T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**FONKSİYONLAR TEO. VE FONK. ANALİZ**
Danışman	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK**

Aralık 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**FONKSİYONLAR TEO. VE FONK. ANALİZ**

Bu tez 30/12/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Emrah Evren KARA	**Yrd. Doç. Dr.Mahpeyker ÖZTÜRK**	**Yrd. Doç. Dr. Betül USTA**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

30.12.2015

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam sırasında bana her türlü desteğini veren bilgisini ve becerisini her zaman kendime örnek aldığım değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi borç bilirim.

Yine hayatımda her döneminde bana desteklerini hiç eksik etmeyen babam Turgut BÜYÜKKAYA ve annem Sebahat BÜYÜKKAYA'ya ve maddi ve manevi her zaman yanımda olan canım abilerime, dedeme ve babaanneme gösterdikleri sabır, anlayış için teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim hayatımda desteğini gördüğüm sevgili arkadaşım Arş. Gör. Melek ERİŞ'e bu tezde yardımlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\overline{A}$	: A Kümesinin Kapanışı
A°, $\operatorname{int} A$	: A Kümesinin İçi
$C[a,b]$	: $[a,b]$ Kapalı Aralığında Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Kümesi
$F(T)$	: T Dönüşümünün Sabit Noktaları Kümesi
l_{∞}	: Sınırlı Dizi Uzayı
$\mathbb{R}_{+}$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}^{*}$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
ST	: $S \circ T$
T^{n}	: T Dönüşümünün n. İterasyonu
$T(X)$	: X Kümesinin T Dönüşümü Altındaki Görüntü Kümesi
Tx	: x noktasının T Dönüşümü Altındaki Görüntüsü
(X,ρ)	: b_2-Metrik Uzay
$(X,\prec)$	: Kısmi Sıralı Küme
(X,σ)	: $2-$Metrik Uzay
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Daralma Dönüşümü, $2-$Metrik, $b-$Metrik, b_2-Metrik

Bu çalışmanın ilk kısmında daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verildi. Ayrıca sabit nokta teorisi örneklerle ve Banach daralma dönüşümüyle bir bütün olarak sunuldu.

İkinci bölümde metrik uzayın bir genel hali olan ve üç argümana dayanan $2-$metrik fonksiyonu ve $2-$metrik uzay yapısı incelendi. Metrik uzaylara topolojik olarak denk olmadığı görüldü. Ayrıca metrik uzaylardan daha genel bir yapıya sahip olan $b-$metrik uzaylar ve yapıları incelendi. Bununla beraber $2-$metrik uzay ve $b-$metrik uzayın bir genellemesi olan b_2-metrik uzaylar ve topolojik yapısı incelendi.

Üçüncü bölümün ilk kısmında $f-$daralma dönüşümleri ve yakın zamanda tanımlanan $F-$daralma dönüşümlerinin her ikisi kullanılarak elde edilen iki dönüşüm için ortak sabit nokta teoremlerine ve sonuçlarına yer verildi. Ayrıca ikinci kısımda kısmi sıralı $2-$metrik uzaylarda rasyonel ifadeler içeren sabit nokta teoremleri ve sonuçları incelendi.

Dördüncü bölümde Banach daralma dönüşümüne indirgenebilen Meir-Keeler daralma dönüşümleri incelendi. Yine $2-$metrik uzaylarda rasyonel ifadeler içeren Meir-Keeler daralma şartını sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri elde edildi.

Beşinci bölümde $A-$daralma dönüşümleri kullanılarak b_2-metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ispatlandı.

Son bölümde ise bazı genel sonuçlara ve önerilere yer verildi.

FIXED POINT THEOREMS IN SOME GENERALIZED METRIC SPACES

SUMMARY

Keywords: Fixed Point, Contraction Mapping, 2-Metric, $b-$Metric, b_2-Metric

In the first part of this chapter, literature notices, some fundamental definition and theorems which will be used in the later chapter were given. Besides, Fixed Point Theory was presented as a whole with Banach contraction principle and examples.

In the second chapter, $2-$metric space and structure, which is generalization of metric space and based on three argument were examine. It has been seen that there was no topologically equivalence to a metric space. Also, $b-$metric spaces and their structure, which are more general from metric spaces were examine. At the same time b_2-metric spaces and their structure, which are a generalization both $2-$metric and $b-$metric spaces and their topological structure were examine.

In the first part of third chapter, by using both $f-$contraction mappings and $F-$contraction mappings which recently started to be study, fixed point theorems and results for two mappings were included. Also in the second part, theorems and results which involving rational expression were presented in partially ordered $2-$metric spaces.

In the fourth chapter, Meir-Keeler contraction mapping which can be reduce Banach contraction principle were examined. Again in $2-$metric spaces, fixed point theorems which satisfy Meir-Keeler contraction mappings involving rational expression were obtained.

In the fifth chapter, some fixed point theorems were proved by using $A-$contraction mappings in b_2-metric spaces.

In the last chapter, some fundamental results and suggestions were presented.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1. X boş kümeden farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlı, reel değerli, negatif olmayan bir

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

d1. Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0,$

d2. Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

d3. Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x),$ (simetri özelliği)

d4. Her $x, y, z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$ (üçgen eşitsizliği).

Bu durumda d fonksiyonuna X uzayında bir metrik, (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir [1].

Örnek 1.1.2. $\forall\, x, y \in X$ için $d(x,y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe mutlak değer (alışılmış, doğal, salt değer) metriği denir [1].

Örnek 1.1.3. $\mathbb{R}^2$ ’de

$$d_1(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

fonksiyonu bir metriktir ve bu metriğe Euclid metriği denir [1].

Örnek 1.1.4. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\forall\, x,y\in X$ için

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y \text{ ise}\\ 1, & x\neq y \text{ ise}\end{cases}$$

ile tanımlı d fonksiyonu X üzerinde ayrık (diskre) metrik olarak tanımlanır [2].

Örnek 1.1.5. $l_\infty=\left\{x=x(n):\ \sup\limits_n |x_n|<\infty\right\}$ sınırlı diziler uzayı olmak üzere bu uzay üzerinde tanımlı $d_\infty(x,y)=\sup\limits_n |x_n-y_n|$ fonksiyonu bir metriktir [1].

Örnek 1.1.6. $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ olsun. Bu uzay $f,g\in C[a,b]$ olmak üzere

$$d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

metriği ile bir metrik uzaydır [2].

Tanım 1.1.7. (x_n), X metrik uzayında bir dizi olsun. $\forall\,\varepsilon>0$ ve $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ için, $n>n_0$ olduğunda $d(x_n,x)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ var ise (x_n) dizisi $x\in X$ noktasına yakınsaktır denir [2].

Bir dizinin yakınsaklığı uzayda tanımlanan metriğe ve içinde bulunduğu uzaya bağlıdır. Örneğin $(x_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi $X=\mathbb{R}$ uzayında verilen alışılmış metriğe göre $0\in X$ $(n\to\infty)$ noktasına yakınsar. Fakat $X=(0,1)$ uzayında alışılmış metriğe göre dizinin limiti $0\notin X$ noktasıdır. Bu durumda dizi yakınsak olmaz. Dolayısıyla bir dizinin yakınsaklığı dizinin bulunduğu uzaya bağlıdır.

$C[0,1]$ uzayı içinde $d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt,\ t\in[0,1]$ metriği tanımlansın ve $x_n=e^{-nt},\ (n\in\mathbb{N})$ dizisi verilsin. Bu dizi için

$$d(x_n,0)=\int_0^1 e^{-nt}dt=\frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)\to 0,\ (n\to\infty)$$

olur. Aynı dizi için

$$d_\infty(x_n,0)=\max_{t\in[0,1]}\left|e^{-nt}\right|=1,\ (n\to\infty)$$

dır. Buradan ise yakınsaklığın uzayda tanımlanan metriğe bağlı olduğu görülür [3].

Tanım 1.1.8. Bir (X,d) metrik uzayında (x_n) bir dizi olmak üzere, $\forall\,\varepsilon>0$ sayısı için bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı; $m,n\geq N$ olan bütün m ve n pozitif tamsayıları için $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Yakınsak her dizi Cauchy dizisidir. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Metrik uzayda alınan bir Cauchy dizisi sınırlıdır ve bu dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa kendisi de yakınsaktır [1].

Tanım 1.1.9. Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzay tam metrik uzay olarak adlandırılır [20].

Örnek 1.1.10. $C[a,b]$ fonksiyon uzayı $d(f,g)=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ metriğine göre tam uzaydır [20].

Örnek 1.1.11. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metriğe göre tam değildir [1].

Tanım 1.1.12. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $x\in X$ için $d(x,x_0)<\delta$ iken $\rho(T(x),T(x_0))<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon,x)>0$ varsa $T:X\to Y$ fonksiyonu $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir. Yani $x\in B(x_0,\delta)$ iken $T(x)\in B(T(x_0),\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa T fonksiyonu bu noktada süreklidir denir [2].

Tanım 1.1.13. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olmak üzere bir $T:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için $d(x,x_0)<\delta$ olduğunda $\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$ olacak şekilde sadece ε'a bağlı bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa T fonksiyonu x_0 noktasında düzgün süreklidir denir [2].

Örnek 1.1.14. $\mathbb{R}$'de $d(x,y)=|x-y|$ alışılmış metriği için

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ & x\to Tx=\sin x \end{aligned}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$'de düzgün süreklidir.

Örnek 1.1.15. $\mathbb{R}$'de $d(x,y)=|x-y|$ alışılmış metriği için

$$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to Tx=x^3$$

fonksiyonu süreklidir, fakat düzgün sürekli değildir.

Teorem 1.1.16. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay ve $T:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun bir $x_0\in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$x_n\to x_0 \Rightarrow T(x_n)\to T(x_0) \quad (n\to\infty)$$

olmasıdır.

Sürekli bir fonksiyon için $T(x_n)\to T(x_0)$ iken $x_n\to x_0$ ifadesi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin; d mutlak değer metriği olmak üzere $T:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d)$ fonksiyonu $T(x)=x^2$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=(-1)^n$ biçiminde verilsin. Bu durumda

$$T(x_n)=1\to T(1),(n\to\infty).$$

Fakat (x_n) dizisi 1 noktasına yakınsak değildir [3].

Sürekli fonksiyonlar için başka bir karakterizasyon da aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 1.1.17. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay ve $T:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter şart Y uzayında alınan her açık yuvarın ters görüntüsünün X uzayında açık olmasıdır [2].

Tanım 1.1.18. X boş olmayan bir küme ve τ , X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

i. $X, \varnothing \in \tau$;

ii. τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi yine τ ya ait;

iii. τ 'daki herhangi sayıda kümenin birleşimi yine τ ya ait;

şartları sağlanıyorsa τ 'ya X için bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de topolojik uzay denir [2].

Tanım 1.1.19. X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. X 'in bir K_x alt kümesi, U_x topolojinin elemanı olmak üzere $x \in U_x \subseteq K_x$ olacak biçimde varsa x noktasının bir komşuluğu adını alır. x noktasının bir açık komşuluğu ise bu noktayı içine alan bir açık kümeden ibarettir [2].

Tanım 1.1.20. (X,τ) topolojik uzayında $A \subset X$ olsun. Bir $a \in A$ noktası için $a \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa a noktasına A kümesinin bir iç noktası denir [2].

Tanım 1.1.21. X topolojik uzayında $A \subseteq X$ kümesinin iç noktalarının oluşturduğu kümeye bu kümenin içi denir ve A° ile yada $\operatorname{int} A$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.22. X topolojik uzayının bir $A \subseteq X$ kümesini içine alan tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.23. (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = \overline{A}$ olmasıdır [2].

Tanım 1.1.24. X bir topolojik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in \mathbb{R}$ için, $T^{-1}(-\infty, t)$ kümesi X topolojik uzayında açık ise, T fonksiyonuna X üzerinde üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer $(-T)$ fonksiyonu üstten yarı sürekli ise, bu durumda T fonksiyonuna alttan yarı sürekli bir fonksiyon denir [2].

Tanım 1.1.25. $T : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $x < y$ iken $T(x) \geq T(y) \left(T(x) \leq T(y)\right)$ ise T fonksiyonuna X 'te artmayan (nonincreasing), (azalmayan(nondecreasing)) fonksiyon denir [2].

Tanım 1.1.26. X boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun.

$$\begin{aligned} +: X \times X &\to X \\ d(x, y) &\to x + y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\to \lambda . x \end{aligned}$$

ikili işlemleri $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall\, x, y, z \in X$ için

i. $x + y = y + x$

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$

iii. $\forall\, x, y \in X$ için $x + e = e + x = x$ olan bir $e \in X$ vardır.

iv. $\forall\, x, y \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = e$ olan bir $(-x) \in X$ vardır.

v. $1.x = x$

vi. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

vii. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

viii. $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, \cdot)$ üçlüsüne $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir [2].

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise X 'e reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise X 'e kompleks vektör uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.27. X , $\mathbb{F}$ cismi ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|.\| : X &\to \mathbb{R}^{+} \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall\, x, y \in X$ ve $\forall\, \alpha \in X$ için,

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [2].

X üzerindeki bir norm, X üzerinde $x, y \in X$ olmak üzere

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Bir vektör uzayı üzerindeki her metrik bir normdan indirgenmez. s uzayı (tüm sınırlı veya sınırsız kompleks terimli diziler uzayı) bir vektör uzayıdır. $x = (\varsigma_j)$ ve $y = (\eta_j)$ olmak üzere

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\varsigma_j - \eta_j|}{1 + |\varsigma_j - \eta_j|}$$

ile tanımlanan metrik, normdan elde edilemez. Bir normdan elde edilen d metriği $\forall\, x, y, a \in X$ ve $\forall\, \alpha$ skaleri için

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \text{ ve } d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$$

özelliklerini gerçekler [2].

Tanım 1.1.28. Bir normlu lineer uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir [2].

X normlu uzayının reel veya kompleks oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.29. $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayı $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile bir Banach uzayıdır [20].

Tanım 1.1.30. $C[a,b] = \{ x \mid x:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon} \}$ uzayı; $j=[a,b]$ olmak üzere, $\|x\| = \max_{t\in j} |x(t)|$ normu ile Banach uzayıdır. Fakat $j=[0,1]$ alındığında $C[0,1]$ uzayı $\|x\| = \int_0^t |x(t)|\,dt$ ile tanımlanan norm altında tam uzay değildir, dolayısıyla bir Banach uzayı değildir [20].

Tanım 1.1.32. X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı olsun ve X üzerinde bir topoloji τ ile verilsin. (X,τ) topolojik uzayına göre lineer uzay işlemleri sürekli ise yani $\alpha \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ için

i. Skalerle çarpma işlemi, yani $(\alpha, x) \to \alpha.x$ sürekli,

ii. Vektörlerin toplama işlemi, yani $(x, y) \to x + y$ sürekli

ise X uzayına bir topolojik vektör uzayı yada lineer topolojik uzay adı verilir [1].

1.2. Banach Daralma Dönüşümü Prensibi ve Sabit Nokta Kavramı

Metrik uzayda en ilgi çekici ve çok sayıda uygulama alanına sahip olan bazen de Banach daralma dönüşümü olarakta adlandırılan Banach sabit nokta teoremi sabit nokta teorisi için bir temel teşkil eder. Bu teorem tamlık kavramının $Tx = x$ denkleminin çözümünün varlığındaki önemini gösterir. Ayrıca bu teorem çözümün varlığını garanti eden bir metod sağlar. Bu teorem reel analiz, sayısal analiz, adi diferansiyel denklemler ve integral denklemlere uygulanmaları olması bakımından fonksiyonel analizde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 1.2.1. X boş kümeden farklı bir küme ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun.

$$Tx=x$$

eşitliğini sağlayan $x\in X$ noktasına T 'nin bir sabit noktası denir [4].

Bu durumda $x\in X$ olmak üzere $Tx=x$ denkleminin çözümü, T 'nin bir sabit noktasıdır ve T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi

$$F(T)=\{x\in X:\ Tx=x\}$$

ile gösterilir [4].

$T:X\to X$ ile tanımlanan bir T fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya tek sabit noktası olabilir ya da birden fazla sabit noktası olabilir.

Örnek 1.2.2. $X=\mathbb{R}$ olsun. $a\neq 0$ olmak üzere $Tx=a+x$ ile tanımlanan $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ öteleme (translation) fonksiyonun sabit noktası yoktur [20].

Örnek 1.2.3. $0<\theta<2\pi$ için

$$T(x,y)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

ile verilen $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dönme (ratation) fonksiyonun yalnız bir sabit noktası vardır ve bu nokta $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ noktasıdır [20].

Örnek 1.2.4. $\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı

$$T(x,y)=(x,-y)$$

ile tanımlı $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ yansıma (projection) fonksiyonun sabit noktasıdır. Yani T fonksiyonunun sonsuz çoklukta sabit noktası vardır [20].

