T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUVVETLİ $k-$UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim İNCE

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Soley ERSOY**

Aralık 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUVVETLİ k–UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim İNCE

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	:	**Doç. Dr. Soley ERSOY**

Bu tez 04/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halis AYGÜN	**Doç. Dr. Soley ERSOY**	**Doç. Dr. Sadık BAĞCI**
Başkan	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

İbrahim İNCE

04.01.2016

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Soley ERSOY’a şükran ve saygılarımı sunarım.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.. i

İÇİNDEKİLER.. ii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.. iii

ÖZET.. iv

SUMMARY... v

BÖLÜM 1.

GİRİŞ... 1

BÖLÜM 2.

ÖN-TOPOLOJİK UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR…………………….... 5

BÖLÜM 3.

$k-$UZAYLAR...………………..……… 36

BÖLÜM 4.

KUVVETLİ $k-$UZAYLAR……....…………...............…………………... 44

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.. 53

KAYNAKLAR.. 54

ÖZGEÇMİŞ... 58

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

cl	: Kümenin kapanışı
$\mathrm{cl}_{p\tau}$	: Kümenin ön-kapanışı
D	: Türev kümesi
$\mathrm{D}_{p\tau}$	: Ön-Türev kümesi
exp	: Kuvvet kümesi
$\mathrm{ext}_{p\tau}$	: Kümenin ön-dışı
$\mathrm{fr}_{p\tau}$	: Kümenin ön-sınırı
GT	: Genelleştirilmiş topoloji
GTS	: Genelleştirilmiş topolojik uzay
int	: Kümenin içi
$\mathrm{int}_{p\tau}$	: Kümenin ön-içi
$p\,\mathrm{ker}$	: Kümenin ön-çekirdeği
$p\kappa$	: Ön-kapalıların ailesi
$p\tau$	: Ön-topoloji
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Ön-Topolojik Uzaylar, Kuvvetli Kompakt Uzaylar, $k-$Uzaylar, Kuvvetli $k-$Uzaylar.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ön-açık (ön-kapalı) küme, ön-topolojik uzay, kümenin ön-içi (ön-kapanışı), kümenin ön-sınırı, ön-limit noktası, ön-komşuluk, ön-dış küme, ön-kararsız fonksiyon, kuvvetli kompakt küme ve pT_2-uzayına ilişkin temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde $k-$uzayların birbirine denk olan tanımları verilmiş ve karşılaştırılmıştır. Buna ek olarak, bir uzayın $k-$uzay olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar sıralanmıştır.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümün giriş kısmında kuvvetli $k-$uzay kavramı tanıtıldıktan sonra yerel kuvvetli kompakt uzayların ve birinci sayılabilir uzayların kuvvetli $k-$uzay olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Ayrıca bu şartları verebilmek için gerekli olan lemmalar bu bölümde ifade ve ispat edilmiştir. Son olarak kuvvetli $k-$uzayların alt uzaylarının kuvvetli $k-$uzay olması koşulları ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın kısa bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak yeni araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

STRONGLY $k-$SPACES

SUMMARY

Keywords: Pre-Topological Spaces, Strongly Compact Spaces, $k-$Spaces, Strongly $k-$Spaces.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the basic definitions of pre-open (pre-closed) set, pre-topological space, pre-interior (pre-closure) of a set, pre-frontier of a set, pre-accumulation point, pre-neighborhood, pre-exterior of a set, pre-irresolute function, strongly compact set and pT_2-space are summarized. In the third chapter, definitions of $k-$spaces which are equivalent to each other are introduced and compared. Also, the necessary and sufficient criteria are given for any space to be a $k-$space.

The fourth chapter is the original part of this study. At the beginning of this chapter, strongly $k-$spaces are introduced. The necessary and sufficient conditions for the locally strongly compact spaces and the first countable spaces to be a $k-$space are obtained. Furthermore to give these conditions, the necessary lemmas are stated and proved. Finally the requirements of the subspaces to be $k-$spaces are expressed.

In fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for new investigations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1970'te Levine [29] topolojik uzaylarda kapalı kümelerin bir genelleştirilmesi olarak genelleştirilmiş kapalı kümeler kavramını tanıtmıştır ve her genelleştirilmiş kapalı kümenin kapalı olduğu uzaylara $T_{1/2}-$uzayı adını vermiştir. Akabinde genelleştirilmiş kapalı kümeler üzerine yoğun bir şekilde çalışılarak ayırma aksiyomları, dönüşümler, kompaktlık ve bağlantılılık kavramları genelleştirilmiştir. Ayrıca bir topolojik uzay için bilinen karakterizasyonlar genelleştirilmiş kapalı kümeler için yeniden araştırılarak tekrar ifade edilmiştir. Böylece genelleştirilmiş kapalı kümelerin keşfi ile T_1'den daha ince ayırma aksiyomları gibi pek çok yeni ve ilginç kavram ortaya atılmıştır ki bu ayırma aksiyomlarının bazıları bilgisayar biliminde fayda sağlamaktadır, örneğin dijital topolojide iyi bilinen dijital hat, $T_{3/4}-$uzayıdır ancak T_1-uzayı değildir.

1963 yılında Levine [28], yarı açık kümeleri tanımlayıp incelemiştir. Levine tarafından ortaya konulan bu kavram son yıllarda pek çok bilim insanının yeni açık benzeri kümeleri tanımlayarak topolojik kavramları genelleştirmesi için ilham kaynağı olmuştur.

Bu açık benzeri kümelerin önemli bir örneği ön-açık kümelerdir. (X,τ) topolojik uzayının A alt kümesi için $A\subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$ şartı sağlanıyorsa A'ya "ön-açık" veya "yerel yoğun" adı verilir. "Yerel yoğun" küme kavramı Corson ve Michael tarafından [14]'te tanıtılırken "ön-açık" terimi ilk olarak [31]'de Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb tarafından kullanıldı. Eğer A'nın tümleyeni ön-açık veya eşit olarak $\operatorname{cl}(\operatorname{int}(A))\subseteq A$ ise A kümesine ön-kapalı küme denir.

Ön-açık kümelerin keyfi bir bileşimi ön-açık olsa da genellikle iki ön-açık kümenin arakesitinin ön-açık olması gerekmez. İki ön-açık kümenin arakesitinin ön-açık olabilmesi için bazı gerekli koşulları Andrijević [1]'de vermiştir. Ayrıca başka bir çalışmasında ön-topolojinin kapanış operatörünün özellikleri ile ilgilenmiştir [2]. Mashhour, Abd El-Monsef ve El-Deeb, [31] çalışmasında birkaç soru ortaya koymuştur. Bu sorulardan ilki her ön-açık küme hangi gerekli ve yeterli koşullar altında açık kümedir? İkincisi, kendi içinde yoğun her küme hangi koşullar altında ön-açıktır? Üçüncüsü ise herhangi iki ön-açık kümenin arakesiti hangi koşullar altında ön-açıktır? Dördüncüsü de ön-açık kümeler tarafından oluşturulan topoloji hangi koşullar altında ayrık topolojidir? Reilly ve Vamanamurthy [46]'de her ön-açık kümenin açık olması için gerek ve yeter koşulun her yoğun kümenin açık olmasıdır, şeklinde ilk soruyu cevaplamış ve bunun yanı sıra kapı uzaylar için kısmi bir çözüm ortaya koymuştur. Her alt kümenin ön-açık olması için gerek ve yeter şartın her ön-açık kümenin kapalı olması olduğunu göstermiştir. Ayrıca [46]'da iki ayrık yoğun kümeye ayrılabilen herhangi bir uzayın ön-açık kümeleri tarafından oluşturulan topolojinin ayrık topoloji olduğu gösterilerek dördüncü soru kısmen çözülmüştür.

Ön-açık küme kavramı ilk olarak verildiği zamandan bu yana literatürde geniş bir şekilde ele alınmasının yanı sıra [55]'te ön-açık küme kavramı kullanılarak bir kümenin ön-limit noktası, ön-türev kümesi, ön-içi ve ön-kapanışı, ön-iç noktaları, ön-sınırı, ön-dışı kavramları tanıtılmış ve onların topolojik özellikleri araştırılmıştır.

Weston, X tam metrik uzayından Y Hausdorff uzayına bire-bir, örten ve sürekli bir ϕ dönüşümünün açık olması için gerek ve yeter şartın ϕ'nin neredeyse açık olması, yani her açık G kümesi için $\phi(G)$'nin kapanışının içinin kendisini kapsaması olduğunu göstermiştir. Bu sonucu göz önüne alarak bazı uzaylardaki açık dönüşüm ve süreklilik teoremleri 1974'te Pettis tarafından verilmiş ve bu teoremler gruplara ve lineer uzaylara uygulanmıştır.

Görüntü uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsünü tanım uzayında ön-açık küme yapan bir fonksiyon ön-sürekli olarak adlandırılmıştır. Ön-süreklilik kavramı Pták [45] tarafından "neredeyse süreklilik" olarak literatüre kazandırılmıştır. Neredeyse süreklilik veya ön-süreklilik aynı zamanda hemen hemen süreklilik olarak da bilinmektedir. Öklidyen uzaylardaki reel değerli fonksiyonlar için ön-süreklilik 1922'de Blumberg tarafından çalışılmıştır [9]. Ön-süreklilik dönüşümü tanımından farklı olarak ön-kararsız dönüşümün tanımı [33]'te yapılmıştır öyle ki görüntü uzayındaki her ön-açık kümenin ters görüntüsü tanım uzayında ön-açık bir küme yapan dönüşüme ön-kararsız fonksiyon denir.

Bir uzayın her ön-açık örtüsünün sayılabilir (ya da sonlu) alt ön-açık örtüsü varsa bu uzaya kuvvetli Lindelöftür (ya da kuvvetli kompakttır) denir. Kuvvetli Lindelöf uzayın tanımı Mashhour, Abd El-Monsef, Hasanien ve Noiri tarafından [33]'te verilirken kuvvetli kompakt uzayın tanımı Janković, Reilly ve Vamanamurthy tarafından verilmiştir.

Bir uzay boştan farklı ayrık iki ön-açık kümesinin bileşimi olarak ifade edilemiyorsa bu uzaya ön-bağlantılıdır denir. Ön-bağlantılı uzay kavramını 1987'de Popa ortaya koymuştur.

Kar ve Bhattacharyya ön-açık kümeleri göz önüne alarak zayıf ayırma aksiyomlarını tanıtmış ve her uzayın bir ön$-T_{\frac{1}{2}}-$uzayı olduğunu Maki, Umehara ve Noiri'nin gösterdiklerini ifade etmiştir [26].

Diğer taraftan genel topolojide bir küme üzerinde verilen bir topolojiye dayandırılarak yeni bir topoloji tanımlamanın pek çok örneği vardır. Örneğin, X üzerinde bir τ topolojisi verilsin ve Σ, X'in bir örtüsü olsun. Her bir $S \in \Sigma$ ile arakesiti $S-$açık (yani τ'dan indirgenmiş topoloji ile S'de açık) olan X'in tüm alt kümelerinin ailesi $\Sigma(\tau)$, X üzerinde bir topolojidir. τ'dan daha ince bir topoloji olan $\Sigma(\tau)$ zayıf topoloji olarak adlandırılır. Bu takdirde bir $C \subset X$, Σ zayıf topolojisinde kapalıdır (açıktır) ancak ve ancak her $S \in \Sigma$ için $C \cap S$, S'de kapalıdır (açıktır).

Zayıf topolojilere ilişkin önemli bir kavram $k-$uzaydır öyle ki bu uzay kompakt alt uzayların bir ailesine göre zayıf topolojiye sahiptir. Zayıf topoloji tanımına göre kompakt üretilmiş açık kümeler bir X kümesi üzerinde verilen asıl topolojiden daha ince bir topoloji oluştururlar ve bu kompakt olarak üretilmiş topoloji ile asıl topolojisi çakışan uzaylar $k-$uzay olarak adlandırılır. Ayrıca $k-$uzayların bir diğer iyi bilinen karakterizasyonu yerel kompakt uzayların bölüm görüntüsü olmasıdır.

Yoğun bir şekilde üzerinde çalışılmış olan $k-$uzay kavramının literatüre girişi ve gelişimi aşağıda özetlenmektedir. $k-$uzaylar 20. yüzyılın özellikle ikinci yarısından bu yana topolojide merkezi bir yer tutmuştur. Örneğin; Arens [3], Arhangelskii [4], Cohen [12], Franklin [22], Gale [23], Michael [34], , Morita [35] ve Whitehead [53], $k-$uzayları tanıtmış ve elde ettikleri karakterizasyonlar ile kavramı geliştirmişlerdir. Örneğin, $k-$uzaylar bütün birinci sayılabilir T_2-uzaylarını ve bütün yerel kompakt T_2-uzaylarını kapsamaktadır. Dahası $k-$uzaylar, yerel kompakt uzayların bir genelleştirmesi olduğundan yerel kompaktlığı içeren pek çok sonuç $k-$uzaylar içinde geçerlidir.

Bu tezde ön-topolojik uzaylarda kuvvetli kompakt alt kümelerin bir ailesine göre zayıf ön-topolojiye sahip olan kuvvetli $k-$uzay tanımı literatüre kazandırılarak ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

BÖLÜM 2. ÖN-TOPOLOJİK UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (X,τ) topolojik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer; $S \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S))$ ise, S kümesine ön-açıktır denir [31].

Örnek 2.2. (X,τ) topolojik uzayının her açık alt kümesi ön-açıktır.

Örnek 2.3. (X,τ) topolojik uzayının her yoğun alt kümesi ön-açıktır. $S \subseteq X$ kümesi yoğun bir alt küme olsun. Öyleyse

$$\operatorname{cl}(S) = X \Rightarrow \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S)) = \operatorname{int}(X) \Rightarrow \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S)) = X$$

olduğundan $S \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S))$’dir, yani, S ön-açıktır.

Tanım 2.4. Ön-açık kümelerin ailesine X üzerinde ön-topoloji denir ve $p\tau$ ile gösterilir [31].

Tanım 2.5. Ön-kapalı kümenin birbirine denk olan iki tanımı aşağıdaki gibidir;

i. Ön-açık bir kümenin tümleyenine ön-kapalıdır denir.
ii. $F \subseteq X$ olsun. Eğer; $\operatorname{cl}(\operatorname{int}(F)) \subseteq F$ ise, F kümesine ön-kapalıdır denir [31].

Lemma 2.6. Herhangi sayıda ön-açık kümenin bileşimi ön-açıktır [31].

İspat. Her $k \in I$ için S_k kümeleri ön-açık olsun. Tanım 2.1'e göre her $k \in I$ için $S_k \subseteq \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(S_k\right)\right)$'dır. O halde

$$\bigcup_{k\in I} S_k \subseteq \bigcup_{k\in I} \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(S_k\right)\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in I} \operatorname{cl}\left(S_k\right)\right) = \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(\bigcup_{k\in I} S_k\right)\right)$$

bulunur. Böylece $\bigcup_{k\in I} S_k$ ön-açıktır.

Tanım 2.7. Ön-kapalı kümelerin ailesine X üzerinde ön-kapalılar ailesi denir ve $p\kappa$ ile gösterilir [31].

Teorem 2.8. (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

i. X 'in her alt kümesi ön-açıktır.
ii. X uzayındaki her tek nokta kümesi ön-açıktır.
iii. X 'in her kapalı alt kümesi ön-açıktır [17].

Herhangi iki ön-açık kümenin arakesitinin bir ön-açık küme olması gerekmediğini aşağıdaki örnekle gösterelim;

Örnek 2.9. $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki topoloji

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

ve

$$p\tau = \tau \cup \{\{c\},\{d\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,e\}, \{a,d,e\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},\{a,c,d,e\}\}$$

olsun.

