T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER VE HİPERBOLİK SPINORLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep KETENCİ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

Haziran 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER VE HİPERBOLİK SPINORLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep KETENCİ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**

Bu tez 16/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR	**Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK**	**Doç. Dr. Sadık BAĞCI**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Zeynep KETENCİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e şükran ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımcı olan Arş. Gör. Tülay ERİŞİR'e teşekkürü borç bilirim.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan annem Birsen KETENCİ, babam Sinan KETENCİ ve kardeşim Gizem KETENCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR ii
İÇİNDEKİLER iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ v
ÖZET vi
SUMMARY vii

BÖLÜM 1.
GİRİŞ 1

BÖLÜM 2.
TEMEL KAVRAMLAR 3

BÖLÜM 3.
HİPERBOLİK SPINOR.. 18

BÖLÜM 4.
MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLERİN HİPERBOLİK SPINOR
GÖSTERİMLERİ…………………………………………………………..... 28
4.1. Eğriler ve Frenet Türev Denklemleri...……………………………….…...28
4.2. Timelike Binormalli Spacelike Eğrilerin Hiperbolik Spinor Gösterimi..29
4.3. Spacelike Binormalli Spacelike Eğrilerin Hiperbolik Spinor Gösterimi.44

BÖLÜM 5.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER……………………………………………………62

KAYNAKLAR……………………………………………………………………63

ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………………………65

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$	: 3-boyutlu Minkowski uzayında vektörler
α	: Eğri
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
I	: Açık aralık
κ	: Eğrilik
$\Vert\ \Vert$	: Norm
$O(n)$	: Ortogonal grup
$\hat{\psi}$	: ψ spinorunun eşi
$\overline{\psi}$	: ψ spinorunun eşleniği
$\psi\ ,\xi$	: Spinorlar
ψ^t	: ψ spinorunun transpozu
$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu Minkowski vektör uzayı
$SU(1,3)$	: Özel üniter grup
$SO(n)$	: Özel ortogonal grup
$SU(2,H)$	: Özel üniter grup
$SU(n)$	: Özel üniter grup
$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$	: 3-boyutlu Minkowski uzayının Frenet çatısı
τ	: Torsiyon
$U(n)$	: Üniter grup
V	: Vektör uzayı
$\langle\ ,\ \rangle$	: İç çarpım
$\times$	: Vektörel çarpım

ÖZET

Anahtar kelimeler: Frenet Denklemleri, Minkowski Uzayı, Hiperbolik Spinor.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Minkowski uzayında temel tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölüm tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde hiperbolik spinorlar, Minkowski uzayındaki ortonormal taban yardımıyla tanıtılmıştır. Dördüncü bölüm üç alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Dördüncü bölümün birinci alt bölümünde Minkowski uzayında eğriler tanıtılmış, ikinci alt bölümünde spacelike eğriler ve Frenet türev denklemleri hiperbolik spinorlar cinsinden, üçüncü alt bölümde ise Minkowski uzayında timelike eğriler ve Frenet türev denklemleri hiperbolik spinorlar cinsinden verilmiştir. Ayrıca $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin Frenet türev denklemlerinin hiperbolik spinor formuyla ilgili uygulamalara yer verilmiştir.

Beşinci bölümde çalışmanın özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

CURVES IN MINKOWSKI 3-SPACE AND HYPERBOLIC SPINORS

SUMMARY

Keywords: Frenet Equations, Minkowski Space, Hyperbolic Spinor.

This thesis consists of five chapters. First chapter is reserved for introduction. In the second chapter basic definitions and fundamental theorems are given in Minkowski space.

Third and forth chapters composes the original section of the thesis. In the third chapter hyperbolic spinors have been introduced with the help of the orthonormal base in Minkowski space. Fourth chapter is organized into three subsections. In the first subsection of the fourth section is introduced curves in Minkowski space, in the second subsection spacelike curves and Frenet frame represented as hyperbolic spinors and third subsection timelike curves and Frenet frame represented as hyperbolic spinors in Minkowski space. Also exercises about Frenet frame of $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_1^3$ are mentioned.

In the fifth chapter of this thesis the summary of the work was made and some suggestions for the following researches were given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Spinorlar ilk kez modern bir teori olan Lie grupları ile ilgili temel bir çalışmaya da sahip olan Fransız matematikçi Elie Cartan tarafından keşfedilmiştir. Cartan'ın çalışmasındaki temel amaçlardan biri bu matematiksel ifadenin sadece geometrik tanımını vererek sistematik olarak spinor teorisini geliştirmektir ve bununla birlikte diferensiyel geometri, grup teorisi ve matematiksel fiziğe önemli katkılarda bulunmaktır [1]. Diğer bir çalışmada ise Vivarelli, üç boyutlu Öklidyen uzayda katı bir cismin yer değiştirmesiyle ilgili Euler teoreminin vektör formülasyonundan türetilen bir-indeksli spinorlara ve kuaterniyonlara yeni bir yaklaşımda bulunmuştur. Ayrıca kuaterniyonlar ve bir-indeksli spinorlar arasında lineer ve birebir bir bağıntı tanıtmıştır [2]. Spinorlar fizik alanında da çok sayıda kullanım alanına sahiptir. Örneğin bu alanlardan biri de Quantum mekaniğidir. Spinorlar bu alanda, bir spinorun bileşenlerinden başka bir şey olmayan dört dalga fonksiyonları ve elektron için ünlü Dirac denklemlerini oluşturur. Bu anlamda sayısız çalışma yayınlanmıştır. Bunlardan biri olan kusursuz ve temel olarak adlandırılabilecek bir çalışma Weyl ve Brauer tarafından yapılmıştır [3]. Fakat bu çalışmaların hemen hemen hepsinde spinorlar sezgisel bir geometrik görüş olmadan sadece resmi bir şekilde tanıtılmıştır. Maalesef, bu yüzden spinorlarla ilgili mevcut literatürün anlaşılması bir hayli güçtür. Çoğu, modern cebir bilgisi olarak varsayılır. Özellikle grup teorisi konuyu soyut ve dolaylı bir yolla sunduğundan; konunun anlaşılması bir hayli güçtür. Fakat son yıllarda geometrik anlamda konu üzerine daha anlaşılır birkaç çalışma yapılmıştır. Bunlardan biri [4] deki çalışmadır. Torres ve diğerleri bu çalışmada karşılıklı ortogonal birim vektörlerden oluşan üçlüyü, spinor olarak adlandırılan iki kompleks bileşenli tek bir vektör bakımından ifade etmişlerdir. Ayrıca diğer bir çalışmada Kişi ve Tosun yönlendirilmiş bir yüzey üzerinde verilen Darboux çatısının spinor formülasyonunu ve Frenet ile Darboux çatılarının spinor gösterimleri arasındaki ilişkiyi vermişlerdir [5]. Benzer olarak [6] deki çalışmada $\mathbb{E}^3$

3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin spinor Bishop denklemleri ifade edilmiştir. Ayrıca Bishop ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler verilmiştir [6].

Bu çalışmanın amacı ise, fizikte, matematikte ve astronomi gibi birçok alanda çok sayıda uygulama alanına sahip olması nedeniyle spinorların teorik anlamda incelenmesidir. Bu çalışmada [5,6,7] çalışmalarına ek olarak, 3-boyutlu Minkowski uzayında alınan bir eğrinin Frenet çatısının hiperbolik spinor gösterimi incelenecektir. Ayrıca diferensiyel geometrinin temel teoremi hiperbolik spinorlar ile ifade edilecektir.

Son olarak 3-boyutlu Minkowski uzayının Frenet çatısına, iki hiperbolik bileşenli tek bir spinor vektörün karşılık geldiği örneklerle gösterilecektir. Böylece konunun daha anlaşılır olması ve bu konuda çalışacak kişilere öncülük etmesi hedeflenmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Lie grubu, Lie cebiri, adjoint gösterimi, skaler çarpım ve bize gerekli olan bazı tanımlar ve teoremler hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1. Bir Lie grubu, diferensiyellenebilir grup operatörlerine sahip diferensiyellenebilir bir manifolddur; yani G deki grup operatörü olan

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab$$

ve G deki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \to G, \;\; \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin ikisi de diferensiyellenebilirdir. G Lie grubunun bir otomorfizimi hem diffeomorfizim hem de grup izomorfizimi olan

$$\begin{aligned} \phi : G &\to G \\ a &\to \phi(a) \end{aligned}$$

dönüşümüdür. Otomorfizimler Lie grubu üzerindeki özellikleri korur [18].

Tanım 2.2. G Lie grubunun bir elemanı a olsun. Her $g \in G$ için $l_a(g) = ag$ olarak tanımlanan $l_a : G \to G$ dönüşümüne G nin sol çarpımı denir. l_a bir diffeomorfizimdir. Her $g \in G$ için $r_a(g) = ga$ olarak tanımlanan $r_a : G \to G$ dönüşümüne G nin sağ çarpımı denir. r_a bir diffeomorfizimdir [14].

Tanım 2.3. V bir vektör uzayı olsun.

$$
\begin{aligned}
[\ ,\ ] \quad : \quad & V \times V \to V \\
& (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \to \quad [\ ,\ ](\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]
\end{aligned}
$$

Biçimindeki bir dönüşüm her $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in V$ için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa bu dönüşüme Bracket operatörü, $(V, [\ ,\ ])$ ikilisine de bir Lie cebiri denir.

i) $[\ ,\ ]$ bilineerdir.
ii) $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = -[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]$ (antisimetrik)
iii) $[[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}], \boldsymbol{Z}] + [[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \boldsymbol{X}] + [[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}], \boldsymbol{Y}] = 0$

dir [14].

Tanım 2.4. Eğer her $a, g \in G$ için $dl_a(X_g) = X_{ag}$ ise, G Lie grubu üzerindeki $\boldsymbol{X}$ vektör alanı sol invaryanttır. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
l_a : \ & G \to G \\
& g \to l_a(g) = ag
\end{aligned}
$$

sol çarpımın

$$
\begin{aligned}
dl_a = (l_a) : & T_G(g) \to T_G(ag) \\
& X_g \to dl_a(X_g) = X_{ag}
\end{aligned}
$$

türev dönüşümü $\boldsymbol{X}$ in oluşturduğu tanjant vektörleri yer değiştirir. Sol invaryant vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

G deki sol invaryant vektör alanlarının cümlesi $X_l G$ olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemleri $X_l G$ yi bir vektör uzayı yapar. $X_l G$

de [,] parantez operatörü tanımlanarak $X_l G$ bir Lie cebiri olur. $X_l G$, boy$G = n$ (sonlu) boyutuna sahiptir [7].

Lemma 2.5. $\boldsymbol{X} \in X_l G$ elemanını $\boldsymbol{X}_e \in T_G(e)$ elemanına dönüştüren $f : X_l G \to T_G(e)$ fonksiyonu bir lineer izomorfizimdir. Burada e, G nin grup işlemine göre birim elemanıdır.

$\phi : G \to G$ bir otomorfizim olsun. $\boldsymbol{X} \in X_l G$ ise $d\phi(\boldsymbol{X}) \in X_l G$ dir ve

$d\phi : X_l G \to X_l G$ Lie cebiri izomorfizimine ϕ nin diferensiyeli denir. $d\phi$ diferensiyeli

$d\phi_e : T_G(e) \to T_G(e)$ dönüşümü ile ifade edilir [7].

Tanım 2.6. $a \in G$ olmak üzere g elemanını aga^{-1} elemanına dönüştüren

$$\begin{aligned} C_a : G &\to G \\ g &\to C_a(g) = aga^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda C_a bir diffeomorfizim olup onun diferensiyeli Ad_a ile gösterilir. O halde $dC_a = Ad_a$ dır. $a, b \in G$ olduğunda $C_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1}$ dir. Böylece $C_{ab} = C_a \circ C_b$ olur. Diferensiyel alındığında ise

$$Ad_{ab} = Ad_a \circ Ad_g$$

elde edilir. $a \to Ad_a$ grup homomorfizmine G nin adjoint gösterimi denir [7].

Tanım 2.7. V bir reel vektör uzayı üstünde, $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ikilineer fonksiyonuna ikilineer form, eğer bu ikilineer form simetrik ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye simetrik ikilineer form denir [14].

