T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

{K,s+1}–POTENT MATRİSLERİN BAZI LİNEER KOMBİNASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlker Güven YILMAZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN**

Haziran 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

{K,s+1}–POTENT MATRİSLERİN BAZI LİNEER KOMBİNASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlker Güven YILMAZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**

Bu tez 16 / 06 / 2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ~~Oyçokluğu~~/Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Yrd. Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Ayşe Sönmez	**Murat Sarduvan**	**Nesrin Güler**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

İlker Güven YILMAZ

26.06.2015

TEŞEKKÜR

Tez konusu seçiminde ve bu konunun seçiminden sonra çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca çok değerli hocalarıma özellikle, Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAMAN'a, Sayın Doç. Dr. Elman HAZAR'a, Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Başkanı Sayın Doç. Dr. Serpil HALICI'ya sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca benden her zaman yardım ve desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu kompleks elemanlı matrislerin kümesi
Ω_k	: 1'in tek türlü belirli k –yıncı dereceden tüm köklerinin kümesi
$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}...$	: Matrisler; $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\ \mathbb{C}^{n\times n}$
$\mathbf{I}$	: Birim matris
$\mathbf{0}$	: Elemanları sıfır olan vektör veya matris
$a,b,c,...$	: Skalerler
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\backslash$	: Kümelerde fark işlemi
$\mathbf{K}^*$	: $\mathbf{K}$ matrisinin eşlenik transpozesi
$\sigma(\mathbf{K})$	: $\mathbf{K}$ matrisinin spektrumu
$rk(\mathbf{K})$	: $\mathbf{K}$ matrisinin rankı
$\mathbf{A}_1\oplus\mathbf{A}_2$	: $\mathbf{A}_1$ ile $\mathbf{A}_2$ matrislerinin direkt toplamı

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matris, İnvolutif Matris, Lineer Kombinasyon, Eşanlı Köşegenleştirme, Karşılıklı Değişmelilik, Üniter Matris, Hermityen Matris

Bu çalışmanın ilk bölümünde, konu ile ilgili literatür bilgisini içeren bir giriş verilmektedir. Çalışma, bu bölüm ile birlikte toplam dört ana bölümden oluşmaktadır.

Bölüm 2'de, Bölüm 4 için temel teşkil edecek olan bazı kavram ve bazı teoremler verilmektedir. Bölüm 3'te ise bu çalışmaya esin kaynağı olan literatürde mevcut bir çalışmadaki bazı sonuçlar hatırlatılmaktadır.

Bölüm 4, bu çalışmanın esas kısmını içermektedir. Bu bölümde, üç karşılıklı değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisin lineer kombinasyonu $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olduğunda lineer kombinasyondaki skalerlerin neler olabileceği ile alakalı bir sonuç verilmektedir. Ayrıca, verilen $\mathbf{K}$ involutif matrisi için bu lineer kombinasyonu $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent yapacak şekilde skalerler ve karşılıklı değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler bulan algoritmalar verilmektedir.

SOME COMBINATIONS OF $\{\mathbf{K}, s+1\}$–POTENT MATRICES

SUMMARY

Keywords: $\{\mathbf{K}, s+1\}$ –potent Matrix, Involutive Matrix, Linear Combination, Simultaneously Diagonalization, Mutually Commutation, Unitary Matrix, Hermitian Matrix

In the first chapter it is given an introduction, which include literature information about the subject. The study consists of four main chapters with this chapter in totally.

In the Chapter 2, some of the concepts and some theorems, that constitute the basis for Chapter 4, have been given. In Chapter 3, some results from the existing study in the literature have been reminded. These are the inspiration for this work.

The Chapter 4 contains the original part of this work. In this Chapter, it has been established the result associated that what could be scalars in the linear combination when the linear combination of three mutually commuting matrices is $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent. Moreover, several algorithms have been given for finding some scalars and some mutually commuting $\{\mathbf{K}, s+1\}$ –potent matrices such that the linear combination is $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent.

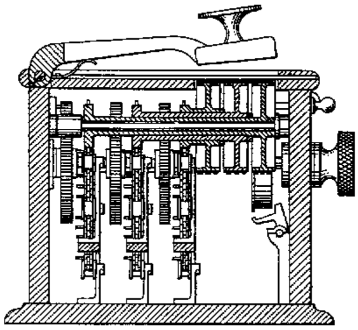
BÖLÜM 1. GİRİŞ

$\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler sınıfı; k–potent matrisler, periyodik matrisler, idempotent matrisler, involutif matrisler, merkeze göre simetrik matrisler, dairesel matrisler vb. matris sınıflarının genelleştirilmişi olarak düşünülebilir. Bu alt sınıflar literatürde birçok çalışmada ele alınmıştır (örneğin bkz. [3, 4, 8, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 27]).

Son yıllarda matrislerin belli sınıfları için yaşama dair birçok uygulama geliştirilmektedir. Örneğin, [16,17]'de mirror simetrik matrisler aracılığıyla çoklu kondüktör iletim hatları problemi çalışılmıştır. Dairesel matrisler; sayısal hesaplama, katı hal fiziği, görüntü ve sinyal işleme, kodlama teorisi, matematiksel istatistik ve moleküler titreşim gibi birçok alandaki uygulamalı problemleri çözmek için kullanılmıştır (örneğin bkz. [12,13]). Centro simetrik matrisler mekanik ve elektrik sistemler, anten teorisi ve kuantum fiziğindeki problemleri çözmek için kullanılmıştır [11].

İnvolutif matrisler de birçok farklı alanda kullanılmaktadır. Öklid geometrisinde (örneğin bir düzleme göre yansımada), grup teorisinde (örneğin sonlu basit grupların sınıflandırılmasında), halka teorisinde (örneğin matris halkasında transpoze alınmasında) vb. involutif matrislerin kullanımı mevcuttur. Diğer taraftan Hill yöntemi ile şifreleme yapılırken involutif matrislerin anahtar olarak kullanılması önerilmiştir [14].

Hill şifreleme yöntemi bir blok şifreleme örneğidir. Blok şifreleme, düz metni bitişik ve aynı uzunlukta ki bloklara bölme, her bloğu şifreleyerek şifreli metin bloklarına dönüştürme ve bu şifreli blokları şifreli metin çıktısı olarak gruplama şeklinde ifade edilebilir. Hill şifreleme yöntemi Lester S. Hill tarafından 1929 yılında bulunmuştur.



Şekil 1.1. – Lester S. Hill'in Şifreleme Makinası

Hill şifrelemesinde her bir harf $\mod 26$'ya göre bir sayıya karşılık gelir. Bir mesaj Hill şifreleme yöntemi ile belli bir düzen içinde şifrelenir. Öncelikle mesajın göndericisi ve alıcısı bir anahtar $n \times n$'lik $\mathbf{A}$ matrisi üzerinde anlaşmış olmalıdırlar. Düz metin n uzunluğundaki bloklar şeklinde şifrelenir. Mesajın deşifrelenmesi içinse anahtar matris olan $\mathbf{A}$ matrisinin tersi hesaplanır. Anahtar matrisin tersi ile şifreli mesajın n uzunluğundaki bloklarının matris formu çarpılarak şifreli mesajın deşifrelenmiş hali matris formunda elde edilmiş olur. Burada eğer $\mathbf{A}$ matrisi involutif ise, $\mathbf{A}$ matrisinin tersi kendine eşit olacağından metni şifrelerken kullanılan anahtar matris ile metni deşifre ederken kullanılan anahtar matrisin tersi aynı matris olacaktır. Bu demektir ki aynı $\mathbf{A}$ matrisi mesajların hem şifrelenmesi, hem de deşifrelemesi için kullanılabilir.

1.1. Bazı Gösterimler

n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}^{nxn}$ sembolleri sırasıyla, kompleks sayılar ve $n \times n$ boyutlu kompleks elemanlı matrislerin kümesini göstersin. Çalışma boyunca matrisler koyu ve büyük harflerle ($\mathbf{K}$ gibi), skalerler küçük ve italik harflerle (c gibi) gösterilecektir.

1.2. Literatür Bilgisi ve Çalışmanın İçeriği

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ değişmeli $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 \tag{1.1}$$

olsun. $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent, k–potent, involutif ve tripotent olduklarında (1.1) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent, involutif ve tripotent olma durumları literatürde birçok çalışmada mevcuttur:

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri idempotent iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu durum, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ değişmeli olduğunda [2,24] çalışmalarında; değişmeli olmadığında [2] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrislerinin değişmeli olduğu ve olmadığı durumlarda biri idempotent diğeri tripotent iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu durumlar [5] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrislerinden biri idempotent diğeri k–potent iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu durum, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ değişmeli olduğunda [9], olmadığında [10] çalışmalarında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ değişmeli tripotent matrisler iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olması konusu [24] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri her ikisi involutif iken $\mathbf{X}$ matrisinin idempotentliği; her ikisi idempotent iken, her ikisi tripotent iken ve her ikisi involutif iken $\mathbf{X}$ matrisinin involutifliği; $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri değişmeli iken [25,28] çalışmalarında, değişmeli olmadığı durumda (her ikisinin tripotent olduğu durum hariç) ise [28] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ değişmeli matrislerinin her ikisinin idempotent, her ikisinin involutif ve her ikisinin tripotent oldukları durumda (1.1) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin tripotent olduğu durumlar sırasıyla [4], [25,28] ve [4,29] çalışmalarında ele alınmıştır.

Dikkat edilirse bu çalışmalar iki özel tipli matrisin (1.1) biçimli lineer kombinasyonu ile ilgilidir. Ayrıca, literatürde üç kompleks matrisin lineer kombinasyonunun ele alındığı çalışmalar da mevcuttur. Şöyle ki, c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 \tag{1.2}$$

olsun. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ matrislerinin idempotent, involutif ve tripotent oldukları durumlar için (1.2) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent ve tripotent olduğu durumlar farklı çalışmalarda incelenmiştir:

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ karşılıklı değişmeli idempotent matris olduğunda (1.2) biçimindeki $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin idempotent olması durumu [26] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ idempotent matrislerinden herhangi ikisi ayrık matris olduğunda (1.2) biçimindeki $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olması durumu [1] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ idempotent matrislerinden herhangi ikisi değişmeli olduğunda (1.2) biçimindeki $\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olması durumu [6] çalışmasında ele alınmıştır.

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ve $\mathbf{X}_3$ karşılıklı değişmeli involutif matrisler iken ve ikisi involutif biri tripotent iken (1.2) biçimindeki $\mathbf{X}$ matrisinin tripotentliği [30] çalışmasında ele alınmıştır.

$\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrislerin, verilen bir $\mathbf{K}$ involutif matrisi için iyi tanımlı oluşu, köşegenleştirilebilmesi, spektrumu, spektral ayrışımının yapısı vb. özellikleri [20] çalışmasında ele alınmıştır.

Ayrıca, c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ değişmeli sıfırdan farklı $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler olmak üzere, (1.1) tipli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisinin $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olması durumunda c_1, c_2 skalerlerinin sağlaması gereken koşullar [20] çalışmasında ele alınmıştır.

Verilen involutif $\mathbf{K}$ matrisi ve $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ için bir $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisi bulan bir algoritma, $\mathbf{X}_1$ ile değişmeli olan $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisini elde eden bir algoritma ve (1.1) tipli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisini $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris yapacak şekilde c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayıları bulan bir algoritma [21] çalışmasında verilmektedir.

Bu çalışmada ise, üç karşılıklı değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisin (1.2) biçimindeki lineer kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olması durumunda lineer kombinasyonu oluşturan c_1, c_2 ve c_3 skalerlerinin sağlaması gereken koşulların neler olduğu ortaya konulmuştur. Ayrıca, (1.2) tipli $\mathbf{X}$ lineer kombinasyon matrisini $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris yapacak şekilde c_1, c_2 ve c_3 sıfırdan farklı kompleks sayıları bulan bir algoritma verilmektedir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın daha sonraki bölümlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli bazı tanımlar verilmektedir. Ayrıca, yine daha sonraki bölümlerde verilen sonuçlara temel teşkil edecek gerekli bazı teoremler ispatsız olarak ifade edilmektedir.