Banach sabit nokta teoremi, belirli dönüşümlerin sabit noktaları için varlık ve teklik teoremi olup, uygulamaya yönelik problemlerin çözümünde sabit noktaya en iyi yaklaşımı elde etmek için inşa esasına dayanan bir işlem yöntemidir. Bu işleme iterasyon adı verilir. İterasyon işlemleri, uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm dallarında kullanılır ve yakınsaklık ispatları ve hata tahminleri, genellikle Banach sabit nokta teoreminin uygulaması yardımıyla elde edilir.

Tanım 1.2.5. X herhangi bir küme ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x\in X$ için

$$T^{n+1}(x)=T\left(T^n(x)\right)$$

olarak $T^n(x)$ tanımlandığında buna, T altındaki x'in $n.$ iterasyonu denir [4].

$T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

i. $F(T)\subset F\left(T^n\right)$ dir.

ii. Keyfi bir $n\in\mathbb{N}$ için $F\left(T^n\right)=\{x\}$ ise, $F(T)=\{x\}$ dır.

Fakat ii. şartının tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; $T:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ dönüşümü $T(1)=3$, $T(2)=2$ ve $F(3)=1$ olarak tanımlanırsa, $F\left(T^2\right)=\{1,2,3\}$ olduğu halde $F(T)=\{2\}$'dir.

Tanım 1.2.6. (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\leq kd(x,y) \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir $k\geq 0$ sabiti varsa, T 'ye X üzerinde bir Lipschitzian dönüşümü adı verilir. (1.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon>0$ için $d(x,y)<\delta=\dfrac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x,y)<\delta=\varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leq kd(x,y) \\ &< k\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon \end{aligned}$$

yazılır. Yani T Lipschitzian dönüşümü, tanımlı olduğu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 1.2.7. $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ ve $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Tx=x$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty)=|3x-3y|=3|x-y|=3d(x,y),\ (k=3)$$

dır ve $k\geq 3$ için T Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 1.2.8. (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (1.1) eşitsizliği $k\in[0,1)$ olması durumda sağlanıyorsa T 'ye daralma dönüşümü veya büzülme dönüşümü (contraction) denir [20].

Örnek.1.2.9. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\cos x_2, \frac{2}{3}\sin x_3, \frac{3}{4}x_1 \right)$$

ile tanımlansın. $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlanmış alışılmış metriğe göre her bir $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ için $d(Tx, Ty) \leq \frac{3}{4} d(x, y)$ sağlanır. Yani T, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir daralma dönüşümüdür.

Örnek.1.2.10. $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$ kümesi üzerinde $T : X \to X$ dönüşümü $Tx = \left(\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)$ ile verilsin. $\mathbb{R}$'deki alışılmış metriğe göre $\forall\, x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$ sağlanır, yani T bir daralma dönüşümüdür fakat hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek.1.2.11. $Tx = x$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$|Tx - Ty| \leq |x - y|$$

eşitsizliği sağlanır. Bütün $x \in \mathbb{R}$ noktaları T dönüşümünün sabit noktalarıdır.

Yukarıdaki örneklerden de görüleceği gibi her daralma dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez ya da Örnek 1.2.12'de olduğu gibi bir dönüşümün birden fazla sabit noktası olabilir.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daralma dönüşümleri sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin; $X = (0,1]$ uzayı mutlak değer metriği ile tanımlanan $T : X \to X$ dönüşümü için $Tx = \frac{x}{3}$ olsun. Bu T dönüşümü bir daralma dönüşümüdür, fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daralma dönüşümleri de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daralma dönüşümü de olamaz. Buna karşın T daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir n için T^n daralma dönüşümü olabilir.

Örnek 1.2.12. $T:[0,2]\to[0,2]$ dönüşümü

$$Tx=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in(1,2]\end{cases}$$

biçiminde verilmiş olsun. T dönüşümü $x=1$'de süreksizdir. Bu nedenle daralma dönüşümü değildir. Diğer taraftan, $T^2:[0,1]\to\{0\}$, $T^2x=0$ olup T^2 bir daralma dönüşümüdür. Ayrıca $x=0$, T^2'nin tek sabit noktasıdır.

Teorem 1.2.13. (Banach Sabit Nokta Teoremi) X tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir [20].

İspat. $x_0\in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1=T^2x_0,\ ...,\ x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0,\ ... \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1},Tx_n)\\ &\le \alpha d(x_{n-1},x_n)\\ &\ \vdots\\ &\le \alpha^n d(x_0,x_1), \end{aligned}$$

olur. Buradan $m,n\in\mathbb{N}$ ve $m>n$ için

$$
\begin{aligned}
d\left(x_n, x_m\right) &\le d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \ldots + d\left(x_{m-1}, x_m\right) \\
&\le \alpha^n d\left(x_0, x_1\right) + \alpha^{n+1} d\left(x_0, x_1\right) + \ldots + \alpha^{m-1} d\left(x_0, x_1\right) \\
&= \left[\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{m-1}\right] d\left(x_0, x_1\right) \\
&\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right)
\end{aligned}
$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$
z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T \lim_{n\to\infty} x_n = Tz
$$

elde edilir ki bu, T dönüşümünün sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi $w \in X$ noktası T 'nin başka bir sabit noktası ise

$$
0 < d\left(z, w\right) = d\left(Tz, Tw\right) \le \alpha d\left(z, w\right) < d\left(z, w\right)
$$

olur ki bu bir çelişkidir. Yani T 'nin sabit noktası tektir. Böylece ispat tamamlanır.

Banach sabit nokta teoreminin uygulanması istenen durumlarda T dönüşümü bir (X, d) tam metrik uzayının tamamı üzerinde bir daralma olmayabilir; fakat sadece X 'in bir Y alt kümesi üzerinde bir daralma olabilir. Eğer Y alt kümesi kapalı ise $\left(Y, d_{|Y}\right)$ tamdır. Bu nedenle T, Y den Y içine tanımlı bir dönüşüm ise Banach sabit nokta teoremi uygulanabilir. Bununla ilgili pratik bir sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.14. (Bir Yuvar Üzerinde Daralma) T, bir X tam metrik uzayından kendi içine bir dönüşüm olsun. T kapalı bir $Y = \left\{x \in X : d\left(x, x_0\right) \le r\right\}$ yuvarı üzerinde bir daralma olsun. Ayrıca, $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $d\left(x_0, Tx_0\right) < (1-\alpha) r$ olsun. Bu durumda (1.2)'de tanımlanan iterasyon dizisi, bir $x \in Y$ noktasına yakınsar. Bu nokta T dönüşümünün Y 'deki tek sabit noktasıdır [5].

Teorem 1.2.15. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere bir $m \in \mathbb{Z}$ için

$$T^m = T \circ T \circ ... \circ T \quad (m \, \text{defa})$$

bir daralma dönüşümü ise, T, X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir [6].

1.3. Daralma Dönüşüm Çeşitleri ve Özellikleri

Tanım 1.3.1. (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T 'ye kesin daralma (contractive) dönüşüm denir [4].

Örnek 1.3.2. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. T dönüşümü kesin daralma olup daralma değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c)=\frac{T(x)-T(y)}{x-y}<1 \Rightarrow |T(x)-T(y)|<|x-y|$$

olarak bulunur.

Tanım 1.3.3. (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\le d(x,y)$$

ise T 'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [4].

Örnek 1.3.4 $X=\mathbb{R}$ ve X mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$\begin{aligned} T:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\to Tx=x+1 \end{aligned}$$

olsun.

$$d(Tx,Ty)=|x+1-y-1|=|x-y|=d(x,y)$$

sağlanmış olur. Böylece T bir genişlemeyen dönüşümdür fakat daralma ya da kesin daralma dönüşümü değildir.

Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir [3].

T daralma $\Rightarrow T$ kesin daralma $\Rightarrow T$ genişlemeyen $\Rightarrow$ T Lipschitzian.

Fakat ters gerektirmeler her zaman doğru değildir.

Tanım 1.3.5. (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ ve $\alpha>1$ için

$$d(Tx,Ty)\leq \alpha d(x,y)$$

ise T 'ye genişleyen (expansive) dönüşüm denir [4].

Tanım 1.3.6. X boştan farklı bir küme ve $\prec$, X 'te bir bağıntı olsun. Eğer

i. Her $x\in X$ için $x\prec x$ (yansıma özelliği),
ii. $x\prec y$ ve $y\prec x$ ise $x=y$ (ters simetri özelliği),
iii. $x\prec y$ ve $y\prec z$ ise $x\prec z$ (geçişme özelliği),

şartlarını sağlıyorsa $\prec$ bağıntısına kısmı sıralama bağıntısı denir.

X 'te kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa X 'e kısmi sıralı küme denir. Eğer kısmi sıralı bir kümede x,y elemanları için $x\prec y$ veya $y\prec x$ şartlarından en az biri gerçeklenirse x ve y elamanlarına karşılaştırılabilir eleman denir.

Tanım 1.3.7. $(X,\prec)$ ikilisi kısmı sıralı bir küme olsun. X 'in bir A alt kümesinin iyi sıralı bir küme olabilmesi için A kümesinin her iki elemanın karşılaştırılabilir olması gerekir.

Tanım 1.3.8. Eğer her $x,y\in X$ için $x\prec y$ iken $Tx\prec Ty$ ise T dönüşümüne azalmayan (nondecreasing) dönüşüm denir.

Tanım 1.3.9. $(X,\prec)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $T,S:X\to X$ dönüşümleri her $x\in X$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

i. $Tx\prec STx$

ii. $Sx \prec TSx$

Bu durumda (S,T) ikilisine zayıf artan (weakly increasing) dönüşümler denir [11].

Tanım 1.3.10. (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon \le d(x,y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow d(Tx,Ty) < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir $\delta > 0$ sayısı var olsun.

Bu taktirde T dönüşümüne Meir-Keeler daralma dönüşümü adı verilir [13].

Tanım 1.3.11. $\alpha : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ üç değerli fonksiyonların bir A sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

i. α sürekli olsun,
ii. Her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $y \le \alpha(x,x,y)$, $y \le \alpha(x,y,x)$ veya $y \le \alpha(y,x,x)$ ifadelerinden herhangi biri sağlansın. Bu durumda $y \le kx$ olacak biçimde $k \in [0,1)$ vardır.

Tanım 1.3.12. (X,d) tam metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü bazı $\alpha \in A$ için aşağıdaki ifadeyi sağlasın;

$$d(Tx,Ty) \le \alpha\big(d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\big).$$

Bu taktirde T ’ye bir $A-$daralma dönüşümü adı verilir [7].

1.4. $f-$Daralma Dönüşümleri

Tanım 1.4.1. (X,d) bir metrik uzay ve $f,T:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall\, x,y\in X$ için $0\leq k<1$ olmak üzere

$$d\left(fTx,\, fTy\right)\leq kd\left(fx,\, fy\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne bir $f-$daralma dönüşümü adı verilir [24].

$f=I$ (I birim dönüşüm) alınırsa daralma ve $f-$daralma dönüşümleri denk olur. $f-$daralma dönüşümlerinin daralma dönüşümü olması gerekmez.

Örnek 1.4.2. $X=(0,\infty)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$T:X\to X \qquad\qquad f:X\to X$$

$$x\to Tx=\beta x,\quad (\beta>1) \qquad\qquad x\to fx=\frac{\alpha}{x^2},\quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

olarak tanımlansın.

$$d\left(fTx,\, fTy\right)=\left|\frac{\alpha}{\beta^2x^2}-\frac{\alpha}{\beta^2y^2}\right|\leq\frac{1}{\beta^2}\left|fx-fy\right|,\ \left(\frac{1}{\beta^2}<1\right)$$

olduğundan T dönüşümü bir $f-$daralma dönüşümüdür, fakat

$$d\left(Tx,Ty\right)=\left|\beta x-\beta y\right|=\beta\left|x-y\right|,\ (\beta>1)$$

olduğundan daralma dönüşümü değildir.

Örnek 1.4.3. $X=[0,\infty)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$T: X \to X \qquad\qquad f: X \to X$$
$$x \to Tx = 2x+1, \qquad\qquad x \to fx = e^{-x},$$

olarak tanımlansın.

$$d(fTx, fTy) = \left|e^{-2x-1} - e^{-2y-1}\right| = \frac{1}{e}\left|e^{-x}+e^{-y}\right|\left|e^{-x}-e^{-y}\right| \le \frac{2}{e}\left|e^{-x}-e^{-y}\right| = \frac{2}{e}\left|fx - fy\right|,$$

olduğundan T dönüşümü bir $f-$daralma dönüşümüdür [24].

Tanım 1.4.4. (X,d) bir metrik uzay ve $f,T: X \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall\, x,y \in X$ için

$$d(fTx, fTy) < d(fx, fy)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne $f-$kesin daralma dönüşümü adı verilir [24].

Her $f-$daralma dönüşümü bir $f-$kesin daralma dönüşümüdür fakat tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 1.4.5. $X=[1,\infty)$ kümesi üzerinde $d(x,y)=|x-y|$ metriği verilsin.

$$T: X \to X \qquad\qquad f: X \to X$$
$$x \to Tx = \sqrt{x}, \qquad\qquad x \to fx = x,$$

dönüşümleri tanımlansın. T bir $f-$dönüşümü değildir, fakat $f-$kesin daralma dönüşümüdür. Çünkü;

$$d\left(fTx, fTy\right) = \left| fTx - fTy \right| = \left| \sqrt{x} - \sqrt{y} \right| < \left| x - y \right| = \left| fx - fy \right|$$

olduğundan T , $f-$kesin daralma dönüşümüdür [24].

Tanım 1.4.6. $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $\left(y_n\right)$ dizisi için, $\left(fy_n\right)$ yakınsak iken $\left(y_n\right)$ yakınsak bir alt diziye sahipse, $f-$dönüşümüne alt dizisel yakınsaktır denir [24].

Teorem 1.4.7. $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bire-bir, sürekli ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $T : X \to X$ sürekli ve $f-$daralma dönüşümü, X uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f dizisel yakınsak ise her bir $x_0 \in X$ için $\left\{T^n x_0\right\}$ iterasyon dizisi sabit noktaya yakınsar [24].

Tanım 1.4.8. X bir normlu uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve bazı $k \geq 0$ değeri için

$$\left\| f^2 x - fx \right\| \leq k \left\| fx - x \right\|$$

oluyorsa $f-$dönüşümüne k tipinden bir Banach operatörü denir [21].

Tanım 1.4.9. X bir normlu uzay ve $\varnothing \neq M \subset X$ olsun. $f, T : X \to X$ dönüşümleri verilsin. Aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanıyorsa $\left(f,T\right)$ ikilisine Banach operatör çifti denir [21].

i. $f\left[F\left(T\right)\right] \subseteq F\left(T\right)$,

ii. Her bir $x \in F\left(T\right)$ için $Tfx = fx$,

iii. Her bir $x \in F\left(T\right)$ için $Tfx = fTx$,

iv. Bazı $k \geq 0$ değerleri için $\left\| fTx - Tx \right\| \leq k \left\| Tx - x \right\|$ dir.

1.5. $F-$Daralma Dönüşümleri

$\mathcal{F}^* = \{F : F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\}$ ailesi verilsin. F dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar.

(F1) F kesin artandır, yani her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ için $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$ dır.

(F2) Pozitif sayıların her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olmasıdır.

(F3) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır [8].

Tanım 1.5.1. (X,d) metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y)) \tag{1.3}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne bir $F-$daralma dönüşümü adı verilir [8].

Aşağıda $\mathcal{F}^*$ ailesine ait bazı örnekler verilmiştir. Bu örnekler yardımıyla literatürde bulunan bazı daralma dönüşümlerinin bir $F-$daralma dönüşümü oldukları görülebilir.

Örnek 1.5.2. $F_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(\alpha) = \ln\alpha$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_1 \in \mathcal{F}^*$ olduğu açıktır. $T : X \to X$ bir F_1-daralma dönüşümü ise bu durumda $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$d(Tx,Ty) \leq e^{-\tau} d(x,y)$$

sağlanır. Aynı zamanda $Tx = Ty$ şartını sağlayan $x, y \in X$ için de (1.3) eşitsizliği sağlanır. Yani T dönüşümü $\alpha = e^{-\tau}$ olmak üzere bir Lipschitz dönüşümüdür. $\alpha = e^{-\tau} < 1$ olduğundan T bir daralma dönüşümüdür. Dolayısıyla her daralma dönüşümü F_1-daralma dönüşümüdür [8].

Örnek 1.5.3. $F_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(\alpha) = \ln\alpha + \alpha$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_2 \in \mathcal{F}^*$ olduğu açıktır. $T : X \to X$ bir F_2-daralma dönüşümü ise bu durumda $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ $Tx \neq Ty$ için

$$\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)} e^{d(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq e^{-\tau}$$

sağlanır [8].