Tanım 2.8. $\langle\ ,\ \rangle$, V üstünde ikilineer form olsun.

i) $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{v} \neq 0 \Rightarrow \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ önermesi doğru ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye pozitif tanımlı,

ii) $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{v} \neq 0 \Rightarrow \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ önermesi doğru ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye negatif tanımlı,

iii) $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye yarı pozitif tanımlı,

iv) $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye yarı negatif tanımlı,

v) $\forall \boldsymbol{w} \in V,\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ oluyor ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye non-dejenere bir form denir [7].

$\langle\ ,\ \rangle$, V nin alt uzayına indirgenebilir. Bu indirgenen simetrik bilineer form dejenere veya non-dejeneredir.

Tanım 2.9. $\langle\ ,\ \rangle$, V üstünde simetrik ikilineer form olsun. $\langle\ ,\ \rangle$ nin W alt uzayına kısıtlanması $\langle\ ,\ \rangle\big|_W$ negatif tanımlı olacak biçimdeki W alt uzaylarının boyutlarının en büyüğüne $\langle\ ,\ \rangle\big|_W$ nin indeksi denir ve ν ile gösterilir. $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ olduğu açıktır.

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik ikilineer form olsun.

$$\mathrm{q} : V \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{v} \to q(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$$

fonksiyonuna $\langle\ ,\ \rangle$ den elde edilen kuadratik form denir. q kuadratik formu verildiğinde, $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik ikilineer formu verilmiş demektir. Gerçekten,

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \frac{1}{2}\left[q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) - q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{w}) \right]$$

dır. V nin bir bazı $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ olmak üzere, $g_{ij} = < e_i, e_j >$ diyelim. $\left[g_{ij} \right]$ matrisine, g nin $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ bazına göre bileşenlerinin matrisi denir. g simetrik olduğundan $\left[g_{ij} \right]$ matrisi de simetriktir [7].

Teorem 2.10. $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik ikilineer formu nondejeneredir ancak ve ancak V nin bir bazına göre $\langle\ ,\ \rangle$ ye karşılık gelen matrisin determinantı sıfırdan farklıdır [7].

Tanım 2.11. V üstünde simetrik, nondejenere bir $\langle\ ,\ \rangle$ ikilineer formuna V üstünde bir skaler çarpım denir. $\langle\ ,\ \rangle$, W üstünde bir pozitif tanımlı skaler çarpım ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye V üstünde bir iç çarpım denir [14].

Tanım 2.12. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere V üstünde bir skalar çarpım varsa V ye skaler çarpımlı vektör uzayı denir [14].

Tanım 2.13. V skaler çarpımlı bir uzay ve $\boldsymbol{v} \in V$ olsun.

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle|}$$

eşitliğiyle belirli $\|\boldsymbol{v}\|$ sayısına $\boldsymbol{v}$ nin normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör adı verilir [7].

Teorem 2.14. $V \neq \{\varnothing\}$ olmak üzere, V skaler çarpımlı bir vektör uzayı ise V nin ortonormal bazı vardır [7].

V skaler çarpımlı vektör uzayının ortonormal bir $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ bazına göre $\left[g_{ij}\right]$ matrisin köşegensel bir matristir. Çünkü, $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}\varepsilon_j$ dir. Burada $\varepsilon_j = \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \rangle$, -1 veya 1 dir. V vektör uzayının ortonormal bir bazı sıralı olarak göz önüne alındığında, ε_j sayıları negatif olan vektörlerin son sırada yazıldığını varsayacağız.

Teorem 2.15. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, V nin ortonormal bir bazı olsun. V nin her $\boldsymbol{v}$ elemanı

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i \rangle \, \boldsymbol{e}_i$$

biçiminde bir ve yalnız bir türlü yazılabilir [7].

Teorem 2.16. V nin ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ bazı için $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ deki negatif olanların sayısı, $\langle\ ,\ \rangle$ nin indeksine eşittir. $\langle\ ,\ \rangle$ nin indeksine v indeksi denir [7].

Teorem 2.17. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üstündeki nondejenere, sabit indeksli ve $(0,2)$ tipindeki $\langle\ ,\ \rangle$ tensör alanına bir metrik tensör denir [7].

$\langle\ ,\ \rangle$, M üstünde bir metrik tensör ise M nin herbir P noktasına, $T_M(P)$ üstünde bir $\langle\ ,\ \rangle_P$ skaler çarpımı karşılık gelir. $\langle\ ,\ \rangle_P$ nin indeksi her P noktasında aynıdır.

Teorem 2.18. M diferensiyellenebilir manifoldu üstünde bir $\langle\ ,\ \rangle$ metrik tensörü varsa M ye bir yarı-Riemann manifoldu denir [7]. $\langle\ ,\ \rangle$ nin v indeksine $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. M nin boyutu n olmak üzere, M yarı-Riemann manifoldu M_v^n ile gösterilir.

Tanım 2.19. $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $v = 1$ ise M_v^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir [7].

Tanım 2.20. M yarı-Riemann manifoldu ve $\langle\ ,\ \rangle$ de M üstünde bir metrik tensör olsun. Bu durumda M de bir $\boldsymbol{v}$ tanjant vektörü için,

i) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ veya $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ise $\boldsymbol{v}$ vektörüne spacelike vektör,

ii) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ ise $\boldsymbol{v}$ vektörüne timelike vektör,

iii) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ ve $\boldsymbol{v} \neq 0$ ise $\boldsymbol{v}$ vektörüne null vektör denir [7].

Tanım 2.21. İndeksi 1 ve $boyV \geq 2$ olan V skaler çarpım uzayına Lorentz vektör uzayı denir. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı ve $\langle\ ,\ \rangle$, V üstündeki skaler çarpım olsun. Bu durumda

i) $\langle\ ,\ \rangle\big|_W$ pozitif tanımlı (yani W iç çarpım uzayı) ise W ya spacelike alt uzayı,

ii) $\langle\ ,\ \rangle\big|_W$, 1 indeksine sahip nondejenere ise W ya timelike alt uzayı,

iii) $\langle\ ,\ \rangle|_W$ dejenere ise W ya null alt uzayı denir [7].

Lemma 2.22. $\boldsymbol{Z}$, V Lorentz vektör uzayında spacelike bir vektör ise $Sp\{\boldsymbol{Z}\}^{\perp}$ alt uzayı spacelike ve $V = Sp\{\boldsymbol{Z}\} \oplus Sp\{\boldsymbol{Z}\}^{\perp}$ dir.

W alt uzayının timelike olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ in spacelike olmasıdır.

W nin lightlike olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ in lightlike olmasıdır.

W spacelike alt uzayının her alt uzayı da spaceliketır ve Schwarz eşitliği $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| \leq \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|$ olarak elde edilir. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ nin lineer bağımlı olmasıdır [7].

Tanım 2.23. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) W spacelike dır. Böylece W nın kendisi de Lorentz vektör uzayıdır.

ii) W lineer bağımsız iki null vektör içerir.

iii) W timelike vektör içerir [7].

Lemma 2.24. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) W lightlike tır. Yani dejenere olur.

ii) W null vektör içerir fakat timelike vektör içermez.

iii) $W \cap \Lambda = L - \{\mathbf{0}\}$ dır. Burada L bir boyutlu alt uzaydır ve Λ, V nin null konisidir [7].

Tanım 2.25. F, V Lorentz vektör uzayındaki spacelike vektörlerin kümesi olsun. $\boldsymbol{u} \in F$ için

$$C(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} \in F \,/\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle < 0\}$$

kümesi $\boldsymbol{u}$ vektörünü içeren V Lorentz uzayının timekonisidir. Karşıt timekonisi

$$C(-\boldsymbol{u}) = -C(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} \in F \,/\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle > 0\}$$

dir. $\{\boldsymbol{u}\}^{\perp}$ spacelike olduğundan, F bu iki timekonisinin bileşimidir [26].

Lemma 2.26. Lorentz vektör uzayında $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ timelike vektörlerinin aynı timekonide olmaları için gerek ve yeter koşul $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle < 0$ olmasıdır [26].

Tanım 2.27. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\boldsymbol{x} = (\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n)$, $\boldsymbol{y} = (\mathrm{y}_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere

$$\langle \;,\; \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

ile tanımlanan dönüşüm

a) Simetrik,

b) Bilineer,

c) non-dejenere

dir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan bu dönüşüme Minkowski metriği denir. $\mathbb{R}_1^n = \{\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle\}$ ikilisine de n-boyutlu Minkowski uzayı adı verilr [25].

Teorem 2.28. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ Minkowski 3- uzayında üç vektör olsun. O zaman

i) $\langle \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

ii) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w} = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle \boldsymbol{w} + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle \boldsymbol{u}$

iii) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle \boldsymbol{w}$

iv) $\langle \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$

v) $\langle \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle^2$

dır. Burada $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{-e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (-u_3v_2 + u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, -u_1v_2 + u_2v_1)$$

ve

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$$

dır [7].

Lemma 2.29. Minkowski vektör uzayında iki timelike vektör $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ olsun. O zaman

i) $|\langle \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle| \geq \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|$ dir. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ nın lineer bağımlı olmasıdır.

ii) $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$, V nin aynı timekonide ise

$$\langle \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle = -\|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Burada φ ye hiperbolik açı denir [7].

Lemma 2.30. $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ aynı timekonide iki timelike vektör ise $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \geq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ nin lineer bağımlı olmasıdır [7].

Tanım 2.31. $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}_1^3$ timelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \leq \|\boldsymbol{X}\| \|\boldsymbol{Y}\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ nin lineer bağımlı olmasıdır. $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ timelike vektörler ise

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \leq \|\boldsymbol{X}\| \|\boldsymbol{Y}\| \cosh\varphi, \ \varphi = \eta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir [23].

Tanım 2.32. $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektör olsunlar. Bu durumda

$$\left|\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle\right| \leq \|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\|$$

eşitsizliği vardır. Eğer $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ nin gerdiği düzlem spacelike ise

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\| \cosh\varphi, \;\; \varphi = \eta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \varphi \leq \pi$ sayısı vardır. Bu φ açısına $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı denir [23].

Tanım 2.33. $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektör olsunlar. Eğer $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ nin gerdiği düzlem timelike ise

$$\left|\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle\right| > \|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\|$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\| \cosh\varphi, \;\; \varphi = \eta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir [23].

Tanım 2.34. $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektör ve $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}_1^3$ pozitif timelike vektör olsun. Bu durumda

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \|\boldsymbol{X}\| \|\boldsymbol{Y}\| \sinh\varphi, \ \varphi = \eta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına $\boldsymbol{X}$ ve $\boldsymbol{Y}$ vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir [23].

Tanım 2.35. $\mathbb{R}_1^n$, n-boyutlu bir Lorentz uzayı ve $M \subset \mathbb{R}_1^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. M eğrisinin birim teğet vektör alanı $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{U}$ da sabit birim vektör olmak üzere $\forall s \in I$ için $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{U}$ arasındaki açı sabit ise $M \subset \mathbb{R}_1^n$ eğrisine bir eğilim çizgisi (helis) denir [24].

Tanım 2.36. $\mathbb{E}^2$ 2-boyutlu Öklid uzayındaki,

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dönme matrisine karşılık, $\mathbb{R}_1^2$ uzayındaki dönme matrisi,

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix}$$

biçiminde olup iki timelike vektör arasındaki açı hiperbolik açı, iki spacelike vektör arasındaki açı merkez açıdır [20].

$\mathbb{R}_v^n$ uzayının bütün lineer izometrilerine $\mathbb{R}_v^n$ nin doğal bazına göre karşılık gelen matrislerin cümlesini $O_v(n)$ ile göstereceğiz. $O_v(n)$ cümlesi $GL(n,\mathbb{R})$ nın kapalı bir alt grubudur ve bundan dolayı $O_v(n)$ bir Lie grubudur. $O_v(n)$ cümlesine yarı ortogonal grup denir.

Teorem 2.37. $n\times n-$tipindeki bir A matrisi için aşağıdaki önermeler denktir.

i) $A\in O_v(n)$

ii) $A^T=\varepsilon A^{-1}\varepsilon$ eşitliğini sağlayan matrise ortogonal matris denir [23].

iii) A nın sütunlarının kümesi (satırlarının kümesi) $\mathbb{R}_v^n$ uzayı için ortonormal bir bazdır.

iv) A, $\mathbb{R}_v^n$ nin ortonormal bir bazını yine ortonormal bir baza dönüştürür [7].