2.1. Bazı Matris Çeşitleri

Tanım 2.1.1. $\mathbf{I}$ uygun boyutlu birim matrisi göstermek üzere, $\mathbf{K}^2 = \mathbf{I}$ özelliğine sahip bir $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisine involutif matris denir [29].

Tanım 2.1.2. Eğer $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi, eşlenik transpozesine eşitse ($\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$ ise) $\mathbf{K}$ matrisine hermityen matris denir [7].

Tanım 2.1.3. Eğer $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tersinir matrisinin eşlenik transpozesi, tersine eşitse (yani, $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^*$ ise) $\mathbf{K}$ matrisine üniter matris denir [7].

Tanım 2.1.4. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bir involutif matris ve $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi $\mathbf{K}\mathbf{A}^{s+1}\mathbf{K} = \mathbf{A}$ eşitliğini sağlarsa $\mathbf{A}$ matrisine $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent denir [20].

2.2. Benzer Matris ve Köşegenleştirme

Aşağıda verilen tanım ve teoremler için, örneğin, [18] kaynağına bakılabilir.

Tanım 2.2.1. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri verilsin. Eğer $\mathbf{A}_2 = \mathbf{S}\mathbf{A}_1\mathbf{S}^{-1}$ olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi varsa, $\mathbf{A}_2$ matrisi $\mathbf{A}_1$ matrisine benzerdir denir.

Tanım 2.2.2. Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_n$ matrisine, bir köşegen matrise benzer ise köşegenleştirilebilir matris denir.

Tanım 2.2.3. $\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ köşegenleştirilebilir matrisler olsun. Eğer $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{S}$ ve $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{S}$ matrisleri köşegen matris olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ tersinir matrisi varsa $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ matrislerine eşanlı (birlikte) köşegenleştirilebilir matrisler denir.

Teorem 2.2.4. $\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ köşegenleştirilebilir matrisler olsun. $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ matrislerinin eşanlı köşegenleştirilebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ matrislerinin değişmeli olmasıdır.

Teorem 2.2.5. Aşağıdaki koşulların her biri, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olmasının gerekli ve yeterli koşuludur:

(a) $q_{\mathbf{A}}(t)$ minimal polinomu farklı lineer çarpanlara sahiptir.

(b) $q_{\mathbf{A}}(t)=0$ denkleminin her bir kökü tek katlıdır.

(c) $q_{\mathbf{A}}(t)=0$ olacak şekildeki her bir t değeri için $q_{\mathbf{A}}(t)$ polinomunun türevi sıfırdan farklıdır.

2.3. $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matrislerin Varlığı ve Özellikleri

k bir pozitif tam sayı olmak üzere 1'in tek türlü belirli k–yıncı dereceden tüm köklerinin kümesi Ω_k ile gösterilecektir. Ω_k çarpımsal gruptur. $w_k = e^{2\pi i/k}$ olarak tanımlanırsa, $\Omega_k = \{w_k, w_k^2, \ldots, w_k^k\}$ 'dır [20].

Aşağıda verilen teorem, lemma ve sonuçlar [20] kaynağından alınarak hatırlatılmaktadır.

Teorem 2.3.1. Verilen her $n \in \{1,2,3,\ldots\}$ boyutlu $\mathbf{K}$ involutif matrisi ve her bir $s \in \{1,2,3,\ldots\}$ için $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olan en az bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi vardır.

Lemma 2.3.2. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ involutif bir matris, $s \in \{1,2,3,\ldots\}$ ve $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olsun. Bu durumda,

I. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

(a) $\mathbf{A}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matristir.

(b) $\mathbf{KAK} = \mathbf{A}^{s+1}$.

(c) $\mathbf{KA} = \mathbf{A}^{s+1}\mathbf{K}$.

(d) $\mathbf{AK} = \mathbf{KA}^{s+1}$.

II. Eğer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris ise, $\mathbf{A}^{(s+1)^2} = \mathbf{A}$ dır.

Lemma 2.3.3. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ involutif bir matris, $s \in \{1,2,3,\ldots\}$ ve $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ iki $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olsunlar. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) $s=1$ ise, $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA} \Leftrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B}$ bir $\{\mathbf{K}, 2\}$–potent matristir.

(b) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ ise, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matristir.

(c) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ise, $\mathbf{AB}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matristir.

(d) $t \in \{0\} \cup \Omega_s$ ise, $t\mathbf{A}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matristir.

(e) $\mathbf{A}$ bir nonsingular matris ise, $\mathbf{A}^{-1}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matristir.

(f) $\mathbf{K}$ hermityen matris($\mathbf{K}^* = \mathbf{K}$) ise, $\mathbf{A}^*$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matristir.

(g) $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nonsingular ve $\mathbf{KW} = \mathbf{WK}$ ise, $\mathbf{WAW}^{-1}$ $\{\mathrm{K}, s+1\}$–potent matristir.

Sonuç 2.3.4. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ involutif ve hermityen matris, $s \in \{1,2,3,\ldots\}$ ve $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olsun. Eğer $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{KU} = \mathbf{UK}$ olacak biçimde bir üniter matris ise, $\mathbf{UAU}^*$ matrisi $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potenttir.

Lemma 2.3.5. Her $i=1,2,\ldots,t$ için $\mathbf{K}_i$ bir involutif matris olacak şekilde, $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ matrislerinin $\{\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2,\ldots,\mathbf{K}_t\}$ ve $\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_t\}$ kümeleri verilsin. Ayrıca,

$$\mathbf{A}=\bigoplus_{i=1}^{t}\mathbf{A}_i \text{ ve } \mathbf{K}=\bigoplus_{i=1}^{t}\mathbf{K}_i$$

olsun. Eğer her $i=1,2,\ldots,t$ için $\mathbf{A}_i$ matrisi $\{\mathbf{K}_i, s+1\}$–potent ise, $\mathbf{A}$ matrisi $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potenttir.

2.4. $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matrislerin Karakterizasyonu

Lemma 2.4.1. k farklı $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ özdeğerlerine sahip $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi verilsin. $\mathbf{A}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\mathbf{P}_j$ ve $\mathbf{I}_n=\sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}_j$ olacak şekilde $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\ldots,\mathbf{P}_k$ ayrık projektörlerin, yani $i, j\in\{1,2,\ldots,t\}$ için $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j=\delta_{ij}\mathbf{P}_i$ koşulunu sağlayan projektörlerin, var olmasıdır [7].

Aşağıda verilen lemma, teorem, uyarı ve sonuçlar için [20] kaynağına bakılabilir.

Lemma 2.4.2. $s\in\{1,2,3,\ldots\}$ ve $\varphi:\left\{0,1,2,\ldots,(s+1)^2-2\right\}\to\left\{0,1,2,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$, $\varphi(j)=b_j$ biçiminde tanımlı φ fonksiyonu verilsin. Burada b_j,

$$b_j \equiv j(s+1)\left[\bmod\left((s+1)^2-1\right)\right] \tag{2.1}$$

olacak şekildeki en küçük nonnegatif tamsayıdır. Bu durumda φ bire bir ve örten bir fonksiyondur.

Teorem 2.4.3. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bir involutif matris, $s \in \{1,2,3,\ldots\}$ ve $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(a) $\mathbf{A}$, $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent'tir.

(b) $\mathbf{A}$ köşegenleştirilebilirdir, $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$, $\mathbf{KP}_{(s+1)^2-1}\mathbf{K} = \mathbf{P}_{(s+1)^2-1}$, $j \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ olmak üzere φ Lemma 2.4.2'de tanımlı birebir ve örten bir fonksiyondur ve $\mathbf{KP}_{(s+1)^2-1}\mathbf{K} = \mathbf{P}_{(s+1)^2-1}$'dir ve $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{(s+1)^2-1}$ sırasıyla $0, w^1_{(s+1)^2-1}, \ldots, w^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1$ özdeğerleri ile ilişkili Lemma 2.4.1'de verilen $\mathbf{A}$ matrisinin spektral ayrışımında görülen projektörlerdir.

(c) $\mathbf{A}^{(s+1)^2} = \mathbf{A}$, $\mathbf{KP}_{(s+1)^2-1}\mathbf{K} = \mathbf{P}_{(s+1)^2-1}$ ve $j \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ olmak üzere $\mathbf{KP}_j\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\varphi(j)}$'dir. Burada φ Lemma 2.4.2'de tanımlı birebir ve örten bir fonksiyondur ve $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{(s+1)^2-1}$ sırasıyla $0, w^1_{(s+1)^2-1}, \ldots, w^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1}, 1$ özdeğerleri ile ilişkili Lemma 2.4.1'de verilen $\mathbf{A}$ matrisinin spektral ayrışımında görülen projektörlerdir.

Uyarı 2.4.4. Her bir $j_0 \in \{1,2,\ldots,(s+1)^2-2\}$ için $\mathbf{KP}_{j_0}\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\varphi(j_0)}$ olduğundan, $\mathbf{A}$ matrisinin spektral ayrışımındaki $\mathbf{P}_{j_0}$ ve $\mathbf{P}_{\varphi(j_0)}$ projektörlerinin her ikisi birden ya sıfır matrisidir ya da sıfır olmayan matrislerdir.

Sonuç 2.4.5. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bir involutif matris, $s \in \{1,2,3,\ldots\}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olsun. Ayrıca $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$ olacak biçimde $1 < k < (s+1)^2$ koşulunu sağlayan bir pozitif k tamsayısının mevcut olduğunu kabul edilsin. Bu durumda $\mathbf{A}$ matrisinin $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların her birinin sağlanmasıdır.

(i) $k-1$ sayısı $(s+1)^2-1$ sayısını tam böler.

(ii) $\mathbf{A}$ köşegenleştirilebilirdir.

(iii) $i, j \in \{0,1,\ldots,t\}$ ve $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ olmak üzere,

$$\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_t\}\subseteq\{0\}\cup\Omega_{k-1} \tag{2.2}$$

olmasıdır.

(iv) Her bir $i\in\{0,1,\ldots,t\}$ için $\lambda_i=\lambda_j^{s+1}$ ve $\mathbf{P}_i=\mathbf{K}\mathbf{P}_j\mathbf{K}$ olacak şekilde bir tek $j\in\{0,1,\ldots,t\}$ vardır. Burada $\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_t$ projektörleri sırasıyla (2.2)'de verilen özdeğerler ile ilişkili, Lemma 2.4.1'de verilen spektral ayrışımda görülen projektörlerdir.

Sonuç 2.4.6. $\mathbf{K}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ bir involutif matris, $s\in\{1,2,3,\ldots\}$ ve $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisinin $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}^{\#}=\mathbf{A}^{(s+1)^2-2}$, $\mathbf{K}\mathbf{P}_{(s+1)^2-1}\mathbf{K}=\mathbf{P}_{(s+1)^2-1}$ ve $j\in\left\{0,1,2,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ için $\mathbf{K}\mathbf{P}_j\mathbf{K}=\mathbf{P}_{\varphi(j)}$ olmasıdır. Burada φ Lemma 2.4.2'de tanımlı birebir ve örten fonksiyondur ve $\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_{(s+1)^2-1}$ sırasıyla $0,w^1_{(s+1)^2-1},\ldots,w^{(s+1)^2-2}_{(s+1)^2-1},1$ özdeğerleri ile ilişkili Lemma 2.4.1'de verilen $\mathbf{A}$ matrisinin spektral ayrışımında görülen projektörlerdir.

Teorem 2.4.7. $\mathbf{K}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ bir involutif matris, $s\in\{1,2,3,\ldots\}$ ve $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}$ matrisinin $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\begin{bmatrix}\mathbf{D}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1},\ \mathbf{K}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{X}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{T}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1},\ \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{I}_{n-r}\end{bmatrix}$$

olacak biçimde $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ nonsingular matrislerinin var olmasıdır. Burada $\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{r\times r}$, $\mathbf{T}\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ involutif matrisler; $\mathbf{W}\in\mathbb{C}^{r\times r}$, $\mathbf{C}=\mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisi bir $\{\mathbf{X},s+1\}$–potent matris olacak şekilde bir nonsingular matris; $\mathbf{D}=\left[d_{ij}\right]\in\mathbb{C}^{r\times r}$ köşegen matris, $r=rk(\mathbf{A})$ ve $d_{ii}\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}$'dir.

