T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TİPTEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sema BAYRAKTAR

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Şevket GÜR**

Haziran 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TİPTEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sema BAYRAKTAR

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 25 / 06 /2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL Jüri Başkanı	Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN Üye	Doç. Dr. Şevket GÜR Üye

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde; ders aşamasında yanımda olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Elman Hazar'a, hem araştırma hem de yazım kısmında bana her türlü fedakârlığı gösteren, bilgisi ve tecrübesiyle beni her zaman yönlendiren ve bana her türlü olanağı sağlayan, Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi, değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Şevket Gür'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\nabla^2 = \Delta$	: Laplace operatörü
∇	: Gradiant operatör
Ω	: R^n 'de düzgün sınıra sahip sınırlı bölge
$u(x,t)$	: Bilinmeyen fonksiyon
$H^2(\Omega), H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$	: Sobolev uzayı
(u,v)	: $\int_\Omega uvdx$
$\lVert u \rVert_{L^p(\Omega)}$	: $\lVert \cdot \rVert_P$
$\lVert \cdot \rVert$	: $\lVert \cdot \rVert_2$

ÖZET

Anahtar kelimeler: Çözümün patlaması, asimptotik davranış, dalga denklemi, pseudoparabolic denklem.

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde kısmi diferansiyel denklemlerin davranışından bahsedilerek teze giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde lineer olmayan bir dalga denkleminin uzun süreli davranışı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde pseudoparabolic denklemlerin çözümlerinin patlaması incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise lineer olmayan dalga denklemi için çözümlerin global davranışı incelenmiştir.

Altıncı bölümde ise tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SOME TYPES OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Key Words: Blow-up of Solution, Asymptotic Behavior, Wave Equation

This thesis is consists of six chapters.

In the first chapter, it is mentioned about behavior of solution for partial differential equations and there is introduction to the thesis.

In the second chapter, main definitions and concepts used in the thesis are given.

In the third chapter, it is concerned nonlinear wave equation long-time behavior.

In the forth chapter, it is concerned with blow-up of solution to pseudobolic equations.

In the fifth chapter, it is concerned stabilization of the energy and continuous dependence of solution to nonlinear wave equation.

Finally in the sixth chapter, the results are stated gained through the study of thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sayısal yöntemlerin (ya da analizin) amacı, matematiksel problemlerin çözümü için uygun ve doğru sonuç veren teknikler geliştirmektir. Çözümü istenen problemi tanımlamak, formüle etmek ve çözüm için kullanılacak en uygun yöntemi seçmek analizi yapan kişinin amacıdır. Adi diferansiyel denklemler, kısmi türevli diferansiyel denklemler, sayısal integrasyon, seri hesaplamaları gibi birçok problem türü vardır. Biz bu problem türlerinden kısmi türevli diferansiyel denklemleri ele alacağız. Bilindiği üzere problemlerin çözümü her zaman var olmayabilir. Bu durumda çözüm bulunmasa da problemin yaklaşık çözümü elde edilebilir.

Bir otomobili çalıştırdığınızda veya ampulü açtığınızda birçok şey olur. Bunların bazıları sistemin başlamasının eşsiz parçasıdır. Bu geçici şeyler sadece başlama sırasında olur ve daha sonra sistem kararlı duruma geçer. Sistemlerin davranışını başlatmak çok önemli olabilir ama bazen sistemin uzun süreli davranışını ya da kararlı halini araştırmak isteyebiliriz. Örneğin $f(n)$ fonksiyonu göz önüne alındığında n çok büyük olduğunda fonksiyonun özelliklerini açıklamak için davranışı incelenir. $f(n)=n^2+3n$ olduğunda n çok büyükse $3n$ terimi n^2 ile kıyaslandığında önemsiz hale gelir. $f(n)$ fonksiyonunun $n\to\infty$ için n^2'ye asimptotik olarak eşdeğer olduğu söylenir.

Davranış incelemesi aynı zamanda bilgisayar bilimindeki algoritmaların analizinde veri kümelerine çok büyük girişler uygulandığında algoritmanın performansını ele alırken, kaza analizinde belli zaman ve mekândaki çok sayıdaki kaza sayılarını modelleyerek kazanın nedenini tespit ederken de kullanılır.

İlk davranış incelemeleri 1928 yılında Milne, W.E. tarafından aralığı sınırsız olan sonlu değer probleminin davranışını incelemesiyle başlamıştır [30], yine 1928 yılında Ford, W.B. uçağın uzak kısımlarındaki integral fonksiyonların davranışını incelemiştir [31].

Filtrasyon teorisi, termodinamikler ve hidrodinamiklerin çeşitli problemlerindeki çalışmalarda görünen lineer olmayan pseudoparabolic denklemler ([9,11,21])

$$u_t - \Delta u_t - \nu\Delta u = f\left(x,u,\nabla u\right), \quad \nu > 0, \tag{1.1}$$

formundadır. (1.1)'in lineer hali 1954'te S.L.Sobolev [21] tarafından çalışılmıştır. Bu yüzden (1.1) formundaki bu denklem Sobolev tipi denklem olarak adlandırılır. S.A. Galpern [13], M M ve L lineer eliptik operatörler olmak üzere,

$$Mu_t + Lu = f \tag{1.2}$$

formundaki denklem için Cauchy problemi çalışmıştır. R.E. Showalter [18], M ve L ikinci derece eliptik operatörler olmak üzere, (1.2) lineer pseudoparabolic denklemini araştırmıştır. Showalter ve Ting [20], 1970 yılındaki Pseudoparabolic partial differential equations adlı makalesinde (1.2) denklemi için başlangıç sınır değer probleminin zayıf çözümünün varlık, teklik ve düzgünlüğünü araştırmışlardır. Gerçekten [20], (1.2) pseudoparabolic denklemin ilk makalesi olarak adlandırılabilir.

Lineer olmayan pseudoparabolic denklemlerin ilk makalesi

$$M\left(t\right)u_t + L\left(t\right)u = f\left(t,u\right) \tag{1.3}$$

formundaki diferansiyel operatör denklemi için başlangıç değer probleminin sıfır çözümünün varlık ve tekliğinin bilindiği durumda Showalter [19] tarafından yazılmıştır. Lineer olmayan pseudoparabolic denklemlerin geniş bir sınıfını kapsayan lineer olmayan diferansiyel operatör denklemler için Cauchy probleminin tekliği ve global varlığın sistematik çalışması Showalter ve Ting [20]'in makalesinde ve Gajewski, Gröger, Zacharias [12]'in kitabında yazılmıştır.

(1.1)’in önemli örneklerinden biri

$$u_t - \nu u_{xx} - u_{xxt} - u_x + uu_x = 0 \quad \textbf{(1.4)}$$

Benjamin-Bona-Mahony-Bürgers (BBMB) denklemidir. (1.1) denkleminde f, $f = \left(\vec{b}, \nabla u\right) + \nabla \vec{F}(u)$ formundadır. Wang ve Yang [23] tek boyutlu BBMB denklemi için periyodik başlangıç sınır değer problemi ile üretilen yarı grubun sonlu boyutlu global çekicinin varlığını ispatlamıştır. Çelebi, Kalantarov ve Polat [10], (1.1) denkleminde f, $f = \left(\vec{b}, \nabla u\right) + \nabla \vec{F}(u) + h(x)$ olduğu durumda periyodik başlangıç sınır değer problemi ile üretilen yarı grubun üstel çekicisi ve global çekicisinin varlık problemini çalışmıştır.

Amick, Bona ve Schonbeck [8], bu denklem için Cauchy probleminin $L^2(R)$ ve $L^\infty(R)$’de çözümlerinin asimptotik davranışını araştırmıştır. Elde edilen bu sonuçlar

$$u_t - \nu u_{xx} - u_{xxt} - u_x + u^m u_x = 0, \quad m \geq 0$$

formundaki denklemler için Zhang [24] tarafından geliştirilmiştir. Karch [15] çok boyutlu BBMB denklemi için Cauchy probleminin çözümlerinin asimptotik davranışını araştırmıştır.

Stanislavova, Stefanov ve Wang [22], $H^1\left(R^3\right)$’te çok boyutlu BBMB denklemi için global çekicinin varlık problemini çalışmıştır.

Korpusov ve Sveshnikov [16] aşağıdaki Benjamin-Bona-Mahony-Bürgers denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün global yokluğu için gerekli koşulları bulmuştur.

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u - uu_{x_1} - u^3 = 0$$

Lineer olmayan pseudoparabolic denklemlerin çözümlerinin patlamasında ilk sonuç, Levine [17] tarafından elde edilmiştir. Levine, P ve A lineer pozitif operatörler ve $F(u)$, H Hilbert uzayında potansiyel operatör olmak üzere aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel operatör denklem için Cauchy problemini araştırmıştır.

$$Pu_t + Au = F(u)$$

Bu sonuç f,

$$f(s)s - k\int_0^s f(\tau)d\tau \geq 0, \quad k > 2 \tag{1.5}$$

olduğu durumda (1.5), $u_t - \Delta u - \Delta u_t = f(u)$ formundaki denklemler için başlangıç sınır değer problemleri ve Cauchy problemi için çözümlerin patlamasının gerekli koşullarını verir.

Haraux ve Zuazua [2] , Nakao [5] , 2. derece dalga denklemlerinin çözümlerinin zayıflama hızının kestirimleri ve sıfır çözümün asimptotik kararlılığı teoremlerini elde etmişlerdir. Daha yüksek dereceli lineer olmayan dalga denklemlerinin benzer sonuçları da Marcati [4] tarafından ele alınmıştır.

$$u_{tt} - \Delta u + \beta|u_t|^2 u_t = \alpha\Delta u_t, \quad x \in \Omega, t > 0, \tag{1.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.7}$$

(1.6) denkleminin sol yanındaki son terim $f(u)$ ile değiştirilerek 1980'de Webb [25] tarafından çalışılmıştır. Webb, (1.6) ve (1.7) için global güçlü çözümün varlığını $f(u)$'ya göre dört koşul altında $n = 1,2,3$ için ispatlamıştır. [27]'de $n \geq 4$ için global güçlü çözümün varlığı bazı varsayımlar altında elde edilmiştir. Bazı varsayımlar altında (1.6) ve (1.7) için çözümlerin asimptotik davranışı Runzhang ve Yacheng [29] tarafından çalışılmıştır.

3. bölümde, V. Kalantarov ve A. Kurt tarafından 1997 yılında yazılan 4. dereceden lineer olmayan bir dalga denkleminin uzun zaman davranışı isimli çalışma [1], 4. bölümde, M. Meyvacı tarafından 2009 yılında yazılan pseudoparabolic denklemlerin çözümlerinin patlaması isimli çalışma [7] detaylı bir şekilde incelenecektir.

Görüldüğü gibi 1928 yılından bu yana denklemlerin davranışı üzerine birçok araştırma yapılmıştır. Geniş bir alana sahip olan davranış incelemesinin günden güne araştırmaları artmakta, inceleme alanı genişlemektedir.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1.

$\Omega \subset R^n$ bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. Ω üzerinde tanımlanmış

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonları sınıfına, $L_p(\Omega)$ uzayı denir.

$1 \leq p < \infty$ için üzerindeki norm,

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_p^p = \int_{\Omega} |u|^p \, dx$$

şeklinde tanımlanır. $p = 2$ için $L_p(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve üzerindeki iç çarpım,

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \forall u,v \in L_2(\Omega)$$

biçiminde tanımlanır.