Örnek 1.5.4. $F_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_3(\alpha) = \dfrac{-1}{\sqrt{\alpha}}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_3 \in \mathcal{F}^*$ olduğu açıktır. $T : X \to X$ bir F_3-daralma dönüşümü ise bu durumda $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{\left(1+\tau\sqrt{d(x,y)}\right)^2} d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $d(Tx,Ty) \leq \alpha\big(d(x,y)\big)d(x,y)$ tipindeki lineer olmayan daralma dönüşümünün özel bir hali elde edilir [8].

Örnek 1.5.5. $F_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_4(\alpha) = \ln\left(\alpha^2 + \alpha\right)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_4 \in \mathcal{F}^*$ olduğu açıktır. $T : X \to X$ bir F_4-daralma dönüşümü ise bu durumda $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$\frac{d(Tx,Ty)\left(d(Tx,Ty)+1\right)}{d(x,y)\left(d(x,y)+1\right)} \leq e^{-\tau}$$

sağlanır [8].

Not 1.5.6. (F1) ve (1.3)'den her $F-$daralma dönüşümü, bir kesin daralma dönüşümüdür. Yani T bir $F-$daralma ise, $d(Tx,Ty)>0$ şartını sağlayan her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)<d(x,y)$$

olur. Böylece her $F-$daralma dönüşümleri sürekli dönüşümlerdir [8].

Not 1.5.7. $F_1,F_2\in\mathcal{F}^*$ olsun. Eğer her $\alpha>0$ için $F_1(\alpha)\leq F_2(\alpha)$ ve $G=F_2-F_1$ azalmayan bir dönüşüm ise bu durumda her F_1-daralma dönüşümü bir F_2-daralma dönüşümüdür. Gerçekten Not 1.5.6'dan $d(Tx,Ty)>0$ şartını sağlayan her $x,y\in X$, $Tx\neq Ty$ için

$$G\left(d(Tx,Ty)\right)\leq G\left(d(x,y)\right)$$

olur. Böylece $d(Tx,Ty)>0$ şartını sağlayan her $x,y\in X$, $Tx\neq Ty$ için

$$\begin{aligned}\tau+F_2\left((Tx,Ty)\right)&=\tau+F_1\left((Tx,Ty)\right)+G\left(d(Tx,Ty)\right)\\&\leq F_1\left((x,y)\right)+G\left(d(x,y)\right)\\&=F_2\left((x,y)\right)\end{aligned}$$

elde edilir [8].

2012 yılında D. Wardowski, $F-$daralma dönüşümlerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 1.5.8. (X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir $F-$daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek z sabit noktasına sahiptir. Üstelik her bir $x_0\in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi z noktasına yakınsar [8].

Tanım 1.5.9. (X,d) metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $F\in\mathcal{F}^*$ ve $d(Tx,Ty)>0$ şartını sağlayan her $x,y\in X$ için

$$M(x,y)=maks\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{1}{2}\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$\tau+F\left(d(Tx,Ty)\right)\leq F\left(M(x,y)\right)$$

olacak şekilde bir $\tau>0$ sayısı varsa T'ye Ciric tip genelleştirilmiş $F-$daralma dönüşümü denir [28].

Tanım 1.5.10. (X,d) tam metrik uzay ve $T,S:X\to X$ tanımlı iki dönüşüm olsun. $Tx=Sx=x$ olacak şekilde $x\in X$ noktası varsa x noktasına S ve T dönüşümlerinin ortak (common) sabit noktası denir.

$F(T)=\{x\in X:Tx=x\}$, $F(S)=\{x\in X:Sx=x\}$ olmak üzere $F(T)\cap F(S)$ kümesi T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesidir.

BÖLÜM 2. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde $2-$metrik uzay yapısı ve $2-$metrik uzaylarla ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Ayrıca kısmi sıralı $2-$metrik uzayının yapısı incelenmiştir. Bununla birlikte metrik uzaydan daha genel olan $b-$metrik ve daha sonra $2-$metrik uzay ile $b-$metrik uzayın genelleştirmesi olan b_2-metrik uzayın yapısal ve topolojik özelliklerine yer verilmiştir.

2.1. $2-$Metrik Uzaylar ve Yapıları

Tanım 2.1.1. X boş kümeden farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlı, reel değerli, negatif olmayan bir

$$\sigma : X \times X \times X \to \mathbb{R}_+$$
$$(x, y, z) \to d(x, y, z)$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

i. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ için öyle bir $z \in X$ vardır öyle ki $\sigma(x, y, z) \neq 0$ olur.

ii. $x, y, z \in X$ noktalarından en az üç tanesinden iki tanesi birbirine eşit ise $\sigma(x, y, z) = 0$ olur.

iii. Her $x, y, z \in X$ için

$$\sigma(x, y, z) = \sigma(x, z, y) = \sigma(y, x, z) = \sigma(y, z, x) = \sigma(z, x, y) = \sigma(z, y, x)$$

(Simetri özelliği).

iv. Her $x, y, z, t \in X$ için

$\sigma(x,y,z) \le \sigma(x,y,t)+\sigma(x,z,t)+\sigma(y,z,t)$, (Dikdörtgen eşitsizliği).

Bu durumda σ fonksiyonuna X uzayında bir $2-$metrik, (X,σ) ikilisine ise bir $2-$metrik uzay denir [23].

Tanım 2.1.2. m uzayın boyutunu göstermek üzere $m \ge 2$ sonlu boyutlu her Euclid uzayı $2-$metrik uzaylarda

$$\sigma(a,b,c) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i<j}\begin{vmatrix} a_i & a_j & 1 \\ b_i & b_j & 1 \\ c_i & c_j & 1 \end{vmatrix}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile birlikte bir Euclid metriği tanımlar.

Yukarıdaki tanımda a_i, b_i ve c_i sırasıyla a,b ve c'nin koordinatlarıdır. Bu $2-$metrik uzayı Euclid $2-$metrik uzayı olarak adlandırılır.

$2-$metrik uzay için iyi tanımlanmış topolojiler vardır. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sigma(a,b,c) < \varepsilon$ olacak şekilde X'teki tüm c noktalarının $\bigcup_{\varepsilon}(a,b)$ birleşimlerinin kümesi olarak X'teki iki a ve b noktalarının $\varepsilon-$komşuluğunu tanımlansın. B kümesi X'teki a_i ve b_i keyfi noktalarının sonlu sayıda ε_i-komşuluklarının $\bigcap_{i=1}\left(\bigcup_{\varepsilon_i}(a_i,b_i)\right)$ tüm kesişimlerinin kümesi olsun. Bu durumda X'teki iki noktanın tüm $\varepsilon-$komşuluğu bu topoloji için bir alt taban oluştururken, B kümesi de X $2-$metrik topolojisi için bir taban oluşturur. Bu topoloji doğal topoloji ya da $2-$metrik tarafından üretilen topoloji olarak adlandırılır [29].

Tanım 2.1.3. (X,σ) bir $2-$metrik uzay ve $a,b \in X$, $r \ge 0$ olsun.

$$B(a,b,r)=\{x\in X : d(a,b,r)<r\}$$

kümesine r yarıçaplı a ve b merkezli $2-$yuvar denir [23].

Tanım 2.1.4. (x_n), (X,σ) $2-$metrik uzayında bir dizi olsun. $\forall\,\varepsilon>0$ ve $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ için, $n>n_0$ olduğunda her $a\in X$ için $\sigma(x_n,x,a)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi $x\in X$ noktasına yakınsaktır denir [23].

Tanım 2.1.5. Bir (X,σ) $2-$metrik uzayında (x_n) bir dizi olmak üzere, $\forall\,\varepsilon>0$ sayısı için bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı; $m,n\geq N$ olan bütün m ve n pozitif tamsayıları ve her $a\in X$ için $\sigma(x_n,x_m,a)<\varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu diziye bir Cauchy dizisi denir [23].

Tanım 2.1.6. (X,σ) $2-$metrik uzayında da eğer her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzay tam $2-$metrik uzay olarak adlandırılır [23].

Not 2.1.7. Tam $2-$metrik uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisi olması gerekmez. Bu aşağıdaki örnekle gösterilebilir [10].

Örnek 2.1.8. $X=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$ olmak üzere $\sigma: X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$\sigma(x,y,z)=\begin{cases}1, & \text{eğer } x,y,z \text{ birbirinden farklı ve bazı } n\in\mathbb{Z}^+ \text{ için} \left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\right\}\subset\{x,y,z\}\\ 0, & \text{diğer durumlar}\end{cases}.$$

Bu durumda (X,σ) bir tam $2-$metrik uzaydır. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi 0 noktasına yakınsar. Fakat $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi Cauchy dizisi değildir. Yani $2-$metrik uzayda bir dizi yakınsak ise Cauchy dizisi olması gerekmez [10].

Not 2.1.9. (X,σ) $2-$metrik uzayında σ sürekli olduğu zaman her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Aşağıda bu ifadenin tersinin doğru olması gerekmediği bir örnekle gösterilmiştir.

Örnek 2.1.10. $X=\{a\}\cup\{a_n | n=1,2,...\}\cup\{b\}\cup\{b_n | n=1,2,...\}$ olmak üzere

$a=(1,0)$, $b=(0,1)$, $a_n=\left(1+\frac{1}{n},0\right)$ ve $b_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,...)$, olsun.

$\sigma: X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\sigma(x,y,z)=\begin{cases}1, & \text{eğer bazı } n\in N \text{ için } \{x,y,z\}=\{a_n,b_n,a\} \text{ veya } \{a_n,b_n,b\} \\ & \text{veya } m\neq n \text{ olcak şekildeki bazı } m,n\in\mathbb{N} \text{ için} \\ & \{a_n,b_n,a_m\} \text{ veya } \{a_n,b_n,b_m\} \\ \Delta xyz, & \text{diğer durumlar}\end{cases}.$$

Buradaki $\mathbb{N}$ tüm pozitif tamsayıların kümesi ve Δxyz, x,y ve z noktaları tarafından oluşturulan üçgenin alanını belirtmek üzere, (X,σ) bir tam $2-$metrik uzaydır ve uzaydaki her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. Fakat σ fonksiyonu X uzayında sürekli değildir, çünkü $a_n\to a, b_n\to b\,(n\to\infty)$ iken $\{\sigma(a_n,b_n,a)\}$ dizisi 0 noktasına yakınsamaz.

Lemma 2.1.11. T dönüşümü X $2-$metrik uzayından Y $2-$metrik uzayına tanımlı sürekli bir dönüşüm olsun. $\{x_n\} \in X$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ iken $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx \in Y$ dir [33].

Önerme 2.1.12. [9]

i. $2-$metrik tanımından her $2-$metrik pozitif tanımlıdır ve her $2-$metrik uzay birbirinden farklı en az 3 nokta içerir.

ii. $\sigma(x,y,z)$ $2-$metriği bir argümanında dizisel süreklidir. Dahası, eğer $\sigma(x,y,z)$ $2-$metriği iki argümanında dizisel sürekli ise, bu durumda tüm üç argümanında da dizisel sürekli olur.

iii. Not 2.1.7 ve Not 2.1.9’dan yakınsak bir dizinin Cauchy dizisi olması gerekmez. Fakat, eğer σ sürekli ise, bu durumda her yakınsak dizi Cauchy dizisidir

Tanım 2.1.12. Eğer $(X,\prec)$ kısmi sıralı küme ve (X,σ) $2-$metrik uzay ise, $(X,\sigma,\prec)$ üçlüsü kısmi sıralı $2-$metrik uzay olarak adlandırılır. Eğer (X,σ) tam $2-$metrik uzay ise, $(X,\sigma,\prec)$ üçlüsü kısmi sıralı tam $2-$metrik uzay olarak adlandırılır [30].

Şimdi metrik uzaydan daha geniş olan $b-$metrik uzayın yapısını inceleyelim.

2.2. $b-$Metrik Uzaylar ve Yapıları

Metrik uzayın genelleştirmelerinden biri olan $b-$metrik uzay ilk olarak S. Czerwik tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra tek ve çok değerli dönüşümler için S. Czerwik ve birçok yazar tarafından bazı sabit nokta teoremleri yine bu uzayda elde edilmiştir.

Tanım 2.2.1. X boştan farklı bir küme ve $s \geq 1$ bir reel sayı olsun. $d_b : X \times X \to \mathbb{R}_+$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartlar sağlansın.

b_1. $d_b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

b_2. $d_b(x,y) = d_b(y,x),$

b_3. $d_b(x,z) = s\left[d_b(x,y) + d_b(y,z)\right].$

Bu durumda d_b fonksiyonuna X uzayında bir $b-$metrik, (X, d_b) ikilisine de $b-$metrik uzay adı verilir [12].

$s = 1$ alınırsa $b-$metrik fonksiyonu metrik fonksiyonuna indirgenir. Bunun yanında yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık gibi kavramlar metrik uzayla benzerlik gösterir.

$b-$metrik değişkenlerinde daima sürekli bir fonksiyon değildir. Fakat alışılmış metrik sürekli bir fonksiyondur.

Örnek 2.2.2. (X, d) bir metrik uzay ve $p > 1$ reel sayısı için $d_b(x,y) = \left(d(x,y)\right)^p$ olsun. $s = 2^{p-1}$ olmak üzere d_b bir $b-$metriktir.

Tanım 2.2.1'den b_1 ve b_2 şartı açık bir şekilde sağlanır. Eğer $1 < p < \infty$ ise $f(x) = x^p$ $(x > 0)$ fonksiyonun konveksliğinden

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right)$$

olur ve böylece $(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$ sağlanır. Buradan, her $x, y \in X$ için

$$d_b(x,y)=\left(d(x,y)\right)^p \le \left(d(x,z)+d(z,y)\right)^p$$
$$\le 2^{p-1}\left(\left(d(x,z)\right)^p+\left(d(z,y)\right)^p\right)$$
$$=2^{p-1}\left(d_b(x,z)+d_b(z,y)\right)$$

dir. b_3 şartı sağlanmış olur ve böylelikle d_b bir $b-$metriktir. Ancak (X,d) bir metrik uzay ise (X,d_b) uzayının metrik uzay olması gerekmez [34].

Örneğin, eğer $X=\mathbb{R}$ tüm reel sayıların kümesi ve $d(x,y)=|x-y|$ alışılmış metriği alırsak $(X,d_b)=(x-y)^2$ uzayı $s=2$ ile $\mathbb{R}$ üzerinde bir $b-$metriktir. Ancak bir metrik değildir [34].

Örnek 2.2.3. $0<p<1$ olmak üzere $l_p=\left\{(x_n)\subset\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\right\}$ uzayı verilsin. $x_n=x,\ y_n=y\in l_p$ olmak üzere

$$d_b: l_p\times l_p\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\to d_b(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu l_p üzerinde bir $b-$metriktir ve (l_p,d_b) $b-$metrik uzaydır. Basit bir hesaplama ile

$$d_b(x,y)\le 2^{\frac{1}{p}}\left[d_b(x,z)+d_b(z,y)\right]$$

elde edilir [40].

2.3. b_2-Metrik Uzaylar ve Yapıları

$2-$metrik ve $b-$metrik fonksiyonlarının genelleştirmesi olan b_2-metrik fonksiyonu 2014 yılında Z. Mustafa, V. Parvaneh, J.R. Roshan, Z. Kadelburg tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.1. X boştan farklı bir küme, $s \geq 1$ bir reel sayı ve $\rho : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

ρ_1. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ için $z \in X$ vardır öyle ki $\rho(x, y, z) \neq 0$ dır.

ρ_2. $x, y, z \in X$ noktalarından en az üç tanesinden iki tanesi birbirine eşit ise $\rho(x, y, z) = 0$ dır.

ρ_3. Her $x, y, z \in X$ için

$\rho(x, y, z) = \rho(x, z, y) = \rho(y, x, z) = \rho(y, z, x) = \rho(z, x, y) = \rho(z, y, x)$ dır,

(Simetri özelliği).

ρ_4. Her $x, y, z, t \in X$ için

$\rho(x, y, z) \leq s\left[\rho(x, y, t) + \rho(x, z, t) + \rho(y, z, t)\right]$, (Dikdörtgen eşitsizliği).

Bu durumda ρ fonksiyonuna X uzayında bir b_2-metrik, (X, ρ) ikilisine ise bir b_2-metrik uzay denir [32].

$s = 1$ için b_2-metrik uzay $2-$metrik uzaya indirgenir.

Tanım 2.3.2. (X, ρ) b_2-metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun.

i. Her $a \in X$ için $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x, a) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına b_2-yakınsaktır denir ve $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

ii. Her $a \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m, a) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine X ’te b_2-Cauchy dizisi denir.

iii. Her b_2-Cauchy dizisi b_2-yakınsak dizi ise (X,ρ) uzayına b_2-tamdır denir [32].