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{K}$ matrislerinin her ikisininde aynı benzerlik matrisine sahip olması için Teorem 2.4.7'deki gibi düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.4.8. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1},\ \mathbf{K} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

olacak şekilde $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ nonsingular matrislerinin var olmasıdır. Burada $r = rk(\mathbf{A})$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ ve $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ involutif matrisler ve $\mathbf{C}$ bir $\{\mathbf{X}, s+1\}$–potent matristir.

Teorem 2.4.9. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bir involutif matris ve

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_q \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

olacak biçimde $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{p\times q}$ ve $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{q\times q}$ olmak üzere,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\mathbf{A}$ matrisinin $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{D}$ matrislerinin $\{s+1\}$–potent matris ve

$$\mathbf{C} + \sum_{i=0}^{s} \mathbf{B}^{s-i}\mathbf{C}\mathbf{D}^{i} = \mathbf{0}$$

olmasıdır.

Teorem 2.4.10. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bir involutif matris, $s \in \{1,2,3,\ldots\}$ ve $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi $i, j \in \{1,2,\ldots t\}$ ve $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ olmak üzere,

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\} \tag{2.3}$$

spektrumuna sahip olsun. Bu durumda $\mathbf{A}$ matrisinin $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{A}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması ve her bir $i \in \{1,2,\ldots,t\}$ için $\lambda_i = \lambda_j^{s+1}$ ve $\mathbf{P}_i = \mathbf{KP}_j\mathbf{K}$ olacak şekilde tek bir $j \in \{1,2,\ldots,t\}$ var olmasıdır. Burada $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_t$ projektörleri sırasıyla (2.3)'teki özdeğerler ile ilişkili Lemma 2.4.1'de verilen A 'matrisinin spektral ayrışımında görülen projektörlerdir [20].

Teorem 2.4.10'un gösterimine göre $\theta : \{1,2,\ldots,t\} \to \{1,2,\ldots,t\}$, $\theta(i) = j$ biçiminde bir fonksiyon tanımlanabilir. Burada j; $\lambda_i = \lambda_j^{s+1}$ koşulunu sağlayan $\{1,2,\ldots,t\}$ kümesindeki yegane elemandır. Bu durumda θ'nın bir involution (özellikle bijective) olduğu görülebilir. Bu fonksiyon Teorem 2.4.10'da $\mathbf{P}_i = \mathbf{KP}_{\theta(i)}\mathbf{K}$ ve $\lambda_i = \lambda_{\theta(i)}^{s+1}$ yazılmasını sağlar.

$\mathbf{A}$ matrisinin $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olması için bir diğer gerekli koşul özvektörleri içeren aşağıdaki sonuçta verilmektedir.

Sonuç 2.4.11. $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bir involutif matris, $s \in \{1,2,3,\ldots\}$ ve $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $x_i \neq 0$, $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ olmak üzere, $\mathbf{A}x_i = \lambda_i x_i$ olacak şekilde $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. Eğer $\mathbf{A}^{s+1}x_{\theta(i_0)} \neq \lambda_{i_0} x_{\theta(i_0)}$ olacak biçimde $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ varsa, $\mathbf{A}$ matrisi $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent değildir.

BÖLÜM 3. İKİ DEĞİŞMELİ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–POTENT MATRİSİN LİNEER KOMBİNASYONUNUN $\{\mathbf{K}, s+1\}$–POTENTLİĞİ İLE İLGİLİ LİTERATÜRDEKİ SONUÇLAR

c_1, c_2 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ değişmeli $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 \tag{3.1}$$

lineer kombinasyonunu ele alınsın. Bu bölümde $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ matrisleri $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olduklarında (3.1) biçimli $\mathbf{X}$ matrisinin $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği ile ilgili [20] çalışmasında mevcut olan bir sonuç hatırlatılmaktadır. Ayrıca, iki değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisin lineer kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği ile ilgili algoritma verilmektedir.

3.1. İki Değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matrisinin Lineer Kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği

Lebtahi ve diğerleri [20] çalışmasında, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler iken (3.1) biçimli lineer kombinasyon matrisinin $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olması durumunda lineer kombinasyonu oluşturan c_1 ve c_2 skalerlerinin sağlaması gereken koşulların neler olduğunu aşağıdaki teorem ile ortaya koymuştur.

Teorem 3.1.1. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sıfırdan farklı değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler olmak üzere $\mathbf{C} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}$ olsun. $\mathbf{C}$ matrisi $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent ise aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:

(a) $c_1, c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dır.

(b) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$. Ayrıca, $w^r_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(c) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$. Ayrıca, $c_1 + w^t_{(s+1)^2-1} c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(d) $r + t$ sayısı $(s+1)^2 - 1$ in bir skaler katı olmayacak şekilde ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ olmak üzere,

$$c_1 = \frac{\xi_1 w^t_{(s+1)^2-1} - \xi_2}{w^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1}, \quad c_2 = \frac{\xi_2 w^r_{(s+1)^2-1} - \xi_1}{w^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1}$$

olacak şekilde r, $t \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2 - 2\right\}$ ve ξ_1, $\xi_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları vardır.

(e) $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dır.

(f) $w^{-t}_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2 - 2\right\}$ sayısı vardır.

İspat.

a) $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olduklarından (Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.4.3) bir nonsingular $\mathbf{P}$ matrisi ve $\mathbf{D_A}$, $\mathbf{D_B}$ köşegen matrisleri $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D_A}\mathbf{P}^{-1}$ ve $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D_B}\mathbf{P}^{-1}$ olacak biçimde vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} = c_1\left(\mathbf{P}\mathbf{D}_{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}\right) + c_2\left(\mathbf{P}\mathbf{D}_{\mathbf{B}}\mathbf{P}^{-1}\right) \\ = \mathbf{P}c_1\mathbf{D}_{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}c_2\mathbf{D}_{\mathbf{B}}\mathbf{P}^{-1} \\ = \mathbf{P}\left(c_1\mathbf{D}_{\mathbf{A}} + c_2\mathbf{D}_{\mathbf{B}}\right)\mathbf{P}^{-1}\end{aligned}$$

yazılabilir. $\mathbf{D}_{\mathbf{A}} := diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ ve $\mathbf{D}_{\mathbf{B}} := diag\left(\mu_1,\ldots,\mu_n\right)$ olsun, yani $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri λ_i, $\mathbf{B}$'nin özdeğerleri μ_i, $i = 1,2,\ldots,n$ ile gösterilsin. Bu durumda $c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} = diag\left(c_1\lambda_1 + c_2\mu_1,\ldots,c_1\lambda_n + c_2\mu_n\right)$ olur. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri $\left\{\mathbf{K}, s+1\right\}$–potent olduklarından Teorem 2.4.3 gereği $\mathbf{D}_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{B}}$ ve $c_1\mathbf{D}_{\mathbf{A}} + c_2\mathbf{D}_{\mathbf{B}}$ matrislerinin özdeğerleri $\left\{0\right\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ kümesinin elemanlarıdır. Böylece her $i = 1,2,\ldots,n$ için

$$c_1\lambda_i + c_2\mu_i \in \left\{0\right\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1} \tag{3.2}$$

yazılabilir. $\mathbf{D}_{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, $\lambda_{i_0} \neq 0$ olacak şekilde en az bir $i_0 \in \left\{1,2,\ldots,n\right\}$ vardır. Dolayısıyla $\lambda_{i_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Bu durumda (3.2)'den

$$c_1 + c_2\frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} \in \left\{0\right\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1} \tag{3.3}$$

ve üstelik $\Omega_{(s+1)^2-1}$ çarpımsal grup olduğundan $\dfrac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} \in \left\{0\right\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Benzer şekilde, $\mathbf{D}_{\mathbf{B}} \neq \mathbf{0}$ olduğundan $\mu_{j_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde en az bir $j_0 \in \left\{1,2,\ldots,n\right\}$ vardır. Yine (3.2)'den

$$\frac{\lambda_{j_0}}{\mu_{j_0}}c_1 + c_2 \in \left\{0\right\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1} \tag{3.4}$$

elde edilir. Eğer $\mu_{i_0} = 0 = \lambda_{j_0}$ ise $c_1 \neq 0 \neq c_2$ olması ve (3.3), (3.4) gözönüne alınırsa $c_1, c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ bulunur. Böylelikle (a) gösterilmiş olur.

b) Eğer $\mu_{i_0} = 0$ ve $\lambda_{j_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ise (3.3)'ten $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve (3.4)'ten $w^r_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde en az bir $r \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır. Böylelikle (b) elde edilir.

c) Eğer $\mu_{i_0} \neq 0$ ve $\lambda_{j_0} = 0$ ise (3.4)'ten $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve (3.3)'ten $c_1 + w^t_{(s+1)^2-1} c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde en az bir $t \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır. Böylelikle (c) gösterilmiş olur.

d) Son olarak eğer $\mu_{i_0}, \lambda_{j_0} \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ise c_1, c_2'ler bilinmeyenler ve $\xi_1, \xi_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olmak üzere, (3.3) ve (3.4)'ten $w^r_{(s+1)^2-1} c_1 + c_2 = \xi_1$ ve $c_1 + w^t_{(s+1)^2-1} c_2 = \xi_2$ denklemleri elde edilir. Böylece çözülmesi gereken

$$\begin{pmatrix} w^r_{(s+1)^2-1} & 1 \\ 1 & w^t_{(s+1)^2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

lineer denklem sistemi ile karşılaşılır. $r+t$'nin $(s+1)^2 - 1$'in bir katı olmama kabulü altında Gauss Jordan eleminasyon yöntemi kullanılırsa

$$c_1 = \frac{\xi_1 w^t_{(s+1)^2-1} - \xi_2}{w^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1} \text{ ve } c_2 = \frac{\xi_2 w^r_{(s+1)^2-1} - \xi_1}{w^{r+t}_{(s+1)^2-1} - 1}$$

olarak bulunur.

e) $w^{r+t}_{(s+1)^2-1} = 1$ olması ancak $r+t=0$ veya $r+t=(s+1)^2-1$ olması ile mümkündür. Burada $r+t=0$ durumunda ise $r=t=0$ olmak zorundadır.

Şimdi $r=t=0$ olsun. Bu durumda $\xi_1,\xi_2\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}$ olması göz önünde bulundurulduğunda (3.5)'ten $c_1+c_2\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}$ yazılabilir.

f) Şimdi de $r+t=(s+1)^2-1$ olsun. $w_{(s+1)^2-1}^{r+t}=w_{(s+1)^2-1}^{(s+1)^2-1}=1$ olup buradan $w_{(s+1)^2-1}^{r}=w_{(s+1)^2-1}^{-t}$ dir. Böylece (3.5)'ten $w_{(s+1)^2-1}^{-t}c_1+c_2\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}$ olarak bulunur. ■

3.2. $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent Matrislerin Hesaplanması İçin Algoritma

$s=0$ ve $s\geq 1$ durumları ayrı ayrı incelenecektir.