Eşitsizlik 2.1. (Hölder eşitsizliği)

$1 \leq p,q < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun.

Bu durumda $u \in L_p(U), v \in L_q(U)$ için

$$\int_U |u(x)v(x)|\,dx \le \|u\|_{L_p(U)} \|v\|_{L_q(U)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Eşitsizlik 2.2. (Young eşitsizliği)

$p, q \in \mathrm{R} > 0$ pozitif reel sayı olsun. Öyle ki; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde;

$a, b \in R \ge 0$ için

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = 1$$

olmalıdır.

$\forall a, b, \varepsilon > 0$ ve $q = p/(p-1), 1 < p < \infty$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad ab \le \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^{1/(p-1)}} b^q.$$

Eşitsizlik 2.3. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)

$x, y \in R^n$

$$|x \cdot y| \le |x||y|$$

Eşitsizlik 2.4. (Poincare-Friedrichs eşitsizliği)

$\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge olsun. $c = c(\Omega) > 0$ olmak üzere

$\forall u \in W_p^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)} \le c\|u\|_{W_q^1(\Omega)}$$

olacak şekilde $c = c(p,n) > 0$ sabiti vardır. Burada $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ olmalıdır.

Eşitsizlik 2.5. (Poincare' eşitsizliği)

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ ve C eşitsizlikler ilgili sabit olmak üzere,

$$\|u\| \le C\|\nabla u\|$$

olmalıdır.

Eşitsizlik 2.5. (Ladyzhenskaya eşitsizliği)

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ ve C eşitsizlikler ilgili sabit olmak üzere,

$$\|u\|_4 \le C\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}$$

olmalıdır.

Eşitsizlik 2.6. (Sobolev eşitsizliği)

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ ve $q \ge 2$, C_1 eşitsizlikle ilgili sabit olmak üzere

$\|u\|_q \le C_1\|\nabla u\|$ olmalıdır.

Lemma 2.1. (Lagnese, Haraux) $E: R^{+} \to R^{+}$ artmayan fonksiyon olsun ve bir $T > 0$ sabitinin olduğunu farz edelim. Öyle ki;

$$\int_{t}^{\infty} E(s)\,ds \leq TE(t), \forall t \in R^{+}$$

Bu durumda

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{T}}, \forall t \geq T$$

olmaktadır.

Lyapunov Anlamında Kararlı Çözümler

Tanım 2.2.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) \end{aligned}\right\} (*)$$

sisteminin bir çözümü olsun. Eğer istenildiği kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşın, öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabiliyorsa ki;

$$\left| x(t_0) - \bar{x}(t_0) \right| < \delta$$
$$\left| y(t_0) - \bar{y}(t_0) \right| < \delta$$

Koşulunu sağlayan keyfi $(x(t), y(t))$ çözümü için,

$$\left|x(t)-\overline{x}(t)\right|<\varepsilon$$
$$\left|y(t)-\overline{y}(t)\right|<\varepsilon, \quad t\geq t_0$$

sağlansın. Bu durumda $\left(\overline{x}(t),\overline{y}(t)\right)$ çözümü $(*)$ sisteminin Lyapunov anlamında kararlı çözümüdür veya sadece kararlı çözümüdür denir. Tanımdan anlaşılacağı üzere, bir çözümün kararlı olması için, herhangi bir $t=t_0$ anında bu çözüme yakın olan bütün çözümlerin, $t>t_0$ değerlerinde de bu çözüme yakın kalmakta devam etmelidir.

Tanım 2.3.

$\left(\overline{x}(t),\overline{y}(t)\right)$, $(*)$ sisteminin kararlı çözümü olsun. Eğer keyfi $\left(x(t),y(t)\right)$ çözümü

$$\lim_{t\to\infty}\left|\overline{x}(t)-x(t)\right|=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\left|\overline{y}(t)-y(t)\right|=0$$

koşulunu sağlıyorsa, bu halde $\left(\overline{x}(t),\overline{y}(t)\right)$ asimptotik kararlıdır denir. Bu tanımlardaki çözüm sistemin denge noktası (sıfır çözümü) ise denge noktası kararlıdır veya asimptotik kararlıdır denir. Ayrıca verilen çözümün kararlı olup olmaması t_0 sayısına bağlı değildir ve özel olarak $t_0=0$ alınabilir.

BÖLÜM 3. 4. DERECEDEN LİNEER OLMAYAN BİR DALGA DENKLEMİNİN (MARINE RISER EQUATION) UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

3.1. Giriş ve Problemin İfadesi

$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0 \quad \textbf{(3.1)}$$

sınır koşulları altında

$$mu_{tt}+ku_{xxxx}-\left[a(x)u_x\right]_x+\gamma u_{tx}+bu_t\left|u_t\right|^p=0 \quad \textbf{(3.2)}$$

problemi ele alınsın. Burada $p,m,k\ b$ pozitif sayılar, γ reel sayı ve $a(x)\in C^1[0,l]$'dir.

Sıfır Çözümün Asimptotik Kararlılığı

Teorem 3.1. Kabul edelim ki

i) $p,m,k\ b$ pozitif sayılar, γ bir reel sayı.

ii) $a(\cdot)\in C^1[0,l]$ ve $\forall x\in[0,l]$ için $c_0\geq 0$ olduğu durumda $a(x)\geq -c_0$ ve $k-c_0\,l^2/\pi^2=d_0>0$

şartları sağlansın.

Bu durumda (3.1)-(3.2) probleminin sıfır çözümü $\|u\|_1 = \left(\int_0^l \left(u_t^2 + u_{xx}^2 \right) dx \right)^{1/2}$ normuna göre global asimptotik kararlıdır ve (3.1) sınır koşullarını sağlayan (3.2) denkleminin her çözümü,

$$\frac{m}{2}\int_0^l u_t^2(x,t)dx + \frac{d_0}{2}\int_0^l u_{xx}^2(x,t)dx \le \begin{cases} At^{-(p+1)/(p+2)}, & p \in (0,1) \\ At^{-2/(p+2)}, & p \ge 1,\ t \in [1,\infty) \end{cases} \tag{3.3}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada A, $u|_{t=0}$, $u_t|_{t=0}$ başlangıç verilerine ve l, c_0, b, p, m, γ sayılarına bağlıdır.

İspat 3.1. $u(x,t)$, (3.1) - (3.2) probleminin bir çözümü olsun.

(3.2) denklemi ile u_t çarpılırsa,

$$mu_{tt}u_t + ku_{xxxx}u_t - \left[a(x)u_x\right]_x u_t + \gamma u_{tx}u_t + bu_t|u_t|^p u_t = 0 \tag{3.4}$$

elde edilir.

(3.4) denklemindeki veriler tek tek ele alındığında,

$$u_{tt}u_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_t^2$$

$$\begin{aligned} u_t u_{xxxx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xxx}u_t\right) - u_{tx}u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xxx}u_t\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{tx}u_{xx}\right) + u_{txx}u_{xx} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xxx}u_t - u_{tx}u_{xx}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_{xx}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[a(x)u_x\right]_x u_t &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)u_xu_t\right) - u_{tx}a(x)u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)u_xu_t\right) - \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial}{\partial t}u_x^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)u_xu_t\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}a(x)u_x^2 \end{aligned}$$

$$u_{tx}u_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u_t^2$$

elde edilir.

Elde edilenler (3.4) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2\right) + k\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xxx}u_t - u_{tx}u_{xx}\right) + k\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_{xx}^2 - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(a\left(x\right)u_x u_t\right)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(x\right)u_x^2\right) + \frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_t^2\right) + b\left|u_t\right|^{p+2} = 0 \qquad \textbf{(3.5)}$$

olmaktadır.

(3.5) denklemi $\left(0,l\right)$ üzerinde integre edilirse,

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\int_0^l u_t^2 dx + k\left(u_t u_{xxx}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} - k\left(u_{tx}u_{xx}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{d}{dt}\frac{k}{2}\int_0^l u_{xx}^2 dx - \left(a\left(x\right)u_x u_t\right)\Big|_{x=0}^{x=l}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l a\left(x\right)u_x^2 dx + \frac{\gamma}{2}\left(u_t^2\right)\Big|_{x=0}^{x=l} + b\int_0^l \left|u_t\right|^{p+2} dx = 0$$

olur.

(3.1)'deki sınır koşullarına bağlı olarak (3.5) denklemi,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left\|u_t\right\|^2 + \frac{k}{2}\left\|u_{xx}\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^l a\left(x\right)u_x^2 dx\right] + b\int_0^l \left|u_t\right|^{p+2} dx = 0. \qquad \textbf{(3.6)}$$

olmaktadır.

(3.2) denklemi u ile çarpılırsa,

$$mu_{tt}u + ku_{xxxx}u - \left[a(x)u_x\right]_x u + \gamma u_{tx}u + bu_t\left|u_t\right|^p u = 0 \tag{3.7}$$

denklemi elde edilir.

(3.7) denklemindeki veriler tek tek ele alındığında,

$$u_{tt}u = \frac{\partial}{\partial t}(u_t u) - u_t^2$$

$$u_{xxxx}u = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xxx}u) - u_x u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xxx}u) - \left(\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}u_x) - u_{xx}^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xxx}u - u_{xx}u_x) + u_{xx}^2$$

$$\left[a(x)u_x\right]_x u = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)u_x u\right) - u_x a(x)u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)u_x u\right) - a(x)u_x^2$$

$$u_{tx}u = \frac{\partial}{\partial x}(u_t u) - u_t u_x$$

ifadeleri meydana gelir.

Elde edilenler (3.7) denkleminde yerine yazıldığında,

$$m\left[\frac{\partial}{\partial t}(u_t u) - u_t^2\right] + k\frac{\partial}{\partial x}(u_{xxx}u - u_{xx}u_x) + ku_{xx}^2 - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)u_x u\right) \tag{3.8}$$
$$+a(x)u_x^2 + \gamma\frac{\partial}{\partial x}(u_t u) - \gamma u_t u_x + buu_t\left|u_t\right|^p = 0$$

olmaktadır.

(3.8) denklemi x 'e göre integre edilirse,

$$m\frac{d}{dt}\int_0^l uu_t dx - m\int_0^l u_t^2 dx + k\left(uu_{xxx}\right)|_{x=0}^{x=l} - k\left(u_x u_{xx}\right)|_{x=0}^{x=l} + k\int_0^l u_{xx}^2 dx - \left(a(x)uu_x\right)|_{x=0}^{x=l}$$
$$+\int_0^l a(x)u_x^2 dx + \gamma\left(u_t u\right)|_{x=0}^{x=l} - \gamma\int_0^l u_x u_t dx + b\int_0^l uu_t\left|u_t\right|^p dx = 0$$

ifadesi elde edilir.

(3.1) sınır koşullarına bağlı olarak bu denklem,

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(u,u_t\right)\right] - m\left\|u_t\right\|^2 + k\left\|u_{xx}\right\|^2 + \int_0^l a(x)u_x^2 dx - \gamma\left(u_x,\ u_t\right) + b\int_0^l uu_t\left|u_t\right|^p dx = 0 \qquad \textbf{(3.9)}$$

olmaktadır.