Örnek 2.3.3. $X=[0,+\infty)$ ve $p\geq 1$ reel sayısı olmak üzere ρ metriği aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}[xy+yz+zx]^p, & \mathrm{x}\neq \mathrm{y}\neq \mathrm{z}\neq \mathrm{x}\\ 0, & \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

$x\geq 0$ için $f(x)=x^p$ fonksiyonunun konveksliği ve Jensen eşitsizliği kullanılarak

$$(a+b+c)^p \leq 3^{p-1}\left(a^p+b^p+c^p\right)$$

elde edilir. Böylece $s\leq 3^{p-1}$ olmak üzere (X,ρ) bir b_2-metrik uzaydır [32].

Örnek 2.3.4. $\rho:\mathbb{R}^3\to[0,+\infty)$ fonksiyonu

$$\rho(x,y,z)=\min\{|x-y|,|y-z|,|z-x|\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda ρ, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $2-$metriktir. Yani keyfi x,y,z,t reel sayıları için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\rho(x,y,z)\leq \rho(x,y,t)+\rho(y,z,t)+\rho(z,x,t),$$

$x\geq 0$ için $[0,+\infty)$ üzerinde $f(x)=x^p$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak, $p\geq 1$ için

$$\rho_p(x,y,z) = \left[\min\left\{|x-y|,|y-z|,|z-x|\right\}\right]^p$$

elde edilir. Yani $s < 3^{p-1}$ olmak üzere ρ $\mathbb{R}$ üzerinde bir b_2-metriktir [32].

Tanım 2.3.5. Her $\varepsilon > 0$ ve her $a, x \in X$ için $\rho(z,x,a) < \delta$ iken $\rho'(fx, fz, a) < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu $z \in X$ noktasında b_2-süreklidir denir. Eğer f, tüm $z \in X$ noktalarında sürekli ise f, X üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.3.6. $f:(X,\rho) \to (X',\rho')$ bir fonksiyon olsun. f 'nin $x \in X$ noktasında b_2-sürekli olması için gerek ve yeter şart f 'nin x noktasında dizisel sürekli olmasıdır. Yani, X uzayında her (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına b_2-yakınsak iken (fx_n) dizisi $f(x) \in X'$ noktasına b_2-yakınsaktır.

BÖLÜM 3. $2-$METRİK UZAYLARDA $(F,f)-$DARALMA DÖNÜŞÜMLERİNİ SAĞLAYAN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Sabit nokta teorisinde Banach daralma dönüşümü önemli bir yere sahiptir. Birçok çalışmada bu daralma dönüşümü ve bu dönüşümün genelleştirilmeleri elde edilerek sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bu genelleştirmelerden birisi başka bir fonksiyona bağlı olan ve $f-$daralma dönüşümü olarak adlandırılan dönüşümdür. Bu genelleştirme 2009 yılında Beiranvand [24] tarafından ortaya atılmıştır ve daha sonra da birçok yazar tarafından çeşitli sabit nokta teoremlerinde kullanılmıştır. Diğer yandan 2012 yılında F. Wardowski [8] yeni bir daralma dönüşümü tanımlamıştır. Bu daralma dönüşümü Banach daralma dönüşümünün bir başka genelleştirmesidir. Bu bölümde $f-$daralma ve $F-$daralma dönüşümlerini birlikte kullanarak yeni daralma dönüşümleri tanımlanmış ve sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

3.1. $2-$Metrik Uzaylarda $(F,f)-$Daralma Dönüşümleri

Teorem 3.1.1. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T,S:X\to X$ sürekli iki dönüşüm olsun. $f:X\to X$ sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun. Her $a\in X$ için $F\in\mathcal{F}^*$ ve $\tau>0$ olmak üzere

$$\tau+F\left(\sigma\left(fTx,fSy,a\right)\right)\le F\left(\max\left\{\sigma\left(fx,fy,a\right),\sigma\left(fx,fTx,a\right),\sigma\left(fy,fSy,a\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\sigma\left(fx,fSy,a\right)+\sigma\left(fy,fTx,a\right)}{2}\right\}\right) \tag{3.1}$$

ifadesi sağlansın. Bu durumda T ve S dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca $\{f,T\}$ ve $\{f,S\}$ ikilileri birer Banach çifti ise f,T ve S dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0 noktası X uzayında keyfi bir nokta olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_{2n+1}=Tx_{2n}$ ve $x_{2n+2}=Sx_{2n+1}$ biçiminde tanımlansın. $x_{2n}=x_{2n+1}$ ise (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\tau+F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right)&=\tau+F\left(\sigma\left(fTx_{2n},fSx_{2n+1},a\right)\right)\\
&\le F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right),\sigma\left(fx_{2n},fTx_{2n},a\right),\\
&\qquad\sigma\left(fx_{2n+1},fSx_{2n+1},a\right),\\
&\qquad\frac{\sigma\left(fx_{2n},fSx_{2n+1},a\right)+\sigma\left(fx_{2n+1},fTx_{2n},a\right)}{2}\Big\}\Big)\\
&=F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+1},a\right),\\
&\qquad\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right),\\
&\qquad\frac{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right)}{2}\Big\}\Big)
\end{aligned}$$

elde edilir ve $(F1)$ şartından

$$\begin{aligned}
\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right)&<\max\left\{0,0,\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right),\frac{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)}{2}\right\}\\
&=\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right),
\end{aligned}$$

bulunur. Fakat bu bir çelişkidir. Bu yüzden $\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right)=0$ olur. Yani $fx_{2n}=fx_{2n+1}=fx_{2n+2}$ olur. Benzer şekilde $fx_{2n}=fx_{2n+1}=fx_{2n+2}=\ldots$ olur ve böylece $fx_{2n}=fTx_{2n}=fSx_{2n}$ elde edilir. Bu durumda fx_{2n}, T ve S'nin ortak sabit noktasıdır. Her $n_0\in\mathbb{N}$ için $x_{2n_0}\neq x_{2n_0+1}$ olsun. O halde her $n\in\mathbb{N}$ ve her $a\in X$ için (3.1) eşitsizliğinden aşağıdakiler sağlanır.

$$\begin{aligned}\tau+F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right)&=\tau+F\left(\sigma\left(fTx_{2n},fSx_{2n+1},a\right)\right)\\&\le F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right),\sigma\left(fx_{2n},fTx_{2n},a\right),\\&\qquad\sigma\left(fx_{2n+1},fSx_{2n+1},a\right),\\&\qquad\frac{\sigma\left(fx_{2n},fSx_{2n+1},a\right)+\sigma\left(fx_{2n+1},fTx_{2n},a\right)}{2}\Big\}\Big)\\&=F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right),\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\\&\qquad\frac{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right)}{2}\Big\}\Big).\end{aligned}\tag{3.2}$$

dır.

$$\frac{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right)}{2}\ge\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)\text{ ve }\frac{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right)}{2}\ge\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)$$

ifadeleri sağlanmaz. Çünkü

$$\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right)\le\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)+\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)+\sigma\left(fx_{2n,}\,fx_{2n+1},fx_{2n+2}\right)$$

olur ve (3.1) eşitsizliğinden de $\sigma\left(fx_{2n,}\,fx_{2n+1},fx_{2n+2}\right)=0$ elde edilir. Böylece (3.2) eşitsizliğinden

$$\tau+F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right)\le F\left(\max\left\{\sigma(fx_{2n},fx_{2n+1},a),\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right\}\right)$$

elde edilir.

$$\max\left\{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right),\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right\}=\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tau+F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right)\le F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right).$$

Fakat $(F1)$ şartından $\sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right) < \sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)$ edilir ki bu ise bir çelişkidir. Yani

$$\max\left\{\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right), \sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)\right\} = \sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)$$

dır. Böylece (3.2) eşitsizliğinden

$$F\left(\sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)\right) \le F\left(\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)\right) - \tau$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F\left(\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)\right) \le F\left(\sigma\left(fx_{2n-1}, fx_{2n}, a\right)\right) - \tau$$

ifadesi elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned} F\left(\sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)\right) &\le F\left(\sigma\left(fx_{2n-1}, fx_{2n}, a\right)\right) - \tau \\ &\vdots \\ &\le F\left(\sigma\left(fx_0, fx_1, a\right)\right) - (2n+1)\tau \end{aligned} \tag{3.3}$$

bulunur. Yukarıdaki yöntemle devam edilerek aşağıdaki ifade de yazılır.

$$F\left(\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)\right) \le F\left(\sigma\left(fx_0, fx_1, a\right)\right) - (2n)\tau . \tag{3.4}$$

Bu durumda (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\sigma\left(fx_n, fx_{n+1}, a\right)\right) = -\infty$$

elde edilir. Bu durumda $(F2)$ şartından

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\left(fx_n, fx_{n+1}, a\right) = 0 \tag{3.5}$$

bulunur. $\sigma\left(fx_n, fx_{n+1}, a\right)=\sigma_m$ olsun ve $\left(F3\right)$ şartından, $k\in\left(0,1\right)$ vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^k F\left(\sigma_n\right)=0 \tag{3.6}$$

olur ve (3.3) ve (3.4) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\sigma_{2n+1}^k F\left(\sigma_{2n+1}\right)-\sigma_{2n+1}^k F\left(\sigma_0\right)\le-\left(2n+1\right)\sigma_{2n+1}^k\le 0 \tag{3.7}$$

$$\sigma_{2n}^k F\left(\sigma_{2n}\right)-\sigma_{2n}^k F\left(\sigma_0\right)\le-\left(2n\right)\sigma_{2n}^k\le 0 \tag{3.8}$$

ifadeleri elde edilir. (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitsizliklerinden her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} n\sigma_n^k = 0 \tag{3.9}$$

bulunur. Buradan, her $n\ge n_1$ için $n\sigma_n{}^k\le 1$ olacak şekilde bir $n_1\in\mathbb{N}$ vardır. Her $n\ge n_1$ için

$$\sigma_n\le\frac{1}{1^{\frac{1}{k}}} \tag{3.10}$$

dır. $\left\{fx_n\right\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m,n\ge n_1$ olacak şekilde $m,n\in\mathbb{N}$ göz önüne alınsın. (3.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\sigma(fx_n, fx_m, a) &\le \sigma(fx_n, fx_{n+1}, a)+\sigma(fx_{n+1}, fx_{n+2}, a)+\ldots+\sigma(fx_{m-1}, fx_m, a)\\ &\le\sum_{i=n}^{m-1}\sigma(fx_i, fx_{i+1}, a)\end{aligned}$$

$$<\sum_{i=n}^{\infty}\sigma(fx_i, fx_{i+1},a)$$
$$\leq \sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$$

elde edilir. $\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ serisinin yakınsaklığından $(n \to \infty)$ için limite geçilirse her $a \in X$ için $\sigma\left(fx_n, fx_m, a\right) \to 0$ olur. Bu da X 'te $\{ fx_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X,σ) tam $2-$metrik uzay olduğundan $\{ fx_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır. $f-$dönüşümü alt-dizisel yakınsak olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $\lim\limits_{p\to\infty} fx_p = u$ olan bir $\{x_p\}$ alt dizisine sahiptir. $f-$sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\lim_{p\to\infty} fx_p = fu$$

olur. $2-$metrik uzayda limitin tek olmasından $z = fu$ olmalıdır. T ve S sürekli dönüşümler olduğundan $\lim\limits_{p\to\infty} Tx_p = Tu$ ve $\lim\limits_{p\to\infty} Sx_p = Su$ olduğu açıktır. f 'nin sürekliliği tekrar kullanılarak $\lim\limits_{p\to\infty} fTx_p = fTu$ ve $\lim\limits_{p\to\infty} fSx_p = fSu$ ifadeleri elde edilir. Eğer p çift ise $\lim\limits_{n\to\infty} fTx_{2n} = fTu$ dur. Böylece (3.1)'den

$$\begin{aligned}\tau + F\left(\sigma\left(fTu, fx_{2n+2}, a\right)\right) &= \tau + F\left(\sigma\left(fTu, fSx_{2n+1}, a\right)\right)\\ &\leq F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fu, fx_{2n+1}, a\right), \sigma\left(fu, fTu, a\right),\\ &\qquad \sigma\left(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, a\right),\\ &\qquad \frac{\sigma\left(fu, fSx_{2n+1}, a\right)+\sigma\left(fx_{2n+1}, fTu, a\right)}{2}\Big\}\Big)\end{aligned}$$

elde edilir ve $(F1)$ şartından

$$\sigma\left(fTu,\, fx_{2n+2},a\right) < \max\left\{\sigma\left(fu,\, fx_{2n+1},a\right),\sigma\left(fu,\, fTu,a\right),\sigma\left(fx_{2n+1},\, fx_{2n+2},a\right)\right.$$
$$\left.\left.\frac{\sigma\left(fu,\, fx_{2n+2},a\right)+\sigma\left(fx_{2n+1},\, fTu,a\right)}{2}\right\}\right)$$

bulunur. Son eşitsizlikte $\left(n\to\infty\right)$ için limit alınırsa

$$\sigma\left(fTu,\, fu,a\right) < \max\left\{0,d\left(fu,\, fTu,a\right),0,\frac{\sigma\left(fu,\, fTu,a\right)}{2}\right\}$$

olur. Böylece $\sigma\left(fTu,\, fu,a\right) < \sigma\left(fTu,\, fu,a\right)$ çelişkisine varılır. Bu durumda $\sigma\left(fTu,\, fu,a\right)=0$ dır. Yani, $fTu = fu$ bulunur. f bire-bir dönüşüm olduğundan $u=Tu$ olur. Bu ise u noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterir.

p tek olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} fx_{2n+1} = fu$ dir. Benzer şekilde (3.1)'den $fSu = fu$ bulunur. Böylece u noktası S dönüşümünün de bir sabit noktasıdır. Yani u noktası T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. u noktasının tek olduğunu göstermek için w noktası u'dan farklı bir diğer ortak sabit nokta olsun. Bu durumda (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\tau + F\left(\sigma\left(fu,\, fw,a\right)\right) &= \tau + F\left(\sigma\left(fTu,\, fSw,a\right)\right)\\ &\leq F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fu,\, fw,a\right),\sigma\left(fu,\, fTu,a\right),\\ &\qquad \sigma\left(fw,\, fSw,a\right),\\ &\qquad \frac{\sigma\left(fu,\, fSw,a\right)+\sigma\left(fw,\, fTu,a\right)}{2}\Big\}\Big)\\ &=F\left(\sigma\left(fu,\, fw,a\right)\right),\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Yani $fu = fw$ dır. f dönüşümü bire-bir olduğundan $u=w$ noktası T ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır.

$\{f,T\}$ ve $\{f,S\}$ ikilileri hipotezden Banach çifti olsun. Bu durumda $\{f,T\}$ ve $\{f,S\}$ sırasıyla T ve S dönüşümlerinin sabit noktasında değişmelidir. Bu ise $u \in F(T)$ için $fTu = Tfu$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $fu = fTu$ olur ki bu da fu noktasının da T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterir. Fakat bu dönüşümün tek sabit noktası olduğundan $fu = u$ dur. Bu durum S dönüşümü içinde aynıdır. Böylece $u = fu = Tu = Su$, yani u noktası X uzayında f, T ve S dönüşümleri için bir tek ortak sabit noktadır.

