve S_2 vektör uzaylarına (hemen hemen) ayrık vektör uzayları denir. $S_1 \cap S_2$ bir vektör uzayıdır, fakat $S_1 \cup S_2$ bir vektör uzayı olmak zorunda değildir. $S_1 \cup S_2$ kümesini içeren en küçük vektör uzayına iki uzayın toplamı denir ve $S_1 + S_2$ ile gösterilir. $S_1 + S_2$, $u \in S_1$ ve $v \in S_2$

olmak üzere, $u+v$ biçimindeki tüm vektörleri içerir. Aynı boyuttan u ve v vektörleri için, eğer $u'v=0$ ise, u vektörü, v vektörüne diktir denir. Eğer S_1 ve S_2 vektör uzayları için S_1 vektör uzayındaki her vektör S_2 vektör uzayındaki tüm vektörlere dik ise S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine diktir denir ve $S_1 \perp S_2$ ile gösterilir. Birbirine dik olan iki vektör uzayının toplamına bu vektör uzaylarının direkt toplamı denir ve bu durumda S_1+S_2 ile gösterilen toplam $S_1 \oplus S_2$ şeklinde ifade edilir. Eğer $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ ise S_1 ve S_2 alt uzaylarına birbirinin dik tümleyenleri denir ve $S_1 = S_2^{\perp}$ (veya $S_1^{\perp} = S_2$) şeklinde gösterilir. Açıkça bir S vektör uzayı için $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = S$ olur. $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ vektörlerinin kümesi aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa, S vektör uzayı için bir bazdır.

a) $u_i \in S, i = 1, 2, \ldots, k$.

b) $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ lineer bağımsızdır.

c) S vektör uzayının her elemanı $u_1, u_2, \ldots, u_k$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılır.

Her sıfırdan farklı sonlu boyutlu vektör uzayının bazı vardır, ancak bu baz tek olmayabilir. Fakat verilen herhangi bir sonlu vektör uzayının farklı bazlarındaki vektör sayısı aynıdır. Bu sayıya vektör uzayının boyutu denir ve S vektör uzayı için $boy(S)$ ile gösterilir. $n\times 1$ boyutlu vektörleri içeren herhangi bir S vektör uzayı için $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^{n\times 1}$ olur. Böylece, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü, $u \in S$ ve $v \in S^{\perp}$ olmak üzere, $y = u + v$ olarak tek türlü yazılabilir. Bu ifadeye, y vektörünün dik ayrışımı denir. Burada u vektörüne, S vektör uzayı üzerinde y vektörünün izdüşümü denir ve tek olarak belirlenir [18].

Tanım 2.3.1. S vektör uzayı olmak üzere her $v \in S$ için $Pv = v$ ve $Pv \in S$ ise P matrisine bir izdüşüm matrisi denir. Her izdüşüm matrisi bir idempotent matristir [18].

Tanım 2.3.2. P matrisi, S vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olmak üzere $I-P$ matrisi $S^{\perp}$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi ise, bu durumda P matrisine S vektör uzayının bir dik izdüşüm matrisi denir [18].

Teorem 2.3.3. Herhangi bir A matrisi için AA^{-} matrisi $C(A)$ için bir izdüşüm matrisidir. $A(A'A)^{-}A'$ matrisi ise $C(A)$ için bir dik izdüşüm matrisidir [18].

Teorem 2.3.4. $C(P_A)=C(A)$ ve $C(I-P_A)=C(A)^{\perp}$ dır [18].

Teorem 2.3.5. A ve B uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

a) $C(A:B)\subseteq C(A)\oplus C((I-P_A)B)$,

b) $P_{(A:B)}=P_A+P_{(I-P_A)B}$

dir [18].

Teorem 2.3.6. A ve B uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $C(A)\subseteq C(B)$ olsun. Bu durumda

$$P_A P_B = P_B P_A = P_A$$

dır [19].

Teorem 2.3.7. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için

a) $B'A=0 \Leftrightarrow C(B)\subseteq C(A)^{\perp}$,

b) $C(B)\subseteq C(A)\Leftrightarrow C(B)^{\perp}\subseteq C(A)^{\perp}$

dır [18].

2.4. Kuadratik Formlar ve Pozitif Tanımlı Matrisler

Tanım 2.4.1. $y=(y_i)\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik bir $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için,

$$Q(y)=y'Ay=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}y_i y_j a_{ij}$$

ifadesine, y_i elemanlarının bir kuadratik formu ve A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. $y'Ay$ kuadratik formu, simetrik bir A matrisi tarafından karakterize edilir ve bu matrise kuadratik formun matrisi denir. Böyle bir matris için aşağıdakiler söylenebilir:

a) Eğer $\forall y\neq 0$ için $y'Ay>0$ ise A pozitif tanımlıdır,

b) Eğer $\forall y\neq 0$ için $y'Ay<0$ ise A negatif tanımlıdır,

c) Eğer $\forall y$ için $y'Ay\geq 0$ ise A nonnegatif tanımlıdır [18,20].

Teorem 2.4.2. A nonnegatif tanımlı ve r ranklı bir matristir ancak ve ancak $A=RR'$ olacak şekilde r ranklı bir R matrisi vardır [19].

2.5. Löwner Sıralaması

Tanım 2.5.1. Eğer A ve B nonnegatif tanımlı matrisleri için $B-A$ nonnegatif tanımlı ise Löwner sıralamasına göre A, B den daha küçüktür denir. $A\leq_L B$ veya $B\geq_L A$ ile gösterilir. Eğer $B-A$ pozitif tanımlı ise, bu durumda A matrisine kesinlikle B matrisinden küçüktür denir. $A<_L B$ veya $B>_L A$ ile gösterilir [18].

2.6. Parçalanmış Matrisler

Tanım 2.6.1. Bir kümenin parçalanmasına benzer olarak bir matrisin parçalanması, orijinal matrisin her bir elemanının, parçalanışın yalnız ve yalnız bir alt matrisine düşecek şekilde karşılıklı ayrık alt matrislere ayrışmış halidir. Örneğin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi için

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ifadesi, A matrisinin bir parçalanışıdır. Burada $m_1 + m_2 = m$ ve $n_1 + n_2 = n$ olmak üzere $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}, A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}, A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ ve $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ dir. Yukarıda verilen matrisin transpozesi

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.6.2. A_{12} ve A_{21} matrisleri sıfır matris, A_{11} ve A_{22} matrisleri tersinir kare matrisler ise, A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Benzer olarak, eğer A_{12} ve A_{21} matrisleri sıfır matris ise A parçalanmış matrisinin genelleştirilmiş tersi ve Moore-Penrose tersi sırasıyla

$$A^{-} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-} \end{pmatrix} \text{ ve } A^{+} = \begin{pmatrix} A_{11}^{+} & 0 \\ 0 & A_{22}^{+} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada A_{ii}^{-} ve A_{ii}^{+}, $i = 1,2$, sırasıyla A_{ii} matrisinin genelleştirilmiş ve Moore-Penrose tersleridir [16,20].

Teorem 2.6.3. $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ reel simetrik matrisinde, A_{11} ve A_{22} nonsingüler ise

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

dir [21].

Teorem 2.6.4. $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ reel simetrik matrisi için

a) A matrisi pozitif tanımlıdır ancak ve ancak A_{11} ve $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ pozitif tanımlıdır,

b) A matrisi pozitif tanımlıdır ancak ve ancak A_{22} ve $A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ pozitif tanımlıdır [21].

2.7. Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 2.7.1. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{k\times 1}$ ve $C\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ bilinen matrisler olmak üzere, $AXB=C$ matris denklem sistemini sağlayan en az bir $X\in\mathbb{R}^{n\times k}$ matrisi varsa, sistem tutarlıdır denir. Aksi takdirde sistem tutarsızdır [20].

Teorem 2.7.2. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{k\times 1}$ ve $C\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ olsun. $AXB=C$ matris denklem sistemini sağlayan bir $X\in\mathbb{R}^{n\times k}$ matrisinin mevcut, yani sistemin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $AA^{-}CB^{-}B=C$ olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise herhangi bir Z matrisi için,

$$X=A^{-}CB^{-}+Z-A^{-}AZBB^{-}$$

ile verilen X matrisi $AXB=C$ matris denkleminin genel çözümüdür.

$AXB = C$ matris denkleminde X matrisi yerine $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü, $B = I$ ve C matrisi yerine $g \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ vektörü alınırsa, $Ax = g$ lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece Teorem 2.7.2' nin daha özel bir durumu olarak aşağıdaki teorem verilebilir [20].

Teorem 2.7.3. $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $AA^{-}g = g$ olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise, bu durumda herhangi bir $h \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü için $x = A^{-}g + \left(I - A^{-}A\right)h$ ile verilen x vektörü $Ax = g$ lineer denklem sisteminin genel çözümüdür [20].

Teorem 2.7.4. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için $Y(A:B) = (0:B)$ denkleminin $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ için bir çözüme sahip olmasının gerek ve yeter şartı $C(A) \cap C(B) = \{0\}$ olmasıdır ve eğer $C\left(A:B\right) = \mathbb{R}^{n\times n}$ ise çözüm tektir [22].

2.8. Karesel ve Lineer Formların Türevleri

Tanım 2.8.1. f, x vektörünün bir fonksiyonu olmak üzere, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ kısmi türevi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sütun vektörü aracılığıyla gösterilir, yani $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ şeklindedir. Benzer şekilde satır vektörü için kısmi türev $\dfrac{\partial f}{\partial x'} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)'$ şeklindedir [21].

Teorem 2.8.2. x, $a \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri ve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için

a) $\dfrac{\partial x'a}{\partial x} = \dfrac{\partial a'x}{\partial x} = a$,

b) $\dfrac{\partial x'Ax}{\partial x} = \left(A + A'\right)x$ dir. Eğer A matrisi simetrik ise $\dfrac{\partial x'Ax}{\partial x} = 2Ax$ dir [21].

2.9. Rasgele Vektörler ve Bazı İstatistiksel Kavramlar

Rasgele vektör, elemanları rasgele değişkenler olan bir vektör ve benzer şekilde rasgele matris ise, elemanları rasgele değişkenler olan matristir. Rasgele vektör ve matrislerle ilgili bazı temel kavram ve teoremler aşağıda verilmektedir. Bu tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için, örneğin, [19,23] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.9.1. $Z=\left(z_{ij}\right)$ $m\times n$ boyutlu rasgele bir matris olmak üzere, Z matrisinin beklenen değeri, $E\left(Z\right)=\left(E\left(z_{ij}\right)\right)$ dir.

Teorem 2.9.2. Z rasgele bir matris, A , B ve C bilinen uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $E\left(AZB+C\right)=AE\left(Z\right)B+C$ dir.

Sonuç 2.9.3. A ve B uygun boyutlu matrisler, x ve y ise uygun boyutlu rasgele vektörler olmak üzere $E\left(Ax+By\right)=AE\left(x\right)+BE\left(y\right)$ dir.

Tanım 2.9.4. X rasgele değişkeninin varyansı, $\operatorname{var}\left(X\right)=\sigma_X{}^2=E\left(X-\mu\right)^2$ dir. Burada, $\mu=E\left(X\right)$ dir.

Tanım 2.9.5. X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans, $\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=\sigma_{XY}=E\left(X-\mu\right)\left(Y-v\right)$ dir. Burada $\mu=E\left(X\right)$, $v=E\left(Y\right)$ dir.