Teorem 2.38 $O_v(n)$ cümlesinin Lie cebiri, $C^T=-\varepsilon C\varepsilon$ eşitliğini sağlayan C matrislerinin cümlesidir. Böyle C matrisleri

$$C=\begin{bmatrix}A & B\\ B^T & D\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada $A^T = -A$, $D^T = -D$, $A_{v\times v}$, $D_{(n-v)\times(n\times v)}$ ve $B_{v\times(n-v)}$ biçiminde matrislerdir. $O_v(n)$ cümlesinin Lie cebiri $o_v(n)$ ile gösterilir. $boy\ O_v(n) = boy\ o_v(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ dir [7].

BÖLÜM 3. HİPERBOLİK SPINOR

Bu bölümde ortonormal taban yardımıyla hiperbolik spinorlar tanıtılmıştır.

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında orijin etrafındaki dönmelerin grubu olan $SO(1,3)$, 2×2 tipinde üniter matrisler grubu olan $SU(2,H)$ cümlesine homomorfiktir. $SO(1,3)$ cümlesinin elemanları 3 reel bileşenli vektörleri harekete geçirirken, $SU(2,H)$ nin elemanları hiperbolik spinorları harekete geçirirler.

Bu homomorfizm spinorlar aracılığıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilir. Her

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

spinoru, $\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b}$ izotropik vektör olmak üzere

$$\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b} = \psi^t \sigma \psi \qquad \boldsymbol{c} = -\hat{\psi}^t \sigma \psi \tag{3.2}$$

eşitlikleri yardımıyla $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerini tanımlar. Burada $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, bileşenleri, hiperbolik, simetrik, 2×2 tipinde matrisler olan bir vektördür. Öyle ki,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli matrisleri $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisiyle, sırasıyla, soldan çarpılırsa $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vektörünün $\boldsymbol{\sigma}_i$, $1 \le i \le 3$ bileşenleri

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

olduğu görülür [1]. Ayrıca, ψ spinorunun eşi $\hat{\psi}$ ve hiperbolik eşleniği $\overline{\psi}$ olmak üzere $\hat{\psi}$ ve $\overline{\psi}$ arasında

$$\hat{\psi} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\overline{\psi} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\psi_1} \\ \overline{\psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_1} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Şimdi $\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b} = (x_1, x_2, x_3)$ izotropik vektörün olmak üzere $x_i,\ 1 \leq i \leq 3$ bileşenlerini araştıralım. Bunun için (3.1), (3.2) ve (3.3) denklemlerinden

$$x_1 = \psi^t \sigma_1 \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1^2 - \psi_2^2$$

$$x_2 = \psi^t \sigma_2 \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j\psi_1 \\ j\psi_2 \end{pmatrix} = j(\psi_1^2 + \psi_2^2)$$

$$x_3 = \psi^t \sigma_3 \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} = -2\psi_1\psi_2$$

elde edilir. Burada t, ψ spinorunun transpozunu göstermektedir. Benzer şekilde $\boldsymbol{c} = (\mathrm{c}_1, c_2, c_3)$ olmak üzere $c_i,\ 1 \leq i \leq 3$ bileşenleri

$$c_1 = -\hat{\psi}^t \sigma_1 \psi = -\begin{pmatrix} -\overline{\psi}_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1\overline{\psi}_2 + \overline{\psi}_1\psi_2$$

$$c_2 = -\hat{\psi}^t \sigma_2 \psi = -\begin{pmatrix} -\overline{\psi}_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = j(\psi_1\overline{\psi}_2 - \overline{\psi}_1\psi_2)$$

$$c_3 = -\hat{\psi}^t \sigma_3 \psi = -\begin{pmatrix} -\overline{\psi}_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \mathrm{j}\boldsymbol{b} &= (\psi_1^2 - \psi_2^2,\ j(\psi_1^2 + \psi_2^2), -2\psi_1\psi_2) \\ \boldsymbol{c} &= (\psi_1\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1\psi_2,\ j(\psi_1\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1\psi_2), |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. Şimdi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin boylarını hesaplayalım.

$$\bar{\boldsymbol{c}} = (\bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{\psi}_2\psi_1,\ j(\psi_1\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1\psi_2), |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = \boldsymbol{c}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}\| &= \sqrt{\left((\psi_1\overline{\psi_2} + \overline{\psi_1}\psi_2)^2 - j^2(\psi_1\overline{\psi_2} - \overline{\psi_1}\psi_2)^2 + (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2\right)} \\ &= \sqrt{\bar{\psi}_1^2\psi_2^2 + \bar{\psi}_2^2\psi_1^2 + 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - \psi_1^2\bar{\psi}_2^2 - \bar{\psi}_1^2\psi_2^2 + 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + |\psi_1|^4 - 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + |\psi_2|^4} \\ &= \sqrt{|\psi_1|^4 - 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + |\psi_2|^4} \\ &= \sqrt{(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2} \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \\ &= \bar{\psi}^t\psi \end{aligned} \tag{3.6}$$

dir. $\boldsymbol{a} + \mathrm{j}\boldsymbol{b}$ vektörü izotropik vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b} \rangle &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, j\boldsymbol{b} \rangle + \langle j\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle j\boldsymbol{b}, j\boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + j\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + j\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + jj\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2j\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= 0 + j0 \end{aligned}$$

dir. Buradan görüleceği üzere

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$$

yani;

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle = -\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle$$

dir. Ayrıca,

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle|} \quad , \qquad \|\boldsymbol{a}\|^2 = |\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle|$$

$$\|\boldsymbol{b}\|^2 = |\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle| = \pm\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle$$

olmak üzere,

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2 \tag{3.7}$$

dir. Aynı zamanda

$$2\,j\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \mathbf{0}\,j$$

yani;

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

dır. Şimdi $\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b}$ vektörünün boyunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b}\|^2 &= \langle (\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b}), \overline{(\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b})}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle + \langle \boldsymbol{a}, j\boldsymbol{b}\rangle + \langle j\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle + \langle j\boldsymbol{b}, j\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - j\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + j\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle + j\,\overline{j}\,\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2
\end{aligned}$$

dir. Son denklem ve (3.5) denklemi göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}\|^2 &= \langle(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}),\overline{(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})}\rangle \\
&= \langle(\psi_1{}^2-\psi_2{}^2,\ \mathrm{j}(\psi_1{}^2+\psi_2{}^2),-2\psi_1\psi_2),(\overline{\psi}_1{}^2-\overline{\psi}_2{}^2,-\mathrm{j}(\overline{\psi}_1{}^2+\overline{\psi}_2{}^2),-2\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2)\rangle \\
&= (\psi_1{}^2-\psi_2{}^2)(\overline{\psi}_1{}^2-\overline{\psi}_2{}^2)+jj(\psi_1{}^2+\psi_2{}^2)(\overline{\psi}_1{}^2+\overline{\psi}_2{}^2)+(-2\psi_1\psi_2)(-2\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2) \\
&= \psi_1^2\overline{\psi}_1^2-\psi_1^2\overline{\psi}_2^2-\psi_2^2\overline{\psi}_1^2+\psi_2^2\overline{\psi}_2^2+\psi_1^2\overline{\psi}_1^2+\psi_1^2\overline{\psi}_2^2+\psi_2^2\overline{\psi}_1^2+\psi_2^2\overline{\psi}_2^2+4\psi_1\overline{\psi}_1\psi_2\overline{\psi}_2 \\
&= 2|\psi_1|^4+2|\psi_2|^4+4|\psi_1|^2|\psi_2|^2 \\
&= 2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2 \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde (3.7) denklemi ve (3.6) denklemlerinden

$$\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{c}\|=\overline{\psi}^t\psi$$

dir. Yani $\boldsymbol{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin boyları eşittir. Ayrıca (3.5) denklemin göz önünde bulundurarak $\langle(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}\rangle$ iç çarpımı hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\langle\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle = \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle + j\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle \\
&= \langle(\psi_1{}^2-\psi_2{}^2,\ \mathrm{j}(\psi_1{}^2+\psi_2{}^2),-2\psi_1\psi_2),(\psi_1\overline{\psi_2}+\overline{\psi_1}\psi_2,\ j(\psi_1\overline{\psi_2}-\overline{\psi_1}\psi_2),|\psi_1|^2-|\psi_2|^2)\rangle \\
&= (\psi_1^2-\psi_2^2)(\overline{\psi}_1\psi_2+\overline{\psi}_2\psi_1)-j^2(\psi_1^2+\psi_2^2)(\psi_1\overline{\psi}_2-\overline{\psi}_1\psi_2)+(-2\psi_1\psi_2)(|\psi_1|^2-|\psi_2|^2) \\
&= \psi_1^2\overline{\psi}_1\psi_2+\psi_1^2\psi_1\overline{\psi}_2-\overline{\psi}_1\psi_2^2\psi_2-\psi_2^2\overline{\psi}_2\psi_1-\psi_1^3\overline{\psi}_2+\psi_1^2\overline{\psi}_1\psi_2-\psi_2^2\overline{\psi}_2\psi_1+\psi_2^3\overline{\psi}_1-2\psi_1^2\overline{\psi}_1\psi_2+2\psi_1\psi_2^2\overline{\psi}_2 \\
&= 2(\psi_1^2\overline{\psi}_1\psi_2-\psi_2^2\overline{\psi}_2\psi_1-\psi_1^2\overline{\psi}_1\psi_2+\psi_1\psi_2^2\overline{\psi}_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son denklem ve (3.8) denkleminden

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=0$$

dır. O halde $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}_1^3$ vektörleri ikişer ikişer ortogonaldir. Ek olarak $\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) > 0$ dır. O halde $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ sıralı üçlüsü bir sağ sistemdir.

Tersine; aynı büyüklükte verilen ikişer ikişer ortogonal ve $\langle \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle > 0$ olan $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}_1^3$ vektörlerine $\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}=\psi^t\sigma\psi,\quad \boldsymbol{c}=-\overline{\psi}^t\sigma\psi$ denklemleriyle verilen bir ψ hiperbolik spinoru karşılık gelir.

Ayrıca ψ hiperbolik spinoru $SU(2,H)$ dönüşümü altında yeni bir hiperbolik spinora dönüşür. Yani herhangi bir $U\in SU(2,H)$ matrisi için $\psi'=U\psi$ dir ve

$$\overline{\psi'}^t\psi'=\left(\overline{U\psi}\right)^tU\psi=\overline{\psi}^t\overline{U}^tU\psi=\overline{\psi}^t\psi$$

bağıntısını sağlar. Dolayısyla, ψ' hiperbolik spinorunun tanımında kullanılan $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'$ vektörlerinin büyüklüğü ψ hiperbolik spinorunun tanımında kullanılan $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ vektörlerinin büyüklüğüne eşittir. Bu yüzden $SU(2,H)$ nın her bir elemanı $\mathbb{R}_1^3$ ün $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ ortogonal tabanını $\{\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'\}$ ortogonal tabanına dönüştüren bir dönüşüm oluşturur. Yani $SU(2,H)$ nın U ve $-U$ şeklinde iki elemanı $\mathbb{R}_1^3$ ün aynı sıralı üçlüsünü oluşturur. $SU(2,H)$ den aldığımız U elemanı ψ' hiperbolik spinorunu oluştururken $-U$ elemanı $-\psi'$ hiperbolik spinorunu oluşturur. Böylece (3.5) denkleminde ψ hiperbolik spinoru yerine $-\psi$ hiperbolik spinorunu aldığımız takdirde sonuç değişmemektedir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}&=\left((-\psi_1)^2-(-\psi_2)^2,\ j((-\psi_1)^2+(-\psi_2)^2),-2(-\psi_1)(-\psi_2)\right)\\ \boldsymbol{c}&=\left((-\psi_1)(-\overline{\psi}_2)+(-\overline{\psi}_1)(-\psi_2),\ j((-\psi_1)(-\overline{\psi}_2)-(-\overline{\psi}_1)(-\psi_2)),\left|-\psi_1\right|^2-\left|-\psi_2\right|^2)\right)\end{aligned}$$

şeklinde olup (3.5) denklemiyle aynı sonucu vermektedir. O halde homomorfizm ikiye-bir tipindedir.

Önerme 3.1. φ ve ψ keyfi iki hiperbolik spinor ve $\lambda,\ \mu$ herhangi iki hiperbolik sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) $\overline{\varphi^t \sigma \psi} = -\hat{\varphi}^t \sigma \hat{\psi}$

ii) $\left(\overline{\lambda\varphi + \mu\psi}\right) = \bar{\lambda}\hat{\varphi} + \bar{\mu}\hat{\psi}$

iii) $\hat{\hat{\psi}} = -\psi$

İspat.

i) Bileşenleri hiperbolik, simetrik, 2×2 tipinde matrisler olan $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vektörünü göz önüne alalım.