Teorem 3.1.1'de $T = S$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T : X \to X$ sürekli dönüşüm olsun. $f : X \to X$ dönüşümü ise sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak olsun. Her $a \in X$ için $F \in \mathcal{F}^*$ ve $\tau > 0$ olmak üzere

$$\tau + F\left(\sigma\left(fTx, fTy, a\right)\right) \leq F\left(\max\left\{\sigma\left(fx, fy, a\right), \sigma\left(fx, fTx, a\right), \sigma\left(fy, fTy, a\right), \frac{\sigma\left(fx, fTy, a\right) + \sigma\left(fy, fTx, a\right)}{2}\right\}\right) \tag{3.11}$$

ifadesi sağlansın. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca $\{f,T\}$ ikilisi Banach çifti ise f ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.1.3. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T, S : X \to X$ sürekli iki dönüşüm olsun. $f : X \to X$ sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun. Her $a \in X$ için $F \in \mathcal{F}^*$ ve $\tau > 0$ olmak üzere

$$\tau + F\left(\sigma\left(fTx, fSy, a\right)\right) \le F\left(\max\left\{ \sigma\left(fy, fSy, a\right) \frac{1+\sigma\left(fx, fTx, a\right)}{1+\sigma\left(fx, fy, a\right)}, \sigma\left(fx, fy, a\right)\right\}\right) \tag{3.12}$$

ifadesi sağlansın. Bu taktirde T ve S dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca $\{f, T\}$ ve $\{f, S\}$ ikilileri birer Banach çifti ise f, T ve S dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0 noktası X uzayında keyfi bir nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_{2n+1} = Tx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$ biçiminde tanımlansın. $x_{2n} = x_{2n+1}$ olduğunda (3.12) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\tau + F\left(\sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)\right) &= \tau + F\left(\sigma\left(fTx_{2n}, fSx_{2n+1}, a\right)\right) \\
&\le F\left(\max\left\{ \sigma\left(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, a\right) \frac{1+\sigma\left(fx_{2n}, fTx_{2n}, a\right)}{1+\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)}, \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)\right\}\right) \\
&\le F\left(\max\left\{ \sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right) \frac{1+\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)}{1+\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)}, \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)\right\}\right)
\end{aligned}$$

bulunur ve $\tau + F\left(\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+2}, a\right)\right) \le \sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+2}, a\right)$ olduğundan, bir çelişkidir. Bu yüzden $\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+2}, a\right) = 0$ olur. Yani $fx_{2n} = fx_{2n+1} = fx_{2n+2}$ dır. Benzer şekilde $fx_{2n} = fx_{2n+1} = fx_{2n+2} = \ldots$ olur ve böylece $fx_{2n} = fTx_{2n} = fSx_{2n}$ elde edilir. Bu durumda fx_{2n}, T ve S 'nin ortak sabit noktasıdır. Her $N \in \mathbb{N}$ için $x_{2N} \ne x_{2N+1}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ ve her $a \in X$ için (3.12) eşitsizliğinden aşağıdaki ifade sağlanır:

$$
\begin{aligned}
\tau+F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right)&=\tau+F\left(\sigma\left(fTx_{2n},fSx_{2n+1},a\right)\right)\\
&\leq F\left(\max\left\{\sigma\left(fx_{2n+1},fSx_{2n+1},a\right)\frac{1+\sigma\left(fx_{2n},fTx_{2n},a\right)}{1+\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)},\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)\right\}\right)\\
&=F\left(\max\left\{\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\frac{1+\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)}{1+\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)},\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)\right\}\right)\\
&=F\left(\max\left\{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+2},a\right),\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+1},a\right)\right\}\right).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

$$\max\left\{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right),\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right\}=\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\tau+F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right)\leq F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right).$$

Fakat $(F1)$ şartından $\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)<\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)$ olur, bu ise bir çelişkidir. Yani

$$\max\left\{\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right),\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right\}=\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)$$

dır. Böylece (3.13) eşitsizliğinde

$$F\left(\sigma\left(fx_{2n+1},fx_{2n+2},a\right)\right)\leq F\left(\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)\right)-\tau$$

elde edilmiş olur. Benzer şekilde (3.12) eşitsizliğinden her $n\in\mathbb{N}$ için

$$F\left(\sigma\left(fx_{2n},fx_{2n+1},a\right)\right)\leq F\left(\sigma\left(fx_{2n-1},fx_{2n},a\right)\right)-\tau$$

ifadesi de elde edilir.

İspatın devamında, Teorem 3.1.1'in ispatına benzer olarak $\{fx_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. (X,σ) tam uzay olduğundan $\{fx_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır. $f-$dönüşümü alt-dizisel yakınsak olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $\lim\limits_{p\to\infty} fx_p = u$ olan bir $\{x_p\}$ alt dizisine sahiptir. $f-$sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\lim_{p\to\infty} fx_p = fu$$

olur. $2-$metrik uzayda limitin tek olmasından $z = fu$ olmalıdır. T ve S sürekli dönüşümler olduğundan $\lim\limits_{p\to\infty} Tx_p = Tu$ ve $\lim\limits_{p\to\infty} Sx_p = Su$ olduğu açıktır. f'nin sürekliliği tekrar kullanılırsa $\lim\limits_{p\to\infty} fTx_p = fTu$ ve $\lim\limits_{p\to\infty} fSx_p = fSu$ ifadeleri elde edilir. Eğer p çift ise $\lim\limits_{n\to\infty} fTx_{2n} = fTu$ dur. Böylece (3.12)'den

$$\begin{aligned}\tau + F\left(\sigma\left(fTu, fx_{2n+2}, a\right)\right) &= \tau + F\left(\sigma\left(fTu, fSx_{2n+1}, a\right)\right)\\ &\le F\left(\max\left\{\sigma\left(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, a\right)\frac{1+\sigma\left(fu, fTu, a\right)}{1+\sigma\left(fu, fx_{2n+1}, a\right)},\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.\sigma\left(fu, fx_{2n+1}, a\right)\right\}\right)\end{aligned}$$

bulunur. $(F1)$ şartından ve genelliği bozmaksızın

$$\sigma\left(fTu, fx_{2n+2}, a\right) \le \max\left\{\sigma\left(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, a\right)\frac{1+\sigma\left(fu, fTu, a\right)}{1+\sigma\left(fu, fx_{2n+1}, a\right)}, \sigma\left(fu, fx_{2n+1}, a\right)\right\}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $(n \to \infty)$ için limit alınırsa

$$\sigma\left(fu, fTu, a\right) \le 0$$

olur ki bu da $fTu = fu$ olmasıyla mümkündür. f bire-bir olduğundan $u = Tu$ dur. Bu ise u noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterir.

p tek olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} fx_{2n+1} = fu$ dir. Benzer şekilde (3.12)'den $fSu = fu$ bulunur. Böylelikle u noktası S dönüşümünün de bir sabit noktasıdır. Yani u noktası T ve S dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır. Bu noktanın tekliğini göstermek için w noktası T ve S dönüşümlerinin bir diğer ortak sabit noktası olsun ve bu noktalar birbirinden farklı olsun. Bu durumda (3.12) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\tau + F\left(\sigma\left(fu, fw, a\right)\right) &= \tau + F\left(\sigma\left(fTu, fSw, a\right)\right)\\ &\leq F\left(\max\left\{\sigma\left(fu, fSw, a\right)\frac{1+\sigma\left(fu, fTu, a\right)}{1+\sigma\left(fu, fw, a\right)}, \sigma\left(fu, fw, a\right)\right\}\right)\\ &= F\left(\sigma\left(fu, fw, a\right)\right)\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Yani $fu = fw$ dır. f dönüşümü bire-bir olduğundan $u = w$ noktası T ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır. Yine Teorem 3.1.1'deki ispata benzer şekilde f, T ve S'nin bir tek ortak sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.1.3'de $T = S$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.4. (X, σ) tam $2-$metrik uzay ve $T : X \to X$ sürekli dönüşüm olsun. $f : X \to X$ dönüşümü ise sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak olsun. Her $a \in X$ için $F \in \mathcal{F}^*$ ve $\tau > 0$ olmak üzere

$$\tau + F\left(\sigma\left(fTx, fSy, a\right)\right) \leq F\left(\max\left\{\sigma\left(fy, fSy, a\right)\frac{1+\sigma\left(fx, fTx, a\right)}{1+\sigma\left(fx, fy, a\right)}, \sigma\left(fx, fy, a\right)\right\}\right)$$

ifadesi sağlansın. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca $\{f,T\}$ ikilisi Banach çifti ise f ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

3.2. Kısmi Sıralı $2-$Metrik Uzaylarda $(F, f)-$Daralma Dönüşümleri

Bu kısımda, kısmi sıralı $2-$metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ve sonuçları elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1. $(X,\sigma,\prec)$ tam, kısmi sıralı $2-$metrik uzay olsun. $T,S : X \to X$ sürekli iki dönüşüm olsun. $f : X \to X$ sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

i. Her $x \in X$ ve her $a \in X$ için $F \in \mathcal{F}^*$ ve $\tau > 0$ var olacak şekilde herhangi karşılaştırılabilir iki $x, y \in X$ için

$$\tau + F\left(\sigma\left(fTx, fSy, a\right)\right) \leq F\left(\max\left\{\sigma\left(fx, fy, a\right), \sigma\left(fx, fTx, a\right), \sigma\left(fy, fSy, a\right), \frac{\sigma\left(fx, fSy, a\right) + \sigma\left(fy, fTx, a\right)}{2}\right\}\right) \tag{3.14}$$

olsun.

ii. (T,S) dönüşüm çifti "$\prec$" bağıntısına göre zayıf artan (weakly increasing) dönüşümler olsun.

Bu durumda T ve S dönüşümleri X uzayında bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $F(T) \cap F(S)$ kümesinin tam sıralı olması için gerek ve yeter şart T ve S 'nin bir tek ortak sabit noktaya sahip olmasıdır.

Üstelik, eğer $\{f,T\}$ ve $\{f,S\}$ ikilileri birer Banach çifti ise f,T ve S dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0 noktası X uzayında keyfi bir nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_{2n+1} = Tx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$ biçiminde tanımlansın. T ve S dönüşümleri "$\prec$" bağıntısına göre zayıf artan olduklarından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_1 = Tx_0 \prec STx_0 = x_2 = Sx_1 \prec TSx_1 = x_3 \prec \ldots \prec x_{2n+1} = Tx_{2n} \prec STx_{2n} = x_{2n+2} \prec \ldots$$

iterasyon dizisi tanımlansın. Genelliği bozmaksızın $\{x_n\}$ dizisinin ardışık terimleri birbirinden farklı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{2n} \prec x_{2n+1}$ olduğundan (3.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\tau + F\left(\sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)\right) &= \tau + F\left(\sigma\left(fTx_{2n}, fSx_{2n+1}, a\right)\right) \\
&\leq F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right), \sigma\left(fx_{2n}, fTx_{2n}, a\right), \\
&\qquad \sigma\left(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, a\right), \\
&\qquad \frac{\sigma\left(fx_{2n}, fSx_{2n+1}, a\right) + \sigma\left(fx_{2n+1}, fTx_{2n}, a\right)}{2}\Big\}\Big) \\
&= F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right), \sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right) \\
&\qquad \frac{\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+2}, a\right)}{2}\Big\}\Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.1.1’e benzer metodla $\{fx_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. $(X, \sigma, \prec)$ tam, kısmi sıralı $2-$metrik uzay olduğundan $\{fx_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır. $f-$dönüşümü alt-dizisel yakınsak olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $\lim_{p\to\infty} fx_p = u$ olan bir $\{x_p\}$ alt dizisine sahiptir. $f-$sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\lim_{p\to\infty} fx_p = fu$$

olur. $2-$metrik uzayda limitin tek olmasından $z = fu$ olmalıdır. T ve S sürekli dönüşümler olduğundan $\lim_{p\to\infty} Tx_p = Tu$ ve $\lim_{p\to\infty} Sx_p = Su$ olduğu açıktır. f ’nin sürekliliği tekrar kullanılarak $\lim_{p\to\infty} fTx_p = fTu$ ve $\lim_{p\to\infty} fSx_p = fSu$ ifadeleri elde edilir. Eğer p çift ise $\lim_{n\to\infty} fTx_{2n} = fTu$ dur. Böylece (3.13)'den

$$\tau + F\left(\sigma\left(fTu, fx_{2n+2}, a\right)\right) = \tau + F\left(\sigma\left(fTu, fSx_{2n+1}, a\right)\right)$$

dir. Tekrar Teorem 3.1.1'in ispatına benzer metodla $Tu = u$ ve $Su = u$ bulunabilir. O halde u noktası T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Ortak sabit noktanın tekliğini göstermek için $F(T)\cap F(S)$ kümesi tam (iyi) sıralı bir küme olsun. Bu durumda T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası tek olacaktır. Şimdi bunu tersinin doğru olduğunu kabul edelim. O halde $u \neq w$ için $Tu = Su = u$ ve $Tw = Sw = w$ olsun. u ve w noktaları karşılaştırılabilir ve $\sigma(fu, fw, a) > 0$ olduğundan, (3.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\tau + F\left(\sigma\left(fu, fw, a\right)\right) &= \tau + F\left(\sigma\left(fTu, fSw, a\right)\right) \\
&\leq F\Big(\max\Big\{\sigma\left(fu, fw, a\right), \sigma\left(fu, fTu, a\right), \\
&\qquad \sigma\left(fw, fSw, a\right), \\
&\qquad \frac{\sigma\left(fu, fSw, a\right) + \sigma\left(fw, fTu, a\right)}{2}\Big\}\Big) \\
&= F\left(\sigma\left(fu, fw, a\right)\right)
\end{aligned}$$

olur bu ise bir çelişkidir. Yani, $u = w$ noktası T ve S dönüşümünün bir tek ortak sabit noktasıdır.

Tersine, eğer T ve S dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahip ise $F(T)\cap F(S)$ kümesinin tam (iyi) sıralı küme olduğu açıktır.

$\{f, T\}$ ve $\{f, S\}$ ikilileri hipotezden Banach çifti olsun. Bu durumda $\{f, T\}$ ve $\{f, S\}$ sırasıyla T ve S dönüşümlerinin sabit noktasında değişmelidir. Bu da

$u \in F(T)$ için $fTu = Tfu$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $fu = fTu$ olur ki bu da fu noktasının da T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterir. Fakat bu dönüşümün tek sabit noktası olduğundan $fu = u$ dur. Bu durum S dönüşümü içinde aynıdır. Böylece $u = fu = Tu = Su$, yani u noktası X uzayında f, T ve S dönüşümleri için bir tek ortak sabit noktadır.

Teorem 3.2.1'de $T = S$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2. $(X, \sigma, \prec)$ tam, kısmi sıralı $2-$metrik uzay olsun. $T : X \to X$ sürekli dönüşüm olsun. $f : X \to X$ sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

i. Her $x \in X$ ve her $a \in X$ için $F \in \mathcal{F}^*$ ve $\tau > 0$ var olacak şekilde herhangi karşılaştırılabilir iki $x, y \in X$ için

$$\tau + F\left(\sigma\left(fTx, fTy, a\right)\right) \leq F\left(\max\left\{\sigma\left(fx, fy, a\right), \sigma\left(fx, fTx, a\right), \sigma\left(fy, fTy, a\right), \frac{\sigma\left(fx, fTy, a\right) + \sigma\left(fy, fTx, a\right)}{2}\right\}\right)$$

olsun.

ii. T dönüşümü "$\prec$" bağıntısına göre azalmayan (non-decreasing) bir dönüşüm olsun.

iii. $x_0 \prec Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olsun.

Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $F(T)$ kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T 'nin bir tek sabit noktaya sahip olmasıdır. Üstelik, eğer $\{f, T\}$ ikilisi bir Banach çifti ise f ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki teoremde kısmi sıralı $2-$metrik uzayda rasyonel ifade içeren daralma dönüşümleri için bazı sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.2.3. $(X,\sigma,\prec)$ tam, kısmi sıralı $2-$metrik uzay olsun. $T,S:X\to X$ sürekli iki dönüşüm olsun. $f:X\to X$ dönüşümü de sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

i. Her $x\in X$ ve her $a\in X$ için $F\in\mathcal{F}^*$ ve $\tau>0$ var olacak şekilde herhangi karşılaştırılabilir iki $x,y\in X$ için

$$\tau+F\left(\sigma\left(fTx,fSy,a\right)\right)\leq F\left(\max\left\{\sigma\left(fy,fSy,a\right)\frac{1+\sigma\left(fx,fTx,a\right)}{1+\sigma\left(fx,fy,a\right)},\right.\right.$$
$$\left.\left.\sigma\left(fx,fy,a\right)\right\}\right) \tag{3.15}$$

olsun.

ii. (T,S) dönüşüm çifti "$\prec$" bağıntısına göre zayıf artan (weakly increasing) dönüşümler olsun.

Bu durumda T ve S dönüşümleri X uzayında bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $F(T)\cap F(S)$ kümesinin tam sıralı olması için gerek ve yeter şart T ve S'nin bir tek ortak sabit noktaya sahip olmasıdır. Üstelik, eğer $\{f,T\}$ ve $\{f,S\}$ ikilileri birer Banach çifti ise f,T ve S dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\{x_n\}$ dizisi Teorem 3.2.1'deki gibi tanımlansın. Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\neq x_{n+1}$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_{2n}\prec x_{2n+1}$ olduğundan (3.15) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\tau + F\left(\sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)\right) = \tau + F\left(\sigma\left(fTx_{2n}, fSx_{2n+1}, a\right)\right) \\
\leq F\left(\max\left\{ \sigma\left(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, a\right)\frac{1+\sigma\left(fx_{2n}, fTx_{2n}, a\right)}{1+\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)}, \right.\right. \\
\left.\left. \sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)\right\}\right) \\
= F\left(\max\left\{ \sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, a\right)\frac{1+\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)}{1+\sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)}, \right.\right. \\
\left.\left. \sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}, a\right)\right\}\right) \\
= F\left(\max\left\{ \sigma\left(fx_{2n}, fx_{2n+2}, a\right), \sigma\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+1}, a\right)\right\}\right),
\end{aligned}
$$

dır. Teorem 3.1.3'e benzer metodla $\{ fx_n \}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu görülür. u noktası da T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası olarak bulunur.