$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right)'$ $p\times 1$ boyutlu rasgele vektörünün kovaryans matrisi (varyans-kovaryans matrisi veya dağılım matrisi)

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(x,x\right)=\operatorname{var}\left(x\right)=\left(\sigma_{ij}\right)=\left(\operatorname{cov}\left(x_i,x_j\right)\right)=\left(E\left(x_i-\mu_i\right)\left(x_j-\mu_j\right)\right)&=E\left(x-\mu\right)\left(x-\mu\right)'\\&=E\left(xx'\right)-\mu\mu'\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $\mu = E(x)$ $p \times p$ boyutlu bir matris, $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_q\right)'$ $q \times 1$ boyutlu rasgele vektör olmak üzere x ve y vektörleri arasındaki kovaryans matrisi,

$$\operatorname{cov}(x, y) = \operatorname{cov}\left(x_i, y_j\right) = \left(E\left(x_i - \mu_i\right)\left(y_j - \nu_j\right)\right) = E\left(x - \mu\right)\left(y - \nu\right)' = E\left(xy'\right) - \mu\nu'$$

dir. Burada $\mu = E(x)$ ve $v = E(y)$ dir ve $\operatorname{cov}(x, y)$ $p \times q$ boyutlu bir matristir [22].

Teorem 2.9.6. $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$ ve $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ bilinen matrisler, $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ve $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele vektörler olsun. Bu durumda

a) $\operatorname{cov}(Ax, By) = A \operatorname{cov}(x, y) B'$,

b) $\operatorname{cov}(Ax, Ax) = A \operatorname{var}(x) A'$

dir [19,23].

BÖLÜM 3. LİNEER MODEL

3.1. Giriş

Genel olarak bir lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon \qquad \textbf{(3.1)}$$

olarak ifade edilir. Burada $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rasgele vektörü, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ model matrisini, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörünü, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ rasgele hata vektörünü temsil etmektedir. Bu modelde

$E(\varepsilon) = 0$ ve $\operatorname{cov}(\varepsilon) = \Omega$,

kabul edilmektedir.

(3.1) modeli bazı özel durumlara sahiptir. Bu özel durumlar ε hata vektörünün dağılımına, Ω kovaryans matrisine, X model matrisinin yapısına ve rankına bağlıdır.

ε hata vektörünün dağılımı ile ilgili aşağıdaki üç durum söz konusudur:

1. Durum: ε , $E(\varepsilon) = 0$ ve $\Omega = I$ olmak üzere $\operatorname{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I$, $(\sigma^2 > 0)$ olacak şekilde normal dağılıma sahiptir. $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ ile gösterilir.

2. Durum: ε , $E(\varepsilon) = 0$ ve $\Omega = I$ olmak üzere $\operatorname{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I$, $(\sigma^2 > 0)$ olacak şekilde bilinmeyen bir dağılıma sahiptir. $\varepsilon \sim (0, \sigma^2 I)$ ile gösterilir.

3. Durum: ε, $E(\varepsilon)=0$ ve $\Omega=V$ olmak üzere $\text{cov}(\varepsilon)=\sigma^2V$, $(\sigma^2>0)$ olacak şekilde bilinmeyen bir dağılıma sahiptir. $\varepsilon \sim (0,\sigma^2V)$ ile gösterilir. Burada $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen nonnegatif tanımlı matristir.

Birinci ve ikinci durumdaki varsayımlar altındaki modellere Gauss-Markov modelleri denir [24]. Bu çalışmada üçüncü durumda ifade edilen ve sabit etkiler modeli olarak bilinen genel lineer model ele alınacaktır. Bu modeldeki σ^2 sabiti ile ilgili özellikler ve sonuçlar çalışmanın kapsamı dışındadır. Bu nedenle $\sigma^2=1$ almak genelliği bozmayacaktır. (3.1)' de verilen lineer model kısaca

$$L=\{y,X\beta,V\} \qquad \textbf{(3.2)}$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\text{E}(y)=X\beta \text{ ve } \text{cov}(y)=\text{cov}(\varepsilon)=V$$

dir. Ayrıca L modelinde X model matrisi tam ranklı olmak zorunda değildir.

$X_1\in\mathbb{R}^{n\times p_1}$, $X_2\in\mathbb{R}^{n\times p_2}$ ve $p=p_1+p_2$ olmak üzere, $X=(X_1:X_2)$ ve bu matrise karşılık gelecek şekilde $\beta=(\beta_1':\beta_2')'$ alındığında $X\beta=X_1\beta_1+X_2\beta_2$ olarak yazılabilir. Bu durumda L modeli bir parçalanmış lineer model olarak

$$L=\{y,X_1\beta_1+X_2\beta_2,V\} \qquad \textbf{(3.3)}$$

biçiminde ifade edilir.

Bu çalışmada L modelinin tutarlı, yani

$$y\in C(X:V)=C(X:VM)$$

olduğu kabul edilecektir. Burada $H = P_X$ matrisi $C(X)$ üzerine dik izdüşüm matrisi olmak üzere $M = I - H$ matrisi $C(X)^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisidir.

3.2. Lineer Modellerde Tahmin

Bir tek parametreyi tahmin etmek için tek bir istatistik kullanılıyorsa, bu durumda parametrelerin nokta tahmin edicisi kullanılıyor denir. Yani nokta tahmin edicisi, bir kitle parametresini tahmin etmek için kullanılan tek bir istatistiktir. Genel olarak bir istatistikten bahsediliyorsa, buna tahmin edici ve eğer istatistik belirlenen bir değeri almışsa buna tahmin denir. Q bir parametre olmak üzere $E(T) = Q$ ise, T istatistiğine Q parametresinin yansız tahmin edicisi, $E(T) = Q + (\text{bir terim})$ ise buna yanlı tahmin edici denir. Yanlı ve yansız tahmin ediciler arasında seçim söz konusu olduğunda yansız tahmin edicinin seçilmesi doğaldır. Ancak iki yansız tahmin edici arasında seçim söz konusu olduğunda yeni bir ölçü kullanmak gerekir. Bu durumda da parametreye yakın olma olasılığı yüksek olan tahmin edici tercih edilir. Bir parametrenin herhangi bir yansız tahmin edicisi, diğer herhangi bir yansız tahmin edicisinden daha küçük varyansa sahip ise, bu istatistiğe parametrenin minimum varyanslı tahmin edicisi denir.

L modelinde β parametre vektörünü tahmin etmenin değişik metotları mevcuttur. Bu metotlardan en çok kullanılanları en küçük kareler tahmini (Least Squares Estimation-LSE) ile maksimum olabilirlik tahmini (Maximum Likelihood Estimation-MLE) dir. LSE metodu $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ olmak üzere, $\sum \varepsilon_i^2$ ifadesinin β parametresine göre minimumlaştırılması işlemlerini içerir. MLE metodu ise, ε hata vektörü normal dağılıma sahip olduğunda gözlemlerin sabit bir kümesi için olabilirlik fonksiyonunun maksimumlaştırılması işlemlerini içerir.

Lineer modeller altında parametrelerin ve bu parametrelerin lineer fonksiyonlarının tahmin edicilerinin açık ifadelerini bilmek yararlıdır. Ancak çoğu zaman bu ifadeler tek değildir. Bir tahmin edicinin ifadesinin tek olması parametrenin tahmin edilebilir olması ile mümkündür. Bir $K\beta$ parametrik fonksiyonunun L modeli altında tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart

$$C(K') \subseteq C(X') \tag{3.4}$$

yani $K = AX$ olacak şekilde en az bir A matrisinin mevcut olmasıdır [22]. Buradan açıkça görülmektedir ki $X\beta$ vektörü L modeli altında her zaman tahmin edilebilirdir. β parametresinin L modeli altında tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu ise her $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ için $E(Ay) = AX\beta = \beta$ olacak şekilde bir A matrisinin mevcut olmasıdır. Diğer bir deyişle, β parametresinin L modeli altında tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$I_p = AX = X'A' \tag{3.5}$$

olacak şekilde en az bir A matrisi mevcut olmasıdır. L modeli altında $K_2\beta_2$ parametrik fonksiyonunun tahmin edilebilme koşulu ise

$$C(K_2') \subseteq C(X_2'M_1) \tag{3.6}$$

yani $K_2 = FM_1X_2$ olacak şekilde en az bir F matrisi mevcut olmasıdır. $X_2\beta_2$ vektörünün L altında tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$C(X_1) \cap C(X_2) = \{0\} \tag{3.7}$$

olmasıdır. Bu koşulun aynı zamanda $X_1\beta_1$ parametresinin de L modeli altında tahmin edilebilme koşulu olduğu açıkça görülmektedir.

3.3. Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (OLSE)

En küçük kareler tahmini yöntemindeki düşünce, $X\beta$ vektörü için gözlenmiş y değerlerine mümkün olduğunca yakın olacak şekilde β vektörü bulmaktır. Buna göre β parametreler vektörünün L modeli altında $OLSE$ 'si, $(y-X\beta)'(y-X\beta)$ ifadesinin β vektörüne göre minimumlaştırılmasıyla elde edilen

$$X'X\beta = X'y$$

ve normal denklemler olarak bilinen denklem sisteminin çözümü ile elde edilir ve $OLSE(\beta|L)=\hat{\beta}$ ile gösterilir. $X'X\beta = X'y$ normal denklemi β ya göre çözülürse, herhangi bir u vektörü için genel çözüm

$$\hat{\beta} = (X'X)^{+} X'y + \left(I-(X'X)^{+}(X'X)\right)u \qquad \textbf{(3.8)}$$

olarak yazılır.

$$(X'X)^{+} X' = X^{+}(X')^{+} X' = X^{+}\left(XX^{+}\right)' = X^{+}XX^{+} = X^{+}$$

olduğundan (3.8)' deki genel çözüm

$$\hat{\beta} = X^{+}y + \left(I - X^{+}X\right)u = X^{+}y + R_X u \qquad \textbf{(3.9)}$$

olarak ifade edilir. Burada R_X, $C(X')^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisidir [25,26].

3.4. En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici (BLUE)

Kısım 3.2'de belirtildiği gibi, eğer her $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ için $E\left(Gy\right) = X\beta$ ise, Gy tahmin edicisi $X\beta$ için bir yansız tahmin edicidir. Eğer bu lineer yansız tahmin edici diğer tüm yansız tahmin ediciler arasında Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisine sahipse en iyi lineer yansız tahmin edici ($BLUE$) olarak tanımlanır. Yani $E\left(By\right) = X\beta$ olacak şekildeki her By vektörü için

$$\operatorname{cov}\left(Gy\right) \leq_L \operatorname{cov}\left(By\right) \qquad \textbf{(3.10)}$$

dir. Aşağıdaki teoremde temel $BLUE$ denklemi olarak bilinen denklem ifade edilmiştir [22].

Teorem 3.4.1. $L = \left\{y, X\beta, V\right\}$ sabit etkili lineer modeli ele alınsın. Bu durumda

$$Gy = BLUE(X\beta \,|\, L) \Leftrightarrow G(X : VX^{\perp}) = (X : 0)\,. \qquad \textbf{(3.11)}$$

İspat: $VX^{\perp} = 0$ koşulunun herhangi bir $X^{\perp}$ matrisi için sağlanacağı açıktır. Dolayısıyla $X^{\perp}$ matrisi için bir seçim $M = I - H$ matrisidir. Bu durumda (3.11)

$$Gy = BLUE(X\beta) \Leftrightarrow G(X : VM) = (X : 0) \qquad \textbf{(3.12)}$$

olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.7.4'e göre (3.12) ifadesinde $C\left(X\right) \cap C\left(VM\right) = \left\{0\right\}$ olduğundan, $G(X : VM) = (X : 0)$ denklemi G için en az bir çözüme sahiptir. Bu denklemin G için tek bir çözüme sahip olmasının gerek ve yeter şartı $C(X : VM) = \mathbb{R}^{n\times 1}$ olmasıdır. Eğer G_1 ve G_2 , $G(X : VX^{\perp}) = (X : 0)$ için iki çözüm ise bu durumda $G_1(X : VM) = G_2(X : VM)$ olduğu açıkça görülmektedir.