(3.9) denklemi, $\delta_1 > 0$ ile çarpılıp (3.6) denklemine eklenirse

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left\|u_t\right\|^2 + \frac{k}{2}\left\|u_{xx}\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^l a(x)u_x^2 dx + \delta_1 m\left(u,u_t\right)\right] - \delta_1 m\left\|u_t\right\|^2 + \delta_1 k\left\|u_{xx}\right\|^2$$
$$+\delta_1\int_0^l a(x)u_x^2 dx - \delta_1\gamma\left(u_x,u_t\right) + b\delta_1\int_0^l uu_t\left|u_t\right|^p dx + b\int_0^l \left|u_t\right|^{p+2} dx = 0 \qquad \textbf{(3.10)}$$

denklemi elde edilir.

$$E_1(t) = \frac{m}{2}\left\|u_t\right\|^2 + \frac{k}{2}\left\|u_{xx}\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^l a(x)u_x^2 dx + \delta_1 m\left(u,u_t\right) \qquad \textbf{(3.11)}$$

olsun.

Bu durumda (3.10) denklemi

$$\frac{d}{dt}E_1(t)-\delta_1 m\|u_t\|^2+\delta_1 k\|u_{xx}\|^2+\delta_1\int_0^l a(x)u_x^2dx-\delta_1\gamma(u_x,u_t)$$
$$-b\delta_1\int_0^l |u||u_t|^{p+1}dx+b\int_0^l |u_t|^{p+2}dx\le 0 \qquad \textbf{(3.12)}$$

şeklinde yazılabilir. Kolaylıkla gösterilebilir ki,

$$\|u_x\|^2\le\frac{l^2}{\pi^2}\|u_{xx}\|^2 \qquad \textbf{(3.13)}$$

dır. Burada $(uu_x)_x=u_x^2+u_{xx}u$ denklemi x'e göre integre edildikten sonra

$$\int_0^l (uu_x)_x=\int_0^l u_x^2dx+\int_0^l (uu_{xx})dx$$

$$uu_x\,|_0^l=\int_0^l u_x^2dx+\int_0^l (uu_{xx})dx$$

$$\int_0^l u_x^2dx=-\int_0^l (uu_{xx})dx \qquad (*)$$

elde edilir.

Cauchy eşitsizliği ve Poincare-Friedrichs eşitsizliğinden ([6], sayfa 192)

$$\int_0^l u^2dx\le\frac{l^2}{\pi^2}\int_0^l u_x^2dx \qquad \textbf{(3.14)}$$

yazılabilir.

$(*)$ eşitsizliği yardımıyla

$$\int_0^l u_x^2 dx \le \left|\int_0^l u u_{xx}\right| dx \le \int_0^l |u||u_{xx}|\,dx \le \left(\int_0^l u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l u_{xx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{l}{\pi}\left(\int_0^l u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l u_{xx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikten

$$\left(\int_0^l u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{l}{\pi}\left(\int_0^l u_{xx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

(3.13) aşağıdaki eşitsizlikte kullanılırsa,

$$\left|\delta_1 \gamma\left(u_x, u_t\right)\right| \le \delta_1 |\gamma| \|u_x\| \|u_t\| \le \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\delta_1^2 \gamma^2}{2}\|u_x\|^2 \le \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}\|u_{xx}\|^2 \qquad \textbf{(3.15)}$$

ifadesi meydana gelir.

(3.15) eşitsizliğini kullanarak (3.12) denklemi

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + \left(\delta_1 k - \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}\right)\|u_{xx}\|^2 + \left(-\delta_1 m - \frac{1}{2}\right)\|u_t\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx$$
$$- b\delta_1 \int_0^l |u||u_t|^{p+1} dx + b\int_0^l |u_t|^{p+2} dx \le 0 \qquad \textbf{(3.16)}$$

şeklinde yazılır.

$$0 < \delta_1 < \frac{2\pi^2 d_0}{\gamma^2 l^2} \qquad \textbf{(3.17)}$$

olsun. Bu durumda,

$$L = \delta_1 k - \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{2\pi^2} > 0$$

olur. Teorem 3.1' in (ii) koşulu yardımıyla

$$d_0 = k - \frac{c_0 l^2}{\pi^2}$$

$$\delta_1 \left(k - \frac{\delta_1 \gamma^2 l^2}{2\pi^2} \right) > 0, \quad \delta_1 > 0$$

$$k - \frac{\delta_1 \gamma^2 l^2}{2\pi^2} > 0, \quad k > \frac{\delta_1 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}$$

$$0 < \delta_1 < \frac{2k\pi^2}{\gamma^2 l^2}, \quad d_0 = \frac{k\pi^2 - c_0 l^2}{\pi^2}, \quad \delta_1 < \frac{2\pi^2}{\gamma^2 l^2} \left(\frac{k\pi^2 - c_0 l^2}{\pi^2} \right)$$

$$\delta_1 < \frac{2\pi^2 d_0}{\gamma^2 l^2}$$

olmaktadır.

Bu durumda (3.16) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) \leq \left(\delta_1 m + \frac{1}{2} \right) \|u_t\|^2 + m\|u_t\|^2 - m\|u_t\|^2 - L\|u_{xx}\|^2 - \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx \\ + b\delta_1 \int_0^l |u||u_t|^{p+1} dx - b\int_0^l |u_t|^{p+2} dx \end{aligned} \qquad \textbf{(3.18)}$$

ifadesi elde edilir.

$a(x) \geq -c_0$ olduğu için (3.11) denkleminden

$$k\int_0^l u_{xx}^2dx+\int_0^l a(x)u_x^2dx \geq k\int_0^l u_{xx}^2dx-c_0\int_0^l u_x^2dx \geq \left(k-\frac{c_0l^2}{\pi^2}\right)\int_0^l u_{xx}^2dx \tag{3.19}$$

$$=d_0\int_0^l u_{xx}^2dx$$

olmaktadır.

$$E(t)=\frac{m}{2}\|u_t\|^2+\frac{k}{2}\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\int_0^l a(x)u_x^2dx$$

olsun.

Böylece (3.19) yardımıyla,

$$E(t)\geq \frac{m}{2}\|u_t\|^2+\frac{d_0}{2}\|u_{xx}\|^2 \geq \min\left\{\frac{m}{2},\frac{d_0}{2}\right\}\|u\|_1^2 \tag{3.20}$$

ve $a(.)\in C^1[0,l]$ olduğundan (3.13)'den

$$E(t)\leq \frac{m}{2}\|u_t\|^2+\frac{k}{2}\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\int_0^l a(x)u_x^2dx$$

$$\leq \frac{m}{2}\|u_t\|^2+\frac{k}{2}\|u_{xx}\|^2+\frac{\max|a(x)|}{2}\int_0^l u_x^2dx$$

$$\leq \frac{m}{2}\|u_t\|^2+\frac{k}{2}\|u_{xx}\|^2+\frac{l^2A_1}{2\pi^2}\int_0^l u_{xx}^2dx$$

$$\leq \frac{m}{2}\|u_t\|^2+\left(\frac{k}{2}+\frac{l^2A_1}{2\pi^2}\right)\|u_{xx}\|^2 \leq \max\left\{\frac{m}{2},\frac{l^2A_1}{2\pi^2}+\frac{k}{2}\right\}\|u\|_1^2$$

olmaktadır.

Burada $A_1 = \max_{x\in[0,l]} |a(x)|$ 'dır.

(3.6) denkleminden

$$\frac{d}{dt}E(t) = -b\int_0^l |u_t|^{p+2}\, dx \le 0 \tag{3.21}$$

elde edilir. Böylece $E(t)$ bir Lyapunov fonksiyondur ve (3.2) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır.

(3.21) eşitsizliğinden

$$E(t) - E(0) + b\int_0^t\int_0^l |u_t|^{p+2}\, dxds = 0$$

bulunur.

$E(t) \ge 0$ olduğundan

$$\int_0^t\int_0^l |u_t|^{p+2}\, dxds \le \frac{E(0)}{b} \tag{3.22}$$

elde edilir.

$D_1 = \min\{1, L/k, \delta_1\}$ olsun.

Eğer $\int_0^l a(x)u_x^2 dx$ negatif değilse

$$m\|u_t\|^2+L\|u_{xx}\|^2+\delta_1\int_0^l a(x)u_x^2dx$$

$$\geq \min\{1,L/k,\delta_1\}\left(m\|u_t\|^2+k\|u_{xx}\|^2+\int_0^l a(x)u_x^2dx\right) \tag{3.23}$$

$$\geq 2D_1E(t)$$

olduğu açıktır.

$D_2=\min\left\{1,\dfrac{\delta_1}{k}\left(d_0-\dfrac{\delta_1\gamma^2l^2}{2\pi^2}\right)\right\}$ olsun.

Eğer $\int_0^l a(x)u_x^2dx$ negatifse

$$m\|u_t\|^2+L\|u_{xx}\|^2+\delta_1\int_0^l a(x)u_x^2dx\geq m\|u_t\|^2+L\|u_{xx}\|^2-\delta_1c_0\int_0^l u_x^2dx$$

$$\geq m\|u_t\|^2+L\|u_{xx}\|^2-\frac{\delta_1c_0l^2}{\pi^2}\int_0^l u_{xx}^2dx$$

$$=m\|u_t\|^2+\left(\delta_1k-\frac{\delta_1^2\gamma^2l^2}{2\pi^2}-\frac{\delta_1c_0l^2}{\pi^2}\right)\|u_{xx}\|^2$$

$$=m\|u_t\|^2+\left[\delta_1\left(k-\frac{c_0l^2}{\pi^2}\right)-\frac{\delta_1^2\gamma^2l^2}{2\pi^2}\right]\|u_{xx}\|^2$$

$$=m\|u_t\|^2+\left[\delta_1d_0-\frac{\delta_1^2\gamma^2l^2}{2\pi^2}\right]\|u_{xx}\|^2$$

$$= m\|u_t\|^2 + \delta_1\left(d_0 - \frac{\delta_1\gamma^2 l^2}{2\pi^2}\right)\|u_{xx}\|^2$$

$$\geq \min\left\{1, \frac{\delta_1}{k}\left(d_0 - \frac{\delta_1\gamma^2 l^2}{2\pi^2}\right)\right\}\left(m\|u_t\|^2 + k\|u_{xx}\|^2\right)$$

$$\geq D_2\left(m\|u_t\|^2 + k\|u_{xx}\|^2 + \int_0^l a(x)u_x^2 dx\right) = 2D_2E(t)$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 + \delta_1\int_0^l a(x)u_x^2 dx \geq 2D_3E(t) \qquad \textbf{(3.24)}$$

dır. Burada $D_3 = \min\{D_1, D_2\}$ 'dir.

(3.24) eşitsizliği yardımıyla (3.18)'den,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq \left(\delta_1 m + \frac{1}{2}\right)\|u_t\|^2 + m\|u_t\|^2 - m\|u_t\|^2 - L\|u_{xx}\|^2$$
$$-\delta_1\int_0^l a(x)u_x^2 dx + b\delta_1\int_0^l |u||u_t|^{p+1} dx - b\int_0^l |u_t|^{p+2} dx$$

olmaktadır. Buradan

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq B\|u_t\|^2 - 2D_3E(t) + b\delta_1\int_0^l |u||u_t|^{p+1} dx - b\int_0^l |u_t|^{p+2} dx \qquad \textbf{(3.25)}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $B = \delta_1 m + \frac{1}{2} + m$ 'dir.

(3.21) denkleminin türevi negatiftir. Bu, $E(t)$'nin artmayan olduğunu gösterir. Bu yüzden (3.25) eşitsizliğinin t'ye göre integre edilmesiyle,

$$\begin{aligned}&2D_3tE(t)\le 2D_3\int_0^t E(s)\,ds\le\left[E_1(0)-E_1(t)\right]+B\int_0^t\int_0^l u_t^{\,2}dxds\\&+b\delta_1\int_0^t\int_0^l |u||u_t|^{p+1}\,dxds-b\int_0^t\int_0^l |u||u_t|^{p+2}\,dxds\end{aligned} \quad \textbf{(3.26)}$$

olmaktadır.