$F(T) \cap F(S)$ kümesi tam sıralı bir küme olsun. Bu durumda T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası tek olacaktır. Tersi doğru olsun. Yani $u \neq w$ için $Tu = Su = u$ ve $Tw = Sw = w$ olsun. u ve w noktaları karşılaştırılabilir ve $\sigma(fu, fw, a) > 0$ olduğundan, (3.14) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\tau + F\left(\sigma\left(fu, fw, a\right)\right) = \tau + F\left(\sigma\left(fTu, fSw, a\right)\right) \\
\leq F\left(\max\left\{ \sigma\left(fu, fSw, a\right)\frac{1+\sigma\left(fu, fTu, a\right)}{1+\sigma\left(fu, fw, a\right)}, \sigma\left(fu, fw, a\right)\right\}\right) \\
= F\left(\sigma\left(fu, fw, a\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde kabul yanlıştır. Yani, $u = w$ noktası T ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır.

Tersine, eğer T ve S dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahip ise $F(T) \cap F(S)$ kümesi tam sıralı bir kümedir.

Teorem 3.2.1'e benzer şekilde f,T ve S'nin bir tek ortak sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.3'te $T=S$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.4. $(X,\sigma,\prec)$ tam, kısmi sıralı $2-$metrik uzay olsun. $T:X\to X$ sürekli dönüşüm olsun. $f:X\to X$ dönüşümü de sürekli, bire-bir ve alt-dizisel yakınsak olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

i. Her $x\in X$ ve her $a\in X$ için $F\in\mathcal{F}^*$ ve $\tau>0$ var olacak şekilde herhangi karşılaştırılabilir iki $x,y\in X$ için

$$\tau+F\left(\sigma\left(fTx,fSy,a\right)\right)\le F\left(\max\left\{\sigma\left(fy,fSy,a\right)\frac{1+\sigma\left(fx,fTx,a\right)}{1+\sigma\left(fx,fy,a\right)},\sigma\left(fx,fy,a\right)\right\}\right)$$

olsun.

ii. T dönüşümü "$\prec$" bağıntısına göre azalmayan (non-decreasing) bir dönüşüm olsun.

iii. $x_0\prec Tx_0$ olacak şekilde $x_0\in X$ var olsun.

Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $F(T)$ kümesinin tam sıralı olması için gerek ve yeter şart T'nin bir tek sabit noktaya sahip olmasıdır. Üstelik, eğer $\{f,T\}$ ikilisi bir Banach çifti ise f ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

BÖLÜM 4. $2-$METRİK UZAYLARDA MEIR-KEELER DARALMA DÖNÜŞÜMLERİNİ SAĞLAYAN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. Meir-Keeler Daralma Dönüşümleri

Bu bölümün ilk kısmında $2-$metrik uzaylarda Meir-Keeler daralma dönüşümlerini sağlayan sabit nokta teoremlerine ve sonuçlarına yer verilecektir. Ayrıca ikinci kısımda rasyonel ifadeler içeren daralma dönüşümleri için sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

1975 yılında B.K. Dass ve S. Gupta çalışmalarında daralma dönüşümlerini genelleştirerek rasyonel ifade içeren bir daralma dönüşümü tanımlamıştır ve literatürde birçok genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi vermişlerdir. Bu genelleştirmelerden ikisi [15] ve [16] numaralı referanslarda çalışılmıştır.

Teorem 4.1.1. (X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü her $x,y\in X$ ve α,β sabitleri için $\alpha,\beta>0$ ve $\alpha+\beta<1$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın.

$$d(Tx,Ty)\le \alpha d(x,y)\frac{1+d(x,Tx)}{1+d(x,y)}+\beta d(x,y). \tag{4.1}$$

Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir [14].

(4.1) eşitsizliği yardımıyla Meir-Keeler daralma dönüşümü aşağıdaki şekilde $2-$metrik uzayda genelleştirilebilir.

Teorem 4.1.2. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun.

$\forall\,\varepsilon>0$ için $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır öyle ki her $a\in X$ için

$$2\varepsilon\le\sigma(y,Ty,a)\frac{1+\sigma(x,Tx,a)}{1+\sigma(x,y,a)}+\sigma(x,y,a)<2\varepsilon+\delta(\varepsilon)\Rightarrow\sigma(Tx,Ty,a)<\varepsilon \tag{4.2}$$

ifadesi sağlansın. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x\ne y\ne a$ ve $y\ne Ty\ne a$ için

$$\sigma(Tx,Ty,a)<\frac{1}{2}\sigma(y,Ty,a)\frac{1+\sigma(x,Tx,a)}{1+\sigma(x,y,a)}+\frac{1}{2}\sigma(x,y,a) \tag{4.3}$$

dır. Yani T dönüşümü (4.2) eşitsizliğini gerçekler. $x\in X$ ve $\{x_n\}=\{T^n x\}$ dizisi göz önüne alınsın. $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında Cauchy dizisi olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$x_p=x_{p+1}$ olacak şekilde $p\in\mathbb{N}$ varsa x_p elemanı T dönüşümünün sabit noktasıdır. Her $p\in\mathbb{N}$ için $x_p\ne x_{p+1}$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$c_n=\sigma(x_n,x_{n+1},a)$$

dizisi tanımlansın. (4.3) eşitsizliğinden

$$c_n=\sigma(Tx_{n-1},Tx_n,a)<\frac{1}{2}\sigma(x_n,x_{n+1},a)\frac{1+\sigma(x_{n-1},x_n,a)}{1+\sigma(x_{n-1},x_n,a)}+\frac{1}{2}\sigma(x_{n-1},x_n,a)=\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}c_{n-1}$$

elde edilir. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$c_n < c_{n-1} \tag{4.4}$$

dır. Yani $\{c_n\}$ dizisi azalan bir dizidir. $n \to \infty$ için $c_n \downarrow \varepsilon > 0$ ve $c_n + c_{n-1} \downarrow 2\varepsilon$ olur. Bu durumda en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$2\varepsilon \le c_{n_0} + c_{n_0-1} < 2\varepsilon + \delta(\varepsilon)$$

dır. Buradan da

$$2\varepsilon \le \sigma\left(x_{n_0}, Tx_{n_0}, a\right)\frac{1+\sigma\left(x_{n_0-1}, Tx_{n_0}, a\right)}{1+\sigma\left(x_{n_0-1}, x_{n_0}, a\right)} + \sigma\left(x_{n_0-1}, x_{n_0}, a\right) < 2\varepsilon + \delta(\varepsilon)$$

yazılabilir. O halde (4.2)'den

$$\sigma\left(Tx_{n_0-1}, x_{n_0}, a\right) = \sigma\left(x_{n_0}, x_{n_0+1}, a\right) = c_{n_0} < \varepsilon$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda kabul yanlıştır. Yani $n \to \infty$ için

$$c_n \downarrow 0 \tag{4.5}$$

dir. Eğer $\delta(\varepsilon)$ yerine $\delta'(\varepsilon) = \min\{\delta(\varepsilon), \varepsilon, 1\}$ alınırsa (4.2) şartı doğru olur. (4.5) eşitsizliğinden $k \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $\forall m \ge k$ için

$$\sigma\left(x_m, x_{m+1}, a\right) < \frac{\delta'(\varepsilon)}{4} \tag{4.6}$$

olur. Şimdi $\Lambda \subset X$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\Lambda := \left\{ x_p \,\middle|\, p \ge k,\, d\left(x_p, x_k, a\right) < 2\varepsilon + \frac{\delta'(\varepsilon)}{2},\ \forall a \in X \right\}.$$

$\lambda \in \Lambda$ olsun. $\lambda = x_p$ ve $\sigma\left(x_p, x_k, a\right) < 2\varepsilon + \dfrac{\delta'(\varepsilon)}{2}$ olacak şekilde $p \geq k$ vardır. Eğer $p = k$ ise (4.6) eşitsizliğinden $T(\lambda) = x_{k+1} \in \Lambda$ dır. Her $a \in X$ için $p > k$ olsun. İki durum için incelensin:

Birinci Durum:

$$2\varepsilon \leq \sigma\left(x_p, x_k, a\right) < 2\varepsilon + \frac{\delta'(\varepsilon)}{2}, \tag{4.7}$$

olsun.

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)\frac{1+\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)}{1+\sigma\left(x_p, x_k, a\right)} + \frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right) < \varepsilon + \frac{\delta'(\varepsilon)}{2} \tag{4.8}$$

dır. Bu taktirde, (4.6)'dan

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right) \leq \frac{1}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)\frac{1+\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)}{1+\sigma\left(x_p, x_k, a\right)} + \frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right) \tag{4.9}$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)\frac{1+\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)}{1+\sigma\left(x_p, x_k, a\right)} + \frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right) \leq \frac{1}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right) \\
+\frac{1}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)\frac{\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)}{\sigma\left(x_p, x_k, a\right)} \\
+\frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(4.6)\text{ ten} &< \frac{\delta'(\varepsilon)}{8} \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\sigma(x_k, x_{k+1}, a)}{\sigma(x_p, x_k, a)}\sigma(x_p, x_{p+1}, a) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma(x_p, x_k, a) \\
(4.6)\text{ ve } (4.7)\text{ den} &< \frac{\delta'(\varepsilon)}{8} + \frac{1}{2}\sigma(x_p, x_{p+1}, a) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma(x_p, x_k, a) \\
(4.6)\text{ dan} &< \frac{\delta'(\varepsilon)}{8} + \frac{\delta'(\varepsilon)}{8} + \frac{1}{2}\sigma(x_p, x_k, a) \\
(4.7)\text{ den} &< \frac{\delta'(\varepsilon)}{4} + \frac{1}{2}\left(2\varepsilon + \frac{\delta'(\varepsilon)}{2}\right) \\
&= \varepsilon + \frac{\delta'(\varepsilon)}{2}
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda

$$
\frac{1}{2}\sigma(x_k, x_{k+1}, a)\frac{1+\sigma(x_p, x_{p+1}, a)}{1+\sigma(x_p, x_k, a)} + \frac{1}{2}\sigma(x_p, x_k, a) < \varepsilon + \frac{\delta'(\varepsilon)}{2} \tag{4.10}
$$

elde edilir. Böylece (4.9) ve (4.10)’dan (4.8) gösterilmiş olur.

$$
2\varepsilon \le \sigma(x_k, Tx_k, a)\frac{1+\sigma(x_p, Tx_p, a)}{1+\sigma(x_p, x_k, a)} + \sigma(x_p, x_k, a) < 2\varepsilon + \delta'(\varepsilon)
$$

olur ki bu da (4.2)’den

$$
\sigma(Tx_p, Tx_k, a) < \varepsilon \tag{4.11}
$$

olduğunu gösterir. Buradan

$$\sigma\left(Tx_p, x_k, a\right) \le \sigma\left(Tx_p, Tx_k, a\right) + \sigma\left(Tx_k, x_k, a\right) + \sigma\left(Tx_p, Tx_k, x_k\right) \tag{4.12}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten $\sigma\left(Tx_p, Tx_k, x_k\right) = 0$ olduğu gösterilebilir. Bunun için (4.4)'den eğer $\sigma\left(x_{n-1}, x_n, a\right) = 0$ ise $\sigma\left(x_n, x_{n+1}, a\right) = 0$ olur. $\sigma\left(x_0, x_1, x_0\right) = 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_0\right) = 0$ ve $\sigma\left(x_{m-1}, x_m, x_m\right) = 0$ oluğundan her $n \ge m-1$ için

$$\sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_m\right) = 0 \tag{4.13}$$

yazılabilir. $0 \le n \le m-1$ olması durumunda $m-1 \ge n+1$ de olacağından, (4.13)'den

$$\sigma\left(x_{m-1}, x_m, x_{n+1}\right) = \sigma\left(x_{m-1}, x_m, x_n\right) = 0$$

olur ki bu ifade aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını gösterir.

$$\begin{aligned} \sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_m\right) &\le \sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_{m-1}\right) + \sigma\left(x_{n+1}, x_m, x_{m-1}\right) + \sigma\left(x_m, x_n, x_{m-1}\right) \\ &= \sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_{m-1}\right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

$\sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}\right) = 0$ olduğundan (4.14)'den her $0 \le n < m-1$ için

$$\sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_m\right) = 0 \tag{4.15}$$

olur. Bu taktirde (4.13) ve (4.15)'ten her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma\left(x_n, x_{n+1}, x_m\right) = 0 \tag{4.16}$$

elde edilir.

Şimdi her $i, j, k \in \mathbb{N}$ ve $i < j$ için $\sigma\left(x_{j-1}, x_j, x_i\right) = \sigma\left(x_{j-1}, x_j, x_k\right) = 0$ dır. Bu yüzden

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(x_i, x_j, x_k\right) &\leq \sigma\left(x_i, x_j, x_{j-1}\right)+\sigma\left(x_j, x_k, x_{j-1}\right)+\sigma\left(x_k, x_i, x_{j-1}\right) \\
&\leq \sigma\left(x_i, x_{j-1}, x_k\right) \\
&\leq \ \vdots \\
&\leq \sigma\left(x_i, x_i, x_k\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur bu da her $i, j, k \in \mathbb{N}$ için

$$
\sigma\left(x_i, x_j, x_k\right)=0 \tag{4.17}
$$

olduğunu gösterir. Böylece (4.17)'den (4.12) eşitsizliği aşağıdaki gibi olur.

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(Tx_p, x_k, a\right) &\leq \sigma\left(Tx_p, Tx_k, a\right)+\sigma\left(Tx_k, x_k, a\right) \\
&< \varepsilon+\frac{\delta'(\varepsilon)}{4} \\
&< 2\varepsilon+\frac{\delta'(\varepsilon)}{2}.
\end{aligned}
$$

Buradan $T\lambda = Tx_p = x_{p+1} \in \Lambda$ elde edilir.

İkinci Durum:

$$
\sigma\left(x_p, x_k, a\right)<2\varepsilon \tag{4.18}
$$

olsun. (4.3) ve (4.17)'den

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(Tx_p, x_k, a\right) &\leq \sigma\left(Tx_p, Tx_k, a\right)+\sigma\left(Tx_k, x_k, a\right) \\
&< \frac{1}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)\frac{1+\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)}{1+\sigma\left(x_p, x_k, a\right)}+\frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right)+\sigma\left(x_{k+1}, x_k, a\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)+\frac{1}{2}\frac{\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)}{1+\sigma\left(x_p, x_k, a\right)}+\frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right)+\sigma\left(x_{k+1}, x_k, a\right)$$
$$=\frac{3}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)+\frac{1}{2}\frac{\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)}{1+\sigma\left(x_p, x_k, a\right)}+\frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right)$$

dır. Diğer yandan (4.6)'dan

$$\frac{\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)}{1+\sigma\left(x_p, x_k, a\right)}<\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)<\frac{\delta'\left(\varepsilon\right)}{4}<1$$

olur ve bu durumda

$$\begin{aligned}\sigma\left(Tx_p, x_k, a\right) &< \frac{3}{2}\sigma\left(x_k, x_{k+1}, a\right)+\frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_{p+1}, a\right)+\frac{1}{2}\sigma\left(x_p, x_k, a\right)\\ &< \frac{3\delta'\left(\varepsilon\right)}{8}+\frac{\delta'\left(\varepsilon\right)}{8}+\varepsilon\\ &= \frac{\delta'\left(\varepsilon\right)}{2}+\varepsilon\\ &< \frac{\delta'\left(\varepsilon\right)}{2}+2\varepsilon\end{aligned}$$

dır. Böylece $T\lambda = Tx_p = x_{p+1} \in \Lambda$ elde edilir. Yani $T\left(\Lambda\right) \subset \Lambda$ olur ve her $m > k$ için

$$\sigma\left(x_m, x_k, a\right) < 2\varepsilon + \frac{\delta'\left(\varepsilon\right)}{2} \tag{4.19}$$

elde edilir. Şimdi, $m > n > k$ olacak şekilde $m,n \in \mathbb{N}$ ve her $a \in X$ için (4.17) ve (4.19)'dan

$$\sigma\left(x_m, x_n, a\right) \leq \sigma\left(x_m, x_k, a\right)+\sigma\left(x_n, x_k, a\right) < 4\varepsilon + \delta'\left(\varepsilon\right) < 5\varepsilon$$

elde edilir ki bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X,σ) tam $2-$metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır. $\sigma(z,Tz,a) > 0$ olsun. Bu durumda (4.3)'den

$$\begin{aligned}\sigma(Tz,z,a) &\leq \sigma(Tz,Tx_n,a) + \sigma(x_{n+1},z,a) \\ &< \frac{1}{2}\sigma(x_n,x_{n+1},a)\frac{1+\sigma(z,Tz,a)}{1+\sigma(z,x_n,a)} + \frac{1}{2}\sigma(z,x_n,a) + \sigma(x_{n+1},z,a)\end{aligned}$$

dır. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\sigma(Tz,z,a) < 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $z = Tz$ olur. Yani, z noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

T dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için, kabul edelim ki $w \in X$ noktası da dönüşümün bir diğer sabit noktası ve $z \neq w$ olsun. Bu durumda (4.2) eşitsizliğinden

$$\sigma(z,w,a) = \sigma(Tz,Tw,a) < \frac{1}{2}\sigma(w,w,a)\frac{1+\sigma(z,z,a)}{1+\sigma(z,w,a)} + \frac{1}{2}\sigma(z,w,a) = \frac{1}{2}\sigma(z,w,a)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu taktirde $z = w$ olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası tektir.