Burada $\{a,b,c,e\}\cap\{a,b,d,e\}=\{a,b,e\}\notin p\tau$ olup iki ön-açık kümenin arakesitinin daima ön-açık olmadığı örnekten de görülür. Dolayısıyla ön-açık kümelerin ailesi X üzerinde her zaman bir topoloji oluşturmaz.

Tanım 2.10. X boştan farklı bir küme ve $\gamma\subset\exp(X)$ olmak üzere

i. $\varnothing\in\gamma$,

ii. γ 'nın herhangi sayıda elemanının bileşimi γ 'ya aittir,

şartlarını sağlayan γ ailesine X üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji ve (X,γ) ikilisine genelleştirilmiş topolojik uzay denir. Ayrıca, $X\in\gamma$ ise γ kuvvetli genelleştirilmiş topoloji olarak adlandırılır [16].

Dolayısıyla $p\tau$ ailesi bir kuvvetli genelleştirilmiş topoloji ve $(X,p\tau)$ bir kuvvetli genelleştirilmiş topolojik uzaydır.

Tanım 2.11. $(X,p\tau)$ ön-topolojik uzayında bir $x\in X$ noktası ve $U\subset X$ için $x\in S\subset U$ olacak şekilde $S\in p\tau$ varsa U kümesine $x\in X$ noktasının bir ön-komşuluğu denir [42].

Tanım 2.12. $(X,p\tau)$ ön-topolojik uzay, $x\in X$ ve x noktasını içeren ön-açıkların ailesi B_x olsun. Eğer x noktasını içeren her S ön-açığı için $x\in S_x\subseteq S$ olacak şekilde $S_x\in\mathrm{B}_x$ varsa B_x ailesine x noktasında bir ön-yerel taban denir [6].

Tanım 2.13. $(X,p\tau)$ ön-topolojik uzayının bir alt kümesi A ve $x\in X$ olsun. Eğer x noktasını içeren her S ön-açık kümesi için $A\cap(S\setminus\{x\})\neq\varnothing$ ise x noktasına A kümesinin bir ön-limit noktası denir [55].

Tanım 2.14. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzayında bir A kümesinin bütün ön-limit noktalarının kümesine A'nın ön-türev kümesi denir ve $D_{p\tau}(A)$ ile gösterilir. (X,τ) topolojik uzayında A'nın türev kümesi $D(A)$ ile gösterilir [55].

Örnek 2.15. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing, X,\{a,c\}\}$ ve ön–topoloji $p\tau=\{\varnothing, X,\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ olsun. O halde,

i. $A=\{c\}$ ise $D(A)=\{a,b,d\}$ ve $D_{p\tau}(A)=\{a,b,d\}$'dir.
ii. $B=\{a\}$ ve $C=\{b\}$ ise $D_{p\tau}(B)=\{d\}$, $D_{p\tau}(C)=\{d\}$ ve $D_{p\tau}(B\cup C)=\{c,d\}$'dir [55].

Tanım 2.16. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesinin kapsadığı bütün ön-açıkların bileşimine; yani, A'nın kapsadığı en büyük ön-açık kümeye A'nın ön-içi denir ve $\operatorname{int}_{p\tau}(A)$ ile gösterilir [6].

$$\operatorname{int}_{p\tau}(A)=\cup\{\ S\in p\tau\ :\ S\subset A\ \}.$$

Tanım 2.17. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bütün ön-kapalıların kesişimi olan en küçük ön-kapalı kümeye A'nın ön-kapanışı denir ve $\operatorname{cl}_{p\tau}(A)$ ile gösterilir [6].

$$\operatorname{cl}_{p\tau}(A)=\cap\{\ F\subset X\ :\ A\subset F \text{ ve } F \text{ ön-kapalı }\}.$$

Tanım 2.18. $\operatorname{cl}_{p\tau}(A)\setminus\operatorname{int}_{p\tau}(A)$ kümesine $A\subset X$'in ön-sınırı denir ve $\operatorname{fr}_{p\tau}(A)$ ile gösterilir [42].

Örnek 2.19. $X=\{a,b,c,d\}$ üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing, X,\{b,d\}\}$ ve ön-topoloji

$$p\tau = \{\varnothing, X, \{b\}, \{b,d\}, \{a,d\}, \{a,b,d\}\}$$

olsun. X 'in $A=\{a,b\}$ ve $B=\{c,d\}$ kümeleri verilirse,

$D(A)=\{a,c,d\}$, $\qquad D(B)=\{a,b,c\}$,

$D_{p\tau}(A)=\{c,d\}$, $\qquad D_{p\tau}(B)=\{a,c\}$,

$\operatorname{int}(A)=\varnothing$, $\qquad \operatorname{int}(B)=\varnothing$,

$\operatorname{int}_{p\tau}(A)=\{b\}$, $\qquad \operatorname{int}_{p\tau}(B)=\varnothing$,

$\operatorname{cl}(A)=X$, $\qquad \operatorname{cl}(B)=X$,

$\operatorname{cl}_{p\tau}(A)=\{a,b,d\}$, $\qquad \operatorname{cl}_{p\tau}(B)=\{a,c,d\}$

olduğu görülür.

Teorem 2.20. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzayında herhangi $A,B\subset X$ kümeleri için $\operatorname{int}_{p\tau}(A\setminus B)\subset \operatorname{int}_{p\tau}(A)\setminus \operatorname{int}_{p\tau}(B)$ 'dir [38].

İspat. $x\in \operatorname{int}_{p\tau}(A\setminus B)$ olsun. O halde x noktasının $U_x\subset A\setminus B\subset A$ olacak şekilde bir U_x komşuluğu vardır. Bu $U_x\cap B=\varnothing$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $x\notin \operatorname{int}_{p\tau}(B)$ 'dir.

Teorem 2.20.'deki eşitlik durumunun genellikle sağlanmadığı aşağıdaki örnekle gösterilmektedir.

Örnek 2.21. $X=\{a,b,c,d\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing,X,\{b\},\{d\},\{b,d\}\}$ ve ön-topoloji $p\tau=\{\varnothing,X,\{b\},\{d\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$ olsun. X 'in $A=\{a,b,d\}$ ve $B=\{a,b\}$ alt kümeleri verilsin. $\operatorname{int}_{p\tau}(A)=\{a,b,d\}$, $\operatorname{int}_{p\tau}(B)=\{b\}$ ve $\operatorname{int}_{p\tau}(A\setminus B)=\operatorname{int}_{p\tau}(\{d\})=\{d\}$'dir. Dolayısıyla $\operatorname{int}_{p\tau}(A\setminus B)\neq\operatorname{int}_{p\tau}(A)\setminus\operatorname{int}_{p\tau}(B)$'dir [38].

Lemma 2.22. A ve B, sırasıyla X ve Y topolojik uzaylarının ön-açık kümeleridir ancak ve ancak $A\times B$ kümesi $X\times Y$ 'de ön-açıktır [38].

İspat. Eğer A, X 'de ön-açık ise $A\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$ ve B, Y 'de ön-açık ise $B\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(B))$'dir. Dolayısıyla

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A\times B))=\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)\times\operatorname{cl}(B))=\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))\times\operatorname{int}(\operatorname{cl}(B))$$

olduğundan $A\times B\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A\times B))$ kapsaması kolayca görülür. Böylece $A\times B$ kümesi $X\times Y$ 'de ön-açıktır.

Aksine, $A\times B$ kümesi $X\times Y$ 'de ön-açık ise

$$A\times B\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A\times B))=\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)\times\operatorname{cl}(B))=\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))\times\operatorname{int}(\operatorname{cl}(B))$$

ve böylece $A\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$ ve $B\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(B))$'dir. Bu yüzden A ve B ön-açıktır.

Teorem 2.23. X ve Y topolojik uzaylarının sırasıyla A ve B ön-açık kümeleri için $\operatorname{cl}_{p\tau}(A\times B)=\operatorname{cl}_{p\tau}(A)\times\operatorname{cl}_{p\tau}(B)$ ve $\operatorname{int}_{p\tau}(A\times B)=\operatorname{int}_{p\tau}(A)\times\operatorname{int}_{p\tau}(B)$'dir [38].

İspat. $(a,b)\in \mathrm{cl}_{p\tau}(A\times B)$ olsun. $a\in \mathrm{cl}_{p\tau}(A)$ ve $b\in \mathrm{cl}_{p\tau}(B)$ olduğunu göstereceğiz. a noktasını içeren bir U kümesi X 'de ön-açık olsun. $(a,b)\in U\times Y$, $X\times Y$ 'de ön-açık olduğundan

$$\varnothing \neq (U\times Y)\cap(A\times B)=(U\cap A)\times(Y\cap B)=(U\cap A)\times B$$

olur. Dolayısıyla $\mathrm{cl}_{p\tau}(A\times B)\subset \mathrm{cl}_{p\tau}(A)\times \mathrm{cl}_{p\tau}(B)$'dir.

Şimdi $(a,b)\in \mathrm{cl}_{p\tau}(A)\times \mathrm{cl}_{p\tau}(B)$, yani $a\in \mathrm{cl}_{p\tau}(A)$ ve $b\in \mathrm{cl}_{p\tau}(B)$ olsun. $(a,b)\notin \mathrm{cl}_{p\tau}(A\times B)$ olduğunu varsayarsak $(G_1\times G_2)\cap(A\times B)=\varnothing$ olacak şekilde (a,b)'yi içeren bir $(G_1\times G_2)\in(X\times Y)$ ön-açık kümesi vardır. Yani $(G_1\cap A)\times(G_2\cap B)=\varnothing$'dir. Bu $(G_1\cap A)=\varnothing$ ya da $(G_2\cap B)=\varnothing$ olduğunu gösterir. Ancak Lemma 2.22'den $G_1\subset X$ ve $G_2\subset Y$ ön-açıktır ve böylece $a\notin \mathrm{cl}_{p\tau}(A)$ ya da $b\notin \mathrm{cl}_{p\tau}(B)$'dir. Bu bir çelişkidir. O halde $(a,b)\in \mathrm{cl}_{p\tau}(A\times B)$'dir. Dolayısıyla $\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\times \mathrm{cl}_{p\tau}(B)\subset \mathrm{cl}_{p\tau}(A\times B)$'dir.

Benzer şekilde $\mathrm{int}_{p\tau}(A\times B)=\mathrm{int}_{p\tau}(A)\times \mathrm{int}_{p\tau}(B)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.24. (X,τ) topolojik uzayının bir G alt kümesi ön-açıktır ancak ve ancak her $A\subset X$ için $\mathrm{cl}_{p\tau}(\mathrm{G}\cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A))=\mathrm{cl}_{p\tau}(G\cap A)$'dir [38].

İspat. X 'in bir ön-açık kümesi G ve $A\subset X$ olsun. $x\in \mathrm{cl}_{p\tau}(\mathrm{G}\cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A))$ olsun. Bu x noktasını içeren her U ön-açık kümesinin $\mathrm{G}\cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A)$ ile kesiştiğini gösterir. Yani

$$(U\cap G)\cap(\mathrm{cl}_{p\tau}(A))=U\cap(G\cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A))\neq\varnothing \tag{2.1}$$

olur. $x \notin \mathrm{cl}_{p\tau}(G \cap A)$ ise $V \cap (G \cap A) = \varnothing$ veya $(V \cap G) \cap A = \varnothing$ olacak şekilde x noktasını içeren bir V ön-açık kümesi vardır öyle ki bu $V \cap G$'nin hiçbir noktasının $\mathrm{cl}_{p\tau}(A)$'ya ait olmadığını gösterir. Böylece $(V \cap G) \cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A) = \varnothing$ olur ki bu (2.1) eşitliği ile çelişir. Bu yüzden $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}(G \cap A)$ ve buradan da $\mathrm{cl}_{p\tau}(\mathrm{G} \cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A)) \subseteq \mathrm{cl}_{p\tau}(G \cap A)$ olur. Ayrıca $\mathrm{cl}_{p\tau}(G \cap A) \subseteq \mathrm{cl}_{p\tau}(\mathrm{G} \cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A))$ olduğundan eşitlik sağlanır.

Aksine, her $A \subset X$ için $\mathrm{cl}_{p\tau}(\mathrm{G} \cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A)) = \mathrm{cl}_{p\tau}(G \cap A)$ koşulunu sağlayacak şekilde X 'in herhangi alt kümesi G olsun. Bu yüzden

$$\mathrm{cl}_{p\tau}(G \cap \mathrm{cl}_{p\tau}(X \setminus G)) = \mathrm{cl}_{p\tau}(\mathrm{G} \cap (X \setminus G)) = \varnothing$$

yazılabildiğinden $G \cap \mathrm{cl}_{p\tau}(X \setminus G) = \varnothing$ olduğu görülür ve buradan $\mathrm{cl}_{p\tau}(X \setminus G) \subseteq (X \setminus G)$'dir. Bu $X \setminus G$ kümesinin ön-kapalı olduğunu gösterir. Sonuç olarak G ön-açıktır.

Teorem 2.25. (X, τ) bir topolojik uzay ve her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \subseteq X$ olsun. Bu taktirde $\bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha)$ ön-kapalı ise $\bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha) = \mathrm{cl}_{p\tau}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$'dir [38].

İspat. $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ olduğundan $\mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha) \subseteq \mathrm{cl}_{p\tau}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$'dir ve buradan da $\bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha) \subseteq \mathrm{cl}_{p\tau}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$'dir. O halde $\mathrm{cl}_{p\tau}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha)$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha)$ olsun. $\bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha)$ ön-kapalı olduğundan bütün ön-limit noktalarını içerir. Buradan x noktası $\bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha)$ kümesinin bir ön-limit noktası değildir ve x noktasının bir U_x ön-komşuluğu vardır öyle ki $U_x \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha)\right) = \varnothing$'dir. Öyleyse her $\alpha \in I$ için

$U_x \cap \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha) = \varnothing$ olur ve dolayısıyla her $\alpha \in I$ için $U_x \cap A_\alpha = \varnothing$ olduğu görülür. Bu $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$ olması ile çelişir. O halde $\mathrm{cl}_{p\tau}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} \mathrm{cl}_{p\tau}(A_\alpha)$ olur.

Teorem 2.26. X in A ve B alt kümeleri için $\mathrm{fr}_{p\tau}(A) \cap \mathrm{fr}_{p\tau}(B) = \varnothing$ ise $\mathrm{int}_{p\tau}(A) \cup \mathrm{int}_{p\tau}(B) = \mathrm{int}_{p\tau}(A \cup B)$ 'dir [38].

İspat. $\mathrm{int}_{p\tau}(A) \cup \mathrm{int}_{p\tau}(B) \subset \mathrm{int}_{p\tau}(A \cup B)$ olduğunu biliyoruz. $x \in \mathrm{int}_{p\tau}(A \cup B)$ olsun. Bu $U_x \subset A \cup B$ olacak şekilde x noktasını içeren bir U_x ön-açık kümesinin var olduğunu gösterir.

Özel olarak $U_x \subset A$ veya $U_x \subset B$ ise $x \in \mathrm{int}_{p\tau}(A) \cup \mathrm{int}_{p\tau}(B)$ olması açıktır.

Diğer taraftan genelliği bozmadan x noktasını içeren bütün U_x ön-açık kümelerinin $U_x \subset A \cup B$ şeklinde olduğunu varsayalım. $A \cup B$ tarafından kapsanmayan x noktasını içeren bazı U_x ön-açık kümeleri varsa $\varnothing \neq U_x \cap \mathrm{int}_{p\tau}(A \cup B)$ kümesi x noktasını içeren boştan farklı bir ön-açık kümedir ve $A \cup B$ tarafından kapsanmaktadır. Bu yüzden $U_x \subset A \cup B$ olacak şekilde x'in bütün U_x ön-açık kümeleri için $U_x \not\subset A$ ve $U_x \not\subset B$'dir. $x \notin \mathrm{int}_{p\tau}(A)$ ve $x \notin \mathrm{int}_{p\tau}(B)$ olup $U_x \cap (B \setminus A) \neq \varnothing$ ve $U_x \cap (A \setminus B) \neq \varnothing$'dir. Bu $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}(A)$ ve $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}(B)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $x \in \mathrm{fr}_{p\tau}(A)$ ve $x \in \mathrm{fr}_{p\tau}(B)$ olur. Böylece $\mathrm{fr}_{p\tau}(A) \cap \mathrm{fr}_{p\tau}(A) \neq \varnothing$ olur ki bu bir çelişkidir.