İlk olarak $G(X:VM)=(X:0)$ denkleminin G matrisi için sağlandığı kabul edilsin ve F matrisi, $FX=X$ şartını sağlayan keyfi bir matris olsun. Böylece $(F-G)X=0$ yani başka bir deyişle $C(F'-G')\subseteq C(M)$ elde edilir. Bu durumda $F'-G'=ML$ olacak şekilde bir L matrisi vardır. $GVM=0$ varsayımına göre, $GV(F'-G')=GVML=0$ ve dolayısıyla $\operatorname{cov}[Gy,(F-G)y]=GV(F-G)'=0$ olduğu görülür. Gy ile $(F-G)y$ arasındaki ilişkisizlikten

$$\operatorname{cov}(Fy)=\operatorname{cov}[(F-G)y+Gy]=\operatorname{cov}[(F-G)y]+\operatorname{cov}(Gy)\geq_L \operatorname{cov}(Gy)$$

yazılabilir. Böylece $Gy=BLUE(X\beta)$ elde edilir.

Diğer yandan eğer $GX=X$ ve $\forall F: FX=X$ için

$$GVG'\leq_L FVF' \tag{3.13}$$

ise $GVM=0$ olduğu gösterilmelidir. Şimdi (3.13)'deki F matrisi $FX=X$ ve $FVM=0$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda $(G-F)X=0$ yani bir başka deyişle $C(G'-F')\subseteq C(M)$ elde edilir. Bu durumda bazı K matrisleri için $G'-F'=MK$ olarak yazılabilir ve dolayısıyla $FV(G'-F')=0$ olur. Buradan $\operatorname{cov}[Fy,(G-F)y]=0$ olduğu görülür. Böylece

$$\operatorname{cov}(Gy)=\operatorname{cov}\left[(G-F)y+Fy\right]=\operatorname{cov}\left[(G-F)y\right]+\operatorname{cov}(Fy)\geq_L \operatorname{cov}(Fy) \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13) varsayımı gösterir ki (3.14) ifadesindeki eşitlik sağlanır ancak ve ancak $\operatorname{cov}\left[(G-F)y\right]=(G-F)V(G-F)'=0$ yani $(G-F)V=0$ dır. Böylece $GV=FV$ yazılabilir. Burada her iki taraf sağdan M ile çarpılırsa

$$GVM=FVM=0 \tag{3.15}$$

elde edilir. $GX = X$ yansızlık koşulu (3.15) ile birlikte ele alınırsa ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 3.4.2. $G(X:VM) = (X:0)$ denklemini sağlayan G matrisi için genel çözümler:

a) $G_1 = (X:0)(X:VM)^{-} + F_1\left[I_n - (X:VM)(X:VM)^{-}\right]$,

b) $G_2 = X(X'W^{-}X)^{-}X'W^{-} + F_2\left(I_n - WW^{-}\right)$,

c) $G_3 = I_n - VM\left(MVM\right)^{-}M + F_3\left[I_n - MVM\left(MVM\right)^{-}\right]M$,

d) $G_4 = H - HVM\left(MVM\right)^{-}M + F_4\left[I_n - MVM\left(MVM\right)^{-}\right]M$,

şeklinde ifade edilebilir. Burada F_1, F_2, F_3 ve F_4 keyfi matrisler, $W = V + XUX'$ ve U ; $C\left(W\right) = C\left(X:V\right)$ şartını sağlayan keyfi matristir [22].

Özel olarak X tam sütun ranklı ve V pozitif tanımlı matris olduğunda

$$BLUE(\beta) = \tilde{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}X'V^{-1}y \qquad \textbf{(3.16)}$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 4. LİNEER KARMA MODEL

4.1. Giriş

Genel olarak bir lineer karma model

$$y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon \qquad \textbf{(4.1)}$$

olarak ifade edilir. Burada $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rasgele vektörü, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ sabit etkilere ilişkin model matrisini, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ sabit etkilere ilişkin parametre vektörünü, $Z \in \mathbb{R}^{n\times q}$ rasgele etkilere ilişkin tasarım matrisini, $\gamma \in \mathbb{R}^{q\times 1}$ rasgele etkilere ilişkin gözlenemeyen vektörü, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ rasgele hata vektörünü temsil etmektedir. Bu modelde

$$E(\gamma) = 0 \text{ ve } \operatorname{cov}(\gamma) = D,$$

$$E(\varepsilon) = 0 \text{ ve } \operatorname{cov}(\varepsilon) = R$$

kabullerinin yanı sıra γ ile ε vektörlerinin ilişkisiz yani

$$\operatorname{cov}(\gamma, \varepsilon) = 0 \qquad \textbf{(4.2)}$$

olduğu kabul edilmektedir. (4.1)' de verilen lineer karma model kısaca

$$M = \{y, X\beta + Z\gamma, D, R\} \qquad \textbf{(4.3)}$$

biçiminde gösterilebilir.

(4.1) modelinde $\xi = Z\gamma + \varepsilon$ olarak gösterilirse, (4.1) lineer karma modeli

$$y = X\beta + \xi \tag{4.4}$$

sabit etkili lineer model olarak ele alınabilir. Bu modelde $E(\varepsilon) = 0$ ve $E(\gamma) = 0$ olduğundan

$$E(\xi) = ZE(\gamma) + E(\varepsilon) = 0$$

ve $\text{cov}(\gamma) = D$, $\text{cov}(\varepsilon) = R$ olduğundan ve (4.2)'den

$$\text{cov}(\xi) = \text{cov}(Z\gamma + \varepsilon) = Z\,\text{cov}(\gamma)Z' + \text{cov}(\varepsilon) + 2\,\text{cov}(\gamma, \varepsilon) = ZDZ' + R := \Sigma$$

dır. (4.4) modeli kısaca

$$M_S = \{y, X\beta, ZD'Z + R\} = \{y, X\beta, \Sigma\} \tag{4.5}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda M_S sabit etkili lineer modeli altında Teorem 3.4.1'e göre $X\beta$ için temel $BLUE$ denklemi

$$B(X : \Sigma X^{\perp}) = (X : 0) \tag{4.6}$$

olarak yazılır. Yani M lineer karma modeli altında sabit etkilerin tahmini için M_S sabit etkili lineer model ele alınabilir. M_S modelinde X tam sütun ranklı ve $\Sigma = ZD'Z + R$ pozitif tanımlı kabul edildiğinde, (4.1) lineer karma modeli altında

$$BLUE(\beta | M) = \tilde{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$$

elde edilir.

4.2. Lineer Modelde Yeni Gözlemler

(3.2)'de verilen $L=\{y, X\beta, V\}$ sabit etkili genel lineer modeli ele alınsın. $y_f \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ yeni gözlemleri içeren gözlenemeyen rasgele vektör olmak üzere yeni gözlemler

$$y_f = X_f\beta + \varepsilon_f \tag{4.7}$$

modeli ile gösterilebilir. Burada $X_f \in \mathbb{R}^{m\times p}$ yeni gözlemlere ilişkin model matrisini, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ genel lineer modelde olduğu gibi bilinmeyen parametre vektörünü ve $\varepsilon_f \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ yeni gözlemlere ilişkin rasgele hata vektörünü temsil etmektedir. Rasgele vektörler y ile y_f arasındaki temel fark; y vektörünün gözlenebilir, fakat y_f vektörünün gözlenemez olmasıdır. y_f vektörü (4.7) modelinden ortaya çıkan bir rasgele vektörün bir gelecek değerini temsil eder. Buradaki amaç y rasgele vektörü üzerinden y_f vektörünün ön tahmin edilmesidir.

L modeli ile (4.7) modelinin birlikte ele alınmasıyla elde edilen ve yeni gözlemleri içeren lineer model

$$N=\left\{\begin{pmatrix} y \\ y_f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X\beta \\ X_f\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\right\} \tag{4.8}$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$E\begin{pmatrix} y \\ y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\beta \\ X_f\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X_f \end{pmatrix}\beta$$

ve y ile y_f vektörlerinin ortak kovaryans matrisi

$$\operatorname{cov}\begin{pmatrix} y \\ y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \Sigma$$

şeklindedir.

4.3. En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin Edici (BLUP)

Lineer karma modellerde sabit ve rasgele etkilerin bir arada bulunması, parametre tahminlerinin daha karmaşık olmasına neden olur. M lineer karma modeli altında sabit etkiler ile ilgili tahminler (4.5)'te verilen M_S modeli vasıtasıyla hesaplanır. Rasgele etkilere ilişkin γ vektörü ile ilgili tahminler ise, bu kısımda detaylı olarak ele alınacaktır.

En iyi lineer yansız ön tahmin edici $(BLUP)$, Kısım 3.4'te $BLUE$ ile ilgili yapılan tanımlara benzer olarak aşağıdaki gibi tanımlanır. Eğer her $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ için

$$E(Ay) = E(y_f) = X_f\beta \qquad \textbf{(4.9)}$$

yani bir başka deyişle $E(y_f - Ay) = 0$ ise, Ay lineer ön tahmin edicisi y_f rasgele vektörü için yansızdır denir. Bu lineer yansız ön tahmin edici diğer tüm yansız ön tahmin ediciler arasında Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisine sahipse $BLUP$ olarak tanımlanır. Yani $E(By) = E(y_f) = X_f\beta$ olacak şekildeki her By vektörü için Ay, y_f rasgele vektörünün yansız lineer ön tahmin edicisi olmak üzere

$$\operatorname{cov}(Ay - y_f) \leq_L \operatorname{cov}(By - y_f)$$

dir [22]. Aşağıdaki teoremde temel $BLUP$ denklemi olarak bilinen denklem ifade edilmiştir [11,12].

Teorem 4.3.1. $N=\left\{\begin{pmatrix} y \\ y_f \end{pmatrix},\begin{pmatrix} X\beta \\ X_f\beta \end{pmatrix},\begin{pmatrix} V & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\right\}$ modeli ele alınsın. Bu durumda

$$Ay = BLUP\left(y_f \middle| N\right) \Leftrightarrow A\left(X : VX^{\perp}\right) = \left(X_f : V_{21}X^{\perp}\right). \tag{4.10}$$

İspat: A matrisi, $A\left(X : VM\right) = \left(X_f : V_{21}M\right)$ denklemini sağlayan herhangi bir matris ve By, y_f için bir başka bir yansız ön tahmin edici, yani $BX = X_f$ olsun. Burada $M = I - H$ matrisinin $X^{\perp}$ için bir seçim olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda $\left(B - A\right)X = 0$ yani bir başka deyişle $C\left(B'A'\right) \subseteq C\left(M\right)$ olur. Dolayısıyla herhangi bir L matrisi için $B' - A' = ML$ şeklindedir. Ayrıca $AVM = V_{21}M$ olduğundan

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[Ay - y_f, (B-A)y] &= AV(B-A)' - V_{21}(B-A)' \\ &= (AV - V_{21})\left(B - A\right)' \\ &= (AV - V_{21})ML \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir ve dolayısıyla Löwner sıralamasına göre

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(By - y_f\right) &= \operatorname{cov}\left[\left(By - Ay\right) + \left(Ay - y_f\right)\right] \\ &= \operatorname{cov}\left(By - Ay\right) + \operatorname{cov}\left(Ay - y_f\right) \\ &\geq_L \operatorname{cov}\left(Ay - y_f\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. Yani Ay, y_f için $BLUP$' tır.