Sonuç 4.1.3. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü her $x,y,a \in X$ ve $k \in (0,1/2)$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlasın:

$$\sigma(Tx,Ty,a) \leq k\left(\sigma(y,Ty,a)\frac{1+\sigma(x,Tx,a)}{1+\sigma(x,y,a)} + \sigma(x,y,a)\right). \tag{4.20}$$

Bu taktirde T dönüşümünün X uzayında bir tek sabit noktası vardır.

İspat. Sabit $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon\left(\frac{1}{k} - 2\right)$$

olmak üzere

$$2\varepsilon \le \sigma(y, Ty, a)\frac{1+\sigma(x, Tx, a)}{1+\sigma(x, y, a)} + \sigma(x, y, a) < 2\varepsilon + \delta(\varepsilon)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sigma(Tx, Ty, a) &\le k\left(\sigma(y, Ty, a)\frac{1+\sigma(x, Tx, a)}{1+\sigma(x, y, a)} + \sigma(x, y, a)\right) \\
&< k\left(2\varepsilon + \delta(\varepsilon)\right) \\
&= 2\varepsilon k + k\varepsilon\left(\frac{1}{k} - 2\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

dır. Yani Teorem 4.1.2’nin (4.2) şartı sağlanır. Böylece ispat biter.

2002’de A. Baranciari [27] Banach daralma dönüşümünden daha genel daralma şartlarına genişletilebilen integral ifadeler içeren daralma şartını ortaya koymuş ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 4.1.4. (X, d) tam metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ yerel integrallenebilen bir fonksiyon ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)\,dt > 0$$

olsun. Her $x, y \in X$ ve $k \in (0, 1/2)$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)\,dt \le k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\,dt \tag{4.21}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir [27].

Bu teoremde $\varphi \equiv 1$ olarak alınırsa Banach sabit nokta teoremi elde edilir.

T. Suzuki, integral ifade içeren Meir-Keeler daralma dönüşümünün hala Meir-Keeler daralma dönüşümü olduğunu göstermiş ve böylece Teorem 4.1.4'in Meir-Keeler tarafından verilen sabit nokta teoreminin bir özel durumu olduğunu göstermiştir [17].

$\Psi = \{\phi :\ \phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)\}$ fonksiyonlarının aşağıdaki şartları sağlayan bir ailesi olsun.

i. Her $t > 0$ için $\phi(0) = 0$ ve $\phi(t) > 0$ dır.
ii. ϕ azalmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 4.1.5. (X,σ) tam $2-$metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $\phi \in \Psi$ olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &\le \phi\left(\sigma(y,Ty,a)\frac{1+\sigma(x,Tx,a)}{1+\sigma(x,y,a)} + \sigma(x,y,a) \right) < 2\varepsilon + \delta(\varepsilon) \\ &\Rightarrow \phi\big(2\sigma(Tx,Ty,a)\big) < 2\varepsilon \end{aligned} \tag{4.22}$$

olsun. Bu durumda (4.2) eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\varepsilon > 0$ sabit olsun. $\phi(2\varepsilon) > 0$ olduğundan ve (4.22)'den, $\alpha > 0$ vardır öyle ki

$$\phi(2\varepsilon)\le\phi\left(\sigma(y,Ty,a)\frac{1+\sigma(x,Tx,a)}{1+\sigma(x,y,a)}+\sigma(x,y,a)\right)<\phi(2\varepsilon)+\alpha$$
$$\Rightarrow\phi(2\sigma(Tx,Ty,a))<\phi(2\varepsilon). \qquad (4.23)$$

olur. ϕ sağdan sürekli bir fonksiyon olduğundan en az bir $\delta>0$ sayısı vardır öyle ki

$$\phi(2\varepsilon+\delta)<\phi(2\varepsilon)+\alpha$$

dır. $x,y\in X$ için

$$2\varepsilon\le\sigma(y,Ty,a)\frac{1+\sigma(x,Tx,a)}{1+\sigma(x,y,a)}+\sigma(x,y,a)<2\varepsilon+\delta$$

olur. ϕ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\phi(2\varepsilon)\le\phi\left(\sigma(y,Ty,a)\frac{1+\sigma(x,Tx,a)}{1+\sigma(x,y,a)}+\sigma(x,y,a)\right)\le\phi(2\varepsilon+\delta)<\phi(2\varepsilon)+\alpha$$

elde edilir. Böylece (4.23)'den

$$\phi(2\sigma(Tx,Ty,a))<\phi(2\varepsilon)$$

olur. Bu da $d(Tx,Ty,a)<\varepsilon$ olduğunu gösterir. Bu durumda (4.2) eşitsizliği sağlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ yerel integrallenebilir bir fonksiyon ve her $t>0$ için $\int_0^t\varphi(s)ds>0$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$2\varepsilon \le \int_0^{d(y,Ty,a)\frac{1+d(x,Tx,a)}{1+(x,y,a)}+d(x,y,a)} \varphi(t)\,dt < 2\varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow \int_0^{2d(Tx,Ty,a)} \varphi(t)\,dt < 2\varepsilon \qquad (4.24)$$

ifadesi sağlanacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var olsun. Bu durumda (4.2) eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.1.7. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi:[0,\infty) \to [0,\infty)$ yerel integrallenebilir bir fonksiyon ve her $t>0$ için $\int_0^t \varphi(s)\,ds > 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $c \in (0,1)$ için

$$\int_0^{2d(Tx,Ty,a)} \varphi(t)\,dt \le c\int_0^{d(y,Ty,a)\frac{1+d(x,Tx,a)}{1+(x,y,a)}+d(x,y,a)} \varphi(t)\,dt$$

ifadesi sağlanacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var olsun. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $\varepsilon > 0$ sabiti için (4.24) eşitsizliğinin $\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon\left(\frac{1}{c}-1\right)$ olmak üzere sağlandığı açıktır. Bu taktirde (4.2) sağlanır ve Teorem 4.1.2'den ispat elde edilir.

Not 4.1.9. $\varphi \equiv 1$ ve $k \in (0,1)$ için $c = 2k$ alınırsa Sonuç 4.1.3 Sonuç 4.1.7'den elde edilir.

4.2. Rasyonel İfadeler İçeren Meir-Keeler Daralma Dönüşümleri

1984'te A.N. Gupta ve A. Saxena rasyonel ifade içeren ve Banach daralma dönüşümünden daha genel olan daralma şartını kullanarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir [18].

Teorem 4.2.1. (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1$ olan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ sabitleri için

$$d(Tx,Ty) < \alpha_1 \frac{\left(1+d(x,Tx)\right)\left(d(y,Ty)\right)}{1+d(x,y)} + \alpha_2 \frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{d(x,y)} + \alpha_3 d(x,y) \qquad (4.25)$$

ifadesi sağlansın. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

(4.25) eşitsizliği ve Meir-Keeler şartı birlikte kullanılarak $2-$metrik uzaylarda aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Sonuç 4.2.2. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

Her $\varepsilon > 0$, $\forall\, x, y, a \in X$ ve $x \neq y \neq a$ için

$$\begin{aligned} 3\varepsilon \leq & \frac{\left(1+d(x,Tx,a)\right)\left(d(y,Ty,a)\right)}{1+d(x,y,a)} + \frac{d(x,Tx,a)d(y,Ty,a)}{d(x,y,a)} \\ & + d(x,y,a) < 3\varepsilon + \delta(\varepsilon) \\ & \Rightarrow d(Tx,Ty,a) < \varepsilon \end{aligned} \qquad (4.26)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var olsun. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (0,1/3)$ için A.N. Gupta ve A. Saxena tarafından verilen sonucun Sonuç 4.2.2'nin özel bir durumu olduğunu Sonuç 4.2.3'te gösterilmiştir.

Sonuç 4.2.3. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. Her $x, y, a \in X$ ve $k \in (0,1/2)$ için

$$d\left(Tx,Ty,a\right)\le k\left(m\left(x,y,a\right)\right) \tag{4.27}$$

$$m\left(x,y,a\right)=\frac{\left(1+d\left(x,Tx,a\right)\right)\left(d\left(y,Ty,a\right)\right)}{1+d\left(x,y,a\right)}+\frac{d\left(x,Tx,a\right)d\left(y,Ty,a\right)}{d\left(x,y,a\right)}+d\left(x,y,a\right)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Sonuç 4.1.4'e benzer şekilde $\delta\left(\varepsilon\right)=\left(\frac{1}{k}-3\right)$ olarak seçilirse istenilen elde edilir.

Teorem 4.2.4. $\left(X,\sigma\right)$ tam $2-$metrik uzay , $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun ve $\phi\in\Psi$ olsun.

Her $\varepsilon>0$ ve her $x,y\in X$ için

$$3\varepsilon\le\phi\left(\frac{\left(1+d\left(x,Tx,a\right)\right)\left(d\left(y,Ty,a\right)\right)}{1+d\left(x,y,a\right)}+\frac{d\left(x,Tx,a\right)d\left(y,Ty,a\right)}{d\left(x,y,a\right)}+d\left(x,y,a\right)\right)<3\varepsilon+\delta\left(\varepsilon\right)$$
$$\Rightarrow\phi\left(3d\left(Tx,Ty,a\right)\right)<3\varepsilon$$

ifadesi sağlanacak şekilde $\delta\left(\varepsilon\right)>0$ sayısı var olsun. Bu durumda (4.26) eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.1.6'nın ispatına benzer metodla (4.26)'nın sağlandığı görülür.

Şimdi Γ tüm $h:\left[0,\infty\right)\to\left[0,\infty\right)$ olan fonksiyonların ailesi olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın:

i. h sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

ii. Her $t>0$ için $h(0)=0$ ve $h(t)>0$ dır.

Teorem 4.2.5. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşüm olsun.

Her $\varepsilon>0$, her $x,y,a\in X$ ve $x\neq y\neq a$ için

$$
\begin{aligned}
3\varepsilon \le h\Bigg(&\frac{\big(1+d(x,Tx,a)\big)\big(d(y,Ty,a)\big)}{1+d(x,y,a)}+\frac{d(x,Tx,a)\,d(y,Ty,a)}{d(x,y,a)}\\
&+d(x,y,a)\Bigg)<3\varepsilon+\delta(\varepsilon)\\
&\Rightarrow h\big(3d(Tx,Ty,a)\big)<3\varepsilon
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

ifadesi sağlanacak biçimde $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var olsun. Bu durumda (4.26) eşitsizliği sağlanır.

İspat. $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ her sürekli fonksiyon sağdan sürekli olduğundan Teorem 4.2.4'ten sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.6. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ yerel integrallenebilir bir fonksiyon ve her $t>0$ için $\int_0^t \varphi(s)\,ds>0$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$
\begin{aligned}
3\varepsilon &\le \int_0^{\frac{(1+d(x,Tx,a))(d(y,Ty,a))}{1+d(x,y,a)}+\frac{d(x,Tx,a)d(y,Ty,a)}{d(x,y,a)}+d(x,y,a)} \varphi(t)\,dt<3\varepsilon+\delta(\varepsilon)\\
&\Rightarrow \int_0^{3d(Tx,Ty,a)}\varphi(t)\,dt<3\varepsilon
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

ifadesi sağlanacak şekilde $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var olsun. Bu durumda (4.26) eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.2.7. (X,σ) tam $2-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ yerel integrallenebilir bir fonksiyon ve her $t>0$ için $\int_0^t \varphi(s)ds>0$ olsun. Her $\varepsilon>0$ ve $\mu\in(0,1)$ için

$$\int_0^{3d(Tx,Ty,a)}\varphi(t)dt\le\mu\int_0^{\frac{(1+d(x,Tx,a))(d(y,Ty,a))}{1+d(x,y,a)}+\frac{d(x,Tx,a)d(y,Ty,a)}{d(x,y,a)}+d(x,y,a)}\varphi(t)dt$$

ifadesi sağlanacak şekilde $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var olsun. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktasına sahiptir.

İspat. $\varepsilon>0$ sabiti için (4.29) ifadesi $\delta(\varepsilon)=3\varepsilon\left(\frac{1}{\mu}-1\right)$ için sağlanır ve (4.26) eşitsizliği gerçeklenir. Böylelikle Sonuç 4.2.2'den istenen elde edilir.

Not 4.2.8. $\varphi\equiv1$ ve $k\in(0,1)$ için $\mu=3k$ alınırsa Sonuç 4.2.5, Sonuç 4.2.7'den elde edilir.

BÖLÜM 5. b_2-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

5.1. Kısmi Sıralı b_2-Metrik Uzaylarda $A-$Daralma Dönüşümleri

Bu bölümde $b-$metrik ve $2-$metrikten daha genel bir yapı olan b_2-metrik fonksiyonu yardımı ile tanımlanmış b_2-metrik uzaylarda $A-$daralma dönüşümleri tanımlanıp kısmi sıralama ile donatılmış b_2-metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Tanım 5.1.2. (X,ρ) b_2-metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y, u \in X$, $s \geq 1$ ve $\alpha \in A$ için T dönüşümü

$$s\rho(Tx,Ty,u) \leq \alpha\big(\rho(x,y,u),\rho(x,Tx,u),\rho(y,Ty,u)\big)$$

ifadesini sağlarsa T 'ye $A-$daralma dönüşümü denir.

Lemma 5.1.3. (X,ρ) b_2-metrik uzay ve $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sırasıyla x ve y noktalarına b_2-yakınsak olsun. Bu durumda her $a \in X$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{s^2}\rho(x,y,a) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n,a) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n,a) \leq s^2\rho(x,y,a).$$

Eğer $y_n = y$ sabit ise her $a \in X$ için

$$\frac{1}{s^2}\rho(x,y,a)\leq \liminf_{n\to\infty}\rho(x_n,y,a)\leq \limsup_{n\to\infty}\rho(x_n,y,a)\leq s^2\rho(x,y,a)$$

ifadesi sağlanır.

İspat. b_2-metrik uzayın tanımından

$$\begin{aligned}\rho(x,y,a)=\rho(x,a,y)&\leq s\rho(x,a,x_n)+s\rho(a,y,x_n)+s\rho(y,x,x_n)\\&\leq s\rho(x,a,x_n)+s^2\left[\rho(a,y,y_n)+\rho(y,x_n,y_n)+\rho(x_n,a,y_n)\right]+s\rho(y,x,x_n)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho(x_n,y_n,a)=\rho(x_n,a,y_n)&\leq s\rho(x_n,a,x)+s\rho(a,y_n,x)+s\rho(y_n,x,x_n)\\&\leq s\rho(x_n,a,x)+s^2\left[\rho(a,y_n,y)+\rho(y_n,x,y)+\rho(x,a,y)\right]+s\rho(y_n,x,x_n)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ilk eşitsizlikte $n\to\infty$ için alt limit ve ikinci eşitsizlikte $n\to\infty$ için üst limit alınırsa istenilenler elde edilmiş olur.

Eğer $y_n=y$ ise

$$\rho(x,y,a)\leq s\rho(x,y,x_n)+s\rho(y,a,x_n)+s\rho(a,x,x_n)$$

ve

$$\rho(x_n,y,a)\leq s\rho(x_n,y,x)+s\rho(y,a,x)+s\rho(a,x_n,x)$$

eşitsizliklerinden istenilen elde edilir.