Teorem 2.27. Herhangi $A \subset X$ için $\mathrm{fr}_{p\tau}(\mathrm{fr}_{p\tau}(A)) \subset \mathrm{fr}_{p\tau}(A)$'dir [38].

İspat. $\mathrm{fr}_{p\tau}(A)$ ön-kapalı olduğundan

$$\mathrm{fr}_p\left(\mathrm{fr}_{p\tau}(A)\right)=\mathrm{cl}_{p\tau}\left(\mathrm{fr}_{p\tau}(A)\right)\cap\mathrm{cl}_{p\tau}\left(X\setminus\mathrm{fr}_{p\tau}(A)\right)\subset\mathrm{cl}_{p\tau}\left(\mathrm{fr}_{p\tau}(A)\right)=\mathrm{fr}_{p\tau}(A)$$

olur.

Teorem 2.28. $A\subset X$ için $\mathrm{fr}_{p\tau}\left(\mathrm{int}_{p\tau}(A)\right)\subset\mathrm{fr}_{p\tau}(A)$ ve $\mathrm{fr}_{p\tau}\left(\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\right)\subset\mathrm{fr}_{p\tau}(A)$’dir [38].

İspat. $A\subset X$ için

$$\begin{aligned}\mathrm{fr}_{p\tau}\left(\mathrm{int}_{p\tau}(A)\right)&=\mathrm{cl}_{p\tau}\left(\mathrm{int}_{p\tau}(A)\right)\setminus\mathrm{int}_{p\tau}\left(\mathrm{int}_{p\tau}(A)\right)\\&=\mathrm{cl}_{p\tau}\left(\mathrm{int}_{p\tau}(A)\right)\setminus\mathrm{int}_{p\tau}(A)\subset\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\setminus\mathrm{int}_{p\tau}(A)\\&=\mathrm{fr}_{p\tau}(A)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathrm{fr}_{p\tau}\left(\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\right)&=\mathrm{cl}_{p\tau}\left(\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\right)\setminus\mathrm{int}_{p\tau}\left(\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\right)\\&=\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\setminus\mathrm{int}_{p\tau}\left(\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\right)\subset\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\setminus\mathrm{int}_{p\tau}(A)\\&=\mathrm{fr}_{p\tau}(A)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.29. $A\subset X$ kümesi ön-açıktır ancak ve ancak $\mathrm{fr}_{p\tau}(A)=\mathrm{D}_{p\tau}(A)$’dir [38].

İspat. A ön-açık olsun. Dolayısıyla $\mathrm{int}_{p\tau}(A)=A$’dir. Öyleyse

$$\mathrm{fr}_{p\tau}(A)=\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\setminus\mathrm{int}_{p\tau}(A)=\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\setminus A$$

bulunur. $\mathrm{cl}_{p\tau}(A)=A\cup\mathrm{D}_{p\tau}(A)$ olduğundan

$$\mathrm{fr}_{p\tau}(A)=\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\setminus A=\left(A\cup\mathrm{D}_{p\tau}(A)\right)\setminus A=\mathrm{D}_{p\tau}(A)$$

olur.

Aksine, $\mathrm{fr}_{p\tau}(A)=\mathrm{D}_{p\tau}(A)$, yani

$$\mathrm{D}_{p\tau}(A)=\mathrm{cl}_{p\tau}(A)\setminus \mathrm{int}_{p\tau}(A)=\left(A\cup \mathrm{D}_{p\tau}(A)\right)\setminus \mathrm{int}_{p\tau}(A)$$

olsun. Böylece $A\subset \mathrm{int}_{p\tau}(A)$'dir. Ayrıca $\mathrm{int}_{p\tau}(A)\subset A$ olduğundan $\mathrm{int}_{p\tau}(A)=A$ olur ki bu A'nın ön-açık olduğunu gösterir.

Tanım 2.30. $x\in X$ ve $A\subset X$ olsun. x noktası $X\setminus A$'nın ön-iç noktası ise x noktasına $A\subset X$'in ön-dış noktası denir. X'in bütün ön-dış noktalarının kümesine A'nın ön-dışı denir ve $\mathrm{ext}_{p\tau}(A)$ ile gösterilir [38].

Tanım gereğince $\mathrm{ext}_{p\tau}(A)=\mathrm{int}_{p\tau}(X\setminus A)$'dir.

Teorem 2.31. X bir topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır [38].

i. $A\subset B$ ise $\mathrm{ext}_{p\tau}(B)\subset \mathrm{ext}_{p\tau}(A)$'dır.

ii. $\mathrm{ext}_{p\tau}(A\cup B)\subset \mathrm{ext}_{p\tau}(A)\cup \mathrm{ext}_{p\tau}(B)$'dir.

iii. $\mathrm{ext}_{p\tau}(A)\cap \mathrm{ext}_{p\tau}(B)\subset \mathrm{ext}_{p\tau}(A\cap B)$'dir.

İspat.

i. $A\subset B$ ise $X\setminus B\subset X\setminus A$ ve böylece $\mathrm{int}_{p\tau}(X\setminus B)\subset \mathrm{int}_{p\tau}(X\setminus A)$ olur ki buradan $\mathrm{ext}_{p\tau}(B)\subset \mathrm{ext}_{p\tau}(A)$'dır.

ii. $A\subset A\cup B$ ve $B\subset A\cup B$ olduğundan (i) şıkkına göre $\mathrm{ext}_{p\tau}(A\cup B)\subset \mathrm{ext}_{p\tau}(A)$ ve $\mathrm{ext}_{p\tau}(A\cup B)\subset \mathrm{ext}_{p\tau}(B)$'dir. Dolayısıyla $\mathrm{ext}_{p\tau}(A\cup B)\subset \mathrm{ext}_{p\tau}(A)\cup \mathrm{ext}_{p\tau}(B)$'dir.

iii. $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğundan tekrar (i) şıkkına göre $\text{ext}_{p\tau}(A) \subset \text{ext}_{p\tau}(A \cap B)$ ve $\text{ext}_{p\tau}(B) \subset \text{ext}_{p\tau}(A \cap B)$'dir. Dolayısıyla $\text{ext}_{p\tau}(A) \cap \text{ext}_{p\tau}(B) \subset \text{ext}_{p\tau}(A \cap B)$'dir.

Aşağıdaki örnek eşitliklerin genellikle doğru olmadığını gösterir.

Örnek 2.32. $X = \{a,b,c,d\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau = \{\varnothing, X, \{b\}, \{d\}, \{b,d\}\}$ ve $p\tau = \{\varnothing, X, \{b\}, \{d\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}\}$ olsun. $A = \{c\}$ ve $B = \{b,c\}$ alalım. Böylece

$$\text{ext}_{p\tau}(A) = \text{int}_{p\tau}(\{a,b,d\}) = \{a,b,d\},$$

$$\text{ext}_{p\tau}(B) = \text{int}_{p\tau}(\{a,d\}) = \{d\},$$

$$\text{ext}_{p\tau}(A \cup B) = \text{ext}_{p\tau}(\{b,c\}) = \text{int}_{p\tau}(\{a,d\}) = \{d\},$$

$$\text{ext}_{p\tau}(A \cap B) = \text{ext}_{p\tau}(\{c\}) = \text{int}_{p\tau}(\{a,b,d\}) = \{a,b,d\}$$

olur. Dolayısıyla $A \subset B$ ancak $\text{ext}_p(A) \not\subset \text{ext}_p(B)$'dir. Ayrıca

$$\text{ext}_{p\tau}(A) \cup \text{ext}_{p\tau}(B) \not\subset \text{ext}_{p\tau}(A \cup B)$$

ve

$$\text{ext}_{p\tau}(A \cap B) \not\subset \text{ext}_{p\tau}(A) \cap \text{ext}_{p\tau}(B)$$

olur.

Teorem 2.33. X bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun [38].

i. $\text{ext}(A) \subset \text{ext}_{p\tau}(A)$.

ii. $\text{ext}_{p\tau}(X) = \varnothing$ ve $\text{ext}_{p\tau}(\varnothing) = X$.

iii. $\text{ext}_{p\tau}(A)$ ön-açıktır.

iv. $\text{ext}_{p\tau}(A) = X \setminus \text{cl}_{p\tau}(A)$.

v. $\text{ext}_{p\tau}(\text{ext}_{p\tau}(A)) = \text{int}_{p\tau}(\text{cl}_{p\tau}(A))$.

vi. $\text{ext}_{p\tau}(A \cup B) = \text{ext}_{p\tau}(A) \cap \text{ext}_{p\tau}(B)$.

vii. $\text{ext}_{p\tau}(A) = \text{ext}_{p\tau}(X \setminus \text{ext}_{p\tau}(A))$.

viii. $\text{int}_{p\tau}(A) \subset \text{ext}_{p\tau}(\text{ext}_{p\tau}(A))$.

ix. $A \cap \text{ext}_{p\tau}(A) = \varnothing$.

x. $\text{int}_{p\tau}(A)$ ve $\text{ext}_{p\tau}(A)$ ayrıktır.

xi. $X = \text{int}_{p\tau}(A) \cup \text{ext}_{p\tau}(A) \cup \text{fr}_{p\tau}(A)$.

İspat.

i. $x \in \text{ext}(A)$ olsun. Bu $x \in \text{int}(X \setminus A) \subset \text{int}_{p\tau}(X \setminus A) = \text{ext}_{p\tau}(A)$ olduğunu gösterir.

ii. İlk olarak $\text{ext}_{p\tau}(X) = \text{ext}_{p\tau}(X \setminus X) = \text{int}_{p\tau}(\varnothing) = \varnothing$'dir ve ayrıca $\text{ext}_{p\tau}(\varnothing) = \text{int}_{p\tau}(X \setminus \varnothing) = \text{int}_{p\tau}(X) = X$'dir.

iii. $\text{ext}_{p\tau}(A) = \text{int}_{p\tau}(X \setminus A)$ olduğundan $\text{ext}_{p\tau}(A)$ ön-açıktır.

iv. $\text{ext}_{p\tau}(A) = \text{int}_{p\tau}(X \setminus A) = X \setminus \text{cl}_{p\tau}(A)$ bulunur.

v. (iv) şıkkına göre

$$\text{ext}_{p\tau}(\text{ext}_{p\tau}(A)) = \text{ext}_{p\tau}(X \setminus \text{cl}_{p\tau}(A)) = \text{int}_{p\tau}(X \setminus (X \setminus \text{cl}_{p\tau}(A))) = \text{int}_{p\tau}(\text{cl}_{p\tau}(A))$$

olur.

vi.

$$\begin{aligned}
\text{ext}_{p\tau}(A) \cap \text{ext}_{p\tau}(B) &= \text{int}_{p\tau}(X \setminus A) \cap \text{int}_{p\tau}(X \setminus B) \\
&\subset \text{int}_{p\tau}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\
&= \text{int}_{p\tau}(X \setminus (A \cup B)) \\
&= \text{ext}_{p\tau}(A \cup B)
\end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ olduğundan $\operatorname{ext}_{p\tau}(A \cup B) \subset \operatorname{ext}_{p\tau}(A)$ ve $\operatorname{ext}_{p\tau}(A \cup B) \subset \operatorname{ext}_{p\tau}(B)$'dir. Böylece $\operatorname{ext}_{p\tau}(A \cup B) \subset \operatorname{ext}_{p\tau}(A) \cap \operatorname{ext}_{p\tau}(B)$'dir.

vii.

$$\begin{aligned} \operatorname{ext}_{p\tau}\left(X \setminus \operatorname{ext}_{p\tau}(A)\right) &= \operatorname{int}_{p\tau}\left(X \setminus \left(X \setminus \operatorname{ext}_{p\tau}(A)\right)\right) \\ &= \operatorname{int}_{p\tau}\left(\operatorname{ext}_{p\tau}(A)\right) \\ &= \operatorname{int}_{p\tau}\left(\operatorname{int}_{p\tau}(X \setminus A)\right) \\ &= \operatorname{int}_{p\tau}(X \setminus A) \\ &= \operatorname{ext}_{p\tau}(A) \end{aligned}$$

olur.

viii. Tanıma göre $\operatorname{ext}_{p\tau}(A) = \operatorname{int}_{p\tau}(X \setminus A) \subset X \setminus A$'dır ve bu yüzden Teorem 2.31.'in (i) şıkkından dolayı $\operatorname{ext}_{p\tau}(X \setminus A) \subset \operatorname{ext}_{p\tau}\left(\operatorname{ext}_{p\tau}(A)\right)$ olur ki bu $\operatorname{int}_{p\tau}(A) \subset \operatorname{ext}_{p\tau}\left(\operatorname{ext}_{p\tau}(A)\right)$ olduğunu gösterir.

ix. $\operatorname{ext}_{p\tau}(A) = \operatorname{int}_{p\tau}(X \setminus A) \subset X \setminus A$'dır ki bu $A \cap \operatorname{ext}_{p\tau}(A) = \varnothing$ olduğunu gösterir.

x. $\operatorname{ext}_{p\tau}(A) = \operatorname{int}_{p\tau}(X \setminus A) \subset X \setminus A$ ve $\operatorname{int}_{p\tau}(A) \subset A$'dır ki bu $\operatorname{ext}_{p\tau}(A) \cap \operatorname{int}_{p\tau}(A) = \varnothing$ olduğunu gösterir.

xi. (iv) şıkkına göre $\operatorname{ext}_{p\tau}(A) = X \setminus \operatorname{cl}_{p\tau}(A) = X \setminus \left(\operatorname{int}_{p\tau}(A) \cup \operatorname{fr}_{p\tau}(A)\right)$'dır ki bu $X = \operatorname{int}_{p\tau}(A) \cup \operatorname{ext}_{p\tau}(A) \cup \operatorname{fr}_{p\tau}(A)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.34. $p\tau_1 \subseteq p\tau_2$ olacak şekilde X üzerindeki ön-topolojiler $p\tau_1$ ve $p\tau_2$ olsun. X'in herhangi A alt kümesi için $p\tau_2$'ye göre A'nın her ön-limit noktası $p\tau_1$'e göre A'nın bir ön-limit noktasıdır [55].

İspat. $p\tau_2$'ye göre A'nın bir ön-limit noktası x olsun. Öyleyse $x \in S$ olacak şekilde her $S \in p\tau_2$ için $A \cap \left(S \setminus \{x\}\right) \neq \varnothing$'dir. Ayrıca $p\tau_1 \subseteq p\tau_2$ olduğundan $x \in S$ olacak şekilde her $S \in p\tau_1$ için $A \cap (S \setminus \{x\}) \neq \varnothing$'dir. Böylece x noktası $p\tau_1$'e göre A'nın bir ön-limit noktasıdır.

Örnek 2.35. $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerindeki topolojiler $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ ve $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ ve

$$p\tau_1 = \tau_1 \cup \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}\}$$

$$p\tau_2 = \tau_2 \cup \{\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}\}$$

olsun. Aynı zamanda $p\tau_1 \subseteq p\tau_2$ ve $p\tau_1$'e göre $A = \{a,b\}$ kümesinin bir ön-limit noktası c olduğuna ancak $p\tau_2$'ye göre bir ön-limit noktası olmadığına dikkat ediniz [55].

Önerme 2.36. τ, X üzerinde ayrık veya ayrık olmayan topoloji ise $p\tau$, X üzerinde bir topolojidir [55].