1) $s\geq 1$ durumu

Burada verilen bir $\mathbf{K}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ involutif matrisi ve $s\in\{1,2,3,\ldots\}$ için bir $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent matrisinin bulunması ile ilgilenilecektir. $\mathbf{K}=\pm\mathbf{I}_n$ durumu iyi bilinen $\mathbf{A}^{s+1}=\mathbf{A}$ eşitliğine karşılık geldiğinden bundan sonra $\mathbf{K}\neq\pm\mathbf{I}_n$ kabul edilecektir. $\mathbf{K}$ involutif olduğundan köşegenleştirilebilir, yani

$$\mathbf{K}=\mathbf{T}\begin{bmatrix}-\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r}\end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1} \tag{3.6}$$

olacak biçimde bir nonsingular $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}t_1 & \ldots & t_n\end{bmatrix}$ matrisi vardır. Burada $\mathbf{K}$ matrisinin ilk r özvektörü -1 özdeğeri ile ilişkili ve t_i'lerin $\mathbf{T}$'nin sütun vektörlerini gösterdiği kabul edilmiştir. Ayrıca genelliği bozmaksızın $r\leq n-r$ kabul edilecektir. Eğer $r>n-r$ ise aynı çözüm elde edilecek şekilde $\mathbf{K}$ matrisinin yerine $-\mathbf{K}$ matrisi seçilecektir. Teorem 2.4.3'ten bilindiği üzere $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri

$$\Lambda=\left\{0,w_{(s+1)^2-1}^{1},\ldots,w_{(s+1)^2-1}^{(s+1)^2-2},1\right\} \tag{3.7}$$

kümesinin içinde yer almalıdır ve $\mathbf{A}$ matrisi köşegenleştirilebilirdir. Yani

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ y_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\, diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \mathbf{S}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{I}_n$ olduğundan $y_i^{\mathrm{T}} s_j = \delta_{ij}$ olur. Burada δ_{ij}, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ile tanımlı kronecker delta fonksiyonudur. O halde,

$$\mathbf{P}_i = s_i y_i^{\mathrm{T}} \tag{3.8}$$

alınarak

$$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \begin{cases} \mathbf{0}, & i \neq j \\ \mathbf{P}_i & i = j \end{cases} \tag{3.9}$$

elde edilir. Ayrıca, $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{I}_n$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = \mathbf{I}_n$ bulunur. Buradan $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{P}_i \tag{3.10}$$

olarak yazılabilir. Tüm λ_i'ler birbirinden farklı olduğunda, (3.10) gösterimi $\mathbf{A}$ matrisinin spektral ayrışımına karşılık gelir. Aksi takdirde, böyle bir ayrışımı elde etmek için her bir λ_i özdeğerini onun ile ilişkili $\mathbf{P}_i$ projektörü ile çarparak toplam almak yeterlidir.

Teorem 2.4.3’ten $\mathbf{A}^{s+1} = \mathbf{KAK}$ eşitliğinin sağlanması için

$$\mathbf{KP}_i\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\varphi(i)} \tag{3.11}$$

olmak zorundadır. Dolayısıyla (3.8)’den

$$\mathbf{P}_{\varphi(i)} = \mathbf{KP}_i\mathbf{K} = \mathbf{K}s_i y_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K} = \mathbf{K}s_i\left(\mathbf{K}^{\mathrm{T}} y_i\right)^{\mathrm{T}} \text{ ve } \mathbf{P}_{\varphi(i)} = s_{\varphi(i)} y_{\varphi(i)}^{\mathrm{T}} \tag{3.12}$$

yazılabilir. O halde $\mathbf{A}^{s+1} = \mathbf{KAK}$ olması için (3.12)’den

$$\mathbf{K}s_i = s_{\varphi(i)} \text{ ve } \mathbf{K}^{\mathrm{T}} y_i = y_{\varphi(i)} \tag{3.13}$$

seçilebileceği görülür.

$i = 1,\ldots,r$ için $\tilde{\lambda}$ ilk r özvektör ile ilişkili özdeğerleri, $\approx\!\!\!\lambda$ diğer özvektörler ile ilişkili özdeğerleri göstermek üzere $\mathbf{K}\left(t_i + t_{r+i}\right) = \mathbf{K}t_i + \mathbf{K}t_{r+i} = \tilde{\lambda}\, t_i + \overset{\approx}{\lambda}\, t_{r+i} = -t_i + t_{r+i}$ olduğuna dikkat edilirse $\left\{\mathbf{K}, s+1\right\}$–potent matrisleri inşa etmek için ilk metod aşağıdaki gibi ortaya konulabilir.

Algoritma 1

Girdiler: $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $s \in \left\{1, 2, 3, \ldots\right\}$.

Çıktılar: Bir $\left\{\mathbf{K}, s+1\right\}$–potent $\mathbf{A}$ matrisi ve $\mathbf{P}_i$ projektörleri.

Adım 1: $\mathbf{K}$ matrisini (3.6)’daki gibi köşegenleştir.

Adım 2: $r > n - r$ ise $\mathbf{K}$ matrisini $-\mathbf{K}$ olarak değiştir ve Adım 1’i tekrar düzenle.

Adım 3: $i = 1,\ldots,r$ için $s_{2i-1} = t_i + t_{r+i}$ ve $s_{2i} = -t_i + t_{r+i}$ vektörlerini hesapla.

Adım 4: $i = 2r+1,\ldots,n$ için $s_i = t_i$ olarak belirle.

Adım 5: $i = 1,\ldots,n$ için $\mathbf{S}y_i = e_i$ lineer sistemini çöz.

Adım 6: $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\mathbf{P}_i = s_i y_i^{\mathrm{T}}$ matrislerini hesapla.

Adım 7: $i = 1, \ldots, r$ için $\mathbf{Q}_i = w\mathbf{P}_{2i-1} + w^{\varphi(1)}\mathbf{P}_{2i}$ matrisini hesapla.

Adım 8:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{Q}_i + \sum_{j=2r+1}^{n} \mathbf{P}_j \tag{3.14}$$

matrisini hesapla.

Tablo 3.1 s_i 'lerin ve $\mathbf{A}$ matrisinin oluşumunda en çok karşılaşılan durumlar

	s_i nin oluşumu	$\mathbf{A}$ nın oluşumu
$\mathbf{D}_1$	$s_1 = t_1 + t_2$ $s_2 = -t_1 + t_2$	$\mathbf{A} = w\mathbf{P}_1 + w^{\varphi(1)}\mathbf{P}_2$
$\mathbf{D}_2$	$s_1 = t_1 + t_2$ $s_2 = -t_1 + t_2$ $s_3 = t_3$	$\mathbf{A} = w\mathbf{P}_1 + w^{\varphi(1)}\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$
$\mathbf{D}_3$	$s_1 = t_1 + t_2$ $s_2 = -t_1 + t_2$ $s_3 = t_3$ $s_4 = t_4$	$\mathbf{A} = w\mathbf{P}_1 + w^{\varphi(1)}\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4$
$\mathbf{D}_4$	$s_1 = t_1 + t_3$ $s_2 = -t_1 + t_3$ $s_3 = t_2 + t_4$ $s_4 = -t_2 + t_4$	$\mathbf{A} = w(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) + w^{\varphi(1)}(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4)$
$\mathbf{D}_5$	$s_1 = t_1 + t_3$ $s_2 = -t_1 + t_3$ $s_3 = t_2 + t_4$ $s_4 = -t_2 + t_4$ $s_5 = t_5$	$\mathbf{A} = w(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) + w^{\varphi(1)}(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4) + \mathbf{P}_5$

Bu süreci doğrulamak için en çok karşılaşılan durumlar Tablo 1'de gösterilmiştir, burada $w := w_{(s+1)^2-1}$'dir. Algoritmada yalnızca sekizinci adımın doğrulanması gerekmektedir. Aslında, (2.1), (3.9), (3.11), (3.13) ve (3.14) kullanılırsa

$$\mathbf{A}^{s+1} = \left(\sum_{i=1}^{r} \mathbf{Q}_i + \sum_{j=2r+1}^{n} \mathbf{P}_j \right)^{s+1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} \left(w\mathbf{P}_{2i-1} + w^{\varphi(1)}\mathbf{P}_{2i} \right) + \sum_{j=2r+1}^{n} \mathbf{P}_j \right)^{s+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} w^{\varphi(1)}\mathbf{P}_{2i-1} + w\mathbf{P}_{2i} + \sum_{j=2r+1}^{n} \mathbf{P}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(w\mathbf{K}\mathbf{P}_{2i-1}\mathbf{K} + w^{\varphi(1)}\mathbf{K}\mathbf{P}_{2i}\mathbf{K} \right) + \sum_{j=2r+1}^{n} \mathbf{K}\mathbf{P}_j\mathbf{K}$$

$$= \mathbf{K} \left(\sum_{i=1}^{r} \left(w\mathbf{P}_{2i-1} + w^{\varphi(1)}\mathbf{P}_{2i} \right) + \sum_{j=2r+1}^{n} \mathbf{P}_j \right) \mathbf{K}$$

$$= \mathbf{KAK}$$

olduğu görülür. Burada yalnızca bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{A}$ matrisi oluşturulmuş olmasına rağmen bu metodun, $\Omega_{(s+1)^2-1}$'deki diğer w değerlerini seçerek daha fazla $\mathbf{A}$ matrisi oluşturabileceği açıktır.

2) $s = 0$ durumu

Bu durum $\mathbf{K}$ ile değişmeli olan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrislerine karşılık gelir. $\mathbf{P}_i$ projektörleri spektral ayrışımda görülen projektörler olmak üzere, spektral teoremden "Köşegenleştirilebilir bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin $\{\mathbf{K}\}$–centro simetrik matris olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{K}\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{K}$ olmasıdır" denebilir. Bir önceki algoritmaya benzer bir algoritma yapılabilir. Ancak blok matris ayrışımını kullanarak hızlı sonuç veren basit bir metod geliştirilebilir. Aslında $\mathbf{K}$ matrisi (3.6)'daki gibi köşegenleştirilebilmiş bir matris ise $\mathbf{KAK} = \mathbf{A}$ olur. Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.4.3'ten

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \tag{3.15}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{X}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ ve $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ köşegen elemanları $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ kümesinden olan keyfi köşegen matrislerdir.

3.3. Verilen Bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matris İle Değişmeli Olan $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matris Elde Etme

$s \geq 1$ olsun. Şimdi hedef Algoritma 1 ile elde edilen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisi için $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ olacak biçimde bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bulmaktır. $\mathbf{B}$, $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olduğu için köşegenleştirilebilir olmak zorundadır. Ayrıca, Teorem 2.2.4'ten $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ durumunun sağlanması için $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin eşanlı köşegenleştirilebilir olması gerekir. Yani $\mathbf{A} = \mathbf{S}\, diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$ ve $\mathbf{B} = \mathbf{S}\, diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)\mathbf{S}^{-1}$ olmalıdır. Burada Λ (3.7) ile verilen küme olmak üzere $\mu_i \in \Lambda \setminus \sigma(\mathbf{A})$'dır.

Algoritma 2

Girdiler: Algoritma 1'den elde edilen $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{A}$ matrisi ve $\mathbf{P}_i$ projektörleri.

Çıktılar: $\mathbf{A}$ matrisi ile değişmeli olan $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{B}$ matrisi.

Adım 1: $\mu := w^{p}_{(s+1)^2-1}$ olarak belirle. Burada $p \notin \{1, \varphi(1), \varphi(p)\}$ dir.

Adım 2: $i = 1, \ldots, r$ için $\mathbf{W}_i = \mu \mathbf{P}_{2i-1} + \mu^{\frac{\varphi(p)}{p}} \mathbf{P}_{2i}$ matrislerini hesapla.

Adım 3: $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{W}_i + \sum_{i=2r+1}^{n} \mathbf{P}_i$ matrisini hesapla.

Uyarı 3.1.2. μ Algoritma 1'deki Λ kümesininin içinde kullanılmamış olan w değerleri arasından seçildiğine, Adım 2'de $\mu^{\frac{\varphi(p)}{p}} = w^{\varphi(p)}$ olduğuna ve Algoritma 2'de oluşumun kalan kısmının Algoritma 1'deki gibi gerçekleştirilebildiğine dikkat edilmelidir.

Algoritma 2'yi kullanarak bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{B}$ matrisi oluşturuldu. Fakat bu metodun aynı $\mathbf{A}$ başlangıç matrisi ile daha fazla $\mathbf{B}$ matrisi üretebileceği ($\Omega_{(s+1)^2-1}$ kümesindeki diğer μ değerleri seçilerek) açıktır.

Şimdi $s=0$ olsun ve $\mathbf{X_A}, \mathbf{Y_A}$ (3.15)'teki gibi olduğunda

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\begin{bmatrix} \mathbf{X_B} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y_B} \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}$$

ifadesi keyfi olarak oluşturulan $\{\mathbf{K},1\}$–potent $\mathbf{A}$ matrisi ile değişmeli olan tüm $\{\mathbf{K},1\}$–potent $\mathbf{B}$ matrislerini verir. Burada $\mathbf{X_A X_B}=\mathbf{X_B X_A}$ ve $\mathbf{Y_A Y_B}=\mathbf{Y_B Y_A}$ dır.