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi için,

$$\overline{\varphi^t \sigma_1 \psi} = \overline{(\varphi_1 \quad \varphi_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}} = \overline{(\varphi_1 \quad \varphi_2)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}}$$
$$= \overline{\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2} = \bar{\varphi}_1\bar{\psi}_1 - \bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2 \tag{3.10}$$

$$-\hat{\varphi}^t \sigma_1 \hat{\psi} = -\left[(-\bar{\varphi}_2 \quad \bar{\varphi}_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}\right] = -\left[(-\bar{\varphi}_2 \quad \bar{\varphi}_1)\begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ -\bar{\psi}_1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \bar{\varphi}_1\bar{\psi}_1 - \bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2 \tag{3.11}$$

dir.

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ matrisi için,

$$\overline{\varphi^t \sigma_2 \psi} = \overline{(\varphi_1 \quad \varphi_2)\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}} = \overline{(\varphi_1 \quad \varphi_2)\begin{pmatrix} j\psi_1 \\ j\psi_2 \end{pmatrix}} = \bar{j}\,\overline{(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2)}$$
$$= -j(\bar{\varphi}_1\bar{\psi}_1 + \bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2) \tag{3.12}$$

$$-\hat{\varphi}^t\sigma_2\hat{\psi} = -\left[\begin{pmatrix}-\bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1\end{pmatrix}\right] = -\left[\begin{pmatrix}-\bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-j\bar{\psi}_2 \\ j\bar{\psi}_1\end{pmatrix}\right] \tag{3.13}$$
$$= -j[\bar{\varphi}_1\bar{\psi}_1 + \bar{\varphi}_2\bar{\psi}_2]$$

dir. Son olarak,

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ matrisi için,

$$\overline{\varphi^t\sigma_3\psi} = \overline{\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\psi_1 \\ -\psi_2\end{pmatrix}} = -(\bar{\varphi}_1\bar{\psi}_2 + \bar{\varphi}_2\bar{\psi}_1) \tag{3.14}$$

$$-\hat{\varphi}^t\sigma_3\hat{\psi} = -\left[\begin{pmatrix}-\bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1\end{pmatrix}\right] = -\left[\begin{pmatrix}-\bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1\end{pmatrix}\right] \tag{3.15}$$
$$= -[\bar{\varphi}_2\bar{\psi}_1 + \bar{\varphi}_1\bar{\psi}_2]$$

(3.10-3.15) denklemlerinden istenen görülür.

ii) $\left(\widehat{\lambda\varphi + \mu\psi}\right) = \begin{pmatrix}\overline{-\lambda\varphi_2 - \mu\psi_2} \\ \overline{\lambda\varphi_1 + \mu\psi_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\bar{\lambda}\bar{\varphi}_2 - \bar{\mu}\bar{\psi}_2 \\ \bar{\lambda}\bar{\varphi}_1 + \bar{\mu}\bar{\psi}_1\end{pmatrix} = \bar{\lambda}\begin{pmatrix}-\bar{\varphi}_2 \\ \bar{\varphi}_1\end{pmatrix} + \bar{\mu}\begin{pmatrix}-\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1\end{pmatrix} = \bar{\lambda}\hat{\varphi} + \bar{\mu}\hat{\psi}$

iii) $\hat{\hat{\psi}} = \begin{pmatrix}-\bar{\bar{\psi}}_1 \\ \bar{\bar{\psi}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\psi_1 \\ -\psi_2\end{pmatrix} = -\psi$

Önerme 3.2. Herhangi φ ve ψ hiperbolik spinor çiftleri için $\varphi^t\sigma\psi = \psi^t\sigma\varphi$ dir.

İspat. $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vektörünün bileşenleri olan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ matrisleri simetriktir. O halde,

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ matrisi için,

$$\varphi^t\sigma_1\psi = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ -\psi_2\end{pmatrix} = \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 \tag{3.16}$$

$$\psi^t\sigma_1\varphi = \begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ -\varphi_2\end{pmatrix} = \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 \tag{3.17}$$

dir.

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} j & 0\\ 0 & j\end{pmatrix}$ için,

$$\varphi^t\sigma_2\psi = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j & 0\\ 0 & j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j\psi_1\\ j\psi_2\end{pmatrix} = j(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \tag{3.18}$$

$$\psi^t\sigma_2\varphi = \begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j & 0\\ 0 & j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j\varphi_1\\ j\varphi_2\end{pmatrix} = j(\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2) \tag{3.19}$$

dir.

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ matrisi için,

$$\varphi^t\sigma_3\psi = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\psi_1\\ -\psi_2\end{pmatrix} = -(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \tag{3.20}$$

$$\psi^t\sigma_3\varphi = \begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\varphi_2\\ -\varphi_1\end{pmatrix} = -(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \tag{3.21}$$

dir. Böylece son olarak da (3.16-3.21) denklemlerinden ispat tamamlanır.

Örnek 3.3. Özel olarak $\psi = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ seçilirse $\hat{\psi} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ olur. Bu seçim (3.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b} = (\psi_1^2 - \psi_2^2,\ j(\psi_1^2 + \psi_2^2), -2\psi_1\psi_2) = (1^2 - 0^2,\ j(1^2 + 0^2), -2.1.0) = (1, j, 0)$$
$$= (1,0,0) + j(0,1,0)$$

$$\boldsymbol{c} = (\overline{\psi}_1\psi_2 + \overline{\psi}_2\psi_1,\ j(\psi_1\overline{\psi}_2 - \overline{\psi}_1\psi_2), |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = (1.0 + 0.1, \mathrm{j}(1.0 - 1.0), 1 - 0) = (0,0,1)$$

elde edilir. Buradan da görüldüğü üzere $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spinor çifti $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayının kanonik bazı olan $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1,0)$ ve $\boldsymbol{c} = (0,0,1)$ üçlüsüne karşılık gelmektedir.

Önerme 3.4. Eğer ψ sıfırdan farklı bir hiperbolik spinorsa $\{\psi, \hat{\psi}\}$ lineer bağımsızdır.

İspat. $\{\psi, \hat{\psi}\}$ spinor çiftinin bileşenlerinin determinantı

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{vmatrix} = \psi_1\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

dir. Bu ifade eder ki ψ sıfırdan farklı olmak üzere $\{\psi, \hat{\psi}\}$ lineer bağımsızdır.

BÖLÜM 4. MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLERİN HİPERBOLİK SPINOR GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında alınan bir spacelike (timelike) eğrinin hiperbolik spinorlar cinsinden ifadesi verilmiştir.

4.1. Eğriler ve Frenet Türev Denklemleri

Tanım 4.1.1. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$, birim hızlı regüler timelike eğrisi, bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ, Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ olmak üzere
$\boldsymbol{T}$ timelike vektör, $\boldsymbol{N}$ ve $\boldsymbol{B}$ spacelike vektör iken

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N} = -\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{N}$$

şeklindedir. Burada $\times$, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında vektörel çarpımdır. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}' &= \kappa \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N}' &= \kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' &= -\tau \boldsymbol{N} \end{aligned} \qquad (4.1.1)$$

dir [9].

Tanım 4.1.2. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$, birim hızlı regüler spacelike binormalli spacelike eğrisi, bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ, Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ olmak üzere
$\boldsymbol{N}$ timelike vektör, $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{B}$ spacelike vektör iken

$$\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{B}\,,\qquad \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{T}\,,\qquad \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N}$$

şeklindedir. Burada $\times$, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında vektörel çarpımdır. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}' &= \kappa \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N}' &= \kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' &= \tau \boldsymbol{N} \end{aligned} \qquad (4.1.2)$$

dir [9].

Tanım 4.1.3. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$, birim hızlı regüler spacelike eğrisi, bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ, Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$ olmak üzere
$\boldsymbol{B}$ timelike vektör, $\boldsymbol{N}$ ve $\boldsymbol{T}$ spacelike vektör iken

$$\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\,,\qquad \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{T}\,,\qquad \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{N}$$

şeklindedir. Burada $\times$, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında vektörel çarpımdır. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}' &= \kappa \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N}' &= -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' &= \tau \boldsymbol{N} \end{aligned} \qquad (4.1.3)$$

dir [9].

4.2. Timelike Binormalli Spacelike Eğrilerin Hiperbolik Spinor Gösterimleri

$\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$, birim hızlı regüler spacelike eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$ olmak üzere, Frenet türev denklemleri (4.1.3) denkleminden

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}' &= \kappa \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N}' &= -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' &= \tau \boldsymbol{N} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

dır. Spinorlarla ilgili verilen Bölüm 3 deki sonuçlara göre

$$\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B} = \psi^t \sigma \psi \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{T} = -\hat{\psi}^t \sigma \psi \tag{4.2.2}$$

ve $\bar{\psi}^t \psi = 1$ olacak şekilde bir ψ hiperbolik spinoru vardır. Böylece ψ hiperbolik spinoru $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü ve $\frac{d\psi}{ds}$ ise eğri boyunca bu üçlünün değişimini temsil eder.

Önerme 3.4. e göre $\{\psi, \hat{\psi}\}$ ikilisi iki hiperbolik bileşenli hiperbolik spinorlar için baz teşkil ettiğinden öyle f ve g hiperbolik fonksiyonları vardır ki

$$\frac{d\psi}{ds} = f\psi + g\hat{\psi} \tag{4.2.3}$$

yazılışı tek türlüdür. (4.2.2) denklemindeki $\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B} = \psi^t \sigma \psi$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{N}}{ds} + j\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{B}}{ds} = \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^t \sigma\psi + \psi^t \sigma \left(\frac{d\psi}{ds}\right) \tag{4.2.4}$$

bulunur. Eğer (4.2.2) ve (4.2.3) denklemleri (4.2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} + \mathrm{j}\tau \boldsymbol{N} &= (f\psi + \mathrm{g}\hat{\psi})^t \sigma\psi + \psi^t \sigma (f\psi + g\hat{\psi}) \\ -\kappa \boldsymbol{T} + \mathrm{j}\tau(\boldsymbol{N} + \mathrm{j}\boldsymbol{B}) &= (f\psi^t + \mathrm{g}\hat{\psi}^t)\sigma\psi + \psi^t \sigma (f\psi + g\hat{\psi}) \\ &= f(\psi^t \sigma\psi + \psi^t \sigma\psi) + g(\hat{\psi}^t \sigma\psi + \psi^t \sigma\hat{\psi}) \end{aligned}$$

olur. σ matrisleri simetrik olduğundan $\hat{\psi}^t \sigma\psi = \psi^t \sigma\hat{\psi}$ dır. Böylece

$$-\kappa \boldsymbol{T} + \mathrm{j}\,\tau(\boldsymbol{N} + \mathrm{j}\boldsymbol{B}) = 2f(\psi^t \sigma \psi) - 2g(-\hat{\psi}\sigma\psi)$$
$$= 2f(\boldsymbol{N} + \mathrm{j}\boldsymbol{B}) - 2g(\boldsymbol{T})$$
$$= 2f(\boldsymbol{N} + \mathrm{j}\boldsymbol{B}) - 2g(\boldsymbol{T})$$

elde edilir. Burada son denklemden

$$f = \frac{j\tau}{2} \quad \text{ve} \quad g = \frac{\kappa}{2} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. O halde (4.2.3) denklemi ve (4.2.5) denklemleri dikkate alınırsa

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(j\tau\psi + \kappa\hat{\psi} \right)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. İki bileşenli ψ hiperbolik spinoru, yay parametresi ile parametrelendirilen bir α eğrisinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil etsin. Bu takdirde, Frenet türev formülleri

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(j\tau\psi + \kappa\hat{\psi} \right) \tag{4.2.6}$$

olacak şekilde tek bir hiperbolik spinor denklemine eşdeğerdir. Burada κ ve τ, sırasıyla, eğrinin eğrilik ve torsiyonudur.

Şimdi diferansiyel geometrinin temel teoremini hiperbolik spinorlar yardımıyla ispat edelim.

Teorem 4.2.2. $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında iki eğri aynı eğrilik ve burulma fonksiyonuna sahipse, bunlardan birisi uygun bir şekilde döndürülüp ötelendikten sonra iki eğri bütün noktalarda çakışır.