(3.26)'daki eşitsizlikten

$$2D_3tE(t)\le\left[E_1(0)-E_1(t)\right]+B\int_0^t\int_0^l u_t^{\,2}dxds+b\delta_1\int_0^t\int_0^l |u||u_t|^{p+1}\,dxds \quad \textbf{(3.27)}$$

ifadesi elde edilir.

Poincare-Friedrichs eşitsizliği ve (3.13)'teki eşitsizlik yardımıyla,

$$\|u\|^2\le\frac{l^4}{\pi^4}\|u_{xx}\|^2 \quad \textbf{(3.28)}$$

$$\left(\|u\|^2\le\frac{l^2}{\pi^2}\|u_x\|^2\le\frac{l^2}{\pi^2}\frac{l^2}{\pi^2}\|u_{xx}\|^2\le\frac{l^4}{\pi^4}\|u_{xx}\|^2\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak $E_1(t)$ tahmin edilebilir.

$$E_1(t)=\frac{m}{2}\|u_t\|^2+\frac{k}{2}\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{2}\int_0^l a(x)u_x^2dx+\delta_1 m(u,u_t)$$

$$\ge\frac{m}{2}\|u_t\|^2+\frac{k}{2}\|u_{xx}\|^2-\frac{c_0}{2}\int_0^l u_x^2dx-\delta_1 m|(u,u_t)|$$

$$\geq \frac{m}{2}\|u_t\|^2 + \frac{k}{2}\|u_{xx}\|^2 - \frac{c_0}{2}\frac{l^2}{\pi^2}\|u_{xx}\|^2 - \delta_1 m\left|(u, u_t)\right|$$

$$\geq \frac{m}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(k - \frac{c_0 l^2}{\pi^2}\right)\|u_{xx}\|^2 - \frac{\delta_1 m}{2}\|u\|^2 - \frac{\delta_1 m}{2}\|u_t\|^2$$

$$\geq \frac{m}{2}\|u_t\|^2 + \frac{d_0}{2}\|u_{xx}\|^2 - \frac{\delta_1 m}{2}\|u\|^2 - \frac{\delta_1 m}{2}\|u_t\|^2$$

$$\geq \frac{m}{2}(1-\delta_1)\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(d_0 - \frac{\delta_1 m l^4}{\pi^4}\right)\|u_{xx}\|^2 \qquad \textbf{(3.29)}$$

olmaktadır.

Böylece $\delta_1 < \min\left\{\frac{2\pi^2 d_0}{\gamma^2 l^2}, 1, \frac{d_0 \pi^4}{m l^4}\right\}$ için

$$E_1(t) \geq d_1\left(\|u_t\|^2 + \|u_{xx}\|^2\right) \qquad \textbf{(3.30)}$$

sağlanır. Burada $d_1 = \frac{1}{2}\min\left\{m - \delta_1 m, d_0 - \frac{\delta_1 m l^4}{\pi^4}\right\}$'dir.

Böylece

$$E_1(0) - E_1(t) \leq E_1(0) \qquad \textbf{(3.31)}$$

dir. $u(0,t) = 0$ olduğundan $u(x,t) = \int_0^x u_x(s,t)\,ds$'dir.

$\forall\, x \in [0, l]$ için

$$|u(x,t)| \le \int_0^x |u_x(s,t)|\,ds \le \int_0^l |u_x(x,t)|\,ds \le \sqrt{l}\left(\int_0^l u_x^{\,2}(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_0^l u_x(x,t)\,dx = \int_0^l 1\cdot|u_x|\,dx \le \left(\int_0^l 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{l}\left(\int_0^l |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

olur. Bu durumda

$$\max_{x\in[0,l]}|u(x,t)| \le \sqrt{l}\left(\int_0^l |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.32}$$

elde edilir. Böylece (3.32)'den, $q \ge 1$ için

$$\left(\int_0^l |u(x,t)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le l^{\frac{1}{q}} \max_{x\in[0,l]}|u(x,t)| \le l^{\left(\frac{1}{q}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\int_0^l u_x^{\,2}(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olmaktadır. Buradan

$$\int_0^l |u(x,t)|^q dx \le l^{(q+2)/2}\left(\int_0^l u_x^{\,2}(x,t)\,dx\right)^{q/2} \tag{3.33}$$

olur.

Hölder eşitsizliği ve (3.34) eşitsizliği kullanılarak, $B\int_0^t\int_0^l u_t^{\,2}dxds$ ve $b\delta_1\int_0^t\int_0^l |u||u_t|^{p+1}dxds$ terimleri hesaplanabilir.

$$I_1 \equiv B\int_0^t\int_0^l u_t^{\,2} dxds \le B\left(\int_0^t\int_0^l 1 dxds\right)^{p/(p+2)}\left(\left(\int_0^t\int_0^l |u_t|^{p+2}\, dxds\right)\right)^{2/(p+2)}$$

(3.22)'deki eşitsizlikten,

$I_1 \le C_1 t^{p/(p+2)}$'dir. Burada $C_1 = Bl^{p/(p+2)}\left(\dfrac{E(0)}{b}\right)^{2/(p+2)}$'dır.

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv b\delta_1\int_0^t\int_0^l |u||u_t|^{p+1}\, dxds \\ &\le b\delta_1\left(\int_0^t\int_0^l |u_t|^{p+2}\, dxds\right)^{(p+1)/(p+2)}\left(\int_0^t\int_0^l |u|^{p+2}\, dxds\right)^{1/(p+2)} \end{aligned} \tag{3.34}$$

olmaktadır. (3.34) ve (3.13)'deki eşitsizlikler yardımıyla

$$\int_0^l |u|^{p+2}\, dx \le l^{(p+4)/2}\left(\int_0^l u_x^2 dx\right)^{(p+2)/2} \le l^{(p+4)/2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{p+2}\left(\int_0^l u_{xx}^2 dx\right)^{(p+2)/2}$$

elde edilir.

Böylece (3.22)'deki eşitsizlik ve (3.20)-(3.21)'de gösterilen $\int_0^l u_{xx}^2 dx \le \dfrac{2}{d_0}E(0)$ eşitsizliği sayesinde

$$I_2 \le b\delta_1\left(\frac{E(0)}{b}\right)^{(p+1)/(p+2)}\left(l^{(p+4)/2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{p+2}\int_0^t\left(\int_0^l u_{xx}^2 dx\right)^{(p+2)/2} ds\right)^{1/(p+2)} \le C_2 t^{1/(p+2)} \tag{3.35}$$

ifadesi elde edilir.

Burada $C_2 = \delta_1 b^{1/(p+2)} E(0)^{(3p+4)/2(p+2)} \dfrac{l^{(3p+8)/2(p+2)}}{\pi} \left(\dfrac{2}{d_0}\right)^{1/2}$ ’dir.

(3.27)’deki eşitsizlikte (3.31),(3.34) ve (3.35) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$2D_3 t E(t) \le E_1(0) + C_1 t^{p/(p+2)} + C_2 t^{1/(p+2)}$$

elde edilir. Buradan

$$E(t) \le (2D_3)^{-1}\left[E_1(0)t^{-1} + C_1 t^{-2/(p+2)} + C_2 t^{-(p+1)/(p+2)}\right]$$

olmaktadır. Böylece $t \ge 1$ değerleri için,

$$E(t) \le \begin{cases} At^{-(p+1)/(p+2)}, & p \in (0,1), \\ At^{-2/(p+2)}, & p \ge 1, \end{cases}$$

sağlanır. Burada

$A = (2D_3)^{-1}\left[E_1(0) + C_1 + C_2\right]$ ’dır.

Bu durumda (3.20)’deki eşitsizlikten

$$\frac{m}{2}\|u_t\|^2 + \frac{d_0}{2}\|u_{xx}\|^2 \le \begin{cases} At^{-(p+1)/(p+2)}, & p \in (0,1), \\ At^{-2/(p+2)}, & p \ge 1. \end{cases}$$

olmaktadır.

Bu eşitsizlikten (3.1) - (3.2)’ nin sıfır çözümünün global asimptotik kararlı olduğu görülür.

BÖLÜM 4. PSEUDOPARABOLIC DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

4.1. Giriş

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u - u^p u_{x_1} = |u|^{2m} u, x \in \Omega, t > 0, \quad \textbf{(4.1)}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad \textbf{(4.2)}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad \textbf{(4.3)}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın. Burada $\Omega \in R^n$, $\partial\Omega$ yeterince düzgün sınırlanmasıyla tanımı sınırlandırılmış, $p \geq 1$ tamsayı ve $m \geq 1$ sayısı verilmiştir.

Lemma 4.2. Kabul edelim ki a pozitif olsun, ikinci dereceden türeve sahip olan $\psi(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} &\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)\left[\psi'(t)\right]^2 \geq -2M_1\psi'(t)\psi(t) - M_2\left[\psi(t)\right]^2, \quad \forall t > 0 \\ &\psi(0) > 0, \quad \psi'(0) > -\gamma_2\alpha^{-1}\psi(0), \quad M_1 + M_2 > 0 \end{aligned} \quad \textbf{(4.4)}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $\alpha > 0, \quad M_1, M_2 \geq 0, \quad M_1 + M_2 > 0$ 'dır.

Bu durumda $\psi(t)$

$$t \to t_1 \leq t_2 = \frac{1}{2\sqrt{M_1^2 + \alpha M_2}} \ln \frac{\gamma_1\psi(0) + \alpha\psi'(0)}{\gamma_2\psi(0) + \alpha\psi'(0)}$$

olduğunda sonsuza gider.

Burada $\gamma_1 = -M_1 + \sqrt{M_1^2 + \alpha M_2}$ ve $\gamma_2 = -M_1 - \sqrt{M_1^2 + \alpha M_2}$ 'dir.

4.3. Çözümlerin Patlaması

Teorem 4.3.1. Kabul edelim ki $1 < p < m$ ve u_0,

$$\|u_0\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} > \|\nabla u_0\|^2 + \left[\|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \frac{(m-p)2^{(m+1)/(m-p)}|\Omega|}{(p+1)(2m+1)}\right]$$

$$\times \frac{\sqrt{8(p+1)}}{m(6p+5)-1}\left[\sqrt{2(p+1)} + \sqrt{m(m+1)(6p+5)+2p+1-m}\right]$$

koşullarını sağlayan başlangıç fonksiyonu olsun. Bu durumda (4.1) - (4.3) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat 4.3.1. (4.1) denklemi u ile çarpılıp Ω üzerinde integre edilirse,

$$uu_t - u\Delta u_t - u\Delta u - uu^p u_{x_1} = u|u|^{2m} u$$

$$\int_\Omega uu_t dx - \int_\Omega u\Delta u_t dx - \int_\Omega u\Delta u dx - \int_\Omega uu^p u_{x_1} dx = \int_\Omega u|u|^{2m} u dx \qquad \textbf{(4.5)}$$

olmaktadır.