$s \geq 1$ durumunda w, 1'in s–yinci dereceden bir kökünü göstermek üzere, $\mathbf{B}=w\mathbf{A}$ matrisi $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potenttir. Benzer biçimde $s=0$ durumunda tüm $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\mathbf{B}=\alpha\mathbf{A}$ matrisi $\{\mathbf{K},1\}$–potenttir. $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisleri diğer bir yöntem ile elde etmek için, bir sonraki bölümde Algoritma 2'yi kullanarak $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin lineer kombinasyonları incelenmektedir.

3.4. İki Değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matrisin Lineer Kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği İle İlgili Algoritma

Algoritma 1 ve 2 aracılığıyla elde edilen $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri için aşağıdaki lineer bağıntı oluşturulabilir,

$$\mathbf{C}=c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{B}. \tag{3.16}$$

Burada c_1 ve c_2 belirlenecek sıfır olmayan kompleks sayılardır. Bu bölümde $\mathbf{C}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olacak şekildeki c_1 ve c_2 skalerleri bulunacaktır $s=0$ değeri için tüm c_1 ve c_2'ler eşitliği sağlar. Bundan dolayı $s \geq 1$ kabul edilecektir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\, diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)\mathbf{S}^{-1} \text{ ve } \mathrm{B} = \mathbf{S}\, diag\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right)\mathbf{S}^{-1}$$

yazılabildiği için (3.16) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir. Burada her bir η_i, $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ kümesinden rastgele seçilen değer olmak üzere, $\mathbf{C} = \mathbf{S}\, diag\left(\eta_1, \ldots, \eta_n\right)\mathbf{S}^{-1}$'dir.

Şimdi lineer kombinasyonların bu sınıfını hesaplamak için bir algoritma oluşturulabilir.

Algoritma 3

Girdiler: Sırasıyla Algoritma 1 ve 2'den elde edilen $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri.

Çıktılar: $\mathbf{C} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olacak biçimdeki tüm c_1 ve c_2 değerleri.

Adım 1: $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \mu_n \end{bmatrix}$ olarak belirle.

Adım 2: $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olarak seç ve $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$ olarak belirle.

Adım 3: $\mathbf{M}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \eta$ lineer sistemini çöz.

Adım 4: Adım 2 ve 3'ü $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ deki tüm η_i mümkün değerleri için tekrarla.

BÖLÜM 4. ÜÇ KARŞILIKLI DEĞİŞMELİ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–POTENT MATRİSİN LİNEER KOMBİNASYONUNUN $\{\mathbf{K}, s+1\}$–POTENTLİĞİ

Bu bölüm, çalışmanın orijinal kısmını kapsamaktadır. İlk olarak, üç $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris karşılıklı değişmeli olduğunda onların lineer kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olduğu durumlara ait özellikleri veren bir teorem verilmektedir. Ayrıca, üç karşılıklı değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisin lineer kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği ile ilgili algoritma verilmektedir.

4.1. Üç Karşılıklı Değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matrisin Lineer Kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği

Teorem 4.1.1. c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sıfırdan farklı karşılıklı değişmeli $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler (yani $\mathbf{XY} = \mathbf{YX}$, $\mathbf{XZ} = \mathbf{ZX}$ ve $\mathbf{YZ} = \mathbf{ZY}$) olsun. $\mathbf{T} = c_1\mathbf{X} + c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{Z}$ lineer kombinasyonu $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olsun. Bu durumda aşağıdakilerden biri sağlanır:

(1) c_1, c_2, $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir.

(2) $c_1, c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Ayrıca $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $z \in \left\{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(3) $c_1, c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Ayrıca $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $y \in \left\{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(4) $c_1, c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $y, z \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(5) $c_2, c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $v \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(6) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^v c_3$, $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $v, z \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(7)

a) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. $c_1 = \dfrac{-\xi_2 + w^v \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^y \xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ olacak şekilde $v, y \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ve $\xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(v+y)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir.

c) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^{-y} c_3$, $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $y \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$'dir.

(8)

a) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. $c_1 = -\dfrac{w^{v+z}\xi_1 + \xi_2 - w^v \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z \xi_1 + w^y \xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ olacak şekilde $v, y, z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(v+y)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$'dir.

c) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^{-y} c_3$, $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $y, z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$'dir.

(9) $c_2, c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $u \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(10) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^u c_2$, $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $u, z \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(11) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^u c_2$, $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $u, y \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(12) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^u c_2$, $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $u, y, z \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(13) $c_2, c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $u, v \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(14) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_1 + w^u c_2 + w^v c_3$, $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $u, v, z \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(15)

a) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2 + w^v \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ ve $c_3 = -\dfrac{w^{u+y} \xi_1 - w^y \xi_2 + \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ olacak şekilde $u, v, y \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(v+y)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_1 + w^u c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$'dir.

c) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^u c_2 + w^{-y} c_3$, $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u, y \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$'dir.

(16)

a) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. $c_1 = -\dfrac{-w^u\xi_1 + w^{v+z}\xi_1 + \xi_2 - w^v\xi_3}{-1+w^{v+y}}$ ve

$c_3 = -\dfrac{w^{u+y}\xi_1 - w^z\xi_1 - w^y\xi_2 + \xi_3}{-1+w^{v+y}}$ olacak şekilde $u,v,y,z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$

ve $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(v+y)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_1 + w^u c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ dir. Burada $u,z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

c) $c_2 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^u c_2 + w^{-y}c_3$, $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u,y,z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

(17) $c_1,c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(18)

a) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z\xi_1 - \xi_3}{-1+w^{t+z}}$ olacak şekilde $t,z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$ ve $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(t+z)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir.

c) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_2 + w^{-z}c_3$, $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

(19) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_2 + w^t c_3$, $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t,y \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(20)

a) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. $c_2 = -\dfrac{\xi_1 + w^{t+y}\xi_2 - w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z\xi_1 + w^y\xi_2 - \xi_3}{-1+w^{t+z}}$ olacak şekilde $t, y, z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(t+z)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ dir. Burada $y \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

c) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_2 + w^{-z}c_3$, $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $y, z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

(21) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_2 + w^t c_3$, $c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, v \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(22)

a) $c_1 = \xi_2 - \dfrac{w^v(w^z\xi_1 - \xi_3)}{-1+w^{t+z}}$, $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z\xi_1 - \xi_3}{-1+w^{t+z}}$ olacak şekilde $v, t, z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(t+z)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $v \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

c) $c_2 + w^{-z}c_3$, $c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $v,\ z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

(23)

a) $c_1 = \dfrac{-\xi_2 + w^v \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$, $c_2 = \xi_1 - \dfrac{w^t (w^y \xi_2 - \xi_3)}{-1 + w^{v+y}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^y \xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ olacak şekilde $t, v, y \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(v+y)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $t \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

c) $c_2 + w^t c_3$, $c_1 + w^{-y} c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $t, y \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

(24) $c_2 + w^t c_3$, $c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, v, y, z \in \left\{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(25) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $c_2 + w^t c_3$, $c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, u \in \left\{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(26)

a) $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2 + w^{t+z} \xi_2 - w^{t+u} \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$, $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^t \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z \xi_1 - \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$ olacak şekilde $t, u, z \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(t+z)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

c) $c_2 + w^{-z} c_3, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u, z \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

(27) $c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, u, y \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(28) $c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, u, y, z \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(29) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Ayrıca $c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, u, v \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(30)

a) $c_1 = -w^u \xi_1 + \xi_2 - \dfrac{(-w^{t+u} + w^v)(w^z \xi_1 - \xi_3)}{-1 + w^{t+z}}$, $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^t \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z \xi_1 - \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$ olacak şekilde $t, u, v, z \in \{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(t+z)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$ 'dır.

b) $c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u, v \in \{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\}$ 'dir.

c) $c_2 + w^{-z} c_3, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u, v, z \in \{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\}$ 'dir.

(31) $c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, u, v, y \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(32) $c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $t, u, v, y, z \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(33) $c_1, c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(34) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, z \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(35) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, y \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(36) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, y, z \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(37) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, v \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(38) $w^r c_1 + c_2, c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, v, z \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(39)

a) $c_1 = \dfrac{-\xi_2 + w^v \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$, $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^{v+y}\xi_1 + w^r \xi_2 - w^{r+v}\xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^y \xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$ olacak şekilde $v, y, z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(v+y)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^r c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $r \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

c) $w^r c_1 + c_2, c_1 + w^{-y} c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $r, y \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

(40) $w^r c_1 + c_2, c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, v, y, z \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(41)

a) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$ ve $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$ olacak şekilde $r, u \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(r+u)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$'dır.

b) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir.

c) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^{-u} c_1 + c_2, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

(42)

a) $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$, $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z \xi_1 - w^{r+z} \xi_2 - \xi_3 + w^{r+u} \xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ olacak şekilde $r, u, z \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(r+u)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $z \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

c) $w^{-u} c_1 + c_2, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u, z \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

(43)

a) $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$, $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$ ve $c_3 = \dfrac{-w^{u+y} \xi_1 + w^y \xi_2 - \xi_3 + w^{r+u} \xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ olacak şekilde $r, u, y \in \left\{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(r+u)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Burada $y \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ 'dir.

c) $w^{-u}c_1 + c_2, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Burada $u, y \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ 'dir.

(44)

a) $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$, $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$ ve

$c_3 = \dfrac{-w^{u+y}\xi_1 + w^z \xi_1 + w^y \xi_2 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ olacak şekilde $r,u,y,z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(r+u)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$ 'dır.

b) $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Burada $y, z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ 'dir.

c) $w^{-u}c_1 + c_2$, $c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Burada $u, y, z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ 'dir.

(45)

a) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2 + w^v \xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ ve $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2 - w^{r+v}\xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ olacak şekilde $r,u,v \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(r+u)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$ 'dır.

b) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_1 + c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. Burada $v \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ 'dir.

c) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^{-u}c_1 + c_2, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ’dir. Burada $u, v \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ’dir.

(46) $w^r c_1 + c_2, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, u, z \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(47) $w^r c_1 + c_2, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, u, v, y \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(48) $w^r c_1 + c_2, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, u, v, y, z \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(49) $c_1, c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, t \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(50)

a) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ’dir. $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2 + w^t \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^z \xi_1 - w^{r+z} \xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$ olacak şekilde $r, t, z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(t+z)$ $(s+1)^2-1$’in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$ ’dır.

b) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^r c_1 + c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ’dir. Burada $r \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ’dir.

c) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^r c_1 + c_2 + w^{-z} c_3, w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ’dir. Burada $r, z \in \{0,1,\ldots(s+1)^2-2\}$ ’dir.

(51) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ’dir. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, t, y \in \{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\}$ vardır.

(52)

a) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. $c_2 = -\dfrac{\xi_1 - w^r\xi_2 + w^{t+y}\xi_2 - w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$ ve

$c_3 = -\dfrac{-w^z\xi_1 - w^y\xi_2 + w^{r+z}\xi_2 + \xi_3}{-1+w^{t+z}}$ olacak şekilde $r,t,y,z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$

ve $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(t+z)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $w^r c_1 + c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ dir. Burada $r,y \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

c) $c_1 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^r c_1 + c_2 + w^{-z}c_3, w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $r,y,z \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

(53) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Ayrıca $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r,t,v \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(54) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r,t,v,z \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ vardır.

(55)

a) $c_1 = \dfrac{-\xi_2 + w^v\xi_3}{-1+w^{v+y}}$, $c_2 = \xi_1 - w^r\xi_2 - \dfrac{(w^t - w^{r+v})(w^y\xi_2 - \xi_3)}{-1+w^{v+y}}$ ve $c_3 = \dfrac{w^y\xi_2 - \xi_3}{-1+w^{v+y}}$

olacak şekilde $r,v,y \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$ ve $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(v+y)$ $(s+1)^2-1$'in skaler katı değildir ve $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $r,t \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

c) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^{-y}c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $r,t,y \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2-2\right\}$'dir.