İspat. Teoremi ispatlamak için $\bar{\varphi}^t\varphi = 1 = \bar{\psi}^t\psi$ özelliğinde φ ve ψ gibi iki hiperbolik spinor göz önünde bulunduralım. O halde aşağıdaki işlemler yapılırsa;

$$
\begin{aligned}
\overline{(\psi \pm \varphi)}^t (\psi \pm \varphi) &= \begin{pmatrix} \overline{\psi_1 \pm \varphi_1} \\ \overline{\psi_2 \pm \psi_2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \psi_1 \pm \varphi_1 \\ \psi_2 \pm \psi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \pm \bar{\varphi}_1 & \bar{\psi}_2 \pm \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \pm \varphi_1 \\ \psi_2 \pm \psi_2 \end{pmatrix} \\
&= (\bar{\psi}_1 \pm \bar{\varphi}_1)(\psi_1 \pm \varphi_1) + (\bar{\psi}_2 \pm \bar{\varphi}_2)(\psi_2 \pm \varphi_2) \\
&= \bar{\psi}_1\psi_1 \pm \bar{\psi}_1\varphi_1 \pm \bar{\varphi}_1\psi_1 \pm \bar{\varphi}_1\varphi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2 \pm \bar{\psi}_2\varphi_2 \pm \bar{\varphi}_2\psi_2 \pm \bar{\varphi}_2\varphi_2 \\
&= 1 + 1 \pm \bar{\psi}_1\varphi_1 \pm \bar{\varphi}_1\psi_1 \pm \bar{\psi}_2\varphi_2 \pm \bar{\varphi}_2\psi_2 \\
&= 2 \pm \bar{\psi}^t\varphi \pm \psi^t\bar{\varphi} = 2 \pm \bar{\psi}^t\varphi \pm \overline{\bar{\psi}^t\varphi} = 2 \pm 2\,\mathrm{Re}(\bar{\psi}^t\varphi)
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

elde edilir. Burada φ ve ψ hiperbolik spinorlarının aynı eğrilik ve burulma fonksiyonlarına sahip iki eğrinin Frenet çatısına ait oldukları göz önüne alınırsa (4.2.6) denkleminden

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\bar{\psi}^t\varphi\right)}{ds} &= \frac{1}{2}\overline{\left(j\tau\psi + \kappa\hat{\psi}\right)}^t \varphi + \frac{1}{2}\bar{\psi}^t\left(j\tau\varphi + \kappa\hat{\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[-j\tau\bar{\psi}^t\varphi + \kappa\overline{\hat{\psi}}^t\varphi + j\tau\bar{\psi}^t\varphi + \kappa\bar{\psi}^t\hat{\varphi}\right] \\
&= \frac{\kappa}{2}\left[\overline{\hat{\psi}}^t\varphi + \bar{\psi}^t\hat{\varphi}\right]
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Son denklemin (3.4) denkleminden

$$
\frac{d\left(\bar{\psi}^t\varphi\right)}{ds} = \frac{\kappa}{2}\left[-\psi_2\varphi_1 + \psi_1\varphi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\varphi}_2 + \bar{\psi}_2\bar{\varphi}_1\right] \tag{4.2.8}
$$

olduğu görülür. Ayrıca $\psi_2\varphi_1 = \boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b}$ ve $\psi_1\varphi_2 = \boldsymbol{c} + j\boldsymbol{d}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
-\psi_2\varphi_1+\psi_1\varphi_2-\bar{\psi}_1\bar{\varphi}_2+\bar{\psi}_2\bar{\varphi}_1 &= -\boldsymbol{a}-j\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+j\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}+j\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}-j\boldsymbol{b} \\
&= -2j\boldsymbol{b}+2j\boldsymbol{d} \\
&= -j(2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{d})
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada görüldüğü üzere yukarıdaki ifadenin reel kısmı sıfırdır. Dolayısıyla

$$\frac{d\left(\bar{\psi}^t\varphi\right)}{ds}=\frac{\kappa}{2}=-j(2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{d})$$

şeklinde elde edilir. Burada görüldüğü üzere yukarıdaki ifadenin reel kısmı sıfırdır. Dolayısıyla $\dfrac{d\left(\bar{\psi}^t\varphi\right)}{ds}$ sadece imajiner olup $\left(\overline{\psi\pm\varphi}\right)^t\left(\psi\pm\varphi\right)=2\pm2\operatorname{Re}\left(\bar{\psi}^t\varphi\right)$ ifadesi sabittir. Ayrıca reel kısım s ye bağlı değildir. Aksi taktirde türevi sadece imajiner olmazdı. Eğer $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsü bazı s değerleri için çakışan iki eğri ile eşlenirse bu s noktasında φ hiperbolik spinoru, ψ ya da $-\psi$ ile çakışır ve bu çakışıklık bütün s noktaları için korunur. Bu da gösterir ki iki eğrinin tanjant vektörleri tüm s noktaları için çakışır ve bu iki eğri yalnızca sabit vektör ile ayrılabilir.

Teorem 4.2.3. İki bileşenli ψ ve ϕ hiperbolik spinorları, yay parametresi ile parametrelendirilen bir $\alpha: I\to\mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsü ile temsil edilsin. Eğer $\dfrac{\tau}{\kappa}=\coth\theta,\quad(0\le\theta\le\infty)$ sabitse α eğrisinin Frenet çatısı

$$\mathbf{T}=\boldsymbol{c}\cosh\theta+\sinh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)+\boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)\right]$$

$$\mathbf{N}=\boldsymbol{a}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)+\boldsymbol{b}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)$$

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{c}\sinh\theta+\cosh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)\right]+\boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)$$

dir.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisi için $\dfrac{\tau}{\kappa} = \coth\theta$ sabit olsun. Böylece ψ iki bileşenli hiperbolik spinoru için (4.2.6) denklemi

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(j\tau\psi + \kappa\hat{\psi}\right) &= \frac{1}{2}\left(j\kappa\coth\theta\psi + \kappa\hat{\psi}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(j\kappa\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\psi + \kappa\hat{\psi}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{j}\kappa\cosh\theta\psi + \kappa\hat{\psi}\sinh\theta}{\sinh\theta}\right)\\ &= \frac{j\kappa}{2\sinh\theta}\left(\cosh\theta\psi + j\sinh\theta\hat{\psi}\right)\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\psi}}{ds} &= \frac{1}{2}\left(j\tau\psi + \kappa\hat{\psi}\right) = \frac{1}{2}\left(-j\tau\hat{\psi} + \kappa\hat{\hat{\psi}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-j\tau\hat{\psi} - \kappa\psi\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-j\kappa\coth\theta\hat{\psi} - \kappa\psi\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-j\kappa\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\hat{\psi} - \kappa\psi\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-j\kappa\cosh\theta\hat{\psi} - \kappa\psi\sinh\theta}{\sinh\theta}\right)\\ &= \frac{-j\kappa}{2\sinh\theta}\left(\cosh\theta\hat{\psi} + j\sinh\theta\psi\right)\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

olduğu görülür. $\cosh\dfrac{\theta}{2}\psi + j\sinh\dfrac{\theta}{2}\hat{\psi}$ denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (4.2.9) ile (4.2.10) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\frac{d}{ds}\left(\cosh\frac{\theta}{2}\psi + j\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\psi}\right) = \cosh\frac{\theta}{2}\frac{d\psi}{ds} + j\sinh\frac{\theta}{2}\frac{d\hat{\psi}}{ds}$$

$$= \cosh\frac{\theta}{2}\left(\frac{j\kappa}{2sinh\theta}\right)\left(\cosh\theta\psi + j\sinh\theta\hat{\psi}\right) + j\sinh\frac{\theta}{2}\left(\frac{-j\kappa}{2\sinh\theta}\right)\left(\cosh\theta\hat{\psi} + j\sinh\theta\psi\right)$$

$$= \left(\frac{j\kappa}{2sinh\theta}\right)\left[\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\psi + j\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\hat{\psi} - j\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\hat{\psi} - \sinh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\psi\right]$$

$$= \left(\frac{j\kappa}{2sinh\theta}\right)\left[\left(\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\psi - \sinh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\psi\right) + j\left(\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\hat{\psi} - \sinh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\hat{\psi}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{j\kappa}{2sinh\theta}\right)\left(\cosh\frac{\theta}{2}\psi + j\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\psi}\right)$$

elde edilir. Burada $\cosh\frac{\theta}{2}\psi + j\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\psi} = t$ denilirse, yukarıdaki eşitlik

$$\frac{dt}{ds} = \frac{j\kappa}{2\sinh\theta}t$$

$$\frac{dt}{t} = \left(\frac{j\kappa}{2\sinh\theta}\right)ds$$

bulunur. Son denklemin integrali alınırsa

$$\int\frac{dt}{t} = \frac{j}{2\sinh\theta}\int\kappa ds$$

$$\ln t = \frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds' + \ln\phi$$

$$e^{\ln t} = e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds' + \ln\phi}$$

$$e^{\ln t} = e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}e^{\ln\phi}$$

$$t = e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\phi$$

elde edilir. Yani

$$\cosh\frac{\theta}{2}\psi + j\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\psi} = e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\phi \qquad (4.2.11)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde iki tarafın eşi alınır ve Önerme 3.1 göz önüne alınırsa

$$\cosh\frac{\theta}{2}\hat{\psi} + j\sinh\frac{\theta}{2}\psi = e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\hat{\phi} \qquad (4.2.12)$$

elde edilir. Burada ϕ hiperbolik spinoru s' parametresinden bağımsız ve $\phi^t\phi = 1$ dir. (4.2.11) denklemi $\cosh\frac{\theta}{2}$ ve (4.2.12) denklemi $-j\sinh\frac{\theta}{2}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\psi - \sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\psi = \psi\cosh\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = \psi\cosh 0 = \psi$$

elde edilir. O halde

$$\psi = e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\phi\cosh\frac{\theta}{2} - je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\hat{\phi}\sinh\frac{\theta}{2}$$

yazılabilir. Aynı şekilde (4.2.11) denklemi $\left(-j\sinh\frac{\theta}{2}\right)$ ve (4.2.12) denklemi $\cosh\frac{\theta}{2}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\hat{\psi} - \sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\psi} = \hat{\psi}\left(\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} - \sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \hat{\psi}\cosh\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \hat{\psi}\cosh 0$$

$$\hat{\psi} = -je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\phi\sinh\frac{\theta}{2} + e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\hat{\phi}\cosh\frac{\theta}{2}$$

olur. Bulunan ψ ve $\hat{\psi}$ eşitlikleri, (4.2.2) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\boldsymbol{T} = \left(je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\phi^t\sinh\frac{\theta}{2} - e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\hat{\phi}^t\cosh\frac{\theta}{2}\right)\sigma\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\phi\cosh\frac{\theta}{2} - je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\hat{\phi}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \left(\phi^t\sigma\phi\right)\left(\left(je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$\left(\phi^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\phi\right)\left(\left(-e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(-e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^{s'}\kappa\, ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

olduğu görülür. Burada (3.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$T=(a+jb)\left(je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\sinh\theta}{2}\right)+(-c)\left(-j^2e^0\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)+(-c)\left(-e^0\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)$$
$$+-\overline{(a+jb)}\left(je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\sinh\theta}{2}\right)$$

$$=(a+jb)\left(je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\sinh\theta}{2}\right)+c\left(\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}+\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)$$
$$+(-a+jb)\left(je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\sinh\theta}{2}\right)$$

$$=c\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[(a+jb)\left(je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)+(-a+jb)\left(je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\right]$$

$$=c\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[a\left(je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}-je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)+jb\left(je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}+je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\right]$$

bulunur. Burada $c=-\hat{\phi}^t\sigma\phi$, $a+jb=\phi^t\sigma\phi$ dir. Ayrıca $x=-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa(s')ds'$ olmak üzere $e^{jx}=\cosh x+j\sinh x$ ve $e^{-jx}=\cosh x-j\sinh x$ eşitlikleri dikkate alınırsa T teğet vektörü en son olarak

$$T=c\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[a\,j\left(e^{-jx}-e^{jx}\right)+b\left(e^{-jx}+e^{jx}\right)\right]$$
$$=c\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[a\,j\left(\cosh x-j\sinh x-\cosh x-j\sinh x\right)+b\left(\cosh x-j\sinh x+\cosh x+j\sinh x\right)\right]$$
$$=c\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[a\,j\left(-2j\sinh x\right)+b\left(2\cosh x\right)\right]$$
$$=c\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[-2a\sinh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_s \kappa\, ds'\right)+2b\cosh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)\right]$$