İspat. τ, X üzerinde ayrık topoloji ise $\tau = \exp(X)$'dir. Dolayısıyla τ'nun her açık kümesi ön-açık olduğundan $p\tau$, X üzerinde bir topolojidir. Eğer τ, X üzerinde ayrık olmayan topoloji ise $\tau = \{\varnothing, X\}$'dir. X'in ön-açık kümeleri sadece $\varnothing$ ve X olur. $p\tau$, X üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.37. (X,τ) ve (Y,τ') iki topolojik uzay ve $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ bir fonksiyon olsun.

i. Y'deki her açık S kümesi için $f^{-1}(S)$, X'de ön-açık ise f fonksiyonuna ön-süreklidir denir [32].
ii. Y'deki her ön-açık S kümesi için $f^{-1}(S)$, X'de ön-açık ise f fonksiyonuna ön-kararsızdır denir [32].

iii. X 'deki her ön-açık S kümesi için $f(S)$, Y 'de ön-açık ise f fonksiyonuna ön-kararlıdır denir [32].

iv. Y 'deki her ön-açık S kümesi için $f^{-1}(S)$, X 'de açık ise f fonksiyonuna kuvvetli ön-süreklidir denir [32].

Önerme 2.38.

i. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ fonksiyonu kuvvetli ön-süreklidir ancak ve ancak $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,p\tau')$ süreklidir.

ii. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ fonksiyonu kuvvetli ön-sürekli ise $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ süreklidir [46].

Önerme 2.38. (ii)'nin tersinin genel olarak doğru olmadığını görmek için; X ve Y reel sayılar kümesi, τ ve τ' alışılmış topoloji ve $I:X\rightarrow Y$ özdeşlik dönüşümü olsun. O halde I süreklidir. Ancak $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ön-açık küme iken açık küme değildir. $I^{-1}(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ olduğundan I fonksiyonu kuvvetli ön-sürekli değildir [46].

Teorem 2.39. (Y,τ') topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

i. Y 'nin her ön-açık kümesi açıktır.

ii. (X,τ) herhangi topolojik uzay olduğunda her sürekli $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ fonksiyonu kuvvetli ön-süreklidir [46].

İspat. i. $\Rightarrow$ ii. Tanımdan açıktır.

ii. $\Rightarrow$ i. Her $f:(Y,\tau')\rightarrow(Y,\tau')$ sürekli fonksiyonu, kuvvetli ön-sürekli olsun. f özdeşlik dönüşümü alalım. Bu durumda S kümesi Y 'de ön-açık ise $S=f^{-1}(S)$ açıktır.

Tanım 2.40. (X,τ) topolojik uzayının her alt kümesi açık ya da kapalı (veya hem açık hem kapalı) ise bu uzaya kapı uzay denir [27].

Teorem 2.41. (X,τ) bir kapı uzayı ise X 'deki her ön-açık küme açıktır [46].

İspat. S kümesi X 'de ön-açık olsun. Eğer S açık küme değilse X kapı uzay olduğundan S kapalıdır. Bu yüzden $S=\operatorname{cl}(S)$'dir ve $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(S))=\operatorname{int}(S)$ kümesi S 'nin ön-açık kümesidir. Böylece $S\not\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(S))$ olur ki böylece S ön-açık değildir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla S açık kümedir.

Teorem 2.42. (X,τ) topolojik uzayındaki her ön-açık alt küme açık olsun. X 'deki her tek nokta kümesi ya açıktır ya kapalıdır [46].

İspat. Her $x\in X$ için $\{x\}$ açık olmasın. O halde $\{x\}$ ön-açık değildir. Böylece $\{x\}\not\subset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\}))$ olur. Dolayısıyla $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\}))=\varnothing$ 'dir. Ayrıca

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(X\setminus\{x\}))\supset\operatorname{int}(\operatorname{cl}(X\setminus\operatorname{cl}(\{x\})))=\operatorname{int}(X\setminus\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\})))=X$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(X\setminus\{x\}))\supset X\setminus\{x\}$$

görülür. Buradan $X\setminus\{x\}$ ön-açıktır ve böylece açıktır. Bu yüzden de $\{x\}$ kapalıdır. O halde her $x\in X$ için $\{x\}$ kapalı değilse açıktır.

Sonuç 2.43. (X,τ) uzayı her ön-açık kümenin açık olduğu hiç bir izole (ayrık) noktaya sahip olmayan bir uzay olduğundan bu uzay T_1-uzayıdır [46].

Teorem 2.44. (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

i. Her ön-açık alt küme açıktır.
ii. Her yoğun alt küme açıktır [46].

İspat. i. $\Rightarrow$ ii. X 'in yoğun bir alt kümesi S olsun. Yani $\mathrm{cl}(S)=X$ olsun. Öyleyse $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))=X$ olur. Bu taktirde $S\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))$ olup S ön-açık kümedir. Hipotezden S açıktır.

ii. $\Rightarrow$ i. X 'in ön-açık bir alt kümesi S olsun. Burada $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))=G$ diyelim. O halde $S\subset G$ ve $\mathrm{cl}(S)\subset\mathrm{cl}(G)$ olur. Diğer taraftan $\mathrm{cl}(G)=\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S)))\subset\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S))=\mathrm{cl}(S)$ olduğundan $\mathrm{cl}(G)\subset\mathrm{cl}(S)$ 'dir. Böylece $\mathrm{cl}(S)=\mathrm{cl}(G)$ olduğu göz önüne alınarak

$$\mathrm{cl}((X\setminus G)\cup S)=\mathrm{cl}(X\setminus G)\cup\mathrm{cl}(S)=(X\setminus G)\cup\mathrm{cl}(G)=X$$

elde edilir. Böylece $(X\setminus G)\cup S$ kümesi X 'de yoğundur. Kabulden $(X\setminus G)\cup S$ açıktır. Buradan iki açık kümenin kesişimi olan $S=((X\setminus G)\cup S)\cap G$ kümesi açıktır.

Teorem 2.45. (X,τ) topolojik uzayında her alt küme ön-açıktır ancak ve ancak (X,τ) uzayının her açık alt kümesi kapalıdır [46].

İspat. (X,τ) topolojik uzayının her alt kümesi ön-açık olsun. G açık kümesini alalım. O halde $X\setminus G=\mathrm{cl}(X\setminus G)$ kümesi kapalıdır, ayrıca $X\setminus G\subset X$ olduğundan ön-açık kümedir. Öyleyse $X\setminus G\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X\setminus G))$ olur. Buradan

$$\mathrm{cl}(X\setminus G)\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X\setminus G)))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X\setminus G))=\mathrm{int}(X\setminus G)$$

bulunur. Böylece $X \setminus G = \operatorname{int}(X \setminus G)$ olur öyle ki $X \setminus G$ açıktır, yani G kapalıdır.

Tersine, X 'in açık alt kümeleri kapalı olsun. X 'in herhangi S alt kümesini alalım. O halde $X \setminus \operatorname{cl}(S)$ açıktır ve kapalıdır. Böylece

$$X \setminus \operatorname{cl}(S) = \operatorname{cl}(X \setminus \operatorname{cl}(S)) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S))$$

olur. Yani $S \subset \operatorname{cl}(S) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(S))$ 'dir. Dolayısıyla S ön-açıktır.

Önerme 2.46. (X,τ) topolojik uzay, $S \subset X$ ve $b \in \operatorname{cl}(S) \setminus S$ olsun. $\{b\}$ kümesi (X,τ) 'da ön-açık değildir [46].

İspat. Varsayalım ki $\{b\}$ ön-açık olsun. O halde $\{b\} \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{b\}))$ 'dir. Böylece $S \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{b\})) \neq \varnothing$ 'dir. $c \in S \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{b\}))$ noktasını alalım. Dolayısıyla $c \in \operatorname{cl}(\{b\})$ ve buradan da $\{b\} \cap (S \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{b\}))) \neq \varnothing$ olur. Bu $\{b\} \cap S = \varnothing$ olması ile çelişir. Bu yüzden $\{b\}$ ön-açık değildir.

Tanım 2.47. X uzayının her bir farklı x, y noktaları için birini içeren fakat diğerini içermeyen bir ön-açık küme varsa X uzayına pT_0-uzayı denir [11, 26].

Teorem 2.48. X uzayı pT_0-uzayıdır ancak ve ancak X uzayının her farklı x, y noktaları için $\operatorname{cl}_{p\tau}\{x\} \neq \operatorname{cl}_{p\tau}\{y\}$ 'dır [37].

İspat. X, pT_0-uzayının herhangi farklı iki noktası x ve y olsun. $\operatorname{cl}_{p\tau}\{x\} \neq \operatorname{cl}_{p\tau}\{y\}$ olduğunu gösterelim.

Hipoteze göre $x \in U$ ve $y \notin U$ olacak şekilde $U \in p\tau$ olduğunu varsayalım. Böylece $y \in X \setminus U$'dur ve $X \setminus U$ ön-kapalı kümedir. Buradan, $\mathrm{cl}_{p\tau}\{y\} \subset X \setminus U$ olur. $x \notin X \setminus U$ olduğu için $x \notin \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$'dir. O halde $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \neq \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$'dir.

Aksine, X uzayının herhangi farklı x, y noktaları için $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \neq \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olsun. $z \in \mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}$ ancak $z \notin \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olacak şekilde bir $z \in X$ alalım. $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olduğunu iddia edelim. $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ ise $\{x\} \subset \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olur ki bu $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \subset \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olduğunu gösterir. Bu $z \in \mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}$ ve $z \notin \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olması ile çelişir. O halde $x \notin \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$'dir. Dolayısıyla $X \setminus \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ kümesi x noktasını içeren ancak y noktasını içermeyen bir ön-açık kümedir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.49. X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$, bire-bir ön-kararsız bir dönüşüm olsun. Y, pT_0-uzayı ise X, pT_0-uzayıdır [37].

İspat. $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ olsun. f fonksiyonu bire-bir ve Y uzayı pT_0-uzayı olduğu için $f(x) \neq f(y)$ olmak üzere $f(x) \in V_x$ ve $f(y) \notin V_x$ olacak şekilde Y uzayında bir V_x ön-açık kümesi veya $f(y) \in V_y$ ve $f(x) \notin V_y$ olacak şekilde Y uzayında bir V_y ön-açık kümesi vardır. f fonksiyonunun ön-kararsız olmasından dolayı $x \in f^{-1}(V_x)$ ve $y \notin f^{-1}(V_x)$ olacak şekilde X uzayında bir $f^{-1}(V_x)$ ön-açık kümesi veya $y \in f^{-1}(V_y)$ ve $x \notin f^{-1}(V_y)$ olacak şekilde X uzayında bir $f^{-1}(V_y)$ ön-açık kümesi vardır. Bu X uzayının pT_0-uzayı olduğunu gösterir.

Tanım 2.50. X uzayının her bir farklı x, y noktaları için x noktasını içeren fakat y noktasını içermeyen bir U_x ön-açık kümesi ve y noktasını içeren fakat x noktasını içermeyen bir U_y ön-açık kümesi varsa X uzayına pT_1-uzayı denir [11, 26].

Teorem 2.51. X uzayı pT_1-uzayıdır ancak ve ancak her $x \in X$ noktası için $\{x\}$ tek nokta kümesi ön-kapalıdır [37].

İspat. Kabul edelim ki X uzayı pT_1-uzayı olsun. Herhangi $x \in X$ noktası için $\{x\}$ tek nokta kümesinin ön-kapalı olduğunu göstermek için uzayın noktalarının her birinin bir ön-komşuluğunun $X \setminus \{x\}$ olduğunu iddia edelim:

$y \in X \setminus \{x\}$ olsun. X uzayının herhangi iki farklı noktaları x ve y olsun. X uzayı pT_1-uzayı olduğundan $y \in V$ ve $x \notin V$ olacak şekilde V ön-açık kümesi vardır. Ancak bu $V \subset X \setminus \{x\}$ olmasını gerektirir. Böylece $y \in X \setminus \{x\}$'dir ve $y \in V$, $y \in V \subset X \setminus \{x\}$ olmasını garanti eder. Bu $X \setminus \{x\}$'in y noktasının bir ön-komşuluğu olduğunu anlamına gelir. Dolayısıyla $X \setminus \{x\}$ kümesi ön-açık yani $\{x\}$ ön-kapalıdır.

Aksine, herhangi $x \in X$ noktası için $\{x\}$ tek nokta kümesinin ön-kapalı olduğunu kabul edelim. X 'in pT_1-uzayı olduğunu göstermek için X uzayının herhangi iki farklı y ve z noktalarını alalım. $\{y\}$ kümesi X de ön-kapalı olduğu için $X \setminus \{y\}$ kümesi z noktasını içeren fakat y noktasını içermeyen ön-açık bir kümedir. Benzer şekilde $\{z\}$ kümesi X 'de ön-kapalı olduğu için $X \setminus \{z\}$ kümesi y noktasını içeren fakat z noktasını içermeyen ön-açık bir kümedir. Bu X 'in pT_1-uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 2.52. (X, τ) topolojik uzayı pT_1-uzayı olsun. Herhangi $A \subset X$ kümesi için $p \in D_{p\tau}(A)$ ise p noktasının her ön-komşuluğu A kümesinin sonsuz sayıda noktasını içerir [37].

İspat. $U \cap A$ sonlu olacak şekilde p noktasının bir ön-komşuluğu U olsun. $U \cap A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = B$ olsun. Açık bir şekilde B ön-kapalı bir kümedir. Ayrıca $B \setminus \{p\}$ de bir ön-kapalı bir kümedir. Böylece $V = (U \cap A) \setminus (B \setminus \{p\})$ kümesi p

noktasının bir ön-komşuluğudur ve $V \cap \left(A \backslash \{p\} \right) = \varnothing$ olur ki bu $p \notin D_{p\tau}(A)$ olmasını gerektirir. Bu varsayımımızla çelişir.

Teorem 2.53. X , $pT_1 -$uzayında X ’in herhangi A alt kümesi için $D_{p\tau}(A)$ ön-kapalıdır [37].

Teorem 2.54. X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$, bire-bir ön-kararsız bir dönüşüm olsun. Y , $pT_1 -$uzayı ise X , $pT_1 -$uzayıdır [37].

İspat. $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ olsun. f , bire-bir ve Y , $pT_1 -$uzayı olduğu için $f(x) \neq f(y)$ olmak üzere $f(x) \in V_x$ ve $f(y) \notin V_x$ olacak şekilde Y uzayında bir V_x ön-açık kümesi ve $f(y) \in V_y$ ve $f(x) \notin V_y$ olacak şekilde Y uzayında bir V_y ön-açık kümesi vardır. f fonksiyonu ön-kararsız olduğundan $x \in f^{-1}(V_x)$ ve $y \notin f^{-1}(V_x)$ olacak şekilde X uzayında bir $f^{-1}(V_x)$ ön-açık kümesi ve $y \in f^{-1}(V_y)$ ve $x \notin f^{-1}(V_y)$ olacak şekilde X uzayında bir $f^{-1}(V_y)$ ön-açık kümesi vardır. Bu X uzayının $pT_1 -$uzayı olduğunu gösterir.

Tanım 2.55. X uzayının her bir farklı x, y noktaları için $U_x \cap U_y = \varnothing$ olacak şekilde x noktasını içeren bir U_x ön-açık kümesi ve y noktasını içeren bir U_y ön-açık kümesi varsa X uzayına $pT_2 -$ uzayı denir [26].

Teorem 2.56. X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$, bire-bir ön-kararsız bir dönüşüm olsun. Y , $pT_2 -$ uzayı ise X , $pT_2 -$ uzayıdır [37].