(4.5) denklemindeki veriler tek tek ele alındığında,

$$\int_\Omega uu_t dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2$$

$$\int_\Omega u\Delta u_t dx = u\nabla u_t\,|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx = -\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\nabla u^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla u^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\int_{\Omega} u\Delta u dx = u\nabla u\mid_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx = -\int_{\Omega} \nabla u^2 dx = -\|\nabla u\|^2$$

$$\int_{\Omega} u u^p u_{x_1} dx = \int_{\Omega} u^{p+1} u_{x_1} dx = \frac{1}{p+2}\frac{d}{dx_1}\int_{\Omega} u^{p+2} dx = 0$$

$$\int_{\Omega} u|u|^{2m} u dx = \int_{\Omega} |u|^{2m+2} dx = \int_{\Omega} |u|^{2(m+1)} dx = \|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilenler (4.5) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 - \left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right) - \left(-\|\nabla u\|^2\right) - 0 = \|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2\right] = -\|\nabla u\|^2 + \|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} \tag{4.6}$$

ifadesi oluşur.

(4.1) denklemi u_t ile çarpılıp Ω üzerinde integre edilirse,

$$\int_{\Omega} u_t u_t dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx - \int_{\Omega} u_t u^p u_{x_1} dx = \int_{\Omega} u_t |u|^{2m} u dx \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.7) ifadesindeki veriler tek tek ele alındığında,

$$\int_{\Omega} u_t u_t dx = \int_{\Omega} u_t^2 dx = \|u_t\|^2$$

$$\int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx = u_t \nabla u_t \mid_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx = -\int_{\Omega} \nabla u_t^{\ 2} dx = -\|\nabla u_t\|^2$$

$$\int_{\Omega} u_t \Delta u dx = u_t \nabla u \mid_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx = -\int_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \nabla u^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \nabla u^2 dx$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\int_{\Omega} u_t |u|^{2m} u dx = \int_{\Omega} u_t |u|^{2m+1} dx = \frac{1}{2(m+1)}\int_{\Omega} \frac{d}{dt}|u|^{2m+2} dx = \frac{1}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u|^{2m+2} dx$$
$$= \frac{1}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

$$\int_{\Omega} u_t u^p u_{x_1} dx = \frac{1}{p+1}\int_{\Omega} \frac{d}{dx_1} u_t u^{p+1} u_{x_1} dx = -\frac{1}{p+1}\int_{\Omega} u^{p+1} u_{tx_1} dx = -\frac{1}{p+1}\left(u^{p+1}, u_{tx_1}\right)$$

olmaktadır.

Elde edilenler (4.7) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\|u_t\|^2 - \left(-\|\nabla u_t\|^2\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right) - \left(-\frac{1}{p+1}\left(u^{p+1}, u_{tx_1}\right)\right) = \frac{1}{2m+1}\frac{d}{dt}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 = \frac{1}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p+1}\left(u^{p+1}, u_{tx_1}\right) \qquad \textbf{(4.8)}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $p < m$, C_0 negatif olmayan bir parametre olduğu durumda

$\psi(t) := \|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + C_0$ olsun.

Buradan ;

$$\psi'(t) = 2\left[(u,u_t) + (\nabla u, \nabla u_t)\right]$$

olmaktadır.

Cauchy – Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\left[\psi'(t)\right]^2 := 4\left[(u,u_t) + (\nabla u, \nabla u_t)\right]^2 = 4\left[(u,u_t)^2 + 2(u,u_t)(\nabla u, \nabla u_t) + (\nabla u, \nabla u_t)^2\right]$$

$$= 4\left[\left(\int_\Omega u u_t dx\right)^2 + 2\int_\Omega u u_t dx \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \left(\int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx\right)^2\right]$$

$$\leq 4\left[\begin{array}{l}\left(\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u_t^{\,2} dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ +2\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u_t^{\,2} dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \nabla u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \nabla u_t^{\,2} dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\int_\Omega \nabla u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \nabla u_t^{\,2} dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\end{array}\right]$$

$$\leq 4\left[\|u\|^2\|u_t\|^2 + 2\|u\|\|u_t\|\|\nabla u\|\|\nabla u_t\| + \|\nabla u\|^2\|\nabla u_t\|^2\right]$$

$$\leq 4\left[\|u\|^2\|u_t\|^2 + 2\|u\|\|\nabla u_t\|\|u_t\|\|\nabla u\| + \|\nabla u\|^2\|\nabla u_t\|^2\right]$$

$$\leq 4\left[\|u\|^2\|u_t\|^2 + 2\left(\frac{\left(\|u\|\|\nabla u_t\|\right)^2}{2} + \frac{\left(\|u_t\|\|\nabla u\|\right)^2}{2}\right) + \|\nabla u\|^2\|\nabla u_t\|^2\right]$$

$$\leq 4\left[\|u\|^2\|u_t\|^2 + \|u\|^2\|\nabla u_t\|^2 + \|u_t\|^2\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^2\|\nabla u_t\|^2\right]$$

$$\le 4\left[\|u_t\|^2\left(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right)+\|\nabla u_t\|^2\left(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right)\right]$$

$$\le 4\left(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right)\left(\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right)$$

olur. Buradan,

$$\left[\psi'(t)\right]^2 \le 4\psi(t)\left(\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2\right) \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilir.

Cauchy – Schwarz eşitsizliği ve Young eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right| \le 2\int_\Omega \|\nabla u\|\,\|\nabla u_t\|\,dx \le 2\left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \|\nabla u_t\|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le 2\|\nabla u\|\,\|\nabla u_t\| \le 2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\|\nabla u\|\sqrt{\varepsilon_0}\,\|\nabla u_t\|$$
$$\le 2\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\|\nabla u\|^2+\frac{\varepsilon_0}{2}\|\nabla u_t\|^2\right) \le \frac{1}{\varepsilon_0}\|\nabla u\|^2+\varepsilon_0\|\nabla u_t\|^2$$

$$\left|\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right| \le \frac{1}{\varepsilon_0}\|\nabla u\|^2+\varepsilon_0\|\nabla u_t\|^2 \tag{4.10}$$

$$\left|\left(u^{p+1},u_{tx_1}\right)\right| = \int_\Omega |u|^{p+1}u_{tx_1}\,dx \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\int_\Omega |u|^{2(p+1)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varepsilon_1}\left(\int_\Omega {u_{tx_1}}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |u|^{2(p+1)}\,dx+\frac{\varepsilon_1}{2}\int_\Omega {u_{tx_1}}^2 dx \le \frac{1}{2\varepsilon_1}\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\|u_t\|^2$$

$$\left|\left(u^{p+1},u_{tx_1}\right)\right| \le \frac{1}{2\varepsilon_1}\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\|\nabla u_t\|^2 \tag{4.11}$$

eşitsizlikleri meydana gelir.

Hölder eşitsizliğinde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olduğu için,

$$p=\frac{m+1}{p+1},\frac{1}{q}=1-\frac{p+1}{m+1}=\frac{m+1-p-1}{m+1}=\frac{m-p}{m+1},q=\frac{m+1}{m-p}$$

olmaktadır. Buna göre

$$\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}=\int_{\Omega}1\cdot\|u\|^{2(p+1)}dx\le\left(\left(\int_{\Omega}\|u\|^{2(p+1)}dx\right)^{\frac{m+1}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{m+1}}\left(\left(\int_{\Omega}1dx\right)^{\frac{m+1}{p+1}}\right)^{\frac{m-p}{m+1}}$$

$$\le\left(\int_{\Omega}|u|^{2(m+1)}dx\right)^{\frac{p+1}{m+1}}|\Omega|^{\frac{m-p}{m+1}}\le\left(\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right)^{\frac{p+1}{m+1}}|\Omega|^{\frac{m-p}{m+1}}$$

$$\le\|u\|_{2(m+1)}^{2(p+1)}|\Omega|^{\frac{m-p}{m+1}}\le\varepsilon_2\|u\|_{2(m+1)}^{2(p+1)}\frac{1}{\varepsilon_2}|\Omega|^{\frac{m-p}{m+1}}$$

$$\le\frac{1}{p}\left(\varepsilon_2\|u\|_{2(m+1)}^{2(p+1)}\right)^{p}+\frac{1}{q}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}|\Omega|^{\frac{m-p}{m+1}}\right)^{q}$$

$$\le\frac{p+1}{m+1}\left(\varepsilon_2\|u\|_{2(m+1)}^{2(p+1)}\right)^{\frac{m+1}{p+1}}+\frac{m-p}{m+1}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}|\Omega|^{\frac{m-p}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m-p}}$$

$$\le\frac{p+1}{m+1}\left(\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right)+\frac{m-p}{m+1}\left(\varepsilon_2^{-\left(\frac{m+1}{m-p}\right)}|\Omega|\right)$$

$$\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)} \le \frac{p+1}{m+1}\left(\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right)+\frac{m-p}{m+1}\left(\varepsilon_2^{-\left(\frac{m+1}{m-p}\right)}|\Omega|\right) \tag{4.12}$$

olmaktadır. Burada $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ pozitif değişkenlerdir.

(4.6) denklemi yardımıyla (4.8) denkleminden;

$$\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\right]+\|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\psi(t)-C_0\right]+\|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2}\psi'(t)+\|\nabla u\|^2 \quad (*)$$

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} = \frac{1}{2}\psi''(t)+\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2 &= \frac{1}{2(m+1)}\left[\frac{1}{2}\psi''(t)+\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right]-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\left(u^{p+1}, u_{tx_1}\right)\\ &= \frac{1}{4(m+1)}\psi''(t)-\frac{m}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\left(u^{p+1}, u_{tx_1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.10) ve (4.11) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2 &= \frac{1}{4(m+1)}\psi''(t)-\frac{m}{2\varepsilon_0(m+1)}\|\nabla u\|^2-\frac{m\varepsilon_0}{2(m+1)}\|\nabla u_t\|^2\\ &-\frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2\varepsilon_1}\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\|\nabla u_t\|^2\right) \le \frac{1}{4(m+1)}\psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon_0(m+1)}\|\nabla u\|^2\\ &+\frac{1}{2\varepsilon_1(p+1)}\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}+\left[\frac{m\varepsilon_0}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\|\nabla u_t\|^2\end{aligned} \tag{4.13}$$

olmaktadır.

(4.13)'de $\|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}$ için (4.12) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon_0(m+1)}\|\nabla u\|^2+\frac{(p+1)\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{2\varepsilon_1(p+1)(m+1)}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

$$+\left[\frac{m\varepsilon_0}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\|\nabla u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\psi''(t)+\frac{m}{2\varepsilon_0(m+1)}\|\nabla u\|^2 \qquad \textbf{(4.14)}$$

$$+\frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\left[\frac{m\varepsilon_0}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\|\nabla u_t\|^2+C_1$$

elde edilir. Burada $C_1=\dfrac{(m-p)|\Omega|}{2\varepsilon_1(p+1)(m+1)\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(m-p)}}}$'dir.

(4.6) denklemi ve (*)' dan

$$\frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|u\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}=\frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\left(\frac{1}{2}\psi'(t)+\|\nabla u\|^2\right)=\frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\psi'(t)+\frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\|\nabla u\|^2$$

olmaktadır. Bu denklem (4.14)'deki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2 \le \frac{1}{4(m+1)}\psi''(t)+\left[\frac{m}{2\varepsilon_0(m+1)}+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]\|\nabla u\|^2$$

$$+\left[\frac{m\varepsilon_0}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\|\nabla u_t\|^2+\frac{\varepsilon_2^{\frac{m+1}{p+1}}}{4\varepsilon_1(m+1)}\psi'(t)+C_1 \qquad \textbf{(4.15)}$$

elde edilir.