Teorem 5.1.4. $(X,\prec)$ kısmi sıralı bir küme, (X,ρ) b_2-tam b_2-metrik uzay ve $x_0 \in X$ için "$\prec$" bağıntısına göre $x_0 \prec Tx_0$ şartını sağlayan $T: X \to X$ artan bir dönüşüm olsun. $s \geq 1$ ve $\alpha \in A$ için

$$s\rho(Tx,Ty,a) \leq \alpha\big(\rho(x,y,a)+\rho(x,Tx,a)+\rho(y,Ty,a)\big) \tag{5.1}$$

ifadesi her $a \in X$ ve her $x,y \in X$ karşılaştırılabilir elemanları için sağlansın. Eğer T dönüşümü b_2-sürekli ise T, X uzayında bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $F(T)$ kümesinin tam sıralı olması için gerek ve yeter şart T'nin bir tek sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_n = T^n x_0$ biçiminde tanımlansın. $x_0 \prec Tx_0$ ve T artan bir dönüşüm olduğundan

$$x_0 \prec Tx_0 \prec T^2x_0 \prec ... \prec T^n x_0 \prec T^{n+1}x_0 \prec ...$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \prec x_{n+1}$ olduğundan (5.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} s\rho(x_n,x_{n+1},a) = s\rho(Tx_{n-1},Tx_n,a) &\leq \alpha\big(\rho(x_{n-1},x_n,a),\rho(x_{n-1},Tx_{n-1},a),\rho(x_n,Tx_n,a)\big) \\ &= \alpha\big(\rho(x_{n-1},x_n,a),\rho(x_{n-1},x_n,a),\rho(x_n,x_{n+1},a)\big) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $\alpha \in A$ olduğundan $k \in [0,1)$ için

$$s\rho(x_n,x_{n+1},a) \leq k\rho(x_{n-1},x_n,a) \tag{5.2}$$

bulunur. Buradan benzer şekilde iterasyona devam edilirse

$$
\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+1}, a) \le \frac{k}{s}\rho(x_{n-1}, x_n, a) = \frac{k}{s}\rho(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}, a) \\
&\le \left(\frac{k}{s}\right)^2 \rho(x_{n-2}, x_{n-1}, a) \\
&\le \ \vdots \\
&\le \left(\frac{k}{s}\right)^n \rho(x_0, x_1, a)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki $\frac{k}{s} \in [0,1)$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}, a) = 0 \tag{5.3}$$

olur. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

(5.2) eşitsizliğinden $\{\rho(x_n, x_{n+1}, a)\}$ azalan bir dizidir. Bu taktirde eğer $\rho(x_{n-1}, x_n, a) = 0$ ise $\rho(x_n, x_{n+1}, a) = 0$ olur. b_2-metriğin tanımından $\rho(x_0, x_1, x_0) = 0$ olduğu için her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, x_{n+1}, x_0) = 0$ olur. Yine $\rho(x_{m-1}, x_m, x_m) = 0$ olduğundan her $n \ge m-1$ için

$$\rho(x_n, x_{n+1}, x_m) = 0 \tag{5.4}$$

yazılabilir. $0 \le n \le m-1$ olması durumunda $m-1 \ge n+1$ de olacağından, (5.4)'den

$$\rho(x_{m-1}, x_m, x_{n+1}) = \rho(x_{m-1}, x_m, x_n) = 0$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+1}, x_m) &\le s\rho(x_n, x_{n+1}, x_{m-1}) + s\rho(x_{n+1}, x_m, x_{m-1}) + s\rho(x_m, x_n, x_{m-1}) \\
&= s\rho(x_n, x_{n+1}, x_{m-1})
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

ifadesi sağlanır. $\rho\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}\right)=0$ olduğundan (5.5) eşitsizliğinden her $0 \leq n < m-1$ için

$$\rho\left(x_n, x_{n+1}, x_m\right) \leq s^{m-n-1}\rho\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}\right)=0 \tag{5.6}$$

olur. Bu taktirde (5.4) ve (5.6)'dan her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\rho\left(x_n, x_{n+1}, x_m\right)=0 \tag{5.7}$$

elde edilir. Şimdi her $i, j, k \in \mathbb{N}$ ve $i < j$ için

$$\rho\left(x_{j-1}, x_j, x_i\right)=\rho\left(x_{j-1}, x_j, x_k\right)=0 \tag{5.8}$$

olur. (5.8)'den

$$\begin{aligned}\rho\left(x_i, x_j, x_k\right) &\leq s\left[\rho\left(x_i, x_j, x_{j-1}\right)+\rho\left(x_j, x_k, x_{j-1}\right)+\rho\left(x_k, x_i, x_{j-1}\right)\right] \\ &\leq s\rho\left(x_i, x_{j-1}, x_k\right) \leq \ldots \leq s^{j-i}\rho\left(x_i, x_i, x_k\right)=0\end{aligned}$$

olur. Bu da her $i, j, k \in \mathbb{N}$ için

$$\rho\left(x_i, x_j, x_k\right)=0 \tag{5.9}$$

olduğunu gösterir. Böylece istenilen elde edilir.

$\{x_n\}$ dizisinin b_2-Cauchy dizisi oluğunu göstermek için

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_m,a) &\le s\rho(x_n,x_m,x_{n+1})+s\rho(x_m,a,x_{n+1})+s\rho(a,x_n,x_{n+1})\\ &\le s\rho(x_n,x_{n+1},x_m)+s^2\left[\rho(x_m,x_{m+1},a)+\rho(x_{n+1},x_{m+1},a)\right.\\ &\quad\left.+s\rho(x_m,x_{m+1},x_{n+1})\right]+s\rho(x_n,x_{n+1},a)\\ &\le s\rho(x_n,x_{n+1},x_m)+s^2\rho(x_m,x_{m+1},a)+s\alpha\big(\rho(x_n,x_m,a),\\ &\quad\rho(x_n,x_{n+1},a),\rho(x_m,x_{m+1},a)\big)+s\rho(x_n,x_{n+1},a)\end{aligned}$$

yazılır. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten $m,n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{m,n\to\infty}\rho(x_n,x_m,a)\le s\alpha\left(\lim_{m,n\to\infty}\rho(x_n,x_m,a),0,0\right)$$

elde edilir. Buradan $\alpha\in A$ olduğundan $\lim_{m,n\to\infty}\rho(x_n,x_m,a)\le 0$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{m,n\to\infty}\rho(x_n,x_m,a)=0$$

olması $\{x_n\}$ dizisinin b_2-Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Buradan da istenilen elde edilmiş olur. (X,ρ) uzayı b_2-tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir $z\in X$ noktasına b_2-yakınsak olur.

(5.1) eşitsizliğinden

$$\rho(Tz,z,a)\le s\rho(Tz,Tx_n,a)+s\rho(z,a,Tx_n)+s\rho(a,Tz,Tx_n)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte $n\to\infty$ için limit alınıp ve T'nin sürekli olduğu da kullanılırsa $Tz=z$ bulunur. Böylelikle z noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

$F(T)$ tam sıralı bir küme olsun. T'nin sabit noktası tek midir? z noktasından farklı bir $w\in X$ noktası $Tw=w$ olacak biçimde var olsun. Bu durumda (5.1) eşitsizliğinden

$$\rho(z,w,a) \le s\rho(z,w,a) = s\rho(Tz,Tw,a)$$
$$\le \alpha\left(\rho(z,w,a),\rho(z,Tz,a),\rho(w,Tw,a)\right)$$

olur. Buradan $\alpha \in A$ olduğundan $\rho(z,w,a) \le 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Yani $z = w$ noktası T 'nin bir tek sabit noktasıdır. Diğer taraftan eğer T bir tek sabit noktaya sahipse bu durumda $F(T)$ tam sıralı bir kümedir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Teorem 5.1.4'te T dönüşümünün sürekli olması şartı kaldırılarak yine T 'nin bu uzayda sabit noktasının varlığı ve tekliği elde edilebilir.

Teorem 5.1.5. T üzerindeki b_2-süreklilik varsayımı olmaksızın Teorem 5.1.4'ün hipotezi sağlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için X uzayındaki azalmayan $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \prec z$, $x_n \to z \in X \ (n \to \infty)$ sağlansın. Bu taktirde T bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $F(T)$ kümesinin tam sıralı olabilmesi için gerek ve yeter şart T 'nin bir tek sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat. Teorem 5.1.4'teki ispat tekrar edilerek $x_n \to z \in X$ olan artan bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. X uzayında $x_n \prec z$ dir. (5.1) eşitsizliği ve Lemma 5.1.3'ten

$$s\left[\frac{1}{s}\rho(z,Tz,a)\right] \le s\limsup_{n\to\infty}\rho(x_{n+1},Tz,a)$$
$$= s\limsup_{n\to\infty}\rho(Tx_n,Tz,a)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty}\alpha\left(\rho(x_n,z,a),\rho(x_n,Tx_n,a),\rho(z,Tz,a)\right)$$
$$= \alpha\left(0,0,\limsup_{n\to\infty}\rho(z,Tz,a)\right)$$

olur. Bu durumda $\alpha \in A$ olduğundan $\limsup_{n\to\infty}\rho(z,Tz,a) \le 0$ olur ki $Tz = z$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla T 'nin sürekli olmadığı durumlarda da uzayın kendi özellikleri kullanılarak sabit noktasının olduğu gösterilebilir.

Sabit noktanın tekliği ise Teorem 5.1.4’teki ile aynıdır. Böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde tezin önceki bölümlerinde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, F. Wardowski tarafından tanımlanan $F-$daralma dönüşümü ile A. Beiranvand tarafından tanımlanan $f-$daralma dönüşümleri tam ve kısmi sıralı $2-$metrik uzaylara genellenerek bu uzaylarda rasyonel ifadeler içeren dönüşümlerin sabit noktasının varlığı ve tekliği incelenmiştir. Ayrıca $\{f,T\}$ ve $\{f,S\}$ ikililerinin Banach çifti olma özelliği kullanılarak tam ve kısmi sıralı $2-$metrik uzaylarda f,T ve S dönüşümlerinin ortak bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında, Banach daralma prensibinin genel bir durumu olan ve A. Meir ve E. Keeler tarafından ortaya atılan Meir-Keeler daralma dönüşümleri için B.K. Dass ve S. Gupta tarafından tanımlanan dönüşümün özel bir halini içeren sabit nokta teoremlerinin varlığı ve tekliği yine tam $2-$metrik uzayda incelenmiştir. Ayrıca ikinci kısımda da A.N. Gupta ve A. Saxena'nın verdiği daralma dönüşümünün özel bir halini içeren sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, $2-$metrik uzay ile S. Czervik tarafından ortaya atılan $b-$metrik uzayın bir genellemesi olan b_2-metrik uzayda M. Akram ve A. Siddiqui tarafından tanımlanan bir yeni daralma dönüşümü olan $A-$daralma dönüşümü ile kısmi sıralı küme üzerine kurulan sabit nokta teoremlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir.

Bu çalışmamın devamında hem $2-$metrik yapısı ve b_2-metrik yapısı üzerine farklı yapılar koyularak yine uzayın kendi özelliği kullanılarak özgün sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Şuhubi, E., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.

[2] Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press., 1970.

[3] Jain, P. K., Metric Spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, 2009.

[4] Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, 2002.

[5] Agarwal, R.P., Meehan, M., Donal, O., Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, 2001.

[6] Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

[7] Akram, M., Zafar, A.A., Siddiqui, A.A., A General Class of Contractions: A Contractions, Novi Sad J. Math., 38 (1), 25-33, 2008.

[8] Wardowski, D., Fixed Points of A New Type of Contractive Mappings in Complete Metric Spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2012 (94), 1-8, 2012.

[9] Dung, N.V., Le Hang, V.T., Fixed Point Theorems for Weak C-Contractions in Partially Ordered 2-Metric Spaces, Fixed Point Theory and Appl., 2013 (161), 1-12, 2013.

[10] Naidu, S.V.R., Prasad, J.R., Fixed Point Theorems in 2-Metric Spaces, Indian J. Pure Appl. Math., 17 (8), 974-993, 1986.

[11] Altun, I., Simsek, H., Some Fixed Point Theorems On Ordered Metric Spaces and Application, Fixed Point Theory And Applications, 2010, 1-17, 2010.

[12] Czerwik, S., Contraction Mappings in b-Metric Spaces, Acta. Math. Inform. Univ. Ostrav., 1 (1), 5-11, 1993.

[13] Meir, A. Keeler, E., A Theorem on Contraction Mappings, J. Math. Anal. Appl., 28, 326-329, 1969.

[14] Dass, B.K. Gupta, S., An Extension of Banach Contraction Principle through Rational Expression, Indian J. Pure Appl. Math., 6, 1455-1458, 1975.

[15] Chatterjee, H., On Generalization of Banach Contraction Principle, Indian J. Pure Appl. Math. 10 (4), 400-403, 1979.

[16] Samet, B. Yazidi, H., An Extension of Banach Fixed Point Theorem for Mappings Satisfying a Contractive Condition of Integral Type, to Appear in Ita. J. Pure Appl. Math. 2015.

[17] Suzuki, T., Meir-Keeler Contractions of Integral Type Are Still Meir-Keeler Contractions, Int. J. Math. Math. Sci., 2007, 1-6, 2007.

[18] Gupta, A.N., Saxena, A., A Unique Fixed Point Theorem in Metric Spaces, Math. Stud., 52, 156-158, 1984.

[19] Samet, B. Vetro, C. Yazidi, H., A Fixed Point Theorem for A Meir-Keeler Type Contraction through Rational Expression. J. Nonlinear Sci. Appl., 6, 162-169, 2013.

[20] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and New York, 1978.

[21] Sumitra, V.R., Uthariaraj, R., Hemavathy, R., Common Fixed Point Theorem For T- Hardy-Rogers Contraction Mapping in a Cone Metric Space, International Mathematical Forum, 5 (30), 1495-1506, 2010.

[22] Jungck, G., Rhoades, B.E., Fixed Point for Set Valued Functions without Continuity, Indian J. Pure Applied Math., 29 (3), 227-238, 1998.

[23] Gahler, S., 2-Metrische Raume and Ihre Topologische Struktur, Mathematische Nachrichten, 26, 115-148, 1963.

[24] Beiranvand, A., Moradi, S., Omid, M., Pazandeh,, H. Two Fixed Point Theorems For Special Mappings, 0903.1504v1 math. FA, 2009.

[25] Sessa, S., On a Weak Commutativity Condition of Mappings in Fixed Point Considerations, Publ. Inst. Math., 32 (46), 149-153, 1982.

[26] Jungck, G., Commuting Mappings and Fixed Points, Amer. Math. Monthly, 83, 261-263, 1976.

[27] Branciari, A., A Fixed Point Theorem for Mappings Satisfying A General Contractive Condition of Integral Type, Int. J. Math. Math. Sci., 29, 531-536, 2002.

[28] Mınak, G., Helvacı, A., Altun, I., Ciric type generalized *F*-contractions on Complete Metric Spaces and Fixed Point Results, Filomat, 28 (6), 1143-1151, 2014.

[29] Freese, R.W., Cho, Y.J., Geometry of Linear 2-Normed Spaces, Nova Science Publishers, Inc. New York, 2001.

[30] Öztürk, M., Büyükkaya, A., On Some Common Fixed Point Theorems Satisfying (F,f)-Contraction in 2-Metric and Partially Ordered 2-Meric Space, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2015), 3-6, June, İstanbul, Turkey.

[31] Öztürk, M., Büyükkaya, A., Some Fixed Point Theorems Satisfying Meir-Keeler Type Contractions Via Rational Expression In 2-Metric Spaces Space, Submitted.

[32] Mustafa, Z., Parvaneh, V., Roshan, J.R., Kadelburg, Z., b_2-Metric Spaces and Some Fixed Point Theorems, Fixed Point Theory and Applications, 2014 (144), 1-23, 2014.

[33] Lahiri, B.K., Dass, P., Dey, L.K., Cantor's Theorems in 2-Metric Spaces and Its Applications to Fixed Point Problems, Taiwan J. Math., 15, 337-350, 2011.

[34] Aghajani, A., Abbas, M., Roshan, J.R., Common Fixed Point of Generalized Weak Contractive Mappings in Partially Ordered b-Metric Spaces, Math. Slovaca, 64 (4), 941–960, 2014.

[35] Redjel, N., Dehici, A., Erhan, İ.M., A Fixed Point Theorem for Meir-Keeler Type Contraction via Gupta-Saxena Expression, Fixed Point Theory and Applications, 2015 (115), 1-9, 2015.

[36] Hieu, N.T., Dung, V.N., Some Fixed Point Results for Generalized Rational Type Contraction Mappings in Partially Ordered b-Metric Spaces, Ser. Math. Inform, 30 (1), 49–66, 2015.

[37] Dey, D., Saha, M., Common Fixed Point Theorems in a Complete 2-metric Space, Acta Univ. Palacki. Olomuc, Mathematica, 52 (1), 79-87, 2013.

[38] Saha, M., Dey, D., Fixed Point Theorems for a Class of A-Contractions on a 2-Metric Space, Novi Sad J. Math., 40 (1), 3-8, 2010.

[39] An, T.V., Dung, N.V., Le Hang, V.T., General Fixed Point Theorems on Metric Spaces and 2-metric Spaces, Filomat, 28 (10), 2037–2045, 2014.

[40] Berinde, V., Generalized Contractions in Quasi-Metric Spaces, ''Babeş-Bolyai'' University, Faculty of Mathematics and Computer Science, Research Seminars, Seminar of Fixed Point Theory, 3, 3-9, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Abdurrahman Büyükkaya, 01.11.1990'da Giresun'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Giresun'un Keşap ilçesinde tamamladı. 2004 yılında Giresun Lisesi'nde başladığı Lise eğitimini 2007 yılında tamamladı. 2007-2009 yılları arasında üniversite hazırlık dershanesinde eğitim aldı. 2009 yılında kazandığı Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2013 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'de yüksek lisans eğitimine başladı. Halen aynı üniversitede yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.