İspat. $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ olsun. f bire-bir ve Y $pT_2 -$ uzayı olduğu için $f(x) \neq f(y)$ olmak üzere $f(x) \in V_x$, $f(y) \in V_y$ ve $V_x \cap V_y = \varnothing$ olacak şekilde Y uzayında V_x ve V_y ön-açık kümeleri vardır. f fonksiyonunun ön-kararsız olmasından dolayı $x \in f^{-1}(V_x)$, $y \in f^{-1}(V_y)$ ve $f^{-1}(V_x) \cap f^{-1}(V_y) = \emptyset$ olacak şekilde X uzayında $f^{-1}(V_x)$ ve $f^{-1}(V_y)$ ön-açık kümeleri vardır. Bu X uzayının pT_2-uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 2.57. X uzayı pT_2-uzayı ise her farklı $a,b \in X$ noktaları için $a \in F_1$, $b \notin F_2$ ve $a \notin F_1$, $b \in F_2$ ve $X = F_1 \cup F_2$ olacak şekilde F_1 ve F_2 ön-kapalı kümeleri vardır [50].

İspat. X uzayı pT_2-uzayı olduğundan herhangi farklı $a,b \in X$ noktaları için $a \in U$, $b \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V ön-açık kümeleri vardır. Böylece $U \subset X \setminus V$ ve $V \subset X \setminus U$ olur. Yani, $a \in X \setminus V$'dir. V ön-açık küme olduğundan $X \setminus V$ ön-kapalı kümedir. $F_1 = X \setminus V$ diyelim. Bu yüzden $a \in F_1$ ve $b \notin F_2$'dir. Benzer şekilde $b \in X \setminus U$'dir. U ön-açık küme olduğundan $X \setminus U$ ön-kapalı kümedir. $F_2 = X \setminus U$ diyelim. Bu yüzden $a \notin F_1$ ve $b \in F_2$'dir. Dahası $F_1 \cup F_2 = (X \setminus V) \cup (X \setminus U) = X \setminus (V \cap U) = X$ olacak şekilde bulunmuş olur.

Tanım 2.58. Her bir S ön-açık kümesi ve $x \in S$ için $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \subset S$ ise X uzayına pR_0-uzayı denir [37].

Ayrıca (X, τ) topolojik uzayında her bir G açık kümesi ve $x \in G$ için $\mathrm{cl}\{x\} \subset G$ ise X uzayına R_0-uzayı denir. Açık bir şekilde her R_0-uzayı, pR_0-uzayıdır ancak tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 2.59. $X = \{a,b,c\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{a,b\}\}$ olsun. $a \in \{a,b\}$ ve $\mathrm{cl}\{a\} \not\subset \{a,b\}$ olacak şekilde bir $\{a,b\}$ açık kümesi var olduğundan X uzayı pR_0-uzayıdır ancak R_0-uzayı değildir [37].

Ayrıca her pT_1-uzayı, pR_0-uzayıdır.

Tanım 2.60. $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \neq \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olmak üzere her farklı $x, y \in X$ için $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \subset U$ ve $\mathrm{cl}_{p\tau}\{y\} \subset V$ olacak şekilde U ve V ayrık ön-açık kümeleri varsa X uzayına pR_1-uzayı denir [37].

Ayrıca (X,τ) topolojik uzayında, $\mathrm{cl}\{x\} \neq \mathrm{cl}\{y\}$ olmak üzere her farklı $x, y \in X$ için $\mathrm{cl}\{x\} \subset U$ ve $\mathrm{cl}\{y\} \subset V$ olacak şekilde U ve V ayrık açık kümeleri varsa X uzayına R_1-uzayı denir. Açık bir şekilde her R_1-uzayı, pR_1-uzayıdır ancak tersinin genellikle doğru olmadığı aşağıdaki örnekle gösterilmektedir:

Örnek 2.61. $X=\{a,b,c,d\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing, X, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ olsun. $a,c \in X$ için $\mathrm{cl}\{a\} = X \neq \{c,d\} = \mathrm{cl}\{c\}$ olmak üzere sırasıyla $\mathrm{cl}\{a\}$ ve $\mathrm{cl}\{c\}$ kümelerini içeren ayrık açık kümeler var olmadığından X uzayı pR_1-uzayıdır ancak R_1-uzayı değildir [37].

Teorem 2.62. X uzayı pR_0-uzayıdır ancak ve ancak her ön-kapalı F ve $x \notin F$ için $F \subset U$ ve $x \notin U$ olacak şekilde bir U ön-açık kümesi vardır [37].

İspat. X uzayı bir pR_0-uzay ve $x \in X$ noktasını içermeyen bir ön-kapalı küme F olsun. O halde $X \setminus F$ ön-açıktır ve $x \in X \setminus F$'dir. X pR_0-uzayı olduğundan $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \subset X \setminus F$'dir. Öyleyse $F \subset X \setminus \mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}$'dir. $U = X \setminus \mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}$ olsun. Dolayısıyla $x \notin U$ ve $F \subset U$ olacak şekilde U kümesi ön-açık bir kümedir.

Aksine, $U \subset X$ ön-açık küme olmak üzere $x \in U$ olsun. Öyleyse $X \setminus U$ ön-kapalı küme olmak üzere $x \notin X \setminus U$'dur. O halde hipoteze göre $X \setminus U \subset W$ ve $x \notin W$ olacak şekilde öyle bir W ön-açık kümesi vardır. $X \setminus W \subset U$ ve $x \in X \setminus W$'dir. $X \setminus W$ ön-kapalı bir kümedir. Dolayısıyla $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \subset X \setminus W \subset U$'dur. Böylece X uzayı bir pR_0-uzaydır.

Tanım 2.63. X uzayındaki x noktasının ön-çekirdeği $x \in \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$ olacak şekilde bütün $y \in X$ noktalarının kümesi olarak tanımlanır ve $p\ker\{x\}$ ile gösterilir. Böylece $p\ker\{x\} = \{y \mid x \in \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}\}$ yazılabilir [37].

Teorem 2.64. X uzayında x ve y noktaları için $p\ker\{x\} \neq p\ker\{y\}$ olur ancak ve ancak $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \neq \mathrm{cl}_{p\tau}\{y\}$'dir [37].

Teorem 2.65. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

i. X, pR_0-uzayıdır.
ii. Her $x \in X$ için $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \subset p\ker\{x\}$'dir.
iii. $F \subset X$ ön-kapalı ise $F = \cap\{\, G \mid G$ ön-açık, $F \subset G \,\}$'dir.
iv. $G \subset X$ ön-açık ise $G = \cup\{\, F \mid F$ ön-kapalı, $F \subset G \,\}$'dir.
v. Herhangi boştan farklı A kümesi ve $A \cap H \neq \varnothing$ olacak şekilde $H \subset X$ ön-açık kümesi için $F \subset H$ ve $A \cap F \neq \varnothing$ olduğu bir F ön-kapalı kümesi vardır.
vi. Herhangi $F \subset X$ ön-kapalı kümesi ve $x \notin F$ için $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\} \cap F = \varnothing$'dir [37].

Teorem 2.66. X uzayı pT_1-uzayıdır ancak ve ancak X uzayı pT_0-uzayı ve pR_0-uzayıdır [37].

İspat. X uzayı pT_1-uzayı olsun. Her pT_1-uzayı pT_0-uzayı olduğundan ve her pT_1-uzayı pR_0-uzayı olduğundan X uzayının pT_0-uzayı ve pR_0-uzayı olduğu aşikardır.

Aksine, X uzayının hem pT_0-uzayı hem de pR_0-uzayı olduğunu kabul edelim. X uzayının pT_1-uzayı olduğunu gösterelim: $x, y \in X$ herhangi iki farklı nokta olsun. X uzayı pT_0-uzayı olduğundan $x\in G$ ve $y\notin G$ olacak şekilde bir ön-açık G kümesi veya $y\notin G$ ve $y\notin \mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}$ olacak şekilde bir ön-açık H kümesi vardır. $x\in G$ ve $y\notin G$ olduğunu varsayalım. $x\in G$ olduğundan $\mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}\subset G$'dir. $y\notin G$ olduğundan $y\notin \mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}$'dir. Böylece $y\in H=X\setminus \mathrm{cl}_{p\tau}\{x\}$'dir ve $x\notin H$ olduğu aşikardır. $y\notin G$ ve $x\notin H$ olacak şekilde sırasıyla x ve y noktalarını içeren G ve H ön-açık kümeleri vardır. Bu da X uzayının pT_1-uzayı olduğunu gösterir.

Aşağıdaki teoremlerin ispatları açıktır [37].

Teorem 2.67. Her pR_1-uzayı, pR_0-uzayıdır.

Teorem 2.68. Her pT_2-uzayı, pT_0-uzayıdır.

Teorem 2.69. X uzayı pT_2-uzayıdır ancak ve ancak X uzayı pR_1-uzayı ve pT_0-uzayıdır.

Tanım 2.70. $(X,p\tau)$ ön-topolojik uzayının her x noktasında sayılabilir bir ön-yerel taban varsa bu uzaya birinci sayılabilirdir denir [6].

Tanım 2.71. $(X,p\tau)$ ön-topolojik uzayı ve X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. $x\in X$ noktasını içeren her U ön-açık kümesi için $n>n_0$ olduğunda $x_n\in U$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı varsa bu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $x\in X$ noktasına ön-yakınsaktır denir [39].

Tanım 2.72. X uzayı boştan farklı ayrık iki ön-açık kümesinin bileşimi olarak ifade edilemiyorsa X uzayına ön-bağlantılıdır denir. Aksi takdirde X uzayına ön-bağlantısızdır denir [43].

Dolayısıyla her ön-bağlantılı uzay bağlantılıdır.

Örnek 2.73. $X=\{a,b,c\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau=\{\emptyset, X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ olsun. O halde X topolojik uzayı ön-bağlantılıdır [25].

Örnek 2.74. $X=\{a,b,c\}$ ve üzerindeki topoloji $\tau=\{\emptyset, X,\{a\},\{b,c\}\}$ olsun. O halde X topolojik uzayı ön-bağlantılı değildir [25].

Tanım 2.75. X uzayının her ön-açık örtüsünün sonlu bir ön-açık alt örtüsü varsa X uzayına kuvvetli kompakttır denir [15, 24, 33].

Tanım 2.76. X uzayına $x\in X$ noktasında yerel kuvvetli kompakttır denir ancak ve ancak x noktası X uzayında kuvvetli kompakt olan bir ön-komşuluğa sahiptir [20].

Tanım 2.77. X uzayı her noktada yerel kuvvetli kompakt ise X uzayına yerel kuvvetli kompakt uzay denir [20].

Teorem 2.78. $(X, p\tau)$ sonlu bir ön-topolojik uzay ise X kuvvetli kompakttır [50].

İspat. $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olsun. X 'in herhangi bir ön-açık örtüsü $\{S_i\}_{i\in I}$, yani $X=\bigcup_{i\in I} S_i$ olsun. $\{S_i\}_{i\in I}$ ailesindeki her bir kümenin X 'in elemanlarından en az birini eleman olarak kabul edeceği açıktır. Varsayalım ki $x_1\in S_1, x_2\in S_2,...,x_n\in S_n$ olsun. O halde $\{S_1,S_2,...,S_n\}$ ailesi X 'in sonlu bir alt ön-açık örtüsüdür. Bu yüzden X kuvvetli kompakttır.

Teorem 2.79. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzay ve $p\tau=\{\, U\subset X \mid X\setminus U \text{ sonlu} \,\}$ olsun. X kuvvetli kompakttır [50].

İspat. X in herhangi bir ön-açık örtüsü $\{S_i\}_{i\in I}$, yani $X=\bigcup_{i\in I} S_i$ olsun. Hipotezden, $S\in p\tau$ olduğundan $X\setminus S$ sonludur. $X\setminus S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ diyelim. $\{S_i\}_{i\in I}$ 'nin herhangi bir kümesinin $X\setminus S$ 'nin elemanlarından en az birini eleman olarak kabul edeceği açıktır. Varsayalım ki $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, ..., x_n \in S_n$ olsun. O halde $\{S, S_1, S_2, ..., S_n\}$ ailesi X 'in sonlu bir alt ön-açık örtüsüdür. Bu yüzden X kuvvetli kompakttır.

Teorem 2.80. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzay olsun. Kuvvetli kompakt kümelerin sonlu birleşimi kuvvetli kompakttır [50].

İspat. X 'in herhangi iki kuvvetli kompakt alt kümesi U ve V olsun. $U \cup V$ kümesinin bir ön-açık örtüsü $\{S_i\}_{i \in I}$ olsun. Kabulden dolayı $\{S_i\}_{i \in I}$ ön-açık örtüsü hem U hem de V kümesinin bir ön-açık örtüsüdür. U ve V kümeleri kuvvetli kompakt olduklarından $U = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$ ve $V = S_{n+1} \cup S_{n+2} \cup ... \cup S_{n+m}$ olacak şekilde sonlu alt ön-açık $S_1, S_2, ..., S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, ..., S_{n+m}$ kümeleri vardır. $U \cup V = \bigcup_{i=1}^{n+m} S_i$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla $U \cup V$ kümesi kuvvetli kompakttır.

Teorem 2.81. Kuvvetli kompakt $(X, p\tau)$ uzayının ön-kapalı her alt kümesi kuvvetli kompakttır [50].

İspat. $(X, p\tau)$ kuvvetli kompakt uzayının ön-kapalı alt kümesi A olsun. X 'in ön-açık alt kümelerinden oluşan $\{S_i\}_{i \in I}$ ailesi A kümesinin bir ön-açık örtüsü olsun. A kümesi ön-kapalı olduğundan $X \setminus A$ kümesi ön-açıktır ve $X = (X \setminus A) \cup A$ yazılabilir. $A = \bigcup_{i \in I} S_i$ olduğu için $(X \setminus A) \cup \{S_i\}_{i \in I}$ ailesi X 'in bir ön-açık örtüsüdür. Hipotezden $(X, p\tau)$ uzayı kuvvetli kompakt uzay olduğundan X 'in sonlu bir alt ön-açık örtüsü $(X \setminus A) \cup \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ olacak şekilde vardır. Bu yüzden $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ ailesi A kümesinin sonlu bir alt ön-açık örtüsü olur. O halde A kümesi kuvvetli kompakttır.

Teorem 2.82. X kuvvetli kompakt uzayının her sonsuz alt kümesi en azından bir ön-yığılma noktasına sahiptir [50].

İspat. X kuvvetli kompakt uzayının sonsuz bir alt kümesi A olsun. A kümesinin X uzayında herhangi bir ön-yığılma noktasına sahip olmadığını varsayalım. Kabulden, her $x \in X$ için $U_x \cap A = \{x\}$ ya da $U_x \cap A = \varnothing$ olacak şekilde bir U_x ön-açık alt kümesi vardır. $\{U_x\}_{x \in X}$ ailesi X 'in bir ön-açık örtüsü olup X kuvvetli kompakt uzay olduğundan $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$ olacak şekilde X uzayında $x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları vardır. Buradan

$$\left(U_{x_1} \cap A\right) \cup \left(U_{x_2} \cap A\right) \cup ... \cup \left(U_{x_n} \cap A\right) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_n\}$$

ya da

$$\left(U_{x_1} \cap A\right) \cup \left(U_{x_2} \cap A\right) \cup ... \cup \left(U_{x_n} \cap A\right) = \varnothing$$

dır. $\left(U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n}\right) \cap A = X \cap A = A$ olduğundan

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ ya da } A = \varnothing$$

bulunur. Ancak bu A kümesinin sonsuz olması ile çelişir. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır. Yani A kümesinin X uzayında en az bir ön-yığılma noktası vardır.

Teorem 2.83. Kuvvetli kompakt uzayın ön-kararsız görüntüsü kuvvetli kompakttır [50].