Tersine Ay, y_f için $BLUP$ olsun. Bu durumda $AX = X_f$ ve $AVM = V_{21}M$ dir. Kabul edelim ki bir B matrisi $\left(X : VM\right) = \left(X_f : V_{21}M\right)$ denklemini sağlasın. Buradan $A' - B' = MK$ yazılabilir. (4.11)' de olduğu gibi

$$\text{cov}[By - y_f, (A-B)y] = \left(BV - V_{21}\right)MK = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(Ay - y_f\right) &= \text{cov}\left[\left(Ay - By\right) + \left(By - y_f\right)\right] \\ &= \text{cov}\left(Ay - By\right) + \text{cov}\left(By - y_f\right) \\ &\geq_L \text{cov}\left(By - y_f\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

olduğu görülür. Ancak Ay, y_f için $BLUP$ olduğundan

$$\text{cov}\left(By - y_f\right) = \text{cov}\left(Ay - y_f\right)$$

olmak zorundadır. Bu durum ise

$$\text{cov}\left(Ay - By\right) = \left(A-B\right)V\left(A-B\right)' = 0 \tag{4.15}$$

eşitliğinin sağlanmasıyla mevcuttur. (4.15) eşitliğinin sağlanmasının gerek ve yeter şartı ise $\left(A-B\right)V = 0$ olmasıdır. Buradan $AV = BV$ ve dolayısıyla $AVM = BVM = V_{21}M$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. □

γ rasgele etki vektörünün $BLUP$' ını elde etmek için (4.8)'de verilen N modeline benzer olarak karma modelin yanı sıra rasgele gözlemleri de içeren model,

$$\begin{aligned} y &= X\beta + Z\gamma + \varepsilon, \\ \gamma &= 0 \cdot \beta + \varepsilon_f \end{aligned} \tag{4.16}$$

modellerinin birlikte ele alınmasıyla elde edilir. Burada

$$\text{cov}\left(\varepsilon_f\right) = \text{cov}\left(\gamma\right) = D \text{ ve } \text{cov}\left(\gamma,\varepsilon\right) = \text{cov}\left(\varepsilon_f,\varepsilon\right) = 0$$

şeklindedir.

$\text{cov}\left(y,\gamma\right) = \text{cov}\left(X\beta + Z\gamma + \varepsilon,\gamma\right) = ZD$ olduğundan

$$\text{cov}\begin{pmatrix} y \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ZDZ' + R & ZD \\ DZ' & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma & ZD \\ DZ' & D \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan yeni gözlemler γ olarak düşünüldüğünde, (4.8) yeni gözlemler modelinin bir versiyonu olarak

$$N_{mix} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}\beta, \begin{pmatrix} ZDZ' + R & ZD \\ DZ' & D \end{pmatrix} \right\} \tag{4.17}$$

modeli elde edilir. Bu durumda Teorem 4.3.1'e göre M lineer karma modeli ele alındığında, Ay lineer ön tahmin edicisinin γ için $BLUP$ olmasının gerek ve yeter şartı

$$A\left(X : \Sigma X^{\perp}\right) = \left(0 : DZ'X^{\perp}\right) \tag{4.18}$$

denkleminin sağlanması olarak ifade edilir. Burada $\Sigma = ZDZ' + R$ şeklindedir. Böylece M lineer karma modeli altında $X\beta$ sabit etkiler vektörünün $BLUE$'su ve γ rasgele etkiler vektörünün $BLUP$'ını veren denklem (4.6) ve (4.18)'de verilen denklemlerin birleştirilmesiyle

$$\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}\left(X : \Sigma M\right) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & DZ'M \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

olarak elde edilir. Burada $By = BLUE\left(X\beta \middle| M\right)$ ve $Ay = BLUP\left(\gamma \middle| M\right)$ dir. M matrisi de $X^{\perp}$ için bir seçimdir.

4.4. Henderson Karma Modelleri

Henderson ve Searle [27] tarafından belirtildiği gibi Σ matrisinin büyüklüğü ve köşegen olmaması gibi nedenlerden dolayı (4.19) yaklaşımıyla sabit ve rasgele etkilere ilişkin çözümlere ulaşmak zordur. Sabit etkilere ilişkin $BLUE$ tahmini $\tilde{\beta}$ ve rasgele etkilere ilişkin $BLUP$ tahmini $\tilde{\gamma}$ çözümlerine ulaşmada alternatif bir yaklaşım Henderson [2,3] tarafından ortaya atılmıştır [22]. Henderson [2,3]

$$f(\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} y-X\beta-Z\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y-X\beta-Z\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$=(y-X\beta-Z\gamma)'R^{-1}(y-X\beta-Z\gamma)+\gamma' D^{-1}\gamma \qquad \textbf{(4.20)}$$

kuadratik formunu, γ'yı rasgele olmayan bir vektör alarak, β ve γ'ya bağlı minimumlaştırmıştır. Burada R ve D pozitif tanımlı matrisler olmak üzere β ve γ'ya göre kısmi türevler alındığında

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}=-2X'R^{-1}(y-X\beta-Z\gamma)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}=-2Z'R^{-1}(y-X\beta-Z\gamma)+2D^{-1}\gamma=0$$

olarak yazılır ve buradan

$$X'R^{-1}X\beta+X'R^{-1}Z\gamma=X'R^{-1}y$$

$$Z'R^{-1}X\beta+Z'R^{-1}Z\gamma+D^{-1}\gamma=Z'R^{-1}y$$

elde edilir ve bu ifadeler matris formatında

$$\begin{pmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z+D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X'R^{-1} \\ Z'R^{-1} \end{pmatrix}y \qquad \textbf{(4.21)}$$

şeklinde gösterilir. (4.21) ifadesi *Henderson Karma Model Denklemleri* olarak adlandırılır [28,29]. Bu denklemlerin çözümü M lineer karma modeli altında β için $BLUE$ ve γ için $BLUP$'tır. Böylece lineer karma modeller altında sabit etkiler kısmını oluşturan $X\beta$ için $BLUE$ ve rasgele etki terimleri vektörü γ için $BLUP$ ifadelerini eşanlı olarak veren bir denklem sistemi geliştirilmiştir.

$$u=\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\; X_*=\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix},\; V_*=\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ ve } \pi=\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$f(\beta,\gamma)=(u-X_*\pi)'V_*^{-1}(u-X_*\pi) \qquad \textbf{(4.22)}$$

yazılabilir. $f(\beta,\gamma)$ minimumlaştırılmasıyla elde edilen normal denklemlerde X tam sütun ranklı olduğunda β ve γ vektörlerinin minimumlaştırılmış değerleri

$$\left(X_*V_*^{-1}X_*\right)^{-1}X_*'V_*^{-1}u=\begin{pmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$X_*\tilde{\pi}=\begin{pmatrix} X\tilde{\beta}+Z\tilde{\gamma} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

4.5. Stokastik Kısıtlar

Sabit etkili parçalanmış model olan

$$y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon \qquad \textbf{(4.23)}$$

ele alınsın. Bu modelde

$$\operatorname{cov}(y) = \operatorname{cov}(\varepsilon) = R$$

ve β ile γ sabit bilinmeyen katsayılardır. Bu model

$$F = \{y, X\beta + Z\gamma, R\} \qquad \textbf{(4.24)}$$

olarak gösterilebilir. (4.24)'te verilen sabit etkili parçalanmış lineer modele, γ için stokastik kısıtlar $\operatorname{cov}(\varepsilon_0) = D$ olmak üzere,

$$y_o = \gamma + \varepsilon_0$$

eklenmesiyle

$$F_* = \{y_*, X_*\pi, V_*\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\} \qquad \textbf{(4.25)}$$

(alışılmış) sabit etkili model elde edilir. Burada

$$X_{*1} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } X_{*2} = \begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix}$$

olmak üzere $X_* = \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \left(X_{*1} : X_{*2} \right)$ biçiminde parçalanabilir. Yani (4.25) modeli

$$F_* = \left\{ y_*, X_{*1}\beta + X_{*2}\gamma, V_* \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix}\gamma, \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\}$$

kısıt eklenmiş parçalanmış sabit etkili lineer model olarak yazılabilir.

$$C\left(X_{*1}\right) \cap C\left(X_{*2}\right) = \{0\} \tag{4.26}$$

kabul edilecektir. Çünkü (3.7)'ye göre (4.26) sağlandığında $X_{*1}\beta = \begin{pmatrix} X\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $X_{*2}\gamma = \begin{pmatrix} Z\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ vektörleri, F_* modeli altında tahmin edilebilirdir. Temel $BLUE$ denklemindeki $X_*^{\perp}$ matrsi yerine $\begin{pmatrix} I_n \\ -Z' \end{pmatrix} M$ matrisi seçilebilir. Bu durumda

$$V_* X_*^{\perp} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ -Z' \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} RM \\ -DZ'M \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

elde edilir.

Aşağıda F_* modelindeki $X_*\beta$ parametre vektörünün $BLUE$'su ve M modelindeki γ rasgele etki vektörünün $BLUP$'ı ile ilgili sonuçları içeren teorem verilmektedir.

Teorem 4.5.1. Lineer karma model $M = \left\{ y, X\beta + Z\gamma, D, R \right\}$ ve γ için stokastik kısıt içeren sabit etkili model $F_* = \left\{ y_*, X_*\pi, V_* \right\}$ ele alınsın. $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) By_* tahmin edicisi F_* modeli altında $X_*\pi$ için $BLUE$ ' dur. Bu durum

$$By_* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} y_* = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} y_0 = BLUE\left(X_*\pi \middle| F_*\right)$$

biçiminde gösterilir. Burada $B_{12} = Z - B_{11}Z$ ve $B_{22} = I_q - B_{21}Z$ dir.

b) $B_{21}y$ ön tahmin edicisi M lineer karma modeli altında γ için $BLUP$ ve $\left(B_{11} - ZB_{21}\right)y$, M lineer karma modeli altında $X\beta$ için $BLUE$ 'dur. $K = \begin{pmatrix} I_n & -Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$KB\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} - ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} BLUE\left(X\beta \middle| M\right) \\ BLUP\left(\gamma \middle| M\right) \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilebilir ya da bu ifadeye denk olarak

$$B\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} BLUE\left(X\beta \middle| M\right) + BLUP\left(Z\gamma \middle| M\right) \\ BLUP\left(\gamma \middle| M\right) \end{pmatrix}$$

ifadesi yazılabilir.