$$=\boldsymbol{c}\cosh\theta+\sinh\theta\left[-\boldsymbol{a}\sinh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)+\boldsymbol{b}\cosh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)\right]$$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{c}\cosh\theta+\sinh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)+\boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)\right]$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde $\boldsymbol{N}+j\boldsymbol{B}$ için benzer işlemler yapılırsa;

$$\boldsymbol{N}+j\boldsymbol{B}=\psi^t\sigma\psi$$

$$=\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\phi^t\cosh\frac{\theta}{2}-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\hat{\phi}^t\sinh\frac{\theta}{2}\right)\sigma\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\phi\cosh\frac{\theta}{2}-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\hat{\phi}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\left(\phi^t\sigma\phi\right)\left(\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\phi^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\phi\right)\left(\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

olduğu görülür. Burada (3.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\boldsymbol{N}+j\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})\left(e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\cosh\theta+1}{2}\right)+(-\boldsymbol{c})\left(-je^{0}\frac{\sinh\theta}{2}\right)$$

$$+(-\boldsymbol{c})\left(-je^{0}\frac{\sinh\theta}{2}\right)+-\overline{(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})}\left(e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\cosh\theta-1}{2}\right)$$

$$=(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})\left(e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\cosh\theta+1}{2}\right)+\boldsymbol{c}j\sinh\theta+(-\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})\left(e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\cosh\theta-1}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{c}j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}(\cosh\theta+1)-e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}(\cosh\theta-1)\right]$$

$$+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}(\cosh\theta+1)+e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}(\cosh\theta-1)\right]$$

olarak elde edilir. $x=-\dfrac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa(s')\,ds'$ olmak üzere $e^{jx}=\cosh x+j\sinh x$ ve $e^{-jx}=\cosh x-j\sinh x$ eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\boldsymbol{N}+j\boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}\,j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[e^{-jx}(\cosh\theta+1)-e^{jx}(\cosh\theta-1)\right]+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[e^{-jx}(\cosh\theta+1)+e^{jx}(\cosh\theta-1)\right]$$

$$=\boldsymbol{c}j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[(\cosh x-j\sinh x)(\cosh\theta+1)-(\cosh x+j\sinh x)(\cosh\theta-1)\right]$$

$$+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[(\cosh x-j\sinh x)(\cosh\theta+1)+(\cosh x+j\sinh x)(\cosh\theta-1)\right]$$

$$=\boldsymbol{c}j\sinh\theta$$

$$+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[\cosh x\cosh\theta+\text{coshx}-j\sinh x\cosh\theta-j\sinh x-\cosh x\cosh\theta+\cosh x-j\sinh x\cosh\theta+j\sinh x\right]$$

$$+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[\cosh x\cosh\theta+\text{coshx}-j\sinh x\cosh\theta-j\sinh x+\cosh x\cosh\theta-\cosh x+j\sinh x\cosh\theta-j\sinh x\right]$$

$$=\boldsymbol{c}j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[2\,\text{coshx}-2j\sinh x\cosh\theta\right]+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[2\cosh x\cosh\theta-2j\sinh x\right]$$

$$=\boldsymbol{c}j\sinh\theta+\boldsymbol{a}\left[\text{coshx}-j\sinh x\cosh\theta\right]+j\boldsymbol{b}\left[\cosh x\cosh\theta-j\sinh x\right]$$

$$=j\left(\boldsymbol{c}\sinh\theta-\boldsymbol{a}\sinh x\cosh\theta+\boldsymbol{b}\cosh x\cosh\theta\right)+\left[\boldsymbol{a}\,\text{coshx}-\boldsymbol{b}\sinh x\right]$$

bulunur. Son olarak yukarıdaki denklemlerden görüldüğü üzere $\boldsymbol{N}$ ve $\boldsymbol{B}$ vektörleri

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}\cosh x - \boldsymbol{b}\sinh x = \boldsymbol{a}\cosh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right) - \boldsymbol{b}\sinh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right) + \boldsymbol{b}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)$$

ve

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}\sinh\theta - \boldsymbol{a}\sinh x\cosh\theta + \boldsymbol{b}\cosh x\cosh\theta = \boldsymbol{c}\sinh\theta - \boldsymbol{a}\sinh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)\cosh\theta$$
$$+\boldsymbol{b}\cosh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)\cosh\theta$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}\sinh\theta + \cosh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)\right] + \boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\bar{\psi}^t\psi = 1$ olduğunu varsayarak 2×2 tipinde

$$Q = \begin{pmatrix} \psi_1 & \hat{\psi}_1 \\ \psi_2 & \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde $Q \in SU(2,H)$ matrisi alalım. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında orijin etrafındaki dönmelerin grubu $SO(1,3)$, 2×2 tipinde üniter matrisler grubu $SU(2,H)$ cümlesine homomorfiktir. $SO(1,3)$ ün elemanları 3 reel bileşenli vektörleri harekete geçirirken, $SU(2,H)$ cümlesinin elemanları hiperbolik spinorları harekete geçirir. Yani bu matris $\big((1,0,0), j(0,1,0), (0,0,1)\big)$, kanonik bazını, timelike binormalli spacelike eğrinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ ortonormal bazına taşır. (4.2.6) denklemi ve Önerme 3.1. eşitlikleri yardımıyla

$$\frac{dQ}{ds}=\begin{pmatrix}\frac{d\psi_1}{ds} & \frac{d\hat{\psi}_1}{ds}\\ \frac{d\psi_2}{ds} & \frac{d\hat{\psi}_2}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(j\tau\psi_1+\kappa\hat{\psi}_1\right) & \frac{1}{2}\left(j\tau\psi_1+\kappa\hat{\psi}_1\right)\\ \frac{1}{2}\left(j\tau\psi_2+\kappa\hat{\psi}_2\right) & \frac{1}{2}\left(j\tau\psi_2+\kappa\hat{\psi}_2\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(j\tau\psi_1+\kappa\hat{\psi}_1\right) & \frac{1}{2}\left(-j\tau\hat{\psi}_1-\kappa\psi_1\right)\\ \frac{1}{2}\left(j\tau\psi_2+\kappa\hat{\psi}_2\right) & \frac{1}{2}\left(-j\tau\hat{\psi}_2-\kappa\psi_2\right)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{j}{2}\begin{pmatrix}\tau\psi_1+j\kappa\hat{\psi}_1 & -\tau\hat{\psi}_1-j\kappa\psi_1\\ \tau\psi_2+j\kappa\hat{\psi}_2 & -\tau\hat{\psi}_2-j\kappa\psi_2\end{pmatrix} \tag{4.2.13}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\frac{dQ}{ds}=QH\left(s\right)$$

olup

$$H\left(s\right)=\frac{j}{2}\begin{pmatrix}\tau\left(s\right) & -j\kappa\left(s\right)\\ j\kappa\left(s\right) & -\tau\left(s\right)\end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}QH\left(s\right)&=\frac{j}{2}\begin{pmatrix}\psi_1 & \hat{\psi}_1\\ \psi_2 & \hat{\psi}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\left(s\right) & -j\kappa\left(s\right)\\ j\kappa\left(s\right) & -\tau\left(s\right)\end{pmatrix}\\ &=\frac{j}{2}\begin{pmatrix}\tau\psi_1+j\kappa\hat{\psi}_1 & -j\kappa\psi_1-\tau\hat{\psi}_1\\ \tau\psi_2+j\kappa\hat{\psi}_2 & -j\kappa\psi_2-\tau\hat{\psi}_2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

dır.(4.2.13) ve (4.2.14) denklemlerinden

$$\frac{dQ}{ds}=QH\left(s\right)$$

$$\frac{dQ}{Q} = H(s)\,ds \tag{4.2.15}$$

elde edilir. Burada H nin s parametresine bağlı olma durumuna göre iki durum söz konusudur. Birincisi H nin s parametresine bağlı olma durumdur. Bu durum göz önüne alınır ve (4.2.15) denkleminin integrali alınırsa

$$\int_0^s \frac{dQ}{Q} = \int H ds$$

$$\ln Q(s) - \ln Q(0) = H(s)$$

$$\ln \frac{Q(s)}{Q(0)} = H(s)$$

$$e^{\ln \frac{Q(s)}{Q(0)}} = e^{H(s)}$$

$$\frac{Q(s)}{Q(0)} = e^{H(s)}$$

$$Q(s) = e^{Hs} Q(0)$$

elde edilir. İkinci durum ise $H(s)$ nin bütün s' parametreleri için $H(s')$ ile yer değiştirmesi durumudur. Yani;

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{\tau(s')}{\kappa(s')}$$

anlamına gelir ve $\frac{dQ}{ds} = QH(s)$ denkleminin çözümü

$$Q(s) = Q(0)e^{\int_0^s H(s')ds'}$$

olarak ifade edilir.

4.3. Spacelike Binormalli Timelike Eğrilerin Hiperbolik Spinor Gösterimleri

$\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$, birim hızlı regüler timelike eğri ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ olmak üzere, (4.1.1) denkleminden Frenet türev denklemleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}' &= \kappa \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N}' &= \kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' &= -\tau \boldsymbol{N} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

dır. Spinorlarla ilgili verilen bölüm 3 deki sonuçlara göre

$$\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{T} = \xi^t \sigma \xi \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{B} = -\hat{\xi}^t \sigma \xi \tag{4.3.2}$$

ve $\bar{\xi}^t \xi = 1$ olacak şekilde bir ξ hiperbolik spinoru vardır. Böylece ξ hiperbolik spinoru $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{B}\}$ üçlüsünü ve $\dfrac{d\xi}{ds}$ ise eğri boyunca bu üçlünün değişimini temsil eder.

Önerme 3.4. e göre $\{\xi, \hat{\xi}\}$ ikilisi iki hiperbolik bileşenli hiperbolik spinorlar için baz teşkil ettiğinden öyle f ve g hiperbolik fonksiyonları vardır ki

$$\frac{d\xi}{ds} = f\xi + g\hat{\xi} \tag{4.3.3}$$

yazılışı tek türlüdür. (4.3.2) denklemindeki $\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{T} = \xi^t \sigma \xi$ ifadesinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} + j\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^t \sigma \xi + \xi^t \sigma \left(\frac{d\xi}{ds}\right) \tag{4.3.4}$$

bulunur. Eğer (4.3.2) ve (4.3.3) denklemleri (4.3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} + j\kappa \boldsymbol{N} = \left(f\xi + g\hat{\xi} \right)^t \sigma\xi + \xi^t \sigma \left(f\xi + g\hat{\xi} \right)$$

$$j\kappa \left(\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{T} \right) + \tau \boldsymbol{B} = \left(f\xi^t + g\hat{\xi}^t \right) \sigma\xi + \xi^t \sigma \left(f\xi + g\hat{\xi} \right)$$

$$= f\left(\xi^t \sigma\xi + \xi^t \sigma\xi \right) + g\left(\hat{\xi}^t \sigma\xi + \xi^t \sigma\hat{\xi} \right)$$

olur. σ matrisleri simetrik olduğundan $\hat{\xi}^t \sigma\xi = \xi^t \sigma\hat{\xi}$ dır. Böylece

$$\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B} + j\kappa \boldsymbol{N} = 2f\left(\xi^t \sigma\xi \right) - 2g\left(-\hat{\xi}^t \sigma\xi \right)$$

$$= 2f\left(\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{T} \right) - 2g\left(\boldsymbol{B} \right)$$

olur. Burada son denklemden

$$f = \frac{j\kappa}{2} \quad \text{ve} \quad g = \frac{-\tau}{2} \tag{4.3.5}$$

elde edilir. O halde (4.3.3) denklemi ve (4.3.5) denklemleri dikkate alınırsa

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi - \tau\hat{\xi} \right)$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.1. İki bileşenli ξ hiperbolik spinoru, yay parametresi ile parametrelendirilen bir α timelike eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{B}\}$ sıralı üçlüsünü temsil etsin. Bu takdirde, Frenet türev formülleri

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi - \tau\hat{\xi} \right) \tag{4.3.6}$$

olacak şekilde tek bir hiperbolik spinor denklemine eşdeğerdir. Burada κ ve τ sırasıyla; eğrilik ve torsiyondur.

Şimdi diferensiyel geometrinin temel teoremini hiperbolik spinorlar yardımıyla ispat edelim.

Teorem 4.3.2. $\mathbb{R}_1^3$, Lorentz uzayında iki eğri aynı eğrilik ve burulma fonksiyonuna sahipse, bunlardan birisi uygun bir şekilde döndürülüp ötelendikten sonra iki eğri bütün noktalarda çakışır.