İspat. $(X, p\tau)$ ve $(Y, p\tau')$ iki ön-topolojik uzay olmak üzere $f : (X, p\tau) \to (Y, p\tau')$ fonksiyonu X uzayından Y uzayına ön-kararsız bir fonksiyon olsun. Ayrıca X uzayı kuvvetli kompakt uzay ve Y uzayının ön-açık örtüsü $\{S_i\}_{i \in I}$ ailesi olsun. öyleyse her $i \in I$ için $S_i \in p\tau'$ ise $f^{-1}(S_i) \in p\tau$ olur. $\left\{f^{-1}(S_i)\right\}_{i \in I}$ ailesi X 'in ön-açık bir örtüsüdür. X kuvvetli kompakt olduğundan $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i)$'dir. Böylece f fonksiyonu X uzayından Y uzayına bir fonksiyon olduğundan dolayı $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ ailesi Y uzayının sonlu bir alt ön-açık örtüsüdür. O halde Y uzayı kuvvetli kompakttır.

Teorem 2.84. $(X, p\tau)$ bir ön-topolojik uzay ve bu uzayın bir alt uzayı $(Y, p\tau_Y)$ olsun. $(Y, p\tau_Y)$ kuvvetli kompakttır ancak ve ancak Y'nin her ön-açık örtüsü, Y uzayını örten sonlu bir alt aileyi kapsar [50].

İspat. $(Y, p\tau_Y)$ kuvvetli kompakt ve $\{S_i\}_{i\in I}$ ailesi X'in bir ön-açık örtüsü, yani $X = \bigcup_{i\in I} S_i$ olsun. O halde $\{S_i \cap Y\}_{i\in I}$ ailesi Y'nin ön-açık bir örtüsüdür. Yani $Y = \bigcup_{i\in I}(S_i \cap Y)$'dir. $(Y, p\tau_Y)$ kuvvetli kompakt olduğundan $Y = \bigcup_{i=1}^{n}(S_i \cap Y)$ olacak şekilde $\{S_i \cap Y\}_{i\in I}$ ailesinin sonlu bir alt ön-açık ailesi vardır.

Aksine, Y'nin her ön-açık örtüsü, Y uzayını örten sonlu bir alt aileyi kapsasın. Tanım gereği $(Y, p\tau_Y)$ uzayının kuvvetli kompakt olacağı açıktır.

Teorem 2.85. X ön-topolojik uzayında S alt kümesi kuvvetli kompakt ve F bir ön-kapalı küme ise $S \cap F$ kümesi S alt uzayında kuvvetli kompakttır [50].

İspat. F kümesi X'de ön-kapalı olduğundan $S \cap F$ kümesi S alt uzayında ön-kapalıdır. Kuvvetli kompakt bir uzayın ön-kapalı alt kümesi kuvvetli kompakt olduğundan $S \cap F$ kümesi S'de kuvvetli kompakttır.

Uyarı 2.86. Eğer X, pT_2-uzayı ve Y kümesi de X'in kuvvetli kompakt bir alt kümesi ise Y'nin daima ön-kapalı olması gerekmez [50].

Örnek 2.87. $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki ön-topoloji

$$p\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{c,e\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,e\}, \{b,c,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}, \{a,c,d,e\}, \{b,c,d,e\}\}$$

olsun. O halde X ön-topolojik uzayı bir $pT_2 -$ uzayıdır. Bir $Y = \{a,b,c\}$ kümesi alalım. Y kümesi kuvvetli kompakttır ancak ön-kapalı değildir [50].

BÖLÜM 3. $k-$UZAYLAR

Kompakt üretilmiş topolojik uzaylar 1939'da Whitehead tarafından [54]'te ele alınmış ve Arens [3]'te kompakt kümelerin bir ailesi tarafından üretilen topolojiyi $k-$topoloji olarak adlandırmıştır. Gale [23]'te kompakt üretilmiş topolojik uzayların ilk kez Hurewicz tarafından $k-$uzay adı ile tanıtıldığını ifade etmiştir.

Spanier [47]'de kompakt üretilmiş Hausdorff uzayı $k-$uzay olarak adlandırmış ve Gale başta olmak üzere pek çok bilim adamı çalışmalarında ele aldıkları bütün $k-$ uzayları Hausdorff uzay olarak kabul etmiştir. Ancak ayırma aksiyomlarını kullanmayan çok sayıda aksi örneğe de rastlamak mümkündür.

$k-$ uzaylar üzerine diğer önemli çalışmalar; Bagley ve Yang [7], Bagley ve Weddington [8], Brown [10], Mrowka [36], Poppe [44] ve Weston [52]'dir. Özellikle Noble [41]'de $k-$uzayları araştırmış ve 1967'ye kadar bulunmuş olan $k-$uzaylara ilişkin sonuçların pek çoğunu genişletmiştir. Liden 1973 yılında [30] doktora tezinde $k-$uzayların anti uzaylarını ve ilgili dönüşümleri tanımlayarak yeni sonuçlar elde etmiştir. Arhangel′skiĭ [5]'te bir $k-$uzayın Hausdorff mükemmel ters görüntüsünün $k-$uzay olduğunu göstermiştir. Çarpımları $k-$uzay olmayan iki $k-$uzayın çarpımı üzerine sonuçlar [18]'de mevcuttur. Yerel kompakt bir Hausdorff uzay ile bir $k-$ uzayın çarpımının bir $k-$ uzay olduğu ise Cohen tarafından [12]'de gösterilmiştir.

Tanım 3.1. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, her $K\subset X$ kapalı kompakt kümesi için $A\cap K$ kapalı olduğunda A kapalı ise X topolojik uzayına $k-$uzay denir [27, sf. 234-236].

Kelly tarafından verilen $k-$uzayın yukarıdaki tanımı daha sonra genişletilerek pek çok araştırmacı tarafından aşağıdaki ifadesi ile kullanılmış olup bu tezde elde edilecek sonuçlar aşağıda verilen tanıma dayanmaktadır. Böylece $k-$uzay topolojisi kompakt alt kümeler tarafından belirlenen uzayların önemli bir ailesi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Tanım 3.2. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, her $K\subset X$ kompakt kümesi için $A\cap K$ kümesi K'da kapalı olduğunda A kapalı ise X topolojik uzayına $k-$uzay denir [3, 19, 21, 30, 48, 51].

Tanım 3.2'de verilen $k-$uzayların sınıfının Tanım 3.1'deki $k-$uzaylar sınıfına göre daha geniş olduğu aşağıdaki örnekte de görülmektedir [48].

Örnek 3.3. $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau_l=\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing,\mathbb{R}\}$ sol ışın topolojisi ve bir $A=(-\infty,0]$ kümesi verilsin. A kümesi kapalı değildir ancak $\mathbb{R}$'nin bu topolojiye göre tek kompakt kapalı alt kümesi $\varnothing$ olduğundan A kümesinin her kompakt kapalı alt küme ile kesişimi kapalı bir kümedir. Bu yüzden Tanım 3.1'e göre bu uzay bir $k-$uzay değildir.

Bu uzayda $(-\infty,a]$ şeklindeki alt kümeler kompakttır. Bir B kümesinin her kompakt küme ile kesişimi relatif olarak kapalı ise B kümesi $[b,+\infty)$ şeklinde olmalıdır ve böylece B kapalı küme olmalıdır. Dolayısıyla bu uzay Tanım 3.2'ye göre bir $k-$uzaydır.

Bununla birlikte Tanım 3.1 ve Tanım 3.2'nin denk olma durumunu Steinlage [48]'de aşağıdaki lemma ile ortaya koymuştur.

Lemma 3.4. Bir (X,τ) topolojik uzayında her kompakt kümenin kapanışı kompakt ve $A\subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i. Her $K \subset X$ kapalı kompakt kümesi için $A \cap K$ kapalıdır.

ii. Her $K \subset X$ kompakt kümesi için $A \cap K$, K da kapalıdır [48].

İspat. ii. $\Rightarrow$ i. Açıktır.

i. $\Rightarrow$ ii. $A \cap L$ kümesi L 'de kapalı olmayacak şekilde bir $L \subset X$ kompakt alt kümesi vardır. O halde en az bir $x \in \mathrm{cl}_L(A \cap L) \setminus (A \cap L)$ vardır. $x \notin A$ olması için $x \in L$ olduğuna dikkat ediniz. Ancak $A \cap K$ 'nın kapalı olması için $K = \mathrm{cl}(L)$ kompakt ve kapalı olmalıdır. x noktasının her komşuluğu $A \cap L$ ile kesişir ve böylece $x \in \mathrm{cl}(A \cap K) = A \cap K$ olması için $A \cap K$ ile kesişir. Bu $x \notin A$ olması ile çelişir.

Ayrıca Tanım 3.2'de kapalı kümeler yerine açık kümeler alınarak $k-$ uzayın bu tanımına denk bir tanım aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Tanım 3.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $U \subseteq X$ olsun. X uzayının her kompakt K alt kümesi için $U \cap K$ kümesi K da açık ise U kümesine $k-$açık adı verilir. Her $k-$açık alt kümesinin açık küme olduğu uzaya bir $k-$uzay denir [40].

$k-$uzaylar yerel kompakt uzayların bir genellemesi olduğundan yerel kompaktlığa dair pek çok sonuç $k-$ uzaylar için benzer sonuçlara ilham kaynağı olmuştur. $k-$uzaylar ve yerel kompakt uzaylar arasındaki ilişkiyi irdelerken kullanmak üzere bölüm uzayının tanımını ifade edelim.

Tanım 3.6. (X, τ) topolojik uzay, X' herhangi bir küme ve $f : X \to X'$ olsun. f fonksiyonu sürekli olacak şekilde X' üzerinde tanımlanabilen topolojik yapıların en incesi

$$\tau' = \left\{ A \subset X' \mid f^{-1}(A) \in \tau \right\}$$

‘dir. τ' topolojisine X' üzerinde f fonksiyonu tarafından üretilen bölüm topolojisi ve f fonksiyonuna bölüm dönüşümü denir. (X',τ') uzayına X uzayının bölüm uzayı adı verilir [13].

Teorem 3.7. Bir X uzayı $k-$uzaydır ancak ve ancak X uzayı bir yerel kompakt uzayın bölüm uzayıdır [13].

İspat. (X,τ) $k-$uzay ve (P,τ_P) yerel kompakt uzay olsun. X uzayı P uzayının bölüm uzayı olduğunu göstermeliyiz. Bütün $K\subset X$ kompakt alt kümelerin ailesi $\wp$ olsun. $P=\bigcup_{K\in\wp}K$ olarak yazılabilir. Bir $\begin{array}{c} f:P\to X \\ K\to f(K)=K \end{array}$ doğal dönüşümünün bölüm dönüşümü olduğunu, yani, $\tau_f=\left\{U\subset X \mid f^{-1}(U)\in\tau_P\right\}$ iken $\tau_f=\tau$ olduğunu göstermeliyiz. Herhangi $A\in\tau_f$ alalım. $A\in\tau$ olduğunu, yani, her K kompakt alt kümesi için $A\cap K$ kümesinin K da açık olduğunu gösterelim. $A\in\tau_f$ olduğundan $f^{-1}(A)\in\tau_P$ bulunur. $f^{-1}(A)\cap K$ kümesi P ’den K ’ya indirgenmiş alt uzay topolojisine göre K ’da açıktır. $K\subset P$ olmak üzere $f^{-1}(A)\cap K=A\cap K$ olduğundan $K\subset X$ ’in alt kümesidir. Böylece $A\cap K$ kümesi X ’in K alt kümesinde de açıktır.

Tersine, P yerel kompakt uzay olmak üzere $f:P\to X$ bir bölüm dönüşümü olsun. $G\subset X$ ’in her kompakt alt küme ile kesişimi relatif olarak açık küme olsun. G ’nin X ’de açık küme olduğunu gösterelim. P yerel kompakt uzay olduğundan her $y\in P$ noktasında bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $\mathrm{cl}(U)$ kompakttır. f bölüm dönüşümü yani sürekli olduğundan $f(\mathrm{cl}(U))$ kompakttır. Kabulden $G\cap f(\mathrm{cl}(U))$ kümesi $f(\mathrm{cl}(U))$’da açıktır. Bu yüzden $f^{-1}(G)\cap\mathrm{cl}(U)$ kümesi $\mathrm{cl}(U)$’da açıktır. ve böylece $f^{-1}(G)\cap U$ kümesi U ’da açıktır. U şeklindeki kümeler açık ve P ’yi örttükleri için $f^{-1}(G)$, P ’de açıktır ve G kümesi X ’de açıktır.

Sonuç 3.8. X bir $k-$uzay ve $f: X \to Y$ bölüm dönüşümü ise Y bir $k-$uzaydır [13].

İspat. $g: P \to X$ bir doğal bölüm dönüşümü olacak şekilde bir P yerel kompakt uzayı vardır. Ayrıca $f \circ g: P \to Y$ bir bölüm dönüşümü olacağından Y bir $k-$uzaydır.

Teorem 3.9. Bir $k-$uzayın her açık (kapalı) alt kümesi bir $k-$uzaydır [48].

İspat. Kabul edelim ki bir X $k-$ uzayının açık bir alt uzayı U olsun. Teorem 3.7'ye göre bir P yerel kompakt uzayı vardır öyle ki $f: P \to X$ bir bölüm dönüşümüdür. $U' = f^{-1}(U)$ olsun. O halde U', Y 'de açıktır ve buradan yerel kompakt uzaydır. Bir $f\big|_{U'}: U' \to U$ dönüşümü U üzerinde bir bölüm dönüşümüdür. Tekrar Teorem 3.7'ye göre U bir $k-$uzaydır.

Bir $k-$uzayın kapalı alt kümeleri için ispat benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.10. Her $A \subset X$ için $\mathrm{cl}(A)$'daki her nokta, A kümesindeki herhangi bir dizinin limit noktası ise X bir $k-$uzaydır [48].

İspat. X 'in her K kompakt alt kümesiyle C 'nin kesişimi K 'da kapalı olsun. Varsayalım C kapalı olmasın. O halde en az bir $x \in \mathrm{cl}(C) \setminus C$ vardır. Hipotezden herhangi $x_n \in C$ dizisi için $x = \lim x_n$ olsun. $F = \{x\} \cup \{x_n : 1, 2, ...\}$ kümesi kompakttır ve $C \cap F = \{x_n : n = 1, 2, ...\}$ kümesi F 'de kapalı küme değildir. Bu çelişkiden dolayı $\mathrm{cl}(C) \setminus C = \varnothing$ ve C kapalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.11. Birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan her topolojik uzay bir $k-$uzaydır [48].

İspat. (X,τ) birinci sayılabilir bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $x \in \mathrm{cl}(A)$ ise terimleri $A \subset X$ 'in elemanlarından oluşan ve x noktasına yakınsayan bir dizi vardır. Dolayısıyla Teorem 3.10'dan ispat tamamlanır.

Teorem 3.12. Bir X uzayının her noktası kapanışı $k-$uzay olan bir komşuluğa sahiptir ancak ve ancak X bir $k-$uzaydır [30].

İspat. Kabul edelim ki x noktasındaki bir komşuluğunun kapanışı $k-$uzay olsun. X 'in $k-$uzay olduğunu gösterelim. Her K kompakt alt kümesi için $B \cap K$ kapalı iken B 'nin kapalı olduğunu gösterelim. $x \in \mathrm{cl}(B)$ alalım. O zaman $x \in B$ olduğunu gösterelim. Hipotezden $\mathrm{cl}(U)$ bir $k-$ uzay olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu vardır. Her $L \subset \mathrm{cl}(U)$ kompakt alt kümesi için $B \cap \mathrm{cl}(U) \cap L = B \cap L$ kümesi de kompakttır. Bu yüzden $B \cap \mathrm{cl}(U) = B \cap L$, $\mathrm{cl}(U)$'da ve sonuç olarak X 'de kapalıdır yani $\mathrm{cl}\big(B \cap \mathrm{cl}(U)\big) = B \cap \mathrm{cl}(U)$ sağlanır. Ayrıca $x \in \mathrm{cl}\big(B \cap \mathrm{cl}(U)\big)$'dir. Aksi halde $\big(B \cap \mathrm{cl}(U)\big) \cap V = \varnothing$ olur ki bu $B \cap U \cap V = \varnothing$ olmasını gerektirir. Bu $x \in \mathrm{cl}(B)$ olması ile çelişir. Öyleyse $x \in \mathrm{cl}\big(B \cap \mathrm{cl}(U)\big)$ yani $x \in B \cap \mathrm{cl}(U)$ olur. O zaman $x \in B$'dir. Böylece B kapalıdır.