(4.9) ve $\left\|\nabla u(t)\right\|^2 \le \psi(t) - C_0$ eşitsizliği kullanılarak (4.15)'den

$$\left[\psi'(t)\right]^2 \le 4\psi(t)\left(\left\|u_t\right\|^2 + \left\|\nabla u_t\right\|^2\right) \quad (4.9)$$

$$\left\|u_t\right\|^2 + \left\|\nabla u_t\right\|^2 - A\left\|\nabla u_t\right\|^2 \le B$$

$$(1-A)\left\|\nabla u_t\right\|^2 \le B$$

$$\frac{\psi'(t)^2}{4\psi(t)} \le \left\|u_t\right\|^2 + \left\|\nabla u_t\right\|^2 \le C_1\left\|\nabla u_t\right\|^2$$

$$(1-A)\frac{\psi'(t)^2}{4\psi(t)} \le C_1(1-A)\left\|\nabla u_t\right\|^2 \le B$$

$$\frac{1}{4\psi(t)}\left[\psi'(t)\right]^2\left[1 - \frac{m\varepsilon_0}{2(m+1)} + \frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right] \le \frac{1}{4(m+1)}\psi''(t) + \frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{4(m+1)\varepsilon_1}\psi'(t)$$
$$+\left[\frac{m}{2\varepsilon_0(m+1)} + \frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]\psi(t) + C_1 - C_0\left[\frac{m}{2\varepsilon_0(m+1)} + \frac{\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(p+1)}}}{2\varepsilon_1(m+1)}\right]$$

olmaktadır.

Burada $C_0 = \dfrac{(m-p)^{\frac{(2m-p+1)}{(m-p)}}|\Omega|}{(p+1)(4m+1)}$, $\quad C_1 = \dfrac{(m-p)|\Omega|}{2\varepsilon_1(p+1)(m+1)\varepsilon_2^{\frac{(m+1)}{(m-p)}}}$,

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}, \quad \varepsilon_1 = \dfrac{1}{4}, \quad \varepsilon_2 = 2^{-(p+1)/(m+1)}$ seçilir.

Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı $4(m+1)\psi(t)$ ile çarpılırsa,

$$\frac{4(m+1)\psi(t)}{4\psi(t)}\left[\psi'(t)\right]^2\left[1-\frac{m\varepsilon_0}{2(m+1)}+\frac{\varepsilon_1}{2(p+1)}\right]\le\frac{4(m+1)\psi(t)}{4(m+1)}\psi''(t)$$

$$+\frac{\left(2^{-(p+1)/(m+1)}\right)^{(m+1)/(p+1)}}{4(m+1)\frac{1}{4}}\psi'(t)4(m+1)\psi(t)$$

$$+\left[\frac{m}{2\frac{1}{2}(m+1)}+\frac{\left(2^{-(p+1)/(m+1)}\right)^{(m+1)/(p+1)}}{2\frac{1}{4}(m+1)}\right]\psi(t)4(m+1)\psi(t)$$

$$+C_1-C_0\left[\frac{m}{2\frac{1}{2}(m+1)}+\frac{\left(2^{-(p+1)/(m+1)}\right)^{(m+1)/(p+1)}}{2\frac{1}{2}(4m+1)}\right]$$

$$\psi(t)\psi''(t)-\left(1+\frac{m(6p+5)-1}{8(p+1)}\right)\left[\psi'(t)\right]^2\ge-2\psi(t)\psi'(t)-4(m+1)\psi(t)^2$$

elde edilir. Buradan (4.4) eşitsizliği

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)\left[\psi(t)\right]^2\ge-2M_1\psi'(t)\psi(t)-M_2\left[\psi(t)\right]^2,\quad t>0\quad(4.4)$$

$\alpha=\dfrac{m(6p+5)-1}{8(p+1)},\quad M_1=1,\quad M_2=4(m+1)$ ile sağlanır.

Böylece Lemma 4.2. uygulanabilir ve istenilen sonuç alınabilir.

Teorem 4.3.2. Kabul edelim ki $p=m,\ m\geq 1$ ve u_0 ,

$$\|u_0\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} > \left(1+\frac{1}{m^2}\right)\|u_0\|^2 + \left(2+\frac{1}{m^2}\right)\|\nabla u_0\|^2$$

koşullarını sağlayan başlangıç fonksiyonu olsun. Böylece (4.1)-(4.3) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat 4.3.2. (4.1) denklemine $u(t)=e^{-t}v(t)$ dönüşümü uygulandığında,

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u - u^p u_{x_1} = |u|^{2m} u, \quad (4.1)$$

$$u_t = \left(e^{-t}v\right)_t = -e^{-t}v + v_t e^{-t}$$

$$\Delta u_t = \left(\Delta e^{-t}v\right)_t = \left(e^{-t}\Delta v\right)_t = -e^{-t}\Delta v + \Delta v_t\, e^{-t}$$

$$\Delta u = \Delta e^{-t}v = e^{-t}\Delta v$$

$$u^p u_{x_1} = \left(e^{-t}v\right)^p e^{-t}v_{x_1} = e^{-pt}v^p e^{-t}v_{x_1} = e^{-mt}v^m e^{-t}v_{x_1}$$

$$|u|^{2m}u = \left|e^{-t}v\right|^{2m} e^{-t}v = e^{-2mt}|v|^{2m}e^{-t}v$$

elde edilir.

Bu veriler denkleme yazıldığında,

$$e^{-t}\left(-v+v_t\right) - e^{-t}\left(-\Delta v + \Delta v_t\right) - e^{-t}\Delta v - e^{-t}\left(e^{-mt}v^m v_{x_1}\right) = e^{-t}\left(e^{-2mt}|v|^{2m}v\right)$$

$$-v + v_t + \Delta v - \Delta v_t - \Delta v - e^{-mt}v^m v_{x_1} = e^{-2mt}|v|^{2m}v$$

$$v_t - \Delta v_t - v - e^{-mt} v^m v_{x_1} = e^{-2mt} \left|v\right|^{2m} v \tag{4.16}$$

şeklini alır.

(4.16) denklemi v ile çarpılıp, Ω üzerinde integre edilirse

$$\int_\Omega v v_t dx - \int_\Omega v \Delta v_t dx - \int_\Omega v \Delta v dx - \int_\Omega e^{-mt} v v^m v_{x_1} dx = \int_\Omega e^{-mt} v \left|v\right|^{2m} v dx \tag{4.17}$$

ifadesi elde edilir.

(4.17)'deki veriler tek tek ele alınırsa,

$$\int_\Omega v v_t dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt} v^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v\right\|^2$$

$$\int_\Omega v \Delta v_t dx = v \nabla v_t \mid_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla v_t \nabla v dx = -\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \nabla v^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla v^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla v\right\|^2$$

$$\int_\Omega v v dx = \int_\Omega v^2 dx = \left\|v\right\|^2$$

$$\int_\Omega e^{-mt} v^{m+1} v_{x_1} dx = e^{-mt} \frac{1}{m+2}\int_\Omega \frac{d}{dx_1} v^{m+2} dx = 0$$

$$\int_\Omega e^{-2mt} \left|v\right|^{2m} v v dx = \int_\Omega e^{-2mt} v^{2m+2} dx = e^{-2mt} \left\|v\right\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

olmaktadır.

Elde edilenler (4.17) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2-\left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2\right)-\|v\|^2=e^{-2mt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right)=\|v\|^2+e^{-2mt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} \tag{4.18}$$

olmaktadır.

(4.16) denklemi v_t ile çarpılıp Ω üzerinde integre edilsin.

$$\int_\Omega v_t v_t dx-\int_\Omega v_t\Delta v_t dx-\int_\Omega v_t\Delta v dx-\int_\Omega e^{-mt}v_t v^m v_{x_1}dx=\int_\Omega e^{-mt}v_t|v|^{2m}vdx \tag{4.19}$$

(4.19) ifadesindeki veriler tek tek ele alındığında,

$$\int_\Omega v_t v_t dx=\int_\Omega v_t^{\,2}dx=\|v_t\|^2$$

$$\int_\Omega v_t\Delta v_t dx=v_t\nabla v_t\,|_{\partial\Omega}-\int_\Omega \nabla v_t\nabla v_t dx=-\int_\Omega \nabla v_t^{\,2}dx=-\|\nabla v_t\|^2$$

$$\int_\Omega v v_t dx=\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2$$

$$\int_\Omega e^{-mt}v_t v^m v_{x_1}dx=\frac{1}{m+1}\int_\Omega \frac{d}{dx_1}v_t v^{m+1}e^{-mt}dx=-\frac{1}{m+1}e^{-mt}\int_\Omega v^{m+1}v_{tx_1}dx=-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right)$$

$$\int_\Omega e^{-2mt}v_t|v|^{2m}vdx=e^{-2mt}\int_\Omega v_t|v|^{2m+1}dx=e^{-2mt}\frac{1}{2(m+1)}\int_\Omega \frac{d}{dt}|v|^{2m+2}dx$$

$$=e^{-2mt}\frac{1}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v|^{2m+2}dx=\frac{e^{-2mt}}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

denklemleri elde edilir.

Elde edilenler (4.19) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\|v_t\|^2-\left(-\|\nabla v_t\|^2\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2-\left(-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right)\right)=\frac{e^{-2mt}}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{e^{-2mt}}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right) \qquad \textbf{(4.20)}$$

olmaktadır.

$\varphi(t)=\|v\|^2+\|\nabla v\|^2$ fonksiyonu kullanılarak teoremin patlaması ispatlanabilir.

(4.9)-(4.10)-(4.11)'e benzer olarak

$$\varphi'(t):=2\left[(v,v_t)+(\nabla v,\nabla v_t)\right]$$

Cauchy – Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\left[\varphi'(t)\right]^2:=4\left[(v,v_t)+(\nabla v,\nabla v_t)\right]^2=4\left[(v,v_t)^2+2(v,v_t)(\nabla v,\nabla v_t)+(\nabla v,\nabla v_t)^2\right]$$

$$=4\left[\left(\int_\Omega vv_t dx\right)^2+2\int_\Omega vv_t dx\int_\Omega \nabla v\nabla v_t dx+\left(\int_\Omega \nabla v\nabla v_t dx\right)^2\right]$$

$$\leq 4\left[\begin{array}{l}\left(\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v_t^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\\ +2\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v_t^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \nabla v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \nabla v_t^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\left(\int_\Omega \nabla v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \nabla v_t^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\end{array}\right]$$

$$\le 4\left[\|v\|^2\|v_t\|^2+2\|v\|\|v_t\|\ \|\nabla v\|\|\nabla v_t\|+\|\nabla v\|^2\|\nabla v_t\|^2\right]$$

$$\le 4\left[\|v\|^2\|v_t\|^2+2\|v\|\|\nabla v_t\|\|v_t\|\|\nabla v\|+\|\nabla v\|^2\|\nabla v_t\|^2\right]$$

$$\le 4\left[\|v\|^2\|v_t\|^2+2\left(\frac{\left(\|v\|\|\nabla v_t\|\right)^2}{2}+\frac{\left(\|v_t\|\|\nabla v\|\right)^2}{2}\right)+\|\nabla v\|^2\|\nabla v_t\|^2\right]$$

$$\le 4\left[\|v\|^2\|v_t\|^2+\|v\|^2\|\nabla v_t\|^2+\|v_t\|^2\|\nabla v\|^2+\|\nabla v\|^2\|\nabla v_t\|^2\right]$$

$$\le 4\left[\|v_t\|^2\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right)+\|\nabla v_t\|^2\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right)\right]\le 4\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right)\left(\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)$$

Buradan

$$\left[\varphi'(t)\right]^2\le 4\varphi(t)\left(\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right) \qquad \textbf{(4.21)}$$

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2=\int 2\|v\|\|v_t\|dx\le 2\int\|v\|\|v_t\|dx\le 2\left(\int_\Omega\|v\|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\|v_t\|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le 2\|v\|\|v_t\|\le 2\left[\frac{\|v\|^2}{2}+\frac{\|v_t\|^2}{2}\right]\le\|v\|^2+\|v_t\|^2$$

$$\left|\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2\right|\le\|v\|^2+\|v_t\|^2 \qquad \textbf{(4.22)}$$

$$\left|\left(v^{m+1},v_{tx_1}\right)\right|=\int_\Omega|v|^{m+1}v_{tx_1}dx\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\int_\Omega|v|^{2(m+1)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varepsilon}\left(\int_\Omega {v_{tx_1}}^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega}|v|^{2(m+1)}\,dx+\varepsilon\int_{\Omega} v_{tx_1}{}^{2}dx \le \frac{1}{2\varepsilon}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\varepsilon\|\nabla v_t\|^2$$

$$\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right) \le \frac{1}{2\varepsilon(t)}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}+\frac{\varepsilon(t)}{2}\|\nabla v_t\|^2 \qquad \textbf{(4.23)}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada $\varepsilon(t),\, t>0$ pozitif sürekli fonksiyondur.