İspat: F_* modeli altında By_* tahmin edicisinin $X_*\pi$ için $BLUE$ olmasının gerek ve yeter şartı Teorem 3.4.1'e göre $B(X_* : V_*X_*^{\perp}) = (X_* : 0)$ denkleminin $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ matrisi tarafından sağlanmasıdır. Bu durumda $V_*X_*^{\perp}$ matrisi yerine (4.27) de verilen matrisin seçimiyle

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z & RM \\ 0 & I_q & -DZ'M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Z & 0 \\ 0 & I_q & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(4.28)}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{pmatrix} B_{11}X & B_{11}Z + B_{12}I_q & B_{11}RM - B_{12}DZ'M \\ B_{21}X & B_{21}Z + B_{22}I_q & B_{21}RM - B_{22}DZ'M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Z & 0 \\ 0 & I_q & 0 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

elde edilir.(4.29)' daki eşitliklerden

$$B_{12} = Z - B_{11}Z \text{ ve } B_{22} = I_q - B_{21}Z \tag{4.30}$$

olduğu görülür. Bunun anlamı, B_{11} ve B_{21} bloklarından biri verildiğinde B matrisinin diğer bloklarının sabit hale gelmesidir. (4.30)'daki eşitlikler, (4.28) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} B_{11} & Z - B_{11}Z \\ B_{21} & I_q - B_{21}Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z & RM \\ 0 & I_q & -DZ'M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Z & 0 \\ 0 & I_q & 0 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

ve buradan

$$\begin{pmatrix} B_{11}X & B_{11}Z + Z - B_{11}Z & \left(Z - B_{11}Z\right)RM \\ B_{21}X & B_{21}Z + I_q - B_{21}Z & -\left(I_q - B_{21}Z\right)DZ'M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Z & 0 \\ 0 & I_q & 0 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

elde edilir. Burada $B_{11}Z + Z - B_{11}Z = Z$ ve $B_{21}Z + I - B_{21}Z = I$ olduğundan (4.32) ifadesi

$$\begin{pmatrix} B_{11} & Z - B_{11}Z \\ B_{21} & I_q - B_{21}Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & RM \\ 0 & -DZ'M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

olarak yazılır. (4.33) ifadesi $K = \begin{pmatrix} I_n & -Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ nonsingüler matrisi ile soldan çarpılırsa

$$\begin{pmatrix} I_n & -Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & Z-B_{11}Z \\ B_{21} & I_q-B_{21}Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & RM \\ 0 & -DZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n & -Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} B_{11}-ZB_{21} & Z-B_{11}Z-Z+ZB_{21}Z \\ B_{21} & I_q-B_{21}Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & RM \\ 0 & -DZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} B_{11}-ZB_{21} & -\left(B_{11}-ZB_{21}\right)Z \\ B_{21} & I_q-B_{21}Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & RM \\ 0 & -DZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} B_{11}X-ZB_{21}X & B_{11}RM-ZB_{21}RM+\left(B_{11}-ZB_{21}\right)ZDZ'M \\ B_{21}X & B_{21}RM-DZ'M+B_{21}ZDZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} B_{11}X-ZB_{21}X & B_{11}RM-ZB_{21}RM+B_{11}ZDZ'M-ZB_{21}ZDZ'M \\ B_{21}X & B_{21}RM-DZ'M+B_{21}ZDZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \left(B_{11}-ZB_{21}\right)X & \left(B_{11}-ZB_{21}\right)\left(R+ZDZ'\right)M \\ B_{21}X & B_{21}\left(R+ZDZ'\right)M-DZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \left(B_{11}-ZB_{21}\right)X & \left(B_{11}-ZB_{21}\right)\Sigma M \\ B_{21}X & B_{21}\Sigma M-DZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \left(B_{11}-ZB_{21}\right)X & \left(B_{11}-ZB_{21}\right)\Sigma M \\ B_{21}X & B_{21}\Sigma M \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & DZ'M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \left(B_{11}-ZB_{21}\right)X & \left(B_{11}-ZB_{21}\right)\Sigma M \\ B_{21}X & B_{21}\Sigma M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & DZ'M \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} B_{11}-ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix}\left(X:\Sigma M\right)=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & DZ'M \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.34)}$$

elde edilir. (4.34) denklemine göre $\begin{pmatrix} B_{11} - ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix}$ matrisinin (4.19) denklemini sağladığı görülmektedir. Böylece Teorem 3.4.1, Teorem 4.3.1 ve (4.19)'a göre (4.34) ifadesinden

$$\begin{pmatrix} B_{11} - ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} BLUE\left(X\beta \middle| M\right) \\ BLUP\left(\gamma \middle| M\right) \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

olduğu görülür. $K = \begin{pmatrix} I_n & -Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ nonsingüler matrisinin tersi Teorem 2.6.3'e göre $K^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} B_{11}y \\ B_{21}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BLUE\left(X\beta \middle| M\right) \\ BLUP\left(\gamma \middle| M\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BLUE\left(X\beta \middle| M\right) + BLUP\left(Z\gamma \middle| M\right) \\ BLUP\left(\gamma \middle| M\right) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi lineer karma modelde $BLUE$ ve $BLUP$'ın tüm temsillerinin B matrisi aracılığıyla ifade edilebileceğini gösteren bir sonuç verilecektir.

Sonuç 4.5.2. $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin $B(X_* : V_* X_*^{\perp}) = (X_* : 0)$ denklemini sağladığı kabul edilsin. Bu durumda M lineer karma modeli altında $X\beta$ için tüm $BLUE$ ve γ için tüm $BLUP$ temsilleri, B_{11} ve B_{21} matrisleri aracılığıyla $\begin{pmatrix} B_{11} - ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix} y$ ifadesinden elde edilir.

İspat: (4.35)' te verilen eşitliğe göre üst kısım $BLUE\left(X\beta \middle| M\right)$ için bir temsil ve alt kısım $BLUP\left(\gamma \middle| M\right)$ için bir temsildir. İddia, Ay ve Gy sırasıyla $BLUP\left(\gamma \middle| M\right)$ ve

$BLUE\left(X\beta \middle| M\right)$ için keyfi temsiller ve G matrisi; $G = B_{11} - ZA$ formunda gösterilen bir matris olmak üzere, $B(X_* : V_* X_*^{\perp}) = (X_* : 0)$ denklemini sağlayan B_{11} matrisinin mevcut olduğunun gösterilmesiyle doğrulanır. Önerme 3.4.2'ye göre $G(X : \Sigma M) = (X : 0)$ temel $BLUE$ denkleminin G matrisine göre genel çözümü

$$\begin{aligned} G &= \left(X:0\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+} + L_1\left(I - \left(X:\Sigma M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}\right) \\ &= \left(X:0\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+} + L_1\left(I_n - P_{(X:\Sigma)}\right) \end{aligned} \quad \textbf{(4.36)}$$

olarak elde edilir. Burada L_1 uygun boyutlu keyfi bir matristir. Benzer şekilde $A(X : \Sigma M) = (0 : DZ'M)$ temel $BLUP$ denkleminin A matrisine göre genel çözümü

$$\begin{aligned} A &= (0:DZ'M)(X:\Sigma M)^{+} + L_2\left(I - \left(X:\Sigma M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}\right) \\ &= \left(0:ZDZ'M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+} + L_2\left(I_n - P_{(X:\Sigma)}\right) \end{aligned} \quad \textbf{(4.37)}$$

dir. Burada L_2 uygun boyutlu keyfi bir matristir. B_{11} matrisi ise,

$$\begin{pmatrix} B_{11} - ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix}\left(X:\Sigma M\right) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & DZ'M \end{pmatrix}$$

denkleminin genel çözümünden elde edilir. Bu denklemde $B_{21}\left(X:\Sigma M\right) = \left(0:DZ'M\right)$ olduğundan U_1 keyfi matris olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_{21} &= \left(0:DZ'M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+} + U_1\left(I - \left(X:\Sigma M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}\right) \\ &= \left(0:DZ'M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+} + U_1\left(I - P_{(X:\Sigma)}\right) \end{aligned} \quad \textbf{(4.38)}$$

elde edilir. $\left(B_{11} - ZB_{21}\right)\left(X:\Sigma M\right) = \left(X:0\right)$ olduğundan

$$B_{11}-ZB_{21}=\left(X:0\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+U_2\left(I-\left(X:\Sigma M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}\right)$$

$$=\left(X:0\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+U_2\left(I-P_{\left(X:\Sigma\right)}\right) \quad \textbf{(4.39)}$$

bulunur. Burada U_2 uygun boyutlu keyfi bir matristir. (4.38) ifadesi (4.39)'da yerine yazılırsa ve elde edilen ifade düzenlenirse, uygun boyutlu keyfi L_3 matrisi için

$$B_{11}=\left(X:0\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+U_2\left(I-P_{\left(X:\Sigma\right)}\right)+Z\left(0:DZ'M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+ZU_1\left(I-P_{\left(X:\Sigma\right)}\right)$$

$$=\left(X:ZDZ'M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+L_3\left(I-P_{\left(X:\Sigma\right)}\right) \quad \textbf{(4.40)}$$

elde edilir. (4.36) ve (4.37) eşitlikleri $B_{11}=G+ZA$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_{11}=\left(X:0\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+L_1\left(I_n-P_{\left(X:\Sigma M\right)}\right)+\left(0:ZDZ'M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+ZL_2\left(I_n-P_{\left(X:\Sigma M\right)}\right)$$

$$=\left(X:ZDZ'M\right)\left(X:\Sigma M\right)^{+}+\left(L_1+ZL_2\right)\left(I_n-P_{\left(X:\Sigma\right)}\right) \quad \textbf{(4.41)}$$

bulunur. Burada L_1, L_2 ve L_3 keyfidir. Özellikle ele alınan durumlarda L_1 ve L_2 verilir. $L_3=L_1+ZL_2$ seçiminin $G=B_{11}-ZA$ ifadesini sağladığı görülür. Böylece ispat tamamlanır. □

BÖLÜM 5. İKİ LİNEER KARMA MODEL ALTINDA BLUE ve BLUP

Bu bölümde farklı kovaryans matrislerine sahip iki lineer model ve iki lineer karma model ele alınacaktır. Öncelikle ele alınan lineer modellerin biri altında sabit etkiler için $BLUE$ ifadesinin diğer model altında da $BLUE$ kalmaya devam etmesi ve benzer biçimde iki lineer karma model için modellerin biri altında rasgele etkiler için $BLUP$ ifadesinin diğer model altında da $BLUP$ kalmaya devam etmesi ile ilgili gerek ve yeter şartlar elde edilecektir. Daha sonra iki lineer karma model altında $BLUE$ ve $BLUP$ ifadeleri beraber ele alınarak modellerin biri altında sabit etkiler için $BLUE$ ve rasgele etkiler için $BLUP$'ın diğer model altında da sabit etkiler için $BLUE$ ve rasgele etkiler için $BLUP$ kalmaya devam etmesi ile ilgili gerek ve yeter şartlar verilecektir.

5.1. İki Lineer Model Altında BLUE'ların Eşitliği

Farklı kovaryans matrislerine sahip

$$L_1 = \{y, X\beta, V_1\}$$

ve

$$L_2 = \{y, X\beta, V_2\}$$

modelleri ele alınsın. L_1 modeli altında $X\beta$ için tüm $BLUE$ temsillerinin L_2 modeli altında da $BLUE$ kalmaya devam etmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki teoremde verilmektedir. Sabit etkili modeller altında $BLUE$' ların eşitliği ile ilgili ayrıca Rao [6], Mitra ve Moore [7], Puntanen ve Styan [8], Zyskind [9] ve Kala [10] kaynaklarına bakılabilir.

Teorem 5.1.1. $L_1 = \{y, X\beta, V_1\}$ ve $L_2 = \{y, X\beta, V_2\}$ modelleri ele alınsın. L_1 modeli altında $X\beta$ için tüm $BLUE$ temsillerinin L_2 modeli altında da $BLUE$ kalmaya devam etmesi için gerek ve yeter şart

$$C\left(V_2X^{\perp}\right) \subseteq C\left(V_1X^{\perp}\right)$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.4.1'e göre Gy tahmin edicisinin L_1 modeli altında $X\beta$ için $BLUE$ olması için gerek ve yeter şart

$$G(X : V_1M) = (X : 0) \qquad \textbf{(5.1)}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Benzer şekilde Gy tahmin edicisinin L_2 modeli altında $BLUE$ olması için G matrisi

$$G(X : V_2M) = (X : 0) \qquad \textbf{(5.2)}$$

denklemini sağlamalıdır. $G(X : V_iM) = (X : 0)$ denklemini sağlayan G matrislerinin kümesi $\left\{P_{X|V_iM}\right\}$ şeklinde gösterilsin. [7]'ye göre L_1 ve L_2 modelleri altında $X\beta$ için $BLUE$'ların karşılaştırılması aşağıdaki üç problem aracılığıyla incelenebilir.

a) L_1 modeli altında $X\beta$ için belli bir $BLUE$ temsili hangi koşullarda L_2 modeli altında da $X\beta$ için $BLUE$ olur?

b) $X\beta$ hangi şartlar altında L_1 ve L_2 modelleri altında ortak $BLUE$ gösterimine sahiptir?

c) L_1 modeli altında $X\beta$ için $BLUE$, ifadesinde kullanılan lineer gösterime bakılmaksızın hangi koşullarda L_2 model altında da $BLUE$ olur?