Teorem 3.13. X bir topolojik uzay olsun. Her $A \subset X$ ve $x \in \mathrm{cl}(A)$ için $x \in \mathrm{cl}(A \cap K)$ olacak şekilde kompakt bir K kümesi varsa X uzayı bir $k-$uzaydır [30].

İspat. X uzayının bir $k-$uzay olduğunu gösterebilmek için her F kompakt kümesi ile arakesiti F 'de kapalı olan $A \subset X$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $x \in \mathrm{cl}(A)$ alarak $x \in A$ olduğunu gösterim. $x \in \mathrm{cl}(A \cap K)$ olacak şekilde $K \subset X$ kompakt alt kümesinin var olsun. Kabulden $A \cap K$ kapalıdır. Dolayısıyla

$A \cap K = \mathrm{cl}(A \cap K)$ ’dır. Böylece $x \in A \cap K$, yani $x \in A$ olur. Sonuç olarak A kümesi kapalıdır.

Teorem 3.14. X yerel kompakt bir uzay ise X uzayı bir $k-$uzaydır [27].

İspat. X yerel kompakt bir uzay olsun. X ’in kapalı olmayan bir alt kümesi B olsun. Bazı C kompakt kümeleri için $B \cap C$ kapalı olmadığını gösterelim. Varsayalım ki B kümesine ait olmayan B ’nin bir yığılma noktası x olsun. X yerel kompakt olduğundan x ’in bir kompakt U komşuluğu vardır ve x bir yığılma noktası olmasına rağmen $x \notin B \cap U$ olduğundan $B \cap U$ kapalı bir küme değildir.

Tanım 3.15. X deki her kompakt K kümesi için $B \subset A$ olmak üzere $B \cap K$ kümesi $A \cap K$ ’da açık (kapalı) iken B kümesi A kümesinde açık (kapalı) ise X uzayının A alt uzayı (k) özelliğine sahiptir denir [51].

Teorem 3.15. X uzayının bir A alt kümesi $k-$uzaydır ancak ve ancak

(1) A kümesi (k) özelliğine sahiptir.

(2) Her $K \subset X$ kompakt alt kümesi için $A \cap K$, $k-$uzaydır [51].

İspat. X ’in bir A alt uzayı $k-$uzay ise A açık bir şekilde (k) özelliğine sahiptir. Ayrıca A kümesinin X ’in her kompakt alt kümesi ile kesişimi A ’da kapalı bir alt kümedir. Böylece $A \cap K$ kümesi A ’nın kapalı alt kümesi olup Teorem 3.9’dan $A \cap K$, $k-$uzaydır.

Tersine, A ’nın her kompakt alt kümesi ile kesişimi A ’da kapalı olan A ’nın alt kümesi U olsun. X ’in herhangi C kompakt alt kümesini alalım. Hipotezden $A \cap C$, $k-$uzaydır. Böylece $U \cap C$ kümesi $A \cap C$ ’de kapalıdır. A, (k) özelliğine sahip olduğundan U , A ’da kapalıdır ve A, $k-$uzaydır.

Teorem 3.15'te X 'in kompakt alt kümelerinin kapalı olduğu varsayımına sadece (2)'nin yeterlilik şartı için gerekli olduğuna dikkat ediniz.

BÖLÜM 4. KUVVETLİ $k-$UZAYLAR

Bu bölümde ön-topolojik uzaylarda kuvvetli kompakt alt kümelerin bir ailesine göre zayıf ön-topolojiye sahip olan kuvvetli $k-$ uzay tanımı yapılarak $k-$ uzay kavramı genelleştirilmiştir. Bir uzayın kuvvetli $k-$ uzay olma şartlarını araştırmanın yanı sıra alt uzaylarının özellikleri de araştırılarak ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Tanım 4.1. Her $K \subset X$ kuvvetli kompakt kümesi için $A \cap K$ kümesi K'da ön-kapalı (ön-açık) iken A ön-kapalı (ön-açık) küme ise X ön-topolojik uzayına kuvvetli $k-$ uzay denir.

Tanım 4.2. (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. Herhangi $V \subset Y$ kümesinin ön-açık olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(V)$ kümesinin X 'de ön-açık olması ise f 'ye ön-bölüm dönüşümü denir.

Ön-bölüm dönüşümü tanımı gereği Y'deki her ön-açık kümenin ters görüntüsü X 'de ön-açık olduğundan ön-bölüm dönüşümü ön-kararsızdır.

Örnek 4.3. $X=\{a,b,c,d\}$ üzerindeki topoloji $\tau_1=\{\varnothing, X,\{a\}\}$ ve ön-topoloji $p\tau_1=\{\varnothing, X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}\}$ olsun. Ayrıca $Y=\{1,2,3\}$ üzerindeki topoloji $\tau_2=\{\varnothing,Y,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ ve ön-topoloji $p\tau_2=\{\varnothing,Y,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ olsun ve $f:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ dönüşümü $f(a)=1,\ f(b)=f(d)=2,\ f(c)=3$ olacak şekilde tanımlansın. Bu halde f bir ön-bölüm dönüşümüdür.

Teorem 4.4. (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki topolojik uzay, $p\tau_1$, X üzerinde bir ön-topoloji, ve $f: X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu ön-kararsız kılan en ince ön-topoloji $p\tau_f$ bir ön-bölüm topolojisidir.

İspat. Ön-bölüm dönüşümü tanımı gereği her $V \in p\tau_f$ kümesi için $f^{-1}(V) \in p\tau_1$ olduğundan $f: X \to Y$ ön-bölüm dönüşümü ön-kararsızdır. Diğer taraftan Y kümesi üzerinde f fonksiyonunu ön-kararsız kılan bir ön-topoloji $p\tau'$ olsun. Herhangi $U \in p\tau'$ alalım. Bu durumda f ön-kararsız olduğundan $f^{-1}(U) \in p\tau_1$'dir. Böylece $p\tau_f$ ön-bölüm topolojisi olduğundan $U \in p\tau_f$'dir. O halde $p\tau' \subset p\tau_f$ olduğu görülür.

Teorem 4.5. X kuvvetli $k-$uzaydır ancak ve ancak X yerel kuvvetli kompakt uzayın bir ön-bölüm uzayıdır.

İspat. X uzayı kuvvetli $k-$uzay ve X'in bütün kuvvetli kompakt alt kümelerinin ailesi $\wp$ olsun. $Y = \bigcup_{K\in\wp} K$ olacak şekilde X uzayından indirgenmiş topolojiye sahip olan bütün $K \in \wp$'ların ayrık bileşimi bir yerel kuvvetli kompakt uzaydır. Bu durumda bir $f: Y \to X$ doğal dönüşüm vardır öyle ki her $K \in \wp$ kuvvetli kompakt alt kümesini X'in K kuvvetli kompakt alt kümesine karşılık getirir. $p\tau$ ve $p\tau_f$, sırasıyla X üzerinde kuvvetli kompakt üretilmiş ve ön-bölüm topolojisi olsun. f dönüşümü ile verilen ön-bölüm topolojisinin X üzerindeki orijinal ön-topoloji ile çakıştığını gösterelim. Açık bir şekilde $p\tau \subset p\tau_f$'dir.

Öyleyse X uzayının Y'nin bir ön-bölüm uzayı olduğunu göstermek için $p\tau_f \subset p\tau$ olduğunu göstermemiz gerekir. Herhangi $A \in p\tau_f$ alalım. X uzayının kuvvetli $k-$uzay olması her $K \subset X$ kuvvetli kompakt alt kümesi için $A \cap K$ kümesi K'da ön-açık ise $A \in p\tau$ olmasını gerektirir. O halde $A \cap K$ kümesinin K kümesinde ön-açık olduğunu gösterelim. Ayrıca $A \in p\tau_f$ olduğundan $f^{-1}(A)$ kümesi Y'de ön-açıktır. $f^{-1}(A)\cap K$ kümesi Y'den K'ya indirgenmiş alt uzay ön-topolojisine göre ön-açıktır. $f^{-1}(A)\cap K$ kümesi $K\subset Y$'nin bir alt kümesi olmasının yanında $K\subset X$'in de bir alt kümesidir öyle ki $f^{-1}(A)\cap K=A\cap K$'dir. Bu yüzden $A\cap K$ kümesi K'da ön-açıktır yani $A\in p\tau$'dur. Sonuç olarak $p\tau_f\subset p\tau$ olur. X üzerindeki kuvvetli kompakt üretilmiş ile ön-bölüm topolojisi çakışır ve kuvvetli $k-$uzayın yerel kuvvetli kompakt uzayın ön-bölüm uzayı olduğu görülür.

Aksine $f:Y\to X$ bir ön-bölüm dönüşümü ve Y bir yerel kuvvetli kompakt uzay olsun. Her kuvvetli kompakt $K\subset X$ alt kümesi için $K\cap G$ kümesi K'da ön-açık olacak şekilde $G\subset X$ kümesini alalım. X'in bir kuvvetli $k-$uzay olduğunu gösterebilmek için G kümesinin X'de ön-açık olduğunu göstermeliyiz. f ön-bölüm dönüşümü olduğundan ön-kararsız fonksiyondur. Yani, G kümesinin X'de ön-açık olduğunu göstermek için $f^{-1}(G)$ kümesinin Y'de ön-açık olduğunu gösterelim. Y yerel kuvvetli kompakt olduğundan her $y\in Y$ noktasının kuvvetli U ön-açık komşuluğu vardır öyle ki $\mathrm{cl}_{p\tau}U$ kuvvetli kompakttır. f ön-kararsız fonksiyon olduğundan $f(\mathrm{cl}_{p\tau}U)$ kümesi X'de kuvvetli kompakttır. Kabulden $G\cap f(\mathrm{cl}_{p\tau}U)$ kümesi $f(\mathrm{cl}_{p\tau}U)$'de ön-açıktır. Tekrar f ön-kararsız fonksiyon olduğundan $f^{-1}(G)\cap\mathrm{cl}_{p\tau}U$ kümesi $\mathrm{cl}_{p\tau}U$'da ön-açıktır. O halde $f^{-1}(G)\cap U$ kümesi U'da ön-açıktır. U şeklindeki kümeler ön-açık ve Y'yi örttükleri için $f^{-1}(G)$, Y'de açıktır ve G kümesi X'de açıktır yani; X kuvvetli $k-$uzaydır.

Kuvvetli $k-$uzayların ön-kapalı kümelerini incelerken kullanmak üzere aşağıdaki iki lemmayı verelim.

Lemma 4.6. $(X,p\tau)$ uzayı ön-topolojik uzay ve $A\subset X$ olmak üzere $U\subseteq A$ olsun. U kümesi A alt uzayında ön-kapalıdır ancak ve ancak X uzayında bir ön-kapalı V kümesi vardır öyle ki $U=A\cap V$'dir.

İspat. U kümesi A alt uzayında ön-kapalı olsun. Öyleyse $A\setminus U$ kümesi A alt uzayında ön-açıktır. Bu yüzden $A\setminus U = A\cap V_1$ olacak şekilde X uzayında bir V_1 ön-açık kümesi vardır. Yani, $U = A\cap\left(X\setminus V_1\right)$'dir. O halde, $V = X\setminus V_1$ kümesi X'de ön-kapalıdır ve $U = A\cap V$'dir.

Aksine, X uzayında $U = A\cap V$ olacak şekilde bir ön-kapalı küme V alalım. Öyleyse $A\setminus U = A\cap\left(X\setminus V\right)$'dir. $X\setminus V$ kümesi X uzayında ön-açık olduğundan $A\setminus U$ kümesi A'da ön-açıktır. Bu yüzden U kümesi A alt uzayında ön-kapalıdır.

Lemma 4.7. $\left(X, p\tau\right)$ ön-topolojik uzay, A alt kümesi X'de ön-kapalı ve $U\subseteq A$ olsun. U kümesi A uzayında ön-kapalıdır ancak ve ancak U kümesi X uzayında ön-kapalıdır.

İspat. U kümesi A alt uzayında ön-kapalı olduğundan, Lemma 4.6.'ya göre, X uzayında bir V ön-kapalı kümesi vardır öyle ki $U = A\cap V$'dir. A ve V alt kümeleri ön-kapalı olduklarından $A\supset \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\left(A\right)\right)$ ve $V\supset \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\left(V\right)\right)$ olacak şekilde ifade edilebilirler. O halde

$$A\cap V\supset \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\left(A\right)\right)\cap \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\left(V\right)\right)\supset \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\left(A\cap V\right)\right)$$

olur, yani $A\cap V$ kümesi ön-kapalıdır.

Diğer taraftan U kümesi X uzayında ön-kapalı olsun. $U\subseteq A$ yani $U = A\cap U$ olduğundan Lemma 4.6'ya göre, U kümesi A alt uzayında ön-kapalıdır.

Teorem 4.8. Kuvvetli $k-$uzayın ön-kapalı (ön-açık) alt uzayı bir kuvvetli $k-$uzaydır.

İspat. $(X, p\tau)$ kuvvetli $k-$uzayının ön-kapalı alt uzayı U olsun. $V \subset U$ kümesi ile her kuvvetli kompakt $L \subset U$ alt kümesinin kesişimi ön-kapalı olsun. V kümesinin U alt uzayında ön-kapalı olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Varsayalım ki K kümesi X uzayında herhangi kuvvetli kompakt küme olsun. K kuvvetli kompakt ve U ön-kapalı küme olduğundan Teorem 2.85'e göre $U \cap K$ kümesi K'da kuvvetli kompakt bir alt kümedir. $U \cap K = L$ dersek, hipoteze göre, $V \cap L$ kümesi U kümesinde ön-kapalıdır. Lemma 4.7'ye göre, U kümesi ön-kapalı olduğundan $V \cap L$ kümesi X'de de ön-kapalıdır. Tekrar X kuvvetli $k-$uzay olduğundan V kümesi X uzayında ön-kapalıdır. $V \subset U$ olduğu için de V kümesi U kümesinde de ön-kapalıdır.

Teorem 4.9. X kuvvetli $k-$uzaydır ancak ve ancak her $x \in X$ noktası $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$ kuvvetli $k-$uzay olacak şekilde bir U ön-komşuluğuna sahiptir.

İspat. X uzayındaki her x noktasının ön-komşuluğunun kapanışının içi kuvvetli $k-$uzay olsun. X uzayının kuvvetli $k-$uzay olduğunu gösterebilmek için, her kuvvetli kompakt K kümesi için $B \cap K$ kümesi K'da ön-açık olsun. B kümesinin X'de ön-açık olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Varsayalım ki $x \in B$ olsun. O halde x noktasının $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$ kuvvetli $k-$uzay olacak şekilde bir U ön-komşuluğunu alalım. Her kuvvetli kompakt $L \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$ alt kümesi için $\left(B \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))\right) \cap L = B \cap L$ kümesi ön-açıktır. Böylece $B \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$ kümesi $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$ kümesinde ön-açıktır. Yani,

$$B \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(U)) \subset \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(B \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))\right)\right) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(B)) \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$$

olur. $x \in B \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$ olduğu zaman $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(B))$ olduğundan dolayı B kümesi ön-açıktır, yani $B \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(B))$'dir.

Aksine, X uzayı kuvvetli $k-$uzay ve X uzayındaki herhangi x noktasının herhangi ön-komşuluğu U olsun. $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(U))$ kümesi ön-açıktır. Böylece ispat Teorem 4.8'den tamamlanır.

Teorem 4.10. X'in her bir A alt kümesi ve $x \in A$ noktası için $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A \cap L))$ olacak şekilde kuvvetli kompakt bir L kümesi varsa X uzayı kuvvetli $k-$uzaydır.