(4.18) ve (4.20) eşitsizliklerini kullanarak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\right)=\|v\|^2+e^{-2mt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}, \quad (4.18)$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{e^{-2mt}}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right), \quad (4.20)$$

$$\varphi(t)=\|v\|^2+\|\nabla v\|^2$$

$$\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}=e^{2mt}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varphi(t)-\|v\|^2\right)=e^{2mt}\left(\frac{1}{2}\varphi'(t)-\|v\|^2\right)=\frac{e^{2mt}}{2}\varphi'(t)-e^{2mt}\|v\|^2$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{e^{-2mt}}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2mt}}{2}\varphi'(t)-e^{2mt}\|v\|^2\right)-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right)$$

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{e^{-2mt}}{2(m+1)}\left(\frac{2me^{2mt}}{2}\varphi'(t)+\frac{e^{2mt}}{2}\varphi''(t)-\frac{2me^{2mt}}{2}\|v\|^2-\frac{d}{dt}\|v\|^2 e^{2mt}\right)$$

$$-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{m}{2(m+1)}\varphi'(t)+\frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t)$$

$$-\frac{m}{m+1}\|v\|^2-\frac{1}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|v\|^2-\frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right)$$

$$= \frac{m}{2(m+1)}\varphi'(t) + \frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t) - \frac{m}{(m+1)}\|v\|^2 + \frac{m}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|v\|^2 - \frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right)$$

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 = \frac{m}{2(m+1)}\varphi'(t) + \frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t) - \frac{m}{(m+1)}\|v\|^2$$
$$+ \frac{m}{2(m+1)}\frac{d}{dt}\|v\|^2 - \frac{e^{-mt}}{m+1}\left(v^{m+1}, v_{tx_1}\right) \quad \textbf{(4.24)}$$

elde edilir.

(4.22) ve (4.23) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \le \frac{m}{2(m+1)}\varphi'(t) + \frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t) - \frac{m}{(m+1)}\|v\|^2$$

$$+ \frac{m}{2(m+1)}\left(\|v_t\|^2 + \|v\|^2\right) - \frac{e^{-mt}}{m+1}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla v_t\|^2\right)$$

$$\le \frac{1}{2(m+1)}\left(m\varphi'(t) + \frac{1}{2}\varphi''(t) + m\|v_t\|^2 + \varepsilon(t)e^{-mt}\|\nabla v_t\|^2 + e^{-mt}\varepsilon^{-1}(t)\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)}\right)$$

$$\|v_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \le \frac{1}{2(m+1)}\begin{pmatrix} m\varphi'(t) + \frac{1}{2}\varphi''(t) + m\|v_t\|^2 + \varepsilon(t)e^{-mt}\|\nabla v_t\|^2 + \\ e^{-mt}\varepsilon^{-1}(t)\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} \end{pmatrix} \quad \textbf{(4.25)}$$

olmaktadır.

(4.25)'de $\varepsilon(t) = me^{mt}$ alınıp, $e^{-2mt}\|v\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} \le \frac{1}{2}\varphi'(t)$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\le\frac{1}{2(m+1)}\left(m\varphi'(t)+\frac{1}{2}\varphi''(t)+m\|v_t\|^2+me^{mt}e^{-mt}\|\nabla v_t\|^2+e^{-mt}\frac{e^{-mt}}{m}e^{2mt}\frac{1}{2}\varphi'(t)\right)$$

$$\le\frac{1}{2(m+1)}\left(\left(m+\frac{1}{2m}\right)\varphi'(t)+\frac{1}{2}\varphi''(t)+m\left(\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\right)$$

$$\left(\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\left(1-\frac{m}{2(m+1)}\right)\le\frac{2m^2+1}{4m(m+1)}\varphi'(t)+\frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t)$$

$$\frac{m+2}{2(m+1)}\left(\|v_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\le\frac{2m^2+1}{4m(m+1)}\varphi'(t)+\frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t)\qquad\textbf{(4.26)}$$

elde edilir.

(4.26)'da (4.21) ifadesi kullanılırsa,

$$\frac{m+2}{2(m+1)}\frac{1}{4\varphi(t)}\left[\varphi'(t)\right]^2\le\frac{2m^2+1}{4m(m+1)}\varphi'(t)+\frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t)$$

olur.

Elde edilen eşitsizliğin her iki yanı $4(m+1)\varphi(t)$ ile çarpılırsa,

$$4(m+1)\varphi(t)\frac{m+2}{2(m+1)}\frac{1}{4\varphi(t)}\left[\varphi'(t)\right]^2\le4(m+1)\varphi(t)\frac{2m^2+1}{4m(m+1)}\varphi'(t)$$

$$+4(m+1)\varphi(t)\frac{1}{4(m+1)}\varphi''(t)$$

$$\frac{m+2}{2}\left[\varphi'(t)\right]^2\le\frac{2m^2+1}{m}\varphi'(t)\varphi(t)+\varphi''(t)\varphi(t)$$

$$\varphi''(t)\varphi(t)-\left(1+\frac{m}{2}\right)\left[\varphi'(t)\right]^2 \geq -\frac{2m^2+1}{m}\varphi'(t)\varphi(t)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece (4.4) eşitsizliği $\alpha = m/2,\ M_1 = \left(2m^2+1\right)/\left(2m\right)$ için sağlanır ve bu sonuç Lemma 4.2.' den görülür.

BÖLÜM 5. LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN GLOBAL DAVRANIŞI

5.1. Giriş

$$u_{tt} - \Delta u + \beta |u_t|^2 u_t = \alpha \Delta u_t, \quad x \in \Omega, t > 0, \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{5.2}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \tag{5.3}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

Burada $\Omega \subset R^n$, $n \leq 3$, $\partial\Omega$ düzgün sınırlanmasıyla tanımı sınırlandırılmış, α ve β pozitif sabitlerdir.

5.2. Çözümlerin Davranışı

Teorem 5.2.1. $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ ve $4 - d_2\beta c_1 d_0 > 0$ olsun. Bu durumda $T_0 > 0$ olduğu için

$$E(t) \leq E(0) e^{1 - \frac{t}{T_0}} \tag{5.4}$$

olmalıdır.

İspat 5.2.1. Kabul edelim ki $u(x,t)$, (5.1) denkleminin (5.2) - (5.3) sınır koşullarını sağlayan bir çözümü olsun.

(5.1) denklemi u_t ile çarpılıp Ω üzerinde integre edilsin.

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx + \int_{\Omega} u_t \beta |u_t|^2 u_t dx = \int_{\Omega} \alpha u_t \Delta u_t dx, \quad x \in \Omega, \; t > 0 \tag{5.5}$$

(5.5) denklemindeki integraller hesaplandığında

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_t^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2$$

$$\int_{\Omega} u_t \Delta u dx = u_t \nabla u \,|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx = -\int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \nabla u^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla u^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2$$

$$\int_{\Omega} \beta |u_t|^2 u_t u_t dx = \int_{\Omega} \beta |u_t|^4 dx$$

$$\int_{\Omega} \alpha u_t \Delta u_t dx = \alpha u_t \nabla u_t \,|_{\partial\Omega} - \alpha \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx = -\alpha \int_{\Omega} \nabla u_t^{\,2} dx = -\alpha \|\nabla u_t\|^2$$

olarak elde edilir.

Bulunanlar (5.5) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 - \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right) + \int_{\Omega} \beta |u_t|^4 dx - \left(-\alpha \|\nabla u_t\|^2 \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \right) + \alpha \|\nabla u_t\|^2 + \beta \int_{\Omega} |u_t|^4 dx = 0 \tag{5.6}$$

ifadesi elde edilir.

(5.1) denklemi u ile çarpılıp Ω üzerinde integre edilsin.

$$\int_{\Omega} uu_{tt}dx - \int_{\Omega} u\Delta udx + \int_{\Omega} u\beta|u_t|^2 u_t dx = \int_{\Omega} \alpha u\Delta u_t dx, \quad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{5.7}$$

(5.7) denklemindeki integraller tek tek ele alındığında

$$\int_{\Omega} uu_{tt}dx = \int_{\Omega}\left(\frac{d}{dt}(u, u_t) - u_t^2\right)dx = \int_{\Omega}\frac{d}{dt}(u, u_t)dx - \int_{\Omega} u_t{}^2 dx = \frac{d}{dt}(u, u_t) - \|u_t\|^2$$

$$\int_{\Omega} u\Delta udx = u\nabla u\,|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega}\nabla u\nabla udx = -\int_{\Omega}\nabla u^2 dx = -\|\nabla u\|^2$$

$$\int_{\Omega}\alpha u\Delta u_t dx = \alpha u\nabla u_t\,|_{\partial\Omega} - \alpha\int_{\Omega}\nabla u_t\nabla udx = -\alpha\int_{\Omega}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\nabla u^2 dx = -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\nabla u^2 dx$$

$$= -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\int_{\Omega}\beta|u_t|^2 u_t udx = \beta\int_{\Omega}|u_t|^3 udx$$

elde edilir.

Bulunanlar (5.7) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{d}{dt}(u, u_t) - \|u_t\|^2 - \left(-\|\nabla u\|^2\right) + \beta\int_{\Omega}|u_t|^3 udx = -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$$

$$\frac{d}{dt}(u, u_t) + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 - \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \beta\int_{\Omega}|u_t|^3 udx = 0 \tag{5.8}$$

olur.

(5.8) denklemi (S,T) üzerinde integre edildiğinde,

$$(u,u_t)|_S^T + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2 |_S^T - \int_S^T \|u_t\|^2 dt + \int_S^T \|\nabla u\|^2 dt + \beta \int_S^T \int_\Omega |u_t|^3 u dx dt = 0$$

$$\int_S^T \|\nabla u\|^2 dt = -(u,u_t)|_S^T - \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2 |_S^T + \int_S^T \|u_t\|^2 dt - \beta \int_S^T \int_\Omega |u_t|^3 u dx dt \tag{5.9}$$

elde edilir.