Mitra ve Moore [7]:

" V_1 singüler ise; bir $p'\beta$ tahmin edilebilir lineer fonksiyonunun $BLUE$ ifadesi, L_1 modeli altında 1 olasılıkla birbirine eşit olan farklı lineer temsillere sahiptir. Fakat L_2 modeli altında eşit olmaları gerekmez. Bu gösterir ki bazı durumlarda yukarıda belirtilen 3 problemin varlığını tartışmak önemlidir. $r(V_1X^{\perp}) = n - r(X)$ olduğunda $p'\beta$ lineer fonksiyonunun $BLUE$ ifadesi tek bir gösterime sahiptir. Doğal olarak bu 3 problem tek problemde birleştirilebilir"

olduğunu belirtmiştir.

Gy tahmin edicisinin iki model altında da $X\beta$ için $BLUE$ olmasının gerek ve yeter şartı $G\left(X : V_1M : V_2M\right) = \left(X : 0 : 0\right)$ denkleminin sağlanmasıdır. Teorem 2.7.4'e göre yukarıdaki ifadenin çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$C\left(V_1M : V_2M\right) \cap C\left(X\right) = \{0\}$$

olmasıdır. L_i modeli altında $X\beta$ için $BLUE$ temsillerinin kümesi

$$\left\{BLUE(X\beta \middle| L_i)\right\} = \left\{Gy : G(X : V_iM) = (X : 0)\right\} = \left\{Gy : G \in \left\{P_{X|V_iM}\right\}\right\}$$

şeklinde gösterilsin. Önerme 3.4.2'e göre (5.1) denkleminin G'ye göre genel çözümü

$$G_0 = X\left(X'W_1^+X\right)^- X'W_1^+ + F\left(I_n - P_{(X:V_1M)}\right)$$

olarak yazılabilir. Burada F keyfi ve $W_1 = V_1 + XUX'$, $C(W_1) = C(X : V_1)$ dir. Eğer $G_0 y$ L_2 modeli altında da $BLUE$ olmaya devam ediyorsa, bu durumda G_0 matrisi (5.2) denklemini de sağlamak zorundadır. Yani

$$G_0 \left(X : V_2 M \right) = \left(X : 0 \right) \tag{5.3}$$

dır. Kolaylık sağlaması açısından;

$$X \left(X' W_1^+ X \right)^- X' W_1^+ = P_{X;W_1^+}$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda $P_{X;W_1^+} \in \left\{ P_{X|V_1 M} \right\}$ olmak üzere (5.3) ifadesinin X kısmı;

$$P_{X;W_1^+} X + F \left(I_n - P_{(X:V_1 M)} \right) X = X \tag{5.4}$$

şekline dönüşür. (5.3) denkleminin $V_2 M$ kısmı ise;

$$P_{X;W_1^+} V_2 M + F \left(I_n - P_{(X:V_1 M)} \right) V_2 M = 0 \tag{5.5}$$

biçimine dönüşür. (5.5) ifadesi F nin her seçimi için sağlanmak zorunda olduğundan

$$\left(I_n - P_{(X:V_1 M)} \right) V_2 M = 0$$

yani $C(V_2 M) \subseteq C(X : V_1 M)$ olmalıdır. Başka bir deyişle bazı N_1 ve N_2 matrisleri için

$$V_2 M = X N_1 + V_1 M N_2 \tag{5.6}$$

olarak yazılabilir. (5.6) ifadesi (5.5) de yerine koyulursa;

$$P_{X;W_1^+}\left(XN_1 + V_1MN_2\right) + F\left(I_n - P_{(X:V_1M)}\right)\left(XN_1 + V_1MN_2\right) = 0 \tag{5.7}$$

elde edilir. Buradan

$$P_{X;W_1^+}\left(XN_1 + V_1MN_2\right) = 0$$

yani

$$P_{X;W_1^+}XN_1 + P_{X;W_1^+}V_1MN_2 = 0$$

olduğu görülür. $P_{X;W_1^+} \in \left\{P_{X|V_1M}\right\}$ yani $G(X:V_1M) = (X:0)$ ifadesini sağlayan matris olduğundan;

$$P_{X;W_1^+}XN_1 = XN_1 \text{ ve } P_{X;W_1^+}V_1MN_2 = 0$$

elde edilir. Buradan $XN_1 = 0$ olduğu açıktır. Bu ifadeler (5.6)'da yerine koyulursa;

$$V_2M = 0 + V_1MN_2$$

yani $V_2M = V_1MN_2$ dolayısıyla $C\left(V_2M\right) \subseteq C\left(V_1M\right)$ olduğu görülür.

Diğer taraftan $C\left(V_2M\right) \subseteq C\left(V_1M\right)$ olsun. Bazı N_2 ler için $V_2M = V_1MN_2$ yazılabilir. $G(X:V_1M) = (X:0)$ ifadesi $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$ matrisi ile sağdan çarpılırsa; $G(X:V_2M) = \left(X:0\right)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

5.2. İki Lineer Karma Model Altında BLUP'ların Eşitliği

Farklı kovaryans matrislerine sahip

$$M_1 = \{y, X\beta + Z\gamma, D_1, R_1\}$$

ve

$$M_2 = \{y, X\beta + Z\gamma, D_2, R_2\}$$

lineer karma modelleri ele alınsın. İki farklı lineer karma model altında $BLUP$'ların eşitliği oldukça hassas bir problemdir ve kovaryans matrisi pozitif tanımlı olmadığında bazı problemler ortaya çıkabilir. Örneğin; M_1 modeli altında A_1y ve A_2y, γ için farklı $BLUP$ temsilleri olmak üzere A_1y, M_2 modeli altında γ için $BLUP$ iken A_2y olmayabilir. Mitra ve Moore [7], Haslett ve Puntanen [12] ve Kala [10] nın çalışmaları göz önüne alınarak $BLUP$ ın değişmezliği aşağıdaki 3 problemle incelenebilir.

a) Ay ön tahmin edicisinin γ için M_1 ve M_2 modelleri altında $BLUP$ olmasını sağlayacak A matrisi hangi şartlarda mevcuttur?
b) M_1 modeli altında γ için $BLUP$ temsillerinin tümü hangi koşullarda M_2 modeli altında da $BLUP$'tır?
c) M_2 modeli altında γ için $BLUP$ temsillerinin tümü hangi koşullarda M_1 modeli altında da $BLUP$'tır?

Teorem 5.1.1'de benzer şekilde belirtildiği gibi [7]'ye göre bu 3 problem tek problemde birleştirilebilir. [7] ve [10]'da $BLUE$ temsillerinin sabit etkili model altında eşitliği ele alınmıştır. $BLUP$ temsillerinin eşitliği ile ilgili çalışmaların sayısı azdır. Bu konuyla ilgili kapsamlı incelemeler Haslett ve Puntanen [11,12,30] tarafından yapılmıştır. Haslett ve Puntanen [30], M_1 lineer karma modeli altında γ

için tüm $BLUP$ temsillerinin aynı zamanda M_2 modeli altında da $BLUP$ olması için gerekli ve yeter şartları vermişlerdir.

Teorem 5.2.1. $M_1 = \{y, X\beta + Z\gamma, D_1, R_1\}$ ve $M_2 = \{y, X\beta + Z\gamma, D_2, R_2\}$ lineer karma modeller ele alınsın. M_1 modeli altında γ için $BLUP$ temsillerinin tümünün M_2 modeli altında da $BLUP$ olmasının gerek ve yeter şartı

$$C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edilsin ki M_1 modeli altında γ için keyfi bir $BLUP$ olan $A_0 y$, M_2 modeli altında da $BLUP$ olsun. Teorem 2.7.4'e göre

$A(X : \Sigma_1 M) = (0 : D_1 Z'M)$ tek çözüme sahiptir ancak ve ancak $C(X : \Sigma_1 M) = \mathbb{R}^{n\times 1}$

dir. [31]'e göre bu ifadenin genel çözümü ise

$$A = DZ'M\left(M\Sigma M\right)^{-} M + F\left(I_n - P_{\left(X:\Sigma X^{\perp}\right)}\right)$$

dir. Burada F keyfidir. $A_0 y$ ön tahmin edicisinin M_2 modeli altında $BLUP$ olması için gerek ve yeter şart

$$A_0 \Sigma_2 M = D_2 Z'M$$

olmasıdır. Yani başka bir deyişle,

$$\left[D_1 Z'M\left(M\Sigma_1 M\right)^{-} M + F\left(I - P_{(X:\Sigma_1)}\right)\right]\Sigma_2 M = D_2 Z'M \tag{5.9}$$

sağlanmalıdır. (5.9) gösterir ki tüm F ler için

$$F\left(I-P_{(X:\Sigma_1)}\right)\Sigma_2 M=0$$

ve dolayısıyla

$$C\left(\Sigma_2 M\right)\subseteq C\left(X:\Sigma_1\right)=C\left(X:\Sigma_1 M\right)$$

şeklindedir. Buradan bazı K_1 ve K_2 matrisleri için

$$\Sigma_2 M=XK_1+\Sigma_1 MK_2 \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.10) ifadesi (5.9)'da yerine yazılırsa

$$D_1Z'M\left(M\Sigma_1 M\right)^{-}M\left(XK_1+\Sigma_1 MK_2\right)=D_2Z'M$$

ve buradan

$$D_1Z'M\left(M\Sigma_1 M\right)^{-}M\Sigma_1 MK_2=D_2Z'M \tag{5.11}$$

elde edilir. $C\left(MZD\right)\subseteq C\left(MZDZ'M+MRM\right)=C\left(M\Sigma M\right)$ olduğundan $C\left(MZD_1\right)\subseteq C\left(M\Sigma_1 M\right)$ olduğu görülür ve buradan [31]'e göre (5.11) ifadesi

$$D_1Z'MK_2=D_2Z'M \tag{5.12}$$

şeklinde yazılabilir. (5.10) ve (5.12) ifadeleri birleştirilirse

$$\begin{pmatrix}\Sigma_2 M\\ D_2Z'M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & \Sigma_1 M\\ 0 & D_1Z'M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_1\\ K_2\end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan (5.8) elde edilir.