İspat. Varsayalım ki A kümesi ile X'in her kuvvetli kompakt K kümesinin kesişimi K'da ön-açık küme olsun. $x \in A$ için $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A \cap L))$ olacak şekilde herhangi kuvvetli kompakt küme L olsun. Hipoteze göre, kuvvetli kompakt L kümesi için $A \cap L$ kümesi L'de ön-açık olduğundan $A \cap L \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A \cap L))$'dir. Ayrıca

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A \cap L)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)) \cap \operatorname{int}(\operatorname{cl}(L))$$

olduğundan $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$'dir. Bu yüzden A kümesi ön-açıktır, yani X kuvvetli $k-$uzaydır.

Teorem 4.11. Yerel kuvvetli kompakt uzayı kuvvetli $k-$uzaydır.

İspat. X uzayı yerel kuvvetli kompakt ve $A \subset X$ olsun. Varsayalım ki A kümesi ile X'in her kuvvetli kompakt K kümesinin kesişimi K'da ön-açık küme olsun. A'daki herhangi x noktası için $x \in X$ olup X uzayı yerel kuvvetli kompakt olduğundan x noktasının kuvvetli kompakt L ön-komşuluğu vardır. $A \cap L$ kümesi ön-açık olduğundan dolayı $A \cap L \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A \cap L))$'dir. Bu yüzden bir L

ön-komşuluğu vardır öyle ki $x \in \operatorname{int}\left(\operatorname{cl}\left(A \cap L\right)\right)$'dir. Böylece Teorem 4.10 göz önüne alındığında ispat tamamlanır.

Şimdi bir sonraki teoremi ispatlamak için onunla ilgili aşağıdaki iki lemmayı verelim.

Lemma 4.12. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzayı ön-birinci sayılabilir uzay olsun. $x \in X$ noktası ve $A \subset X$ alt kümesi için $x \in \operatorname{cl}_{p\tau} A$'dır ancak ve ancak A kümesinde x uzayına ön-yakınsak bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır.

İspat. Kabul edelim ki X uzayı ön-birinci sayılabilir uzay ve $x \in \operatorname{cl}_{p\tau} A$ olsun. X ön-topolojik uzayı birinci sayılabilir uzay olduğundan $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ön-tabanının birbiri içinde azalan ve sayılabilir ön-komşulukları vardır. $x \in \operatorname{cl}_{p\tau} A$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \cap A \neq \varnothing$'dir. $x_n \in U_n \cap A$ seçilerek A kümesinde bir $\{x_n\}_{n \in N}$ dizisi oluşturulmaktadır. Bu şekilde oluşturulan $\{x_n\}_{n \in N}$ dizisinin x noktasına ön-yakınsayacağı aşikardır.

Aksine, A kümesinde $< x_n > \rightarrow x$ olacak şekilde bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Ön-yakınsaklık tanımı gereği, x'in her U ön-komşuluğu için en azından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ noktası vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $x_n \in U$'dir. Bu yüzden $x_n \in U \cap A$ olur. Dolayısıyla $x \in \operatorname{cl}_{p\tau} A$'dır.

Lemma 4.13. $(X, p\tau)$ ön-topolojik uzay olsun. Eğer X'in elemanlarından oluşan ve $x \in X$ noktasına ön-yakınsayan dizi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ise $C = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi kuvvetli kompakt kümedir.

İspat. C kümesinin bir ön-açık örtüsü $\Omega=\{U_i : i\in I\}$ ailesi olsun. $C\subseteq \underset{i\in I}{\cup} U_i$ olduğundan bir $i_0\in I$ vardır öyle ki $x\in U_{i_0}$'dir. Diğer bir yandan, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi x noktasına ön-yakınsadığından bir $n_0\in\mathbb{N}$ noktası vardır öyle ki $n\geq n_0$ için $x_n\in U_{i_0}$'dir. Her bir $n<n_0$ için $x_n\in U_n$ olacak şekilde $U_n\in\Omega$ olsun. Bu durumda, $n<n_0$ için $x_n\in \overset{n_0-1}{\underset{i=1}{\cup}} U_i$'dir. Öyleyse $C\subseteq U_{i_0}\cup\left(\overset{n_0-1}{\underset{i=1}{\cup}} U_i\right)$'dir. Diğer bir deyişle, $\{U_{i_0}\}\cup\{U_i : i=1,2,...,n_0-1\}$ ailesi $\Omega=\{U_i : i\in I\}$ ön-açık örtüsünün sonlu bir alt ön-açık örtüsüdür. Böylece $C=\{x\}\cup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesi kuvvetli kompakttır.

Teorem 4.14. Birinci sayılabilir ön-topolojik uzay kuvvetli $k-$uzaydır.

İspat. Kabul edelim ki $x\in \mathrm{cl}_{p\tau}A$ olsun. Lemma 4.12'ye göre, A'daki x noktasına ön-yakınsak bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. $C=\{x\}\cup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesini alalım. C'nin kuvvetli kompakt olduğu Lemma 4.13'den görülmektedir. Her $x\in X$ noktası için C kümesi kuvvetli kompakt olduğundan X yerel kuvvetli kompakttır. İspat Teorem 4.11'den görülür.

Tanım 4.15. X'deki her bir kuvvetli kompakt K kümesi için $B\subset A$ ve $B\cap K$ kümesi $A\cap K$'da ön-açık (ön-kapalı) olduğu zaman B kümesi A kümesinde ön-açık (ön-kapalı) ise X uzayının A alt uzayı (k) özelliğine sahiptir denir.

Teorem 4.16. X uzayının A alt uzayı kuvvetli $k-$uzaydır ancak ve ancak A kümesi (k) özelliğine sahiptir ve X deki her bir kuvvetli kompakt K kümesi için $A\cap K$ alt uzayı kuvvetli $k-$uzaydır.

İspat. X'in A alt uzayı kuvvetli $k-$uzay olsun. Varsayalım ki $B\subset A$ kümesinin her bir kuvvetli kompakt $K\subset X$ kümesiyle kesişimi $A\cap K$'da ön-açık küme olsun. Dolayısıyla $B\cap K$ kümesi $K\subset A$ için $A\cap K=K$'da ön-açıktır ve A alt uzayı kuvvetli $k-$uzay olduğundan B kümesi A'da ön-açıktır. Yani A kümesi

(k) özelliğine sahiptir. Ayrıca her kuvvetli kompakt K kümesi için $A\cap K$ kümesi A'nın ön-açık kümesidir. Teorem 4.8'e göre, kuvvetli $k-$uzayın ön-açık alt kümesi kuvvetli $k-$uzay olduğundan $A\cap K$ kümesi kuvvetli $k-$uzaydır.

Diğer taraftan $B\subset A$ alt kümesi ve her kuvvetli kompakt $K\subset A$ için $B\cap K\subset A\cap K$ ön-açık olsun. Her kuvvetli kompakt $L\subset X$ için $A\cap L$ bir kuvvetli $k-$uzay olsun. $M\subset A\cap L$ kuvvetli kompakt kümesini alalım. Bu takdirde $M\cap L$ kümesi kuvvetli kompakttır. Hipoteze göre, kuvvetli kompakt $M\cap L$ kümesi için $B\cap(M\cap L)$ yani $(B\cap L)\cap M$ ön-açık kümedir. $A\cap L$ bir kuvvetli $k-$uzay olduğundan $B\cap L$ kümesi $A\cap L$'de ön-açıktır. A alt uzayı (k) özelliğine sahip olduğundan B, A'da ön-açık kümedir, yani A kuvvetli $k-$uzaydır.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki orijinal kısım Bölüm 4'te verilmiştir. Bölüm 3'te tanımlanmış olan $k-$uzay kavramı göz önüne alınarak ön-topolojik uzaylardaki ön-açık ve kuvvetli kompakt kümeler yardımıyla kuvvetli $k-$uzay tanımı yapılarak ve yerel kuvvetli kompakt uzayların ve ön-birinci sayılabilir uzayların kuvvetli $k-$uzay olup olmadıkları araştırılmıştır. Bu araştırma için ön-topolojik uzayda gerekli olan lemma ve teoremler ispatlanmıştır.

Bu çalışmada tanımlanan kuvvetli $k-$uzayların anti-uzayları daha ileri bir çalışma olarak ele alınabilir. Ayrıca kuvvetli $k-$uzaylara ilişkin elde edilen teorem ve sonuçlar, ön-açık kümeleri de kapsayan $\gamma-$açık kümelerin ailesi olan genelleştirilmiş topolojik uzaylarda $\gamma-$kompakt alt kümelerin ailesine göre zayıf genelleştirilmiş topolojisi üretilerek genelleştirilebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Andrijević, D., A Note on Preopen Sets, Third National Conference On Topology (Italian) (Trieste, 1986), Rend. Circ. Mat. Palermo, (2) 18, 195–201, 1988.

[2] Andrijević, D., On the Topology Generated by Preopen Sets, Mat. Vesnik, 39 (4), 367–376, 1987.

[3] Arens, R., A Topology for Spaces of Transformations, Ann. of Math., 47 (2), 480–495, 1946.

[4] Arhangel′skiĭ, A., Bicompact Sets and the Topology of Spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 150, 9-12, 1963.

[5] Arhangel′skiĭ, A., On a Class of Spaces Containing all Metric and all Locally Bicompact Spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 151, 751–754, 1963.

[6] Ayawan, B.T., Canoy S.R., Axioms of Countability in Generalized Topological Spaces, Int. Math. Forum, 8 (31), 1523–1530, 2013.

[7] Bagley, R.W., Yang, J.S., On $k-$Spaces and Function Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 17, 703–705, 1966.

[8] Bagley, R.W., Weddington, D.D., Products of $k'-$Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 22, 392–394, 1969.

[9] Blumberg, H., New Properties of All Real Functions, Trans. Amer. Math. Soc., 24 (2), 113–128, 1922.

[10] Brown, R., Function Spaces and Product Topologies, Quart. J. Math., Oxford Ser., 15 (2), 238–250, 1964.

[11] Chattopadhyay, A., Pre$-T_0$ and Pre$-T_1$ Topological Spaces, J. Indian Acad. Math., 17 (2), 156-159, 1995.

[12] Cohen, D.E., Spaces with Weak Topology, Quart. J. Math., Oxford Ser., 5 (2), 77-80, 1954.

[13] Cohen, D.E., Products and Carrier Theory, Proc. London Math. Soc., 7 (3), 219–248, 1957.

[14] Corson, H.H., Michael, E., Metrizability of Certain Countable Unions, Illinois J. Math., 8, 351–360, 1964.

[15] Császár, Á., $\gamma-$Compact Spaces, Acta Math. Hungar., 87 (1-2), 99-107, 2000.

[16] Császár, Á., Generalized Topology, Generalized Continuity, Acta Math. Hungar., 96 (4), 351-357, 2002.

[17] Dontchev, J., Survey on Preopen Sets, The Proceedings of the Yatsushiro Topological Conference, 1-18, 1998.

[18] Dowker, C.H., Topology of Metric Complexes, Amer. J. Math., 74, 555–577, 1952.

[19] Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 447, 1966.

[20] Ersoy, S., İnce, İ., Bilgin, M., Strongly $k-$Spaces, Bull. Iranian Math. Soc., accepted.

[21] Félix, Y., Halperin, S., Thomas, J.C., Rational Homotopy Theory, II. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 412, 978-981, 2015.

[22] Franklin, S.P., Natural Covers, Mellon College of Science, 67-29, 1967.

[23] Gale, D., Compact Sets of Functions and Functions Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 1, 303-308, 1950.

[24] Ganster, M., Some Remarks on Strongly Compact Spaces and Semi-Compact Spaces, Bull. Malaysian Math. Soc., 2 (10), 67–81, 1987.

[25] Jafari, S., Noiri, T., Properties of $\beta-$Connected Spaces, Acta Math. Hungar., 101, 227–236, 2003.

[26] Kar, A., Bhattacharyya, P., Some Weak Separation Axioms, Bull. Cal. Math. Soc., 82, 415-422, 1990.

[27] Kelley, J., General Topology, Van Nostrand, 1955.

[28] Levine, N., Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces, Amer. Math. Soc., 70, 36-41, 1963.

[29] Levine, N., Generalized Closed Sets in Topology, Rend. Circ. Mat. Palermo, 19 (2), 89–96, 1970.

[30] Liden, N., $k-$Spaces, Their Anti-Spaces and Related Maps., Washington Uni., Phd Thesis, 1973.

[31] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E., El-Deeb, S.N., On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47-53, 1982.

[32] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E., Hasanein, I.A., On Pretopological spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math., R.S.R., 28 (76), 39-45 1984.

[33] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E., Hasanein, I.A., Noiri, T., Strongly Compact Spaces, Delta J. Sci., 8, 30–46, 1984.

[34] Michael, E., Locally Multiplicatively-Convex Topological Algebras, Mem. Amer. Math. Soc., 1, 1952.

[35] Morita, K., On Decomposition Spaces of Locally Compact Spaces, Proc. Japan. Acad., 32, 544-548, 1956.

[36] Mrówka, S., On Function Spaces, Fund. Math., 45, 273–282, 1958.

[37] Navalagi, G., Further Properties of Pre $-T_0$, Pre $-T_1$ and Pre $-T_2$ Spaces, Int. J. of Math. and Comp. Appl., 3 (1-2), 67-75, 2011.

[38] Navalagi, G., Debadatta, R.C., Some More Results on Preopen Sets in Topology, Indian J. of Math., 2 (5), 277-283, 2009.

[39] Navalagi, G., Pre-Us Spaces in Topology, Int. J. of Gen. Top., 3 (1-2), 91–97, 2010.

[40] Noble, N., Two Examples on Preimages of Metric Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 36, 586–590, 1972.

[41] Noble, N., $k-$Spaces and Some Generalizations, Thesis (Ph.D.)–University of Rochester, 113, 1967.

[42] Popa, V., Characterization of H-Almost Continuous Functions, Glasnik Math., 22 (42), 157-161, 1987.

[43] Popa, V., Properties of H-Almost Continuous Functions, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.), 31 (79), 163–168, 1987.

[44] Poppe, H., Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà., (German) Math. Nachr., 30, 87–122, 1965.

[45] Pták, V., Completeness and Open Mapping Theorem, Bull. Soc. Math. France, 86, 41–74, 1958.

[46] Reilly, I.L., Vamanamurthy M. K., On Some Questions Concerning Preopen Sets, Kyungpook Math. J., 30 (1), 87–93, 1990.

[47] Spanier, E.H., Algebraic Topology, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 528, 1966.

[48] Steinlage, R.C., On Ascoli Theorems and the Product of $k-$Spaces, Kyungpook Math. J., 12, 145–151, 1972.

[49] Strickland, N.P., The Category of CGWH Spaces, http:==www.neil-strickland.staff.shef.ac.uk=courses=homotopy=cgwh.pdf, 2009.

[50] Thomas, J., John, S.J., $\mu-$Compactness in Generalized Topological Spaces, J. Adv. Stud. Topol., 3 (3), 18–22, 2012.

[51] Weddington, D.D., On $k-$Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 22, 635–638, 1969.

[52] Weston, J.D., A Generalization of Ascoli's Theorem, Mathematika, 6, 19–24, 1959.

[53] Whitehead, J.H.C., Combinatorial Homotopy, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 213-245, 1949.

[54] Whitehead, J.H.C., Simplicial Spaces, Nuclei and m-Groups, Proc. London Math. Soc., 45 (2), 243-327, 1939.

[55] Young, B.J., Seong, W.J., Hyeon, J.L., Joon, W.L., Applications of Pre-Open Sets, Appl. Gen. Topol., 9 (2), 213–228, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim İNCE, 10.12.1989 tarihinde Eskişehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümünde başladığı Lisans öğrenimini 2015 yılında tamamladı. Aynı yılın sonunda Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.