(56) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$

olacak şekilde $r, t, v, y, z \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(57)

a) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2 - w^{t+u} \xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ ve $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2 + w^t \xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ olacak şekilde $r, u, t \in \{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(r+u)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $t \in \{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\}$'dir.

c) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^{-u} c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u, t \in \{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\}$'dir.

(58) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, t, u, z \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(59) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, t, u, y \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(60) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$

olacak şekilde $r, t, u, y, z \in \{0, 1, \ldots, (s+1)^2 - 2\}$ vardır.

(61)

a) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$ 'dir. $c_1 = \dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2 - w^{t+u} \xi_3 + w^v \xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ ve $c_2 = \dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2 + w^t \xi_3 - w^{r+v} \xi_3}{-1 + w^{r+u}}$ olacak şekilde $r, u, t, v \in \{0, 1, \ldots (s+1)^2 - 2\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları mevcuttur. Burada $(r+u)$ $(s+1)^2 - 1$'in skaler katı değildir ve $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$'dır.

b) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $c_1 + c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ dir. Burada $t, v \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

c) $c_3 \in \Omega_{(s+1)^2-1}$, $w^{-u} c_1 + c_2 + w^t c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$'dir. Burada $u, t, v \in \left\{0,1,\ldots(s+1)^2 - 2\right\}$'dir.

(62) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^z c_2 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, t, u, v, z \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(63) $w^r c_1 + c_2 + w^t c_3, c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ ve $w^y c_1 + c_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olacak şekilde $r, t, u, v, y \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2 - 2\right\}$ vardır.

(64) $\xi_1 \neq 0$ veya $\xi_2 \neq 0$ veya $\xi_3 \neq 0$ olacak şekilde $r, t, u, v, y, z \in \left\{0,1,\ldots,(s+1)^2 - 2\right\}$ ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ sayıları

$$c_1 = -\frac{-w^u \xi_1 + w^{v+z} \xi_1 + \xi_2 - w^{t+z} \xi_2 + w^{t+u} \xi_3 - w^v \xi_3}{-1 + w^{r+u} - w^{t+u+y} + w^{v+y} + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$$

$$c_2 = -\frac{\xi_1 - w^{v+y} \xi_1 - w^r \xi_2 + w^{t+y} \xi_2 - w^t \xi_3 + w^{r+v} \xi_3}{-1 + w^{r+u} - w^{t+u+y} + w^{v+y} + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$$

$$c_3 = \frac{-w^{u+y} \xi_1 + w^z \xi_1 + w^y \xi_2 - w^{r+z} \xi_2 - \xi_3 + w^{r+u} \xi_3}{-1 + w^{r+u} - w^{t+u+y} + w^{v+y} + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$$

olacak şekilde vardır.

İspat. Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.4.3 gözönüne alındığında $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}-$potent matrisler olduğundan $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}$ ve $\mathbf{Z} = \mathbf{P}\mathbf{D}_\mathbf{Z}\mathbf{P}^{-1}$ olacak şekilde bir $\mathbf{P}$ nonsingular matrisi ve $\mathbf{D}_\mathbf{X}$, $\mathbf{D}_\mathbf{Y}$, $\mathbf{D}_\mathbf{Z}$ köşegen matrisleri vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}=c_1\mathbf{X}+c_2\mathbf{Y}+c_3\mathbf{Z}=c_1\left(\mathbf{P}\mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{P}^{-1}\right)+c_2\left(\mathbf{P}\mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}\right)+c_3\left(\mathbf{P}\mathbf{D}_\mathbf{Z}\mathbf{P}^{-1}\right)\\ =\mathbf{P}c_1\mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{P}^{-1}+\mathbf{P}c_2\mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}+\mathbf{P}c_3\mathbf{D}_\mathbf{Z}\mathbf{P}^{-1}\\ =\mathbf{P}\left(c_1\mathbf{D}_\mathbf{X}+c_2\mathbf{D}_\mathbf{Y}+c_3\mathbf{D}_\mathbf{Z}\right)\mathbf{P}^{-1}\end{aligned} \tag{4.1}$$

yazılabilir. Buradan $\mathbf{D}_\mathbf{X}:=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$, $\mathbf{D}_\mathbf{Y}:=diag\left(\mu_1,\ldots,\mu_n\right)$ ve $\mathbf{D}_\mathbf{Z}:=diag\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_n\right)$ dir. $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent matrisler olduğu için λ_i,μ_i ve $\gamma_i\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}, i=1,2,\ldots,n$. $\mathbf{T}$ lineer kombinasyon matrisi $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent olsun. (4.1)'den

$$c_1\lambda_i+c_2\mu_i+c_3\gamma_i\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}, i=1,2,\ldots,n \tag{4.2}$$

yazılabilir. $\mathbf{D}_\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$ olduğundan en az bir $i_0\in\{1,2,\ldots,n\}$ indisi için, $\lambda_{i_0}\neq 0$ olur. $\Omega_{(s+1)^2-1}$ çarpımsal grup olduğu için, (4.2)'den

$$c_1+c_2\frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}}+c_3\frac{\gamma_{i_0}}{\lambda_{i_0}}\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1} \tag{4.3}$$

olup $\frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}},\frac{\gamma_{i_0}}{\lambda_{i_0}}\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}$ dir. $\mathbf{D}_\mathbf{Y}\neq\mathbf{0}$ ve $\mathbf{D}_\mathbf{Z}\neq\mathbf{0}$ olduğundan $\mu_{j_0},\gamma_{k_0}\in\Omega_{(s+1)^2-1}$ için

$$c_1\frac{\lambda_{j_0}}{\mu_{j_0}}+c_2+c_3\frac{\gamma_{j_0}}{\mu_{j_0}}\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1} \tag{4.4}$$

ve

$$c_1\frac{\lambda_{k_0}}{\gamma_{k_0}}+c_2\frac{\mu_{k_0}}{\gamma_{k_0}}+c_3\in\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1} \tag{4.5}$$

yazılabilir. $r,t,u,v,y,z\in\left\{0,1,\ldots,(s+1)^2-2\right\}$ olmak üzere,

$$w^r = \frac{\lambda_{j_0}}{\mu_{j_0}}, w^t = \frac{\gamma_{j_0}}{\mu_{j_0}}, w^u = \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}}, w^v = \frac{\gamma_{i_0}}{\lambda_{i_0}}, w^y = \frac{\lambda_{k_0}}{\gamma_{k_0}}, w^z = \frac{\mu_{k_0}}{\gamma_{k_0}}$$

olarak yazılabilir. Böylece, c_1, c_2, c_3 bilinmeyenler ve $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olmak üzere, (4.3), (4.4), (4.5)'den

$$\begin{aligned} w^r c_1 + c_2 + w^t c_3 &= \xi_1 \\ c_1 + w^u c_2 + w^v c_3 &= \xi_2 \\ w^y c_1 + w^z c_2 + c_3 &= \xi_3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Burada w'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre sunulan Tablo 1'deki durumlar ile karşılaşılır. Bu durumlar altında oluşan (4.6) lineer denklem sistemi Gauss Jordan Eleminasyon yöntemi ile çözüldüğünde 3–üncü, 4–üncü ve 5–inci sütunlardaki çözümler elde edilir. Bu çözümlerdeki her bir i–inci satır teoremin i–inci şıkkının ispatını tamamlar, $i = 1, 2, \ldots, 64$. ■

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri

Sıra No	Durum	c_1	c_2	c_3
1	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y=0, w^z=0$	ξ_2	ξ_1	ξ_3
2	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	ξ_2	ξ_1	$-w^z\xi_1+\xi_3$
3	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	ξ_2	ξ_1	$-w^y\xi_2+\xi_3$
4	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	ξ_2	ξ_1	$-w^z\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3$
5	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z=0$	$\xi_2-w^v\xi_3$	ξ_1	ξ_3

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

6	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	$w^{v+z}\xi_1+\xi_2-w^v\xi_3$	ξ_1	$-w^z\xi_1+\xi_3$
7	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	$\frac{-\xi_2+w^v\xi_3}{-1+w^{v+y}}$	ξ_1	$\frac{w^y\xi_2-\xi_3}{-1+w^{v+y}}$
8	$w^r=0, w^t=0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	$-\frac{w^{v+z}\xi_1+\xi_2-w^v\xi_3}{-1+w^{v+y}}$	ξ_1	$\frac{w^z\xi_1+w^y\xi_2-\xi_3}{-1+w^{v+y}}$
9	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y=0, w^z=0$	$-w^u\xi_1+\xi_2$	ξ_1	ξ_3
10	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	$-w^u\xi_1+\xi_2$	ξ_1	$-w^z\xi_1+\xi_3$
11	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	$-w^u\xi_1+\xi_2$	ξ_1	$w^{u+y}\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3$

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

12	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	$-w^u\xi_1+\xi_2$	ξ_1	$w^{u+y}\xi_1-w^z\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3$
13	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z=0$	$-w^u\xi_1+\xi_2-w^v\xi_3$	ξ_1	ξ_3
14	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	$-w^u\xi_1+w^{v+z}\xi_1+\xi_2-w^v\xi_3$	ξ_1	$-w^z\xi_1+\xi_3$
15	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	$\dfrac{w^u\xi_1-\xi_2+w^v\xi_3}{-1+w^{v+y}}$	ξ_1	$-\dfrac{w^{u+y}\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3}{-1+w^{v+y}}$
16	$w^r=0, w^t=0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	$-\dfrac{-w^u\xi_1+w^{v+z}\xi_1+\xi_2-w^v\xi_3}{-1+w^{v+y}}$	ξ_1	$-\dfrac{w^{u+y}\xi_1-w^z\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3}{-1+w^{v+y}}$
17	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y=0, w^z=0$	ξ_2	$\xi_1-w^t\xi_3$	ξ_3

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

18	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	ξ_2	$\frac{-\xi_1+w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$	$\frac{w^z\xi_1-\xi_3}{-1+w^{t+z}}$
19	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	ξ_2	$\xi_1+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3$	$-w^y\xi_2+\xi_3$
20	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	ξ_2	$-\frac{\xi_1+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$	$\frac{w^z\xi_1+w^y\xi_2-\xi_3}{-1+w^{t+z}}$
21	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z=0$	$\xi_2-w^v\xi_3$	$\xi_1-w^t\xi_3$	ξ_3
22	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	$\xi_2-\frac{w^v(w^z\xi_1-\xi_3)}{-1+w^{t+z}}$	$\frac{-\xi_1+w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$	$\frac{w^z\xi_1-\xi_3}{-1+w^{t+z}}$
23	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	$\frac{-\xi_2+w^v\xi_3}{-1+w^{v+y}}$	$\xi_1-\frac{w^t(w^y\xi_2-\xi_3)}{-1+w^{v+y}}$	$\frac{w^y\xi_2-\xi_3}{-1+w^{v+y}}$

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

24	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u=0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	$\xi_2-\dfrac{w^v(w^z\xi_1+w^y\xi_2-\xi_3)}{-1+w^{v+y}+w^{t+z}}$	$\xi_1-\dfrac{w^t(w^z\xi_1+w^y\xi_2-\xi_3)}{-1+w^{v+y}+w^{t+z}}$	$\dfrac{w^z\xi_1+w^y\xi_2-\xi_3}{-1+w^{v+y}+w^{t+z}}$
25	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y=0, w^z=0$	$-w^u\xi_1+\xi_2+w^{t+u}\xi_3$	$\xi_1-w^t\xi_3$	ξ_3
26	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	$\dfrac{w^u\xi_1-\xi_2+w^{t+z}\xi_2-w^{t+u}\xi_3}{-1+w^{t+z}}$	$\dfrac{-\xi_1+w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$	$\dfrac{w^z\xi_1-\xi_3}{-1+w^{t+z}}$
27	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	$\dfrac{-w^u\xi_1+\xi_2+w^{t+u}\xi_3}{1+w^{t+u+y}}$	$\dfrac{\xi_1+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3}{1+w^{t+u+y}}$	$\dfrac{w^{u+y}\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3}{1+w^{t+u+y}}$
28	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	$\dfrac{-w^u\xi_1+\xi_2-w^{t+z}\xi_2+w^{t+u}\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{t+z}}$	$\dfrac{\xi_1+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{t+z}}$	$\dfrac{w^{u+y}\xi_1-w^z\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{t+z}}$
29	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z=0$	$-w^u\xi_1+\xi_2+w^{t+u}\xi_3-w^v\xi_3$	$\xi_1-w^t\xi_3$	ξ_3