Tersini ispatlamak için (5.8) kabul edilsin. Buradan

$$\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\Sigma_2 M = XK_1 + \Sigma_1 MK_2 \text{ ve } D_2 Z'M = D_1 Z'MK_2$$

olduğu görülür. $A(X : \Sigma_1 M) = (0 : D_1 Z'M)$ ifadesi $\begin{pmatrix} I_p & K_1 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$ matrisi ile sağdan çarpılırsa

$$A(X : \Sigma_1 M)\begin{pmatrix} I_p & K_1 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} = (0 : D_1 Z'M)\begin{pmatrix} I_p & K_1 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(X : XK_1 + \Sigma_1 MK_2) = (0 : D_1 Z'MK_2)$$

$$\Rightarrow A(X : \Sigma_2 M) = (0 : D_2 Z'M)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 5.2.2. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix}$

b) $C\begin{pmatrix} M\Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} M\Sigma_1 M \\ D_1 Z'M \end{pmatrix}$

İspat: Farklı kovaryans matrislerine sahip

$$F_1 = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V_1\}$$

ve

$$F_2 = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V_2\} \tag{5.13}$$

sabit etkili parçalanmış lineer modelleri ele alınsın. Bu modellerin düzgün indirgenmiş lineer modelleri

$$F_{1.1} = \{M_1 y, M_1 X_2\beta_2, M_1 V_1 M_1\}$$

ve

$$F_{2.1} = \{M_1 y, M_1 X_2\beta_2, M_1 V_2 M_1\} \tag{5.14}$$

şeklindedir. (5.14) modelleri (5.13) modellerinin soldan M_1 dik izdüşüm matrisiyle çarpılmasıyla elde edilir. Bu durumda genelleştirilmiş Frisch-Waugh-Lovell Teoremi'ne göre

$$\left\{BLUE\left(M_1 X_2\beta_2 \middle| F_{i.1}\right)\right\} = \left\{BLUE\left(M_1 X_2\beta_2 \middle| F_i\right)\right\}$$

ifadesi sağlanır [18,32]. Bu durumda Teorem 5.1.1'e göre

$$\left\{BLUE\left(M_1 X_2\beta_2 \middle| F_1\right)\right\} \subseteq \left\{BLUE\left(M_1 X_2\beta_2 \middle| F_2\right)\right\} \tag{5.15}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C\left[M_1 V_2 M_1 \left(M_1 X_2\right)^{\perp}\right] \subseteq C\left[M_1 V_1 M_1 \left(M_1 X_2\right)^{\perp}\right] \tag{5.16}$$

dir. F_1 ve F_2 modelleri altında β_2 nin tüm tahmin edilebilir parametrik fonksiyonları (3.6)'ya göre bazı C matrisleri için $CM_1X_2\beta_2$ formundadır. Hatta bu modeller altında β_2 tahmin edilebilir olduğunda (5.16) ifadesi

$$\left\{BLUE\left(\beta_2|F_1\right)\right\} \subseteq \left\{BLUE\left(\beta_2|F_2\right)\right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bir başka deyişle

$$\left\{BLUP\left(\gamma|M_1\right)\right\} \subseteq \left\{BLUP\left(\gamma|M_2\right)\right\} \tag{5.17}$$

$\Leftrightarrow$

$$C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

dir. Burada Σ_i ifadeleri yerine R_i kullanılabileceğine dikkat edilmelidir.

$$M_{*1} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},\ V_{*i} = \begin{pmatrix} R_i & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix} \text{ ve } X_* = \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \left(X_{*1} : X_{*2}\right)$$

olmak üzere,

$$M_{*1}V_{*i}M_{*1} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_i & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MR_iM & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix},$$

$$M_{*1}X_{*2} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MZ \\ I_q \end{pmatrix},$$

$$\left(M_{*1}X_{*2}\right)^{\perp} = \begin{pmatrix} I_n \\ -Z'M \end{pmatrix},$$

$$M_{*1}V_{*i}M_{*1}\left(M_{*1}X_{*2}\right)^{\perp}=\begin{pmatrix} MR_iM \\ -D_iZ'M \end{pmatrix}$$

elde edilir. Şimdi (5.13) modellerine,

$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{0i}\right)=D_i,\ i=1,2$$

olmak üzere, γ için

$$y_o=\gamma+\varepsilon_{0i}$$

stokastik kısıtlarının eklenmesiyle elde edilen

$$F_{*1}=\left\{y_*,X_*\pi,V_{*1}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix},\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}\right\},$$

ve

$$F_{*2}=\left\{y_*,X_*\pi,V_{*2}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix},\begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\right\}$$

modellerinin indirgenmesiyle elde edilen

$$F_{*1.1}=\left\{\begin{pmatrix} My \\ y_0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} MZ \\ I_q \end{pmatrix}\gamma,\begin{pmatrix} MR_1M & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}\right\}$$

ve

$$F_{*2.1}=\left\{\begin{pmatrix} My \\ y_0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} MZ \\ I_q \end{pmatrix}\gamma,\begin{pmatrix} MR_2M & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\right\} \qquad \textbf{(5.19)}$$

modelleri ele alınsın. (5.16) ifadesi (5.19) modeli için yazılırsa

$$C\begin{pmatrix} MR_2M \\ D_2Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} MR_1M \\ D_1Z'M \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

elde edilir. Σ_i ve R_i matrisleri yer değiştirebildiğinden

$$C\begin{pmatrix} M\Sigma_2M \\ D_2Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} M\Sigma_1M \\ D_1Z'M \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

olur. Bu durumda (5.18) ifadesinden (5.21) ifadesine geçiş olduğu açıkça görülmektedir.

Tersini görmek için (5.20) göz önüne alınırsa herhangi bir F_2 matrisi için

$$\begin{pmatrix} MR_2M \\ D_2Z'M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MR_1M \\ D_1Z'M \end{pmatrix} F_2$$

yazılabilir. Buradan $MR_2M = MR_1MF_2$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$M\left(R_2M - R_1MF_2\right) = 0$$

yani bazı F_1 matrisleri için

$$R_2M - R_1MF_2 = XF_1$$

dir. Buradan

$$R_2M = R_1MF_2 + XF_1$$

elde edilir. Her iki taraf M ile çarpılırsa

$$MR_2M = MR_1MF_2 + MXF_1$$

yani $MR_2M = MR_1MF_2$ bulunur. Bu durumda

$$C\left(R_2M\right) \subseteq C\left(X : R_1M\right) \qquad \textbf{(5.22)}$$

olduğu görülür. Benzer biçimde $D_2Z'M = D_1Z'MF_2$ ifadesinden

$$C\left(D_2Z'M\right) \subseteq C\left(D_1Z'M\right) \qquad \textbf{(5.23)}$$

elde edilir. (5.22) ve (5.23) ifadelerinden $C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1Z'M \end{pmatrix}$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

5.3. İki Lineer Karma Model Altında BLUE ve BLUP

Farklı kovaryans matrislerine sahip

$$F_{*i} = \left\{y_*, X_*\pi, V_{*i}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_i & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix}\right\},\ i = 1,2$$

sabit etkili lineer modelleri ve

$$M_i = \left\{y, X\beta + Z\gamma, D_i, R_i\right\},\ i = 1,2$$

lineer karma modelleri ele alınsın. Aşağıdaki teoremde bu modeller altında *BLUE* ve *BLUP* ifadeleri beraber ele alınarak modellerin biri altında sabit etkiler için *BLUE* ve rasgele etkiler için *BLUP*'ın diğer model altında da sabit etkiler için *BLUE* ve rasgele etkiler için *BLUP* kalmaya devam etmesi ile ilgili gerek ve yeter şartlar verilmektedir.

Teorem 5.3.1. Farklı kovaryans matrislerine sahip

$$F_{*1} = \{y_*, X_*\pi, V_{*1}\}$$

ve

$$F_{*2} = \{y_*, X_*\pi, V_{*2}\}$$

lineer modelleri ile

$$M_1 = \{y, X\beta + Z\gamma, D_1, R_1\}$$

ve

$$M_2 = \{y, X\beta + Z\gamma, D_2, R_2\}$$

lineer karma modelleri ele alınsın. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\{BLUE(X_*\pi | F_{*1})\} \subseteq \{BLUE(X_*\pi | F_{*2})\}$,

b) $\{BLUE(X\beta | M_1)\} \subseteq \{BLUE(X\beta | M_2)\}$

$\{BLUP(\gamma M_1)\} \subseteq \{BLUP(\gamma | M_2)\}$,

c) $C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} \Sigma_1 M \\ D_1 Z'M \end{pmatrix}$,

d) $C\begin{pmatrix} R_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} R_1 M \\ D_1 Z'M \end{pmatrix}$.

İspat: F_{*1} model altında $X_*\pi$ için $BLUE$ temsillerinin tümünün F_{*2} model altında da $X_*\pi$ için $BLUE$ kalmaya devam etmesi için gerek ve yeter şart Teorem 3.4.1'e göre $By = BLUE(X_*\pi | F_{*i})$ olmak üzere

$$B\left(X_*:V_{*1}X_*^{\perp}\right)=\left(X_*:0\right)\Rightarrow B\left(X_*:V_{*2}X_*^{\perp}\right)=\left(X_*:0\right) \qquad \textbf{(5.24)}$$

sağlanmasıdır. Bu ilişki kısaca

$$\left\{BLUE\left(X_*\pi\middle|F_{*1}\right)\right\}\subseteq\left\{BLUE\left(X_*\pi\middle|F_{*2}\right)\right\}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\left\{BLUE\left(X_*\pi\middle|F_{*i}\right)\right\}$ ifadesi F_{*i} model altında $X_*\pi$ için tüm $BLUE$ temsillerini belirtmektedir. Teorem 4.5.1'e göre (5.24) ifadesi $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} B_{11}-ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix}\left(X:\Sigma_1 M\right)=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} B_{11}-ZB_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix}\left(X:\Sigma_2 M\right)=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & D_2 Z'M \end{pmatrix}$$

ifadesine dönüşür. Sonuç 4.5.2'den yukarıdaki ifade

$$\left\{BLUE\left(X\beta\middle|M_1\right)\right\}\subseteq\left\{BLUE\left(X\beta\middle|M_2\right)\right\}$$

ve

$$\left\{BLUP\left(\gamma M_1\right)\right\}\subseteq\left\{BLUP\left(\gamma\middle|M_2\right)\right\}$$

ifadelerine denktir. Böylece (a) ve (b) arasındaki denklik görülmüş olur. Diğer yandan Teorem 5.1.1'e göre; F_{*1} modeli altında $X_*\pi$ için $BLUE$ temsillerinin tümünün F_{*2} modeli altında da $X_*\pi$ için $BLUE$ kalmaya devam etmesi için gerek ve yeter şart

$$C\left(V_{*2}X_*^{\perp}\right)\subseteq C\left(V_{*1}X_*^{\perp}\right)$$

yani

$$C\begin{pmatrix} R_2M \\ D_2Z'M \end{pmatrix}\subseteq C\begin{pmatrix} R_1M \\ D_1Z'M \end{pmatrix}$$

olmasıdır. Böylece (a) ve (d) arasındaki denklik görülmüş olur. Σ_i ifadeleri ile R_i ifadeleri yer değiştirebileceğinden

$$C\begin{pmatrix} \Sigma_2M \\ D_2Z'M \end{pmatrix}\subseteq C\begin{pmatrix} \Sigma_1M \\ D_1Z'M \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (c) ve (d) arasındaki denklik görülür. (b) ve (c) arasındaki denkliği görmek için (b) ifadesinin sağlandığı kabul edilsin. M_1 ve M_2 lineer karma modelleri ele alındığında Teorem 5.1.1'e göre M_1 modeli altında $BLUE(X\beta)$ temsillerinin tümünün M_2 modeli altında da $BLUE$ kalmaya devam etmesinin gerek ve yeter şartı $C\left(\Sigma_2M\right)\subseteq C\left(\Sigma_1M\right)$ sağlanmasıdır. Ayrıca Teorem 5.2.1'e göre M_1 modeli altında $BLUP(\gamma)$ temsillerinin tümünün M_2 modeli altında da $BLUP$ kalmaya devam etmesinin gerek ve yeter şartı

$$C\begin{pmatrix} \Sigma_2M \\ D_2Z'M \end{pmatrix}\subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1M \\ 0 & D_1Z'M \end{pmatrix}$$

olmasıdır. Bu son ifadeden $C\left(\Sigma_2M\right)\subseteq C\left(X:\Sigma_1M\right)$ olduğu görülür. $C\left(X\right)$ ve $C\left(\Sigma_1M\right)$ ayrık olduğundan yani

$$C\left(X\right)\cap C\left(\Sigma_1M\right)=\{0\}$$

sağlandığından (c) ifadesi görülmüş olur. Diğer taraftan (c) ifadesinin sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda $C(\Sigma_2 M) \subseteq C(\Sigma_1 M)$ yazılabilir. $C(X) \cap C(\Sigma_1 M) = \{0\}$ olduğundan

$$C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix}$$

elde edilir ve (b) ifadesi sağlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır. □

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sabit etkileri içeren $L=\{y,X\beta,V\}$ lineer modeli ile hem sabit hem rasgele etkileri içeren $M=\{y,X\beta+Z\gamma,D,R\}$ lineer karma modeli ele alınarak sabit ve rasgele etkilerin tahminleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi. Özel olarak farklı kovaryans matrislerine sahip iki lineer model ve iki lineer karma model altında $BLUE$ ve $BLUP$ ile ilgili karşılaştırmalar yapıldı.