İspat. Teoremi ispatlamak için $\overline{\varphi}^t\varphi = 1 = \overline{\xi}^t\xi$ özelliğine sahip φ ve ξ gibi iki hiperbolik spinoru göz önünde bulunduralım. O halde gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{(\xi \pm \varphi)}^t(\xi \pm \varphi) = 2 \pm \overline{\xi}^t\varphi \pm \xi^t\overline{\varphi} = 2 \pm \mathrm{Re}\left(\overline{\xi}^t\varphi\right) \tag{4.3.7}$$

elde edilir. φ ve ξ hiperbolik spinorlarının aynı eğrilik ve burulma fonksiyonlarına sahip iki eğrinin Frenet çatısına ait oldukları kabul edilirse (4.3.6) denkleminden

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\overline{\xi}^t\varphi\right)}{ds} &= \frac{1}{2}\left(\overline{j\kappa\xi - \tau\hat{\xi}}\right)^t\varphi + \frac{1}{2}\overline{\xi}^t\left(j\kappa\varphi - \tau\hat{\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[-j\kappa\overline{\xi}^t\varphi - \tau\overline{\hat{\xi}}^t\varphi + j\kappa\overline{\xi}^t\varphi - \tau\overline{\xi}^t\hat{\varphi}\right] \\
&= \frac{-\tau}{2}\left[\overline{\hat{\xi}}^t\varphi + \overline{\xi}^t\hat{\varphi}\right]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Son denklemde (3.4) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{d\left(\overline{\xi}^t\varphi\right)}{ds} = \frac{-\tau}{2}\left[-\xi_2\varphi_1 + \xi_1\varphi_2 - \overline{\xi}_1\overline{\varphi}_2 + \overline{\xi}_2\overline{\varphi}_1\right] \tag{4.3.8}$$

elde edilir. Ayrıca herhangi $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}_1^3$ için $\xi_2\varphi_1 = \boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b}$ ve $\xi_1\varphi_2 = \boldsymbol{c} + j\boldsymbol{d}$ olmak üzere

$$-\xi_2\varphi_1+\xi_1\varphi_2-\overline{\xi}_1\overline{\varphi}_2+\overline{\xi}_2\overline{\varphi}_1=-\boldsymbol{a}-j\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+j\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}+j\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}-j\boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\overline{\xi}^t\varphi\right)}{ds}&=\frac{-\tau}{2}\left[-\xi_2\varphi_1+\xi_1\varphi_2-\overline{\xi}_1\overline{\varphi}_2+\overline{\xi}_2\overline{\varphi}_1\right]\\&=-2j\boldsymbol{b}+2j\boldsymbol{d}\\&=-j(2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{d})\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.3.8) denklemi $\frac{d\left(\overline{\xi}^t\varphi\right)}{ds}=-j(2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{d})$ şeklinde elde edilir. Burada görüldüğü üzere yukarıdaki ifadenin reel kısmı sıfırdır. Dolayısıyla $\frac{d\left(\overline{\xi}^t\varphi\right)}{ds}$ sadece imajiner olup $\left(\overline{\xi\pm\varphi}\right)^t\left(\xi\pm\varphi\right)=2\pm2\operatorname{Re}\left(\overline{\xi}^t\varphi\right)$ sabittir. Ayrıca reel kısım s parametresine bağlı değildir. Aksi takdirde türevi sadece imajiner olmazdı. Eğer $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}\}$ üçlüsü bazı s değerleri için çakışan iki eğri ile eşlenirse bu s noktasında φ hiperbolik spinoru, ξ ya da $-\xi$ ile çakışır ve bu çakışıklık bütün s noktaları için korunur. Bu da gösterir ki iki eğrinin tanjant vektörleri tüm s noktaları için çakışır ve bu iki eğri yalnızca sabit vektör ile ayrılabilir.

Teorem 4.3.3. İki bileşenli ξ ve ϕ hiperbolik spinorları, yay parametresi ile parametrelendirilen bir $\alpha:I\to\mathbb{R}_1^3$ timelike eğrisinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}\}$ sıralı üçlüsü ile temsil edilsin. Eğer $\frac{\tau}{\kappa}=\coth\theta,\quad(0\le\theta\le\infty)$ sabitse α eğrisinin Frenet çatısı

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{c}\sinh\theta+\cosh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)+\boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)\right]$$

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{c}\cosh\theta+\sinh\theta\left[-\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)-\boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)\right]$$

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)+\boldsymbol{b}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'\right)$$

dir.

İspat. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$ timelike eğrisi için $\dfrac{\tau}{\kappa} = \coth\theta$ sabit olsun. Böylece ξ iki bileşenli hiperbolik spinoru için (4.3.6) denklemi

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{ds} &= \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi - \tau\hat{\xi}\right) = \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi - \kappa\coth\theta\,\hat{\xi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi - \kappa\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\hat{\xi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{j\kappa\xi\sinh\theta - \kappa\hat{\xi}\cosh\theta}{\sinh\theta}\right)\\
&= \frac{\kappa}{2\sinh\theta}\left(-\cosh\theta\,\hat{\xi} + j\sinh\theta\,\xi\right) \qquad (4.3.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\xi}}{ds} &= \frac{1}{2}\left(\widehat{j\kappa\xi - \tau\hat{\xi}}\right) = \frac{1}{2}\left(-j\kappa\hat{\xi} + \tau\xi\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-j\kappa\hat{\xi} + \kappa\xi\coth\theta\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-j\kappa\hat{\xi} + \kappa\xi\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-j\kappa\hat{\xi}\sinh\theta + \kappa\xi\cosh\theta}{\sinh\theta}\right)\\
&= \frac{-\kappa}{2\sinh\theta}\left(-\cosh\theta\,\xi + j\sinh\theta\,\hat{\xi}\right) \qquad (4.3.10)
\end{aligned}$$

$-\cosh\dfrac{\theta}{2}\hat{\xi} + j\sinh\dfrac{\theta}{2}\xi$ denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve (4.3.9) ile (4.3.10) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\frac{d}{ds}\left(-\cosh\frac{\theta}{2}\hat{\xi}+j\sinh\frac{\theta}{2}\xi\right)=-\cosh\frac{\theta}{2}\frac{d\hat{\xi}}{ds}+j\sinh\frac{\theta}{2}\frac{d\xi}{ds}$$

$$=-\cosh\frac{\theta}{2}\left(\frac{-\kappa}{2\sinh\theta}\right)\left(-\cosh\theta\,\xi+j\sinh\theta\,\hat{\xi}\right)+j\sinh\frac{\theta}{2}\left(\frac{\kappa}{2\sinh\theta}\right)\left(-\cosh\theta\,\hat{\xi}+j\sinh\theta\,\xi\right)$$

$$=\left(\frac{\kappa}{2\sinh\theta}\right)\left[\left(-\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\,\xi+j\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\,\hat{\xi}-j\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\,\hat{\xi}+\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\,\xi\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\kappa}{2\sinh\theta}\right)\left[\left(\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\,\xi-\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\,\xi\right)+j\left(-\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\theta\,\hat{\xi}+\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\theta\,\hat{\xi}\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{\kappa}{2\sinh\theta}\right)\left[\cosh\frac{\theta}{2}\xi-j\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\xi}\right]=\left(\frac{j\kappa}{2\sinh\theta}\right)\left[\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\xi}-j\cosh\frac{\theta}{2}\xi\right]$$

elde edilir. Burada $-j\cosh\frac{\theta}{2}\xi+\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\xi}=t'$ denirse yukarıdaki eşitlik

$$\frac{dt'}{ds}=\frac{j\kappa}{2\sinh\theta}t'$$

$$\frac{dt'}{t'}=\left(\frac{j\kappa}{2\sinh\theta}\right)ds$$

olur. Son denklemin integrali alınırsa

$$\int\frac{dt'}{t'}=\frac{j}{2\sinh\theta}\int\kappa ds$$

$$\ln t'=\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'+\ln\phi$$

$$e^{\ln t'}=e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_s\kappa ds'+\ln\phi}$$

$$e^{\ln t'}=e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}+e^{\ln\phi}$$

$$t'=e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\phi$$

elde edilir. Yani;

$$-j\cosh\frac{\theta}{2}\xi+\sinh\frac{\theta}{2}\hat{\xi}=e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\phi \tag{4.3.11}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde iki tarafın eşi alınır ve Önerme 3.1 göz önüne alınırsa

$$j\cosh\frac{\theta}{2}\hat{\xi}-\sinh\frac{\theta}{2}\xi=e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\hat{\phi}$$

elde edilir. Burada ϕ hiperbolik spinoru s parametresinden bağımsız ve $\phi^t\phi=1$ dir. (4.3.11) denklemi $\cosh\frac{\theta}{2}$ ve (4.3.12) denklemi $\left(-j\sinh\frac{\theta}{2}\right)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\xi=\sinh\frac{\theta}{2}e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\hat{\phi}-j\cosh\frac{\theta}{2}e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\phi$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3.11) denklemi $-j\sinh\frac{\theta}{2}$ ve (4.3.12) denklemi $\cosh\frac{\theta}{2}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\hat{\xi}=-\sinh\frac{\theta}{2}e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\phi+j\cosh\frac{\theta}{2}e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\hat{\phi}$$

olur. Bulunan ξ ve $\hat{\xi}$ eşitlikleri, (4.3.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\boldsymbol{B}=\left(\sinh\frac{\theta}{2}e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\phi^t-j\cosh\frac{\theta}{2}e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\hat{\phi}^t\right)\sigma\left(-j\cosh\frac{\theta}{2}e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\phi+\sinh\frac{\theta}{2}e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\hat{\phi}\right)$$

$$=\left(\phi^t\sigma\phi\right)\left(\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\left(-je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\phi^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\left(e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\phi\right)\left(\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\left(-je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(-je^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\left(e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.2) denkleminden $\boldsymbol{c}=-\hat{\phi}^t\sigma\phi$ ve $\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}=\phi^t\sigma\phi$ yazılabilir ve bu ifadeler son denklemde yerine yazılırsa;

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})\left(-je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+(-\boldsymbol{c})\left(\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)+(-\boldsymbol{c})\left(\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$-\left(\overline{\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}}\right)\left(-je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=(-\boldsymbol{c})\cosh\theta+(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})\left(-je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\frac{\sinh\theta}{2}\right)+(-\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b})\left(-je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\,ds'}\frac{\sinh\theta}{2}\right)$$

$$=\left(-\boldsymbol{c}\right)\cosh\theta$$
$$+\frac{\sinh\theta}{2}\left[\boldsymbol{a}\left(-je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}+je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)+j\boldsymbol{b}\left(-je^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}-je^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\right]$$

olarak elde edilir. $x=-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'$ olmak üzere $e^{jx}=\cosh x+j\sinh x$ ve $e^{-jx}=\cosh x-j\sinh x$ eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\boldsymbol{B}=\left(-\boldsymbol{c}\right)\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[\boldsymbol{a}\,j\left(-e^{-jx}+e^{jx}\right)-\boldsymbol{b}\left(e^{-jx}+e^{jx}\right)\right]$$
$$=\left(-\boldsymbol{c}\right)\cosh\theta$$
$$+\frac{\sinh\theta}{2}\left[\boldsymbol{a}\,j\left(-\cosh x+j\sinh x+\cosh x+j\sinh x\right)-\boldsymbol{b}\left(\cosh x-j\sinh x+\cosh x+j\sinh x\right)\right]$$
$$=\left(-\boldsymbol{c}\right)\cosh\theta+\frac{\sinh\theta}{2}\left[\boldsymbol{a}\,j\left(2j\sinh x\right)-\boldsymbol{b}\left(2\cosh x\right)\right]$$
$$=\left(-\boldsymbol{c}\right)\cosh\theta+\sinh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh x-\boldsymbol{b}\cosh x\right]$$
$$=\left(-\boldsymbol{c}\right)\cosh\theta+\sinh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa(s')\,ds'\right)-\boldsymbol{b}\cosh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa(s')\,ds'\right)\right]$$
$$\boldsymbol{B}=\left(-\boldsymbol{c}\right)\cosh\theta+\sinh\theta\left[-\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa(s')\,ds'\right)-\boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa(s')\,ds'\right)\right]$$

olarak bulunur. Aynı şekilde $\boldsymbol{N}+j\boldsymbol{T}$ için benzer işlemler yapılırsa