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

30	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	$-w^u\xi_1+\xi_2-\frac{(-w^{t+u}+w^v)(w^z\xi_1-\xi_3)}{-1+w^{t+z}}$	$\frac{-\xi_1+w^t\xi_3}{-1+w^{t+z}}$	$\frac{w^z\xi_1-\xi_3}{-1+w^{t+z}}$
31	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	$\frac{-w^u\xi_1+\xi_2+w^{t+u}\xi_3-w^v\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{v+y}}$	$\frac{\xi_1-w^{v+y}\xi_1+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{v+y}}$	$\frac{w^{u+y}\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{v+y}}$
32	$w^r=0, w^t\neq 0$ $w^u\neq 0, w^v\neq 0$ $w^y\neq 0, w^z\neq 0$	$\frac{-w^u\xi_1+w^{v+z}\xi_1+\xi_2-w^{t+z}\xi_2+w^{t+u}\xi_3-w^v\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{v+y}-w^{t+z}}$	$\frac{\xi_1-w^{v+y}\xi_1+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3}{1+w^{t+u+y}-w^{v+y}-w^{t+z}}$	$-\frac{w^{u+y}\xi_1-w^z\xi_1-w^y\xi_2+\xi_3}{-1-w^{t+u+y}+w^{v+y}+w^{t+z}}$
33	$w^r\neq 0, w^t=0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y=0, w^z=0$	ξ_2	$\xi_1-w^r\xi_2$	ξ_3
34	$w^r\neq 0, w^t=0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y=0, w^z\neq 0$	ξ_2	$\xi_1-w^r\xi_2$	$-w^z\xi_1+w^{r+z}\xi_2+\xi_3$
35	$w^r\neq 0, w^t=0$ $w^u=0, w^v=0$ $w^y\neq 0, w^z=0$	ξ_2	$\xi_1-w^r\xi_2$	$-w^y\xi_2+\xi_3$

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

36	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u = 0, w^v = 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	ξ_2	$\xi_1 - w^r \xi_2$	$-w^z \xi_1 - w^y \xi_2 + w^{r+z} \xi_2 + \xi_3$
37	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z = 0$	$\xi_2 - w^v \xi_3$	$\xi_1 - w^r \xi_2 + w^{r+v} \xi_3$	ξ_3
38	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z \neq 0$	$\dfrac{w^{v+z}\xi_1 + \xi_2 - w^v \xi_3}{1 + w^{r+v+z}}$	$\dfrac{\xi_1 - w^r \xi_2 + w^{r+v} \xi_3}{1 + w^{r+v+z}}$	$\dfrac{-w^z \xi_1 + w^{r+z} \xi_2 + \xi_3}{1 + w^{r+v+z}}$
39	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z = 0$	$\dfrac{-\xi_2 + w^v \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^{v+y}\xi_1 + w^r \xi_2 - w^{r+v} \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$	$\dfrac{w^y \xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$
40	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	$-\dfrac{w^{v+z}\xi_1 + \xi_2 - w^v \xi_3}{-1 + w^{v+y} - w^{r+v+z}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^{v+y}\xi_1 + w^r \xi_2 - w^{r+v} \xi_3}{-1 + w^{v+y} - w^{r+v+z}}$	$\dfrac{w^z \xi_1 + w^y \xi_2 - w^{r+z} \xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y} - w^{r+v+z}}$
41	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y = 0, w^z = 0$	$\dfrac{w^u \xi_1 - \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2}{-1 + w^{r+u}}$	ξ_3

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

42	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y = 0, w^z \neq 0$	$\frac{w^u\xi_1 - \xi_2}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{-\xi_1 + w^r\xi_2}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{w^z\xi_1 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}}$
43	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y \neq 0, w^z = 0$	$\frac{w^u\xi_1 - \xi_2}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{-\xi_1 + w^r\xi_2}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{-w^{u+y}\xi_1 + w^y\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}}$
44	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	$\frac{w^u\xi_1 - \xi_2}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{-\xi_1 + w^r\xi_2}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{-w^{u+y}\xi_1 + w^z\xi_1 + w^y\xi_2 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}}$
45	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z = 0$	$\frac{w^u\xi_1 - \xi_2 + w^v\xi_3}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{-\xi_1 + w^r\xi_2 - w^{r+v}\xi_3}{-1+w^{r+u}}$	ξ_3
46	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z \neq 0$	$\frac{w^u\xi_1 - w^{v+z}\xi_1 - \xi_2 + w^v\xi_3}{-1+w^{r+u} - w^{r+v+z}}$	$-\frac{\xi_1 - w^r\xi_2 + w^{r+v}\xi_3}{-1+w^{r+u} - w^{r+v+z}}$	$\frac{w^z\xi_1 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u} - w^{r+v+z}}$
47	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z = 0$	$\frac{w^u\xi_1 - \xi_2 + w^v\xi_3}{-1+w^{r+u} + w^{v+y}}$	$-\frac{\xi_1 - w^{v+y}\xi_1 - w^r\xi_2 + w^{r+v}\xi_3}{-1+w^{r+u} + w^{v+y}}$	$\frac{-w^{u+y}\xi_1 + w^y\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u} + w^{v+y}}$

Tablo 4.1. *w*’nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

48	$w^r \neq 0, w^t = 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	$\dfrac{w^u \xi_1 - w^{v+z}\xi_1 - \xi_2 + w^v \xi_3}{-1 + w^{r+u} + w^{v+y} - w^{r+v+z}}$	$-\dfrac{\xi_1 - w^{v+y}\xi_1 - w^r \xi_2 + w^{r+v}\xi_3}{-1 + w^{r+u} + w^{v+y} - w^{r+v+z}}$	$\dfrac{-w^{u+y}\xi_1 + w^z \xi_1 + w^y \xi_2 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1 + w^{r+u} + w^{v+y} - w^{r+v+z}}$
49	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v = 0$ $w^y = 0, w^z = 0$	ξ_2	$\xi_1 - w^r \xi_2 - w^t \xi_3$	ξ_3
50	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v = 0$ $w^y = 0, w^z \neq 0$	ξ_2	$\dfrac{-\xi_1 + w^r \xi_2 + w^t \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$	$\dfrac{w^z \xi_1 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$
51	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v = 0$ $w^y \neq 0, w^z = 0$	ξ_2	$\xi_1 - w^r \xi_2 + w^{t+y}\xi_2 - w^t \xi_3$	$-w^y \xi_2 + \xi_3$
52	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v = 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	ξ_2	$-\dfrac{\xi_1 - w^r \xi_2 + w^{t+y}\xi_2 - w^t \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$	$-\dfrac{-w^z \xi_1 - w^y \xi_2 + w^{r+z}\xi_2 + \xi_3}{-1 + w^{t+z}}$
53	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z = 0$	$\xi_2 - w^v \xi_3$	$\xi_1 - w^r \xi_2 - w^t \xi_3 + w^{r+v}\xi_3$	ξ_3

Tablo 4.1. *w*’nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

54	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z \neq 0$	$\xi_2 + \dfrac{w^v(-w^z\xi_1 + w^{r+z}\xi_2 + \xi_3)}{-1 + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^r\xi_2 + w^t\xi_3 - w^{r+v}\xi_3}{-1 + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$	$-\dfrac{-w^z\xi_1 + w^{r+z}\xi_2 + \xi_3}{-1 + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$
55	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z = 0$	$\dfrac{-\xi_2 + w^v\xi_3}{-1 + w^{v+y}}$	$\xi_1 - w^r\xi_2 - \dfrac{(w^t - w^{r+v})(w^y\xi_2 - \xi_3)}{-1 + w^{v+y}}$	$\dfrac{w^y\xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y}}$
56	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u = 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	$-\dfrac{w^{v+z}\xi_1 + \xi_2 - w^{t+z}\xi_2 - w^v\xi_3}{-1 + w^{v+y} + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^{v+y}\xi_1 + w^r\xi_2 - w^{t+y}\xi_2 + w^t\xi_3 - w^{r+v}\xi_3}{-1 + w^{v+y} + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$	$\dfrac{w^z\xi_1 + w^y\xi_2 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3}{-1 + w^{v+y} + w^{t+z} - w^{r+v+z}}$
57	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y = 0, w^z = 0$	$\dfrac{w^u\xi_1 - \xi_2 - w^{t+u}\xi_3}{-1 + w^{r+u}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^r\xi_2 + w^t\xi_3}{-1 + w^{r+u}}$	ξ_3
58	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y = 0, w^z \neq 0$	$-\dfrac{-w^u\xi_1 + \xi_2 - w^{t+z}\xi_2 + w^{t+u}\xi_3}{-1 + w^{r+u} + w^{t+z}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^r\xi_2 + w^t\xi_3}{-1 + w^{r+u} + w^{t+z}}$	$\dfrac{w^z\xi_1 - w^{r+z}\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1 + w^{r+u} + w^{t+z}}$
59	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y \neq 0, w^z = 0$	$-\dfrac{-w^u\xi_1 + \xi_2 + w^{t+u}\xi_3}{-1 + w^{r+u} - w^{t+u+y}}$	$\dfrac{-\xi_1 + w^r\xi_2 - w^{t+y}\xi_2 + w^t\xi_3}{-1 + w^{r+u} - w^{t+u+y}}$	$\dfrac{-w^{u+y}\xi_1 + w^y\xi_2 - \xi_3 + w^{r+u}\xi_3}{-1 + w^{r+u} - w^{t+u+y}}$

Tablo 4.1. *w*'nın kuvvetlerinin sıfır olma ve olmama durumlarına göre karşılaşılan durumlar ve çözümleri (devam)

60	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v = 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	$-\frac{-w^u\xi_1+\xi_2-w^{t+z}\xi_2+w^{t+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{t+z}}$	$\frac{-\xi_1+w^r\xi_2-w^{t+y}\xi_2+w^t\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{t+z}}$	$\frac{-w^{u+y}\xi_1+w^z\xi_1+w^y\xi_2-w^{r+z}\xi_2-\xi_3+w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{t+z}}$
61	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z = 0$	$\frac{w^u\xi_1-\xi_2-w^{t+u}\xi_3+w^v\xi_3}{-1+w^{r+u}}$	$\frac{-\xi_1+w^r\xi_2+w^t\xi_3-w^{r+v}\xi_3}{-1+w^{r+u}}$	ξ_3
62	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y = 0, w^z \neq 0$	$\frac{w^u\xi_1-w^{v+z}\xi_1-\xi_2+w^{t+z}\xi_2-w^{t+u}\xi_3+w^v\xi_3}{-1+w^{r+u}+w^{t+z}-w^{r+v+z}}$	$-\frac{\xi_1-w^r\xi_2-w^t\xi_3+w^{r+v}\xi_3}{-1+w^{r+u}+w^{t+z}-w^{r+v+z}}$	$\frac{w^z\xi_1-w^{r+z}\xi_2-\xi_3+w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}+w^{t+z}-w^{r+v+z}}$
63	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z = 0$	$-\frac{-w^u\xi_1+\xi_2+w^{t+u}\xi_3-w^v\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{v+y}}$	$-\frac{\xi_1-w^{v+y}\xi_1-w^r\xi_2+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3+w^{r+v}\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{v+y}}$	$\frac{-w^{u+y}\xi_1+w^y\xi_2-\xi_3+w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{v+y}}$
64	$w^r \neq 0, w^t \neq 0$ $w^u \neq 0, w^v \neq 0$ $w^y \neq 0, w^z \neq 0$	$-\frac{-w^u\xi_1+w^{v+z}\xi_1+\xi_2-w^{t+z}\xi_2+w^{t+u}\xi_3-w^v\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{v+y}+w^{t+z}-w^{r+v+z}}$	$-\frac{\xi_1-w^{v+y}\xi_1-w^r\xi_2+w^{t+y}\xi_2-w^t\xi_3+w^{r+v}\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{v+y}+w^{t+z}-w^{r+v+z}}$	$\frac{-w^{u+y}\xi_1+w^z\xi_1+w^y\xi_2-w^{r+z}\xi_2-\xi_3+w^{r+u}\xi_3}{-1+w^{r+u}-w^{t+u+y}+w^{v+y}+w^{t+z}-w^{r+v+z}}$

4.2. Verilen İki $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matris İle Karşılıklı Değişmeli Olan $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent Matris Elde Etme

$s \geq 1$ olsun. Şimdi hedef Algoritma 1 ile elde edilen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisi ve Algoritma 2 ile elde edilen $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisi için $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$ ve $\mathbf{AC} = \mathbf{CA}$ olacak biçimde bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bulmaktır. $\mathbf{C}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent olduğu için köşegenleştirilebilirdir. Ayrıca, Teorem 2.2.4'ten $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$ ve $\mathbf{AC} = \mathbf{CA}$ durumlarının sağlanması için $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ matrislerinin eşanlı köşegenleştirilebilir olması gerekir. Yani $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{S}\,diag(\mu_1,\ldots,\mu_n)\mathbf{S}^{-1}$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{S}\,diag(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\mathbf{S}^{-1}$ olmalıdır. Burada Λ (3.7) ile verilen küme olmak üzere, $\gamma_i \in \Lambda \setminus \sigma(\mathbf{A}) \cup \sigma(\mathbf{B})$'dir.