Bölüm 3'te $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen nonnegatif tanımlı matris olmak üzere, $E(\varepsilon)=0$ ve $\operatorname{cov}(\varepsilon)=V$ varsayımları altında $L=\{y,X\beta,V\}$ sabit etkileri içeren genel lineer model için β parametre vektörünün tahmin edilebilir parametrik fonksiyonlarının tahmini ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi. Özellikle Temel $BLUE$ Denklemi olarak bilinen

$$Gy=BLUE(X\beta|L)\Leftrightarrow G(X:VX^{\perp})=(X:0)$$

denkleminin ispatı detaylı olarak verildi.

Bölüm 4'te $E(\gamma)=0$, $\operatorname{cov}(\gamma)=D$, $E(\varepsilon)=0$, $\operatorname{cov}(\varepsilon)=R$ ve $\operatorname{cov}(\gamma,\varepsilon)=0$ varsayımları altında $M=\{y,X\beta+Z\gamma,D,R\}$ lineer karma modelinde $\xi=Z\gamma+\varepsilon$ olarak alındığında, M modelinin $M_S=\{y,X\beta,ZD'Z+R\}=\{y,X\beta,\Sigma\}$ sabit etkili model şeklinde gösterilebildiği yani, M lineer karma modeli altında sabit etkilerin tahmini için M_S sabit etkili lineer modelin ele alınabileceği ifade edildi ve bu model vasıtasıyla $X\beta$ için $BLUE$ denklemi elde edildi.

Ayrıca $L=\{y, X\beta, V\}$ sabit etkileri içeren lineer model ile $y_f \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ yeni gözlemleri içeren $y_f = X_f\beta + \varepsilon_f$ modeli birlikte ele alınarak

$$N=\left\{\begin{pmatrix} y \\ y_f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X\beta \\ X_f\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\right\}$$

modeli elde edildi ve bu model altında Temel $BLUP$ Denklemi olarak bilinen

$$Ay = BLUP\left(y_f \middle| N\right) \Leftrightarrow A\left(X : VX^{\perp}\right) = \left(X_f : V_{21}X^{\perp}\right)$$

denkleminin ispatı detaylı olarak verildi. γ rasgele etki vektörünün $BLUP$' ını elde etmek için M lineer karma modelinin yanı sıra rasgele gözlemleri de içeren $\gamma = 0\cdot\beta + \varepsilon_f$ modeli birlikte ele alınarak

$$N_{mix}=\left\{\begin{pmatrix} y \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}\beta, \begin{pmatrix} ZDZ'+R & ZD \\ DZ' & D \end{pmatrix}\right\}$$

modeli ve bu model vasıtasıyla M lineer karma modeli altında $X\beta$ için $BLUE$ ve γ için $BLUP$ denklemi elde edildi. Böylece M lineer karma modeli altında $X\beta$ sabit etkiler vektörünün $BLUE$'su ve γ rasgele etkiler vektörünün $BLUP$'ını birlikte veren denklemin

$$\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}\left(X : \Sigma M\right) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & DZ'M \end{pmatrix}$$

olduğu gösterildi.

$F=\{y, X\beta+Z\gamma, R\}$ sabit etkili parçalanmış modeline, $\operatorname{cov}(\varepsilon_0)=D$ olmak üzere γ için stokastik kısıtlar $y_o=\gamma+\varepsilon_0$ eklenmesiyle

$$F_*=\{y_*, X_*\pi, V_*\}=\left\{\begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\right\}$$

sabit etkili modeli elde edildi. Teorem 4.5.1'de F_* modelindeki $X_*\pi$ parametre vektörü için *BLUE* ile M karma modelindeki $X\beta$ için *BLUE* ve γ için *BLUP* arasındaki ilişkiler ile ilgili bazı sonuçlar verildi. Sonuç 4.5.2'de ise F_* modeli altında $X_*\pi$ vektörünün *BLUE* gösterimi olan bir B matrisi vasıtasıyla M lineer karma modeli altında $X\beta$ için tüm *BLUE* ve γ için tüm *BLUP* temsillerinin elde edilebileceği gösterildi.

Bölüm 5'te farklı kovaryans matrislerine sahip iki lineer model ve iki lineer karma model ele alınarak bu modeller altında bazı karşılaştırmalar yapıldı. Öncelikle $L_1=\{y, X\beta, V_1\}$ ve $L_2=\{y, X\beta, V_2\}$ lineer modelleri ele alınarak, Teorem 5.1.1'de L_1 modeli altında $X\beta$ için tüm *BLUE* temsillerinin L_2 modeli altında da *BLUE* kalmaya devam etmesi için gerek ve yeter şartın

$$C(V_2X^{\perp})\subseteq C(V_1X^{\perp})$$

olduğunun ispatı detaylı olarak verildi. Benzer şekilde farklı kovaryans matrislerine sahip $M_1=\{y, X\beta+Z\gamma, D_1, R_1\}$ ve $M_2=\{y, X\beta+Z\gamma, D_2, R_2\}$ lineer karma modelleri ele alınarak, Teorem 5.2.1'de M_1 modeli altında γ için *BLUP* temsillerinin tümünün M_2 modeli altında da *BLUP* olmasının gerek ve yeter şartının

$$C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix}$$

olduğu gösterildi. Farklı kovaryans matrislerine sahip $F_1 = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V_1\}$ ve $F_2 = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V_2\}$ sabit etkili parçalanmış lineer modelleri ele alınarak Teorem 5.2.2'de

$$C\begin{pmatrix} \Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} X & \Sigma_1 M \\ 0 & D_1 Z'M \end{pmatrix} \text{ ve } C\begin{pmatrix} M\Sigma_2 M \\ D_2 Z'M \end{pmatrix} \subseteq C\begin{pmatrix} M\Sigma_1 M \\ D_1 Z'M \end{pmatrix}$$

ifadelerinin denk olduğu gösterildi. Teorem 5.3.1'de ise, farklı kovaryans matrislerine sahip

$$F_{*i} = \{y_*, X_*\pi, V_{*i}\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_i & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix} \right\},\ i = 1,2$$

sabit etkili lineer modelleri ve M_i lineer karma modelleri ele alınarak F_{*i} modelleri altında $X_*\pi$ vektörünün $BLUE$'ları ile M_i modelleri altında $X\beta$ vektörünün $BLUE$'ları ve γ vektörünün $BLUP$'ları için bazı denk koşullar elde edildi.

Bu çalışmada ele alınan konu ε ve γ vektörlerinin ilişkili olduğu durumda incelenebileceği gibi aynı zamanda çok değişkenli katlı modeller için genelleştirilebilir. Ayrıca M lineer karma modelinin alt modelleri $M_i = \{y, X_i\beta_i + Z_i\gamma_i, D_i, R_i\}$ ele alınarak, bu modeller altında sabit ve rasgele etkilerin $BLUE$ ve $BLUP$ tahminleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] EISENHART, C., The assumptions underlying the analysis of variance, Biometrics, 3, 1-21, 1947.

[2] HENDERSON, C.R., Estimation of genetic parameters, The Annals of Mathematical Statistics, 21, 309-310, 1950.

[3] HENDERSON, C.R., Selection index and expected genetic advance, Statistical Genetics and Plant Breeding, National Research Council Publication No. 982, National Academy of Sciences, Washington, 141–163, 1963.

[4] HARVILLE, D., Extension of the Gauss–Markov theorem to include the estimation of random effects, The Annals of Mathematical Statistics, 4, 384–395, 1976.

[5] HARVILLE, D., Some useful representations for constrained mixed-model estimation, J Am Stat Assoc. 74:200–206, 1979.

[6] RAO, C.R., Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals, Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability: Berkeley, California, 1965/1966, vol 1, L.M. Le Cam and J. Neyman, eds., University of California Press, Berkeley, 355–372, 1967.

[7] MITRA, S.K., MOORE BJ., Gauss–Markov estimation with an incorrect dispersion matrix, Sankhya, Ser A 35, 139–152, 1973.

[8] PUNTANEN, S., STYAN G.P.H., The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator (with discussion), The American Statistician, 43, 151–161, 1989.

[9] ZYSKIND, G., On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models, The Annals of Mathematical Statistics, 38, 1092–1109, 1967.

[10] KALA, R., Projectors and linear estimation in general linear models, Commun Stat Theory Methods 10, 849–873, 1981.

[11] HASLETT, S.J., PUNTANEN, S., Equality of BLUEs or BLUPs under two linear models using stochastic restrictions, Stat Papers, 51, 465-475, 2010.

[12] HASLETT, S.J., PUNTANEN, S., On the equality of the BLUPs under two linear mixed models, Metrika, 74, 381-395, 2011.

[13] LIU, Y., HASLETT, S.J., PUNTANEN, S., ISOTALO, J., Equalities between OLSE, BLUE and BLUP in the linear model, Stat Papers, 2013.

[14] İYİT, N., İlişkili veri analizinde lineer karma modellerin yapılandırılması, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2008.

[15] SARI, M., Japon bıldırcınlarının (Coturnix coturnix japonica) kesim ve karkas özelliklerine ait genetik parametrelerinin REML metodu ile damızlık değerlerinin BLUP metodu ile tahmini, Doktora Tezi, Kafkas Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Kars, 2009.

[16] MAGNUS, J.R., NEUDECKER, H., Matrix differantial calculus with applications in statistics and econometrics, John Wiley, G.Britain, 1988.

[17] VENIT, S., BISHOP, W., Elementary linear algebra, PWS publishers, Massachusetts, 1985.

[18] SENGUPTA, D., JAMMALAMADAKA, S.R., Linear models an intergated approach, World Scientific, Singapore, 2003.

[19] SEBER, G.A.F., Linear regression analysis, John Wiley, New York, 1977.

[20] GRAYBILL, F.A., Introduction to matrices with applications in statistics, Wadworth Publising Company inc., California, 1969.

[21] SEBER, G.A.F., A matrix handbook for statisticians, John Wiley& Sons, Inc., New Jersey, 2008.

[22] PUNTANEN, S., STYAN G.P.H., ISOTALO, J., Matrix tricks for linear statistical models, Our Personal Top Twenty, Springer, Heidelberg, 2011.

[23] JOHNSON, R.A., WICHERN, D.W., Applied multivariate statistical analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

[24] AKDENİZ, F., ÖZTÜRK, F., Lineer modeller, Ankara, 1996.

[25] HARVILLE, D.A., Matrix algebra from a statiscians perspective, Springer, 1997.

[26] TIAN, Y., PUNTANEN, S., On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models, Linear Algebra and its Applications, 430, 2622–2641, 2009.

[27] HENDERSON, H.V., SEARLE, S.R., On deriving the inverse of a sum of matrices, SIAM Review, 23, 53–60 1981.

[28] ROBİNSON, G.K., That BLUP is a good thing: the estimation of random effects, Statistical Science, 6, 15–51, 1991.

[29] SEARLE, S.R., The matrix handling of BLUE and BLUP in the mixed linear model, Linear Algebra and its Applications, 264, 291–311, 1997.

[30] HASLETT, S.J., PUNTANEN, S., On the equality of the BLUPs under two linear mixed models, Report A378, Department of Mathematics and Statistics, University of Tampere, 2008.

[31] RAO, C.R., MİTRA, S.K., Generalized inverse of matrices and its applications, Wiley, New York, 1971.

[32] GROβ, J., PUNTANEN, S., Estimation under a general partitioned linear model, Linear Algebra Appl., 321, 131-144, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Melike YİĞİT, 03.01.1990 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2007 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2011 yılında tamamladı. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'da yüksek lisans eğitimine başladı. Şu anda bir kamu kurumunda görev yapmaktadır.