(5.1)'denkleminin enerji denklemi

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2$$

olduğu takdirde, (5.6)'dan

$$\frac{d}{dt}\big(E(t)\big) = -\alpha\|\nabla u_t\|^2 - \beta\int_\Omega |u_t|^4 dx \tag{5.10}$$

olmaktadır. Böylece $E(t)$ artmayandır.

$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2$ denklemi 2 ile çarpılıp (S,T) üzerinde integre edilirse

$$2E(t) = \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2$$

$$2\int_S^T E(t)dt = \int_S^T \|u_t\|^2 dt + \int_S^T \|\nabla u\|^2 dt$$

$$\int_S^T \|\nabla u\|^2 dt = 2\int_S^T E(t)dt - \int_S^T \|u_t\|^2 dt$$

elde edilir.

Bulunanlar (5.9) denkleminde yerine yazıldığında,

$$2\int_S^T E(t)\,dt-\int_S^T \|u_t\|^2\,dt=-(u,u_t)\big|_S^T-\frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2\big|_S^T+\int_S^T\|u_t\|^2\,dt-\beta\int_S^T\int_\Omega |u_t|^3\,u\,dx\,dt$$

$$2\int_S^T E(t)\,dt=2\int_S^T \|u_t\|^2\,dt-(u,u_t)\big|_S^T-\frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2\big|_S^T-\beta\int_S^T\int_\Omega |u_t|^3\,u\,dx\,dt \qquad \textbf{(5.11)}$$

olmaktadır.

$E(t)$'nin artmayan olduğu, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve $E(t)$'nin tanımı kullanılarak,

$$|(u,u_t)|\le\frac{\|u\|^2}{2}+\frac{\|u_t\|^2}{2}\le\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|u_t\|^2\right)\le\frac{1}{2}d_0\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2$$

$$\le\max\{1,d_0\}\left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2\right]$$

$$|(u,u_t)|\le\max\{1,d_0\}E(t)\le\max\{1,d_0\}E(S) \qquad \textbf{(5.12)}$$

$$\frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2=\alpha\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\right)\le\alpha\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\right)\le\alpha E(t)\le\alpha E(S) \qquad (S<t) \qquad \textbf{(5.13)}$$

$$\int_S^T\|u_t\|^2\,dt\le d_0\int_S^T\|\nabla u_t\|^2\,dt$$

$$\frac{d}{dt}\left(E(t)\right)=-\left(\alpha\left\|\nabla u_t\right\|^2+\beta\int_{\Omega}\left|u_t\right|^4dx\right)$$

$$\int_S^T-\frac{d}{dt}\left(E(t)\right)=\int_S^T\left(\alpha\left\|\nabla u_t\right\|^2+\beta\int_{\Omega}\left|u_t\right|^4dx\right)$$

$$\int_S^T-E(t)\,dt=\int_T^S E(t)\,dt=E(S)-E(T)=\int_S^T\left(\alpha\left\|\nabla u_t\right\|^2+\beta\int_{\Omega}\left|u_t\right|^4\right)dx$$

$$\int_S^T\left\|u_t\right\|^2dt\le\frac{d_0}{\alpha}\int_S^T\left[\alpha\left\|\nabla u_t\right\|^2+\beta\left\|u_t\right\|_4^4\right]dt\le\frac{d_0}{\alpha}\left[E(S)-E(t)\right] \qquad \textbf{(5.14)}$$

$$\le\frac{d_0}{\alpha}E(S)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$E(t)$'nin artmayan olduğu ve Young, Poincare', Sobolev, Ladyzhenskaya eşitsizlikleri kullanıldığında,

$$\beta\int_S^T\int_{\Omega}\left|u_t\right|^3u\,dxdt\le\beta\int_S^T\int_{\Omega}\left|u_t\right|^4dxdt+\frac{\beta}{4}\int_S^T\int_{\Omega}\left|u\right|^4dxdt$$

$$\frac{\beta}{4}\int_S^T\int_{\Omega}\left|u\right|^4dxdt\le\frac{d_2\beta}{4}\int_S^T\left\|u\right\|^2\left\|\nabla u\right\|^2dt$$

$$\le\frac{d_2\beta}{4}\int_S^T\left\|u\right\|^2\left[\left\|u_1\right\|^2+\left\|\nabla u_0\right\|^2\right]dt$$

$$=\frac{d_2\beta c_1}{4}\int_S^T\left\|u\right\|^2dt\le\frac{d_2\beta c_1d_0}{4}\int_S^T\left\|\nabla u\right\|^2dt\le\frac{d_2\beta c_1d_0}{2}\int_S^T E(s)\,ds \qquad \textbf{(5.15)}$$

elde edilmiştir.

Burada $c_1 = \|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2$ olmalıdır.

Böylece

$$\beta \int_S^T \int_\Omega |u_t|^3 u dx dt \le \beta E(S) + \frac{d_2 \beta c_1 d_0}{4} \int_S^T E(s) ds \qquad \textbf{(5.16)}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikleri kullanarak (5.11)'den

$$\left(2 - \frac{d_2 \beta c_1 d_0}{4}\right) \int_S^T E(t) dt$$

$$\le \max\{1, d_0\} E(S) + \alpha E(S) + \beta E(S) + \frac{2d_0}{\alpha} E(S) \qquad \textbf{(5.17)}$$

$$\int_S^T E(t) dt \le T_0 E(S) \qquad \textbf{(5.18)}$$

olmaktadır.

Burada

$T_0 = \dfrac{2}{\left(4 - d_2 \beta c_1 d_0\right)} \left[\max\{1, d_0\} + \alpha + \beta + \dfrac{2d_0}{\alpha}\right]$'dır.

$T \to \infty$ olduğunda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\int_{S}^{\infty} E(t)\,dt \le T_0 E(S) \tag{5.19}$$

ve Lemma 2.1(Lagnese, Haraux)'den

$$E(t) \le E(0)e^{1-\frac{t}{T_0}}$$

olmaktadır.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde bazı tipten kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışları çeşitli makaleler ele alınarak incelenmiştir. Her bir bölümde sırasıyla çözümlerin uzun süreli davranışı, patlaması ve global davranışı incelenmiştir.

Aynı şekilde diğer diferansiyel denklemler için de benzer işlemler yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] KALANTAROV, V.K. , KURT, A. , The long-time behavior of solutions of a nonlinear fourth order wave equation, describing the dynamics of marine risers, Z. Angew. Math. Mech. 77:209-215, 1997.

[2] HARAUX, A., ZUAZUA, E., Decay estimates for some semi linear damped hyperbolic problems. Arch. Rat. Mech. Anal. 100:191-206, 1987.

[3] KÖHL, M. An extended Liapunov approach to the stability assessment of marine risers. Z. Angew. Math. Mech. 73:85-92, 1993.

[4] MARCATİ, P., Decay and stability for nonlinear hyperbolic equations. J. Differential Equations. 55:30-58, 1984.

[5] NAKAO, M., Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations. Math. Z. 206:265-276, 1991.

[6] REKTORYS, K., Variational Methods in mathematics, science and Engineering. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston-London. 1975.

[7] MEYVACI, M., Blow up of solutions of pseudoparabolic equations. J. Math. Anal. Appl. 352:629-633, 2009.

[8] AMICK, CH. J. , BONA, J.L. , SHONBECK, M.E. , Decay of Solutions of some nonlinear wave equations, J. Differential Equations 81(1):1-49, 1989.

[9] BARENBLATT, G.I., ZHELTOV, YU. P., KOCHINA, I.N., Foundations of filtration theory in cracked media, Appl. Math. Mech. , pp. 58-73, 1960.

[10] CELEBI, O.A., KALANTAROV, V.K., POLAT, M., Attractors for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation, J. Differential Equations 157:439-451, 1999.

[11] DZEKTSER, E.S., A generalization of equations of motion of underground water with free surface, Dokl. Akad.Nauk SSSR 202(5:1031-1033, 1972.

[12] GAJEWSKI, H. , GRÖGER, K. , ZACHARIAS, K. , Nichtlineare Operatorgleicheungen und Operatordifferentialgleichungen, Akademie, Berlin, 1974; Mir Moscow, 1978.

[13] GALPERN, S.A., The Cauchy Problem for general systems of linear partial differential equations, Tr. Mosk. Mat. Obs. 9:401-423, 1960.

[14] KALANTAROV, V.K., LADYZHENSKAYA, O.A., Formation of collapses in quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 69:77-102, 1977.

[15] KARCH, G., Asymptotic behavior of solutions to some pseudoparabolic equations, Math. Methods Appl. Sci. 20 (3):271-289, 1997.

[16] KORPUSOV, M.O., SVESHNIKOV, A.G., Blow up of solutions of nonlinear Sobolev type equations with cubic sources, Differ. Equ. 42(3):431-443, 2006.

[17] LEVİNE, H.A., Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Ration. Mech. Anal. 51:371-386, 1973.

[18] SHOWALTER, R.E., Partial differential equations of Sobolev-Galpern type, Pacific J. Math. 31:787-793, 1969.

[19] SHOWALTER, R.E., Existence and representation theorem for a semi linear Sobolev equation in Banach space, SIAM J. Math. Anal. 3:527-543, 1972.

[20] SHOWALTER, R.E., TING, T.W., Pseudoparabolic partial differential equations, SIAM J. Math. Anal. 1:1-26, 1970.

[21] SOBOLEV, S.L., A new problem in mathematical physics, Izv. Akad.Nauk SSSR Ser. Mat. 18:3-50, 1954.

[22] STANİSLAVOVA, M., STEFANOV, A., WANG, B., Asymptotic smoothing and attractors for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation on R^3, J. Differential Equations 219(2):451-483, 2005.

[23] WANG, B., YANG, W., Finite dimensional behavior for the Benjamin-Bona-Mahony equation, J. Phsy. A 30:4877-4885, 1997.

[24] ZHANG, L., Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations in n-space dimensions, Nonlinear Anal. 25:1343-1369, 1995.

[25] WEBB, G.F., Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation, Canadian Journal of Mathematics 32:634-643, 1980.

[26] YACHENG, L., DACHENG, L., Initial value problem of equation, Journel of Hauzhang University of Science and Technology 16(6):169-173, 1988.

[27] YACHENG, L., WANG FENG, DACHENG, L., Strongly damoed nonlinear wave equation in arbitrary dimensions(I), Mathematical Applicata 8(3):262-266, 1995.

[28] KOMORNİK, V., Exact controllability and stabilization, The Multiplier Method, J. Wiley Publ., 1994.

[29] RUNZHANG, X., YACHENG, L., Asymptotic behavior of solutions for initial boundary value problem for strongly damped nonlinear wave equations, Nonlinear Analysis 69:2492-2495, 2008.

[30] MILNE, W.E., The behavior of a boundary value problem as the interval becomes infinite. Trans. Amer. Math. Soc. 30(4):797–802,1928.

[31] FORD, W.B., On the behavior of integral functions in distant portions of the plane. Bull. Amer. Math. Soc. 34(1): 91–106, 1928.

ÖZGEÇMİŞ

Sema BAYRAKTAR, 08.06.1987 de Kocaeli' de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İzmit'te tamamladı. 2005 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2009 yılında bitirdi. 2009 yılında özel bir kurumda Matematik-Geometri öğretmeni olarak işe başladı. 2010 yılında Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde pedagojik formasyon eğitimini tamamladı. 2011 yılı Güz döneminde Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Uygulamalı Matematik bilim dalında tezli yüksek lisansa başladı.