$s = 0$ ve $\mathbf{X_A}, \mathbf{Y_A}, \mathbf{X_B}, \mathbf{Y_B}$ (3.15)'deki gibi olduğunda

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} \mathbf{X_C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y_C} \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}$$

bize keyfi olarak oluşturulan $\{\mathbf{K}, 1\}$–potent $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri ile değişmeli olan tüm $\{\mathbf{K}, 1\}$–potent $\mathbf{C}$ matrislerini verir. Burada $\mathbf{X_A X_C} = \mathbf{X_C X_A}$, $\mathbf{X_B X_C} = \mathbf{X_C X_B}$, $\mathbf{Y_A Y_C} = \mathbf{Y_C Y_A}$, $\mathbf{Y_B Y_C} = \mathbf{Y_B Y_A}$'dır.

Algoritma 4

Girdiler: Algoritma 1'den elde edilen $\mathbf{A}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisi ve Algoritma 2'den elde edilen $\mathbf{B}$ $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisi ve P_i projektörleri.

Çıktılar: $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri ile değişmeli olan $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{C}$ matrisi.

Adım 1: $\gamma := w^p_{(s+1)^2-1}$ olarak belirle. Burada $p \notin \{1, \varphi(1), \varphi(p)\}$ dir.

Adım 2: $i = 1,\ldots,r$ için $\mathbf{Y}_i = \gamma \mathbf{P}_{2i-1} + \gamma^{\frac{\varphi(p)}{p}} \mathbf{P}_{2i}$ matrislerini hesapla.

Adım 3: $\mathbf{C}=\sum_{i=1}^{r}\mathbf{Y}_i+\sum_{i=2r+1}^{n}\mathbf{P}_i$ matrisini hesapla.

γ, Algoritma 1 ve Algoritma 2'deki Λ kümesinde kullanılmamış olan w değerleri arasından seçilir. İkinci adımda $\gamma^{\frac{\varphi(p)}{p}}=w^{\varphi(p)}$ olduğu açıktır.

4.3. Üç Karşılıklı Değişmeli $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent Matrisin Lineer Kombinasyonunun $\{\mathbf{K},s+1\}$–potentliği İle İlgili Algoritma

Algoritma 1 ile elde edilen $\mathbf{A}$, Algoritma 2 ile elde edilen $\mathbf{B}$ ve Algoritma 4 ile elde edilen $\mathbf{C}$ matrisleri için aşağıdaki lineer bağıntı oluşturulabilir,

$$\mathbf{T}=c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{B}+c_3\mathbf{C}. \tag{4.7}$$

Burada c_1,c_2 ve c_3 belirlenecek sıfır olmayan kompleks sayılardır. Bu bölümde $\mathbf{T}$ bir $\{\mathbf{K},s+1\}$–potent matris olacak şekildeki c_1,c_2 ve c_3 skalerleri bulunacaktır. $s=0$ değeri için tüm c_1,c_2 ve c_3'ler eşitliği sağlar. Bundan dolayı $s\geq 1$ kabul edilecektir.

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}\,diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{B}=\mathbf{S}\,diag(\mu_1,\ldots,\mu_n)\mathbf{S}^{-1}\ \text{ve}\ \mathbf{C}=\mathbf{S}\,diag(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\mathbf{S}^{-1}$$

olduğundan (4.7) kullanılarak

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \gamma_1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_n & \mu_n & \gamma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{T}=\mathbf{S}\,diag(\xi_1,\ldots,\xi_n)\mathbf{S}^{-1}$ ve her bir ξ_i, $\{0\}\cup\Omega_{(s+1)^2-1}$'deki tüm değerlerden herhangi biridir.

Şimdi lineer kombinasyonların bu sınıfını hesaplamak için bir algoritma oluşturulabilir.

Algoritma 5

Girdiler: Algoritma 1'den elde edilen $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{A}$ matrisi, Algoritma 2'den elde edilen $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{B}$ ve Algoritma 4'den elde edilen $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent $\mathbf{C}$ matrisi.

Çıktılar: $\mathbf{T} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{C}$ bir $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matris olacak biçimdeki tüm c_1, c_2 ve c_3 değerleri.

Adım 1: $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \mu_n & \gamma_n \end{bmatrix}$ olarak belirle.

Adım 2: $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ olarak seç ve $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ olarak belirle.

Adım 3: $\mathbf{M}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \xi$ lineer sistemini çöz.

Adım 4: Adım 2 ve 3'ü $\{0\} \cup \Omega_{(s+1)^2-1}$ kümesindeki tüm ξ_i mümkün değerleri için tekrarla.

Örnek 4.1. $s = 2$, $n = 3$ ve $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ için Algoritma 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

matrisini verir.

Örnek 4.2. Örnek 4.1'deki aynı $\mathbf{K}$ matrisi için Algoritma 2

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

matrisini verir.

Örnek 4.3. Örnek 4.1 ve Örnek 4.2'den elde edilen $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ matrisleri için Algoritma 4

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisini verir.

Örnek 4.4. Örnek 4.1, Örnek 4.2 ve Örnek 4.3'den elde edilen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrisleri için Algoritma 5 kullanılarak $\gamma=\begin{bmatrix} -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ için

$$c_1=\left(-\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)\left(\left(-1-i\right)+\sqrt{2}\right),\; c_2=\frac{i+\sqrt{2}}{\left(1-i\right)+\sqrt{2}} \text{ ve } c_3=\frac{\left(-1+i\right)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\left(1-i\right)+\sqrt{2}\right)}$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 5. TARTIŞMALAR VE ÖNERİLER

c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ değişmeli $n \times n$ boyutlu sıfırdan farklı $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent kompleks matrisler olmak üzere, $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$ lineer kombinasyonu ele alınsın. Bölüm 4'te, bu kombinasyonun bazı koşullar altında $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği araştırıldı. Ayrıca, bu lineer kombinasyonun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği ile ilgili bir algoritma verildi.

Bu çalışma hazırlanırken daha önce iki $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisin lineer kombinasyonunun $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği problemini ele alan [20] çalışmasından ve $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler için algoritmalar problemini ele alan [21] çalışmasından esinlenildi.

Bundan sonra verilen $n \in \mathbb{N}$ sayısı için n tane $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisler için daha fazla $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrisin lineer kombinasyonlarının $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği problemleri ele alınabilir ve bu lineer kombinasyonların $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potentliği ile ilgili algoritmalar geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint, Linear Algebra Appl., 388, 67–78, 2004.

[2] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321, 3–7 2000.

[3] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 25–29, 2004.

[4] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., ÖZDEMİR, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 45–51, 2004.

[5] BAKSALARY, J.K., BAKSALARY, O.M., STYAN, G.P.H., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl., 354, 21–34, 2002.

[6] BAKSALARY, O.M., BENÍTEZ, J., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting, Linear Algebra Appl., 424, 320–337, 2007.

[7] BEN–ISRAEL, A., GREVILLE, T.N.E., Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.

[8] BENÍTEZ, J., LIU, X., ZHU, T., Nonsingularity and group invertibility of linear combination of two k–potent matrices, Linear Multilinear Alg., 58, 1023–1035, 2010.

[9] BENÍTEZ, J., THOME, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t–potent matrix that commute, Linear Algebra Appl., 403, 414–418, 2005.

[10] BENÍTEZ, J., THOME, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t–potent matrix that do not commute, Linear Multilinear Algebra, 56(6), 679–687, 2008.

[11] DATTA, L., MORGERA, S.D., On the reducibility of centrosymmetric matrices, applications in engineering problems, Circuits Systems Signal Process 8(1), 71–96, 1989.

[12] DAVIS, P.J., Circulant Matrices, second ed., Chelsea Publishing, 1994.

[13] GELLAI, B., Determination of molecular symmetry coordinates using circulant matrices, Journal of Molecular Structure, 114, 21–26, 1984.

[14] HIGHAM, N.J., Functions of Matrices, SIAM, Philadelphia, 2008.

[15] GROß, J., TRENKLER, G., Nonsingularity of the difference of two oblique projectors, SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 21, 390–395, 1999.

[16] G.L. LI, FENG, Z.H., Mirrorsymmetric matrices, their basic properties, and an application on odd/even-mode decomposition of symmetric multiconductor transmission lines, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 24(1), 78–90, 2002.

[17] G.L. LI, FENG, Z.H., Mirror-transformations of matrices and their application on odd/even modal decomposition of mirror-symmetric multiconductor transmission line equations, IEEE Transactions on Advanced Packaging, 26(2), 172–181, 2003.

[18] HORN, R.A., JOHNSON, C.R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[19] KOLIHA, J.J., RAKOČEVIĆ, V., STRAŠKRABA, I., The difference and sum of projectors, Linear Algebra Appl., 388, 279–288, 2004.

[20] LEBTAHI, L., ROMERO, O., THOME, N., Characterizations of $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrices and applications, Linear Algebra and its Applications, 436, 293–306, 2012.

[21] LEBTAHI, L., ROMERO, O., THOME, N., Algorithms for $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrix constructions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 249, 157–162, 2013.

[22] LEBTAHI, L., ROMERO, O., THOME, N., Relations between $\{\mathbf{K}, s+1\}$–potent matrices and different classes of complex matrices, Linear Algebra and its Applications, 438, 1517–1531, 2013.

[23] LIU, X., WU, S., BENÍTEZ, J., On nonsingularity of combinations of two group invertible matrices and two tripotent matrices, Linear Multilinear Alg., 59(12), 1409–1417, 2011.

[24] ÖZDEMİR, H., SARDUVAN, M., ÖZBAN, A.Y., GÜLER, N., On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices, Appl. Math. Comput., 207, 197–201, 2009.

[25] ÖZDEMİR, H., SARDUVAN, M., Notes on linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, 16(2), 83–90, 2008.

[26] ÖZDEMİR, H., ÖZBAN, A.Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput., 159, 439–448, 2004.

[27] SARDUVAN, M., ÖZDEMİR, H., On nonsingularity of linear combinations of tripotent matrices, Acta Universitatis Apulensis 25, 159–164, 2011.

[28] SARDUVAN, M., ÖZDEMİR, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Appl. Math. Comput., 200, 401–406, 2008.

[29] VENIT, S., BISHOP, W., Elementary Linear Algebra, PWS Publishers, Massachusetts, 1985.

[30] XU, C., XU, R., Tripotency of a linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute, Linear Algebra Appl., 437, 2091–2109, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

İlker Güven YILMAZ, 25.10.1990 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2008 yılında İstanbul'da tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve buradan 2012 yılında mezun oldu. Yine aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Bilim Dalı'nda yüksek lisans programına kaydoldu ve halen öğrenimine devam etmektedir.