$$\boldsymbol{N}+\mathrm{j}\boldsymbol{T}=\xi^t\sigma\xi$$
$$=\left(-j\cosh\frac{\theta}{2}e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\phi^t+\sinh\frac{\theta}{2}e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\hat{\phi}^t\right)\sigma\left(-j\cosh\frac{\theta}{2}e^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\phi+\sinh\frac{\theta}{2}e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\hat{\phi}\right)$$

$$=\left(\phi^t\sigma\phi\right)\left(\left(-je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\left(-je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\phi^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(-je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\left(e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\phi\right)\left(\left(e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\left(-je^{\frac{j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+$$

$$\left(\hat{\phi}^t\sigma\hat{\phi}\right)\left(\left(e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\left(e^{\frac{-j}{2\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\right)\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.2) denkleminden $\boldsymbol{c}=-\hat{\phi}^t\sigma\phi$ ve $\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}=\phi^t\sigma\phi$ olmak üzere;

$$=\left(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}\right)\left(e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\cosh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)+\left(-\boldsymbol{c}\right)\left(-\mathrm{j}\cosh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$+\left(-\boldsymbol{c}\right)\left(-\mathrm{j}\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}\right)-\left(\overline{\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}}\right)\left(e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\sinh\frac{\theta}{2}\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{c}j\sinh\theta+\left(\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}\right)\left(e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\cosh\theta+1}{2}\right)+\left(-\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}\right)\left(e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\frac{\cosh\theta-1}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{c}\,j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\left(\cosh\theta+1\right)-e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\left(\cosh\theta-1\right)\right]$$

$$+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[e^{\frac{j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\left(\cosh\theta+1\right)-e^{\frac{-j}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'}\left(\cosh\theta-1\right)\right]$$

elde edilir. $x=-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'$ olmak üzere $e^{-jx}=\cosh x-j\sinh x$ ve $e^{jx}=\cosh x+j\sinh x$ olduğu dikkate alınırsa

$$\boldsymbol{N}+j\boldsymbol{T}=\boldsymbol{c}\,j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[e^{-jx}(\cosh\theta+1)-e^{jx}(\cosh\theta-1)\right]$$
$$+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[e^{-jx}(\cosh\theta+1)-e^{jx}(\cosh\theta-1)\right]$$
$$=\boldsymbol{c}\,j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[(\cosh x-j\sinh x)(\cosh\theta+1)-(\cosh x+j\sinh x)(\cosh\theta-1)\right]$$
$$+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[(\cosh x-j\sinh x)(\cosh\theta+1)-(\cosh x+j\sinh x)(\cosh\theta-1)\right]$$
$$=\boldsymbol{c}\,j\sinh\theta$$
$$+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[\cosh x\cosh\theta+\cosh x-j\sinh x\cosh\theta-j\sinh x-\cosh x\cosh\theta+\cosh x-j\sinh x\cosh\theta+j\sinh x\right]$$
$$+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[\cosh x\cosh\theta+\cosh x-j\sinh x\cosh\theta-j\sinh x-\cosh x\cosh\theta-\cosh x+j\sinh x\cosh\theta-j\sinh x\right]$$
$$=\boldsymbol{c}\,j\sinh\theta+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\left[2\cosh x-2j\sinh x\cosh\theta\right]+\frac{j\boldsymbol{b}}{2}\left[2\cosh x\cosh\theta-2j\sinh x\right]$$
$$=\boldsymbol{c}\,j\sinh\theta+\boldsymbol{a}\left[\cosh x-j\sinh x\cosh\theta\right]+j\boldsymbol{b}\left[\cosh x\cosh\theta-j\sinh x\right]$$
$$=j\left[\boldsymbol{c}\sinh\theta-\boldsymbol{a}\sinh x\cosh\theta+\boldsymbol{b}\cosh x\cosh\theta\right]+\left[\boldsymbol{a}\cosh x-\boldsymbol{b}\sinh x\right]$$

bulunur. Son olarak yukarıdaki denklemlerden de görüldüğü üzere $\boldsymbol{N}$ ve $\boldsymbol{T}$ vektörleri

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}\cosh x-\boldsymbol{b}\sinh x$$
$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}\cosh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)-\boldsymbol{b}\sinh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)$$

yani

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)+\boldsymbol{b}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s\kappa\, ds'\right)$$

ve

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c}\sinh\theta - \boldsymbol{a}\sinh x\cosh\theta + \boldsymbol{b}\cosh x\cosh\theta$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c}\sinh\theta - \boldsymbol{a}\sinh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)\cosh\theta + \boldsymbol{b}\cosh\left(-\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)\cosh\theta$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c}\sinh\theta + \cosh\theta\left[\boldsymbol{a}\sinh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right) + \boldsymbol{b}\cosh\left(\frac{1}{\sinh\theta}\int_0^s \kappa\, ds'\right)\right]$$

olarak bulunur.

Şimdi $\bar{\xi}^t\xi = 1$ olduğunu varsayarak 2×2 tipinde

$$Q = \begin{pmatrix} \xi_1 & \hat{\xi}_1 \\ \xi_2 & \hat{\xi}_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde $Q \in SU(2,H)$ matrisi alalım. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında orijin etrafındaki dönmelerin grubu $SO(1,3)$, 2×2 tipinde üniter matrisler grubu $SU(2,H)$ cümlesine homomorfiktir. $SO(1,3)$ ün elemanları 3 reel bileşenli vektörleri harekete geçirirken, $SU(2,H)$ cümlesinin elemanları hiperbolik spinorları harekete geçirir ve bu matris kanonik bazı, spacelike binormalli timelike eğrinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}\}$ ortonormal bazına taşır. (4.3.6) denklemi ve Önerme 3.1. eşitlikleri yardımıyla

$$\frac{dQ}{ds} = \begin{pmatrix} \dfrac{d\xi_1}{ds} & \dfrac{d\hat{\xi}_1}{ds} \\ \dfrac{d\xi_2}{ds} & \dfrac{d\hat{\xi}_2}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi_1 - \tau\hat{\xi}_1\right) & \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi_1 - \tau\hat{\xi}_1\right) \\ \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi_2 - \tau\hat{\xi}_2\right) & \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi_2 - \tau\hat{\xi}_2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi_1 - \tau\hat{\xi}_1\right) & \frac{1}{2}\left(-j\kappa\hat{\xi}_1 + \tau\xi_1\right) \\ \frac{1}{2}\left(j\kappa\xi_2 - \tau\hat{\xi}_2\right) & \frac{1}{2}\left(-j\kappa\hat{\xi}_2 - \tau\xi_2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{j}{2}\begin{pmatrix} \kappa\xi_1 - j\tau\hat{\xi}_1 & -\kappa\hat{\xi}_1 + j\tau\xi_1 \\ \kappa\xi_2 - j\tau\hat{\xi}_2 & -\kappa\hat{\xi}_2 + j\tau\xi_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.13}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\frac{dQ}{ds} = QH(s)$$

olup

$$H(s) = \frac{j}{2}\begin{pmatrix} \kappa & j\tau \\ -j\tau & -\kappa \end{pmatrix}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} QH(s) &= \frac{j}{2}\begin{pmatrix} \xi_1 & \hat{\xi}_1 \\ \xi_2 & \hat{\xi}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \kappa & j\tau \\ -j\tau & -\kappa \end{pmatrix} \\ &= \frac{j}{2}\begin{pmatrix} \kappa\xi_1 - j\tau\hat{\xi}_1 & j\tau\xi_1 - \kappa\hat{\xi}_1 \\ \kappa\xi_2 - j\tau\hat{\xi}_2 & j\tau\xi_2 - \kappa\hat{\xi}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

dır. (4.3.13) ve (4.3.14) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ds} &= QH(s) \\ \frac{dQ}{Q} &= H(s)\,ds \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

elde edilir. Burada H nin s parametresine bağlı olma durumuna göre iki durum söz konusudur. Birincisi H nin s parametresine bağlı olma durumu durumdur. Bu durum göz önüne alınır ve (4.3.15) denkleminin integrali alınırsa

$$\int_0^s \frac{dQ}{Q} = \int H ds$$

$$\ln Q(s) - \ln Q(0) = Hs$$

$$\ln\frac{Q(s)}{Q(0)}=Hs$$

$$e^{\ln\frac{Q(s)}{Q(0)}}=e^{Hs}$$

$$\frac{Q(s)}{Q(0)}=e^{Hs}$$

$$Q(s)=e^{Hs}Q(0)$$

elde edilir. İkinci durum ise $H(s)$ nin bütün s' parametreleri için $H(s')$ ile yer değiştirmesi durumudur. Yani

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=\frac{\tau(s')}{\kappa(s')}$$

anlamına gelir ve $\frac{dQ}{ds}=QH(s)$ denkleminin çözümü

$$Q(s)=Q(0)e^{\int_0^s H(s')ds'}$$

olarak ifade edilir.

Örnek 4.3.1. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3,\ \ \alpha(s)=(\cos s,\sin s,1)$ timelike binormalli spacelike eğrisini alalım. (4.1.3) Frenet türev denkleminden

$$\boldsymbol{T}=(-\sin s,\cos s,0)$$

$$\boldsymbol{N}=(-\cos s,-\sin s,0)$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{-T}\times\boldsymbol{N}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{-B}\\ -\sin s & \cos s & 0\\ -\cos s & -\sin s & 0\end{vmatrix}=(0,0,1)$$

olarak bulunur. Böylece (4.2.2) denkleminden

$$(-\cos s, -\sin s, 0) + j(0,0,1) = \psi^t \sigma \psi$$

elde edilir. İki tarafın s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$(\sin s, -\cos s, 0) + j(0,0,0) = \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^t \sigma\psi + \psi^t \sigma \left(\frac{d\psi}{ds}\right)$$

bulunur. Burada (4.2.6) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}(\sin s, -\cos s, 0) &= (f\psi + g\hat{\psi})^t \sigma\psi + \psi^t\sigma(f\psi + g\hat{\psi}) \\ &= (f\psi^t + g\hat{\psi}^t)\sigma\psi + \psi^t\sigma(f\psi + g\hat{\psi}) \\ &= f(\psi^t\sigma\psi + \psi^t\sigma\psi) + g(\hat{\psi}^t\sigma\psi + \psi^t\sigma\hat{\psi}) \\ &= 2f(\psi^t\sigma\psi) - 2g(-\hat{\psi}\sigma\psi)\end{aligned}$$

(4.2.2) denkleminden faydalanarak

$$\begin{aligned}&= 2f(\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B}) - 2g(\boldsymbol{T}) \\ &= 2f\left[(-\cos s, -\sin s, 0) + j(0,0,+1)\right] - 2g(-\sin s, \cos s, 0) \\ &= 2f(-\cos s, -\sin s, +\mathrm{j}) - 2g(-\sin s, \cos s, 0) \\ &= (-2f\cos s, -2f\sin s, +2f\,\mathrm{j}) + (2g\sin s, -2g\cos s, 0) \\ &= (-2f\cos s + 2g\sin s, -2f\sin s - 2g\cos s, +2f\,\mathrm{j})\end{aligned} \qquad (4.3.16)$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$f = 0 \qquad g = \frac{1}{2} \qquad (4.3.17)$$

ayrıca (4.2.5) denkleminden

$$\kappa = 1 \qquad \tau = 0$$

olur. Dolayısıyla eğri düzlemseldir.
Şimdi (4.2.3) denkleminde (4.3.17) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\hat{\psi}}{2} \tag{4.3.18}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\frac{d\hat{\psi}}{ds} = \frac{\hat{\hat{\psi}}}{2} = -\frac{\psi}{2} \tag{4.3.19}$$

olur. (4.3.18) ve (4.3.19) denklemleri çözülürse

$$\psi = c_1 \cos\frac{s}{2} + c_2 \sin\frac{s}{2}$$

ve

$$\hat{\psi} = -c_1 \sin\frac{s}{2} + c_2 \cos\frac{s}{2}$$

elde edilir.

Örnek 4.3.2. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3,\ \alpha(s) = \left(\sqrt{2}\sinh(s), s, -\sqrt{2}\cosh(s)\right)$ spacelike binormalli timelike eğrisini alalım. (4.1.1) Frenet türev denkleminden

$$\boldsymbol{T} = \alpha'(s) = \left(\sqrt{2}\cosh(s), 1, -\sqrt{2}\sinh(s)\right)$$

$$\boldsymbol{N} = \sinh(s), 0, -\cosh(s)$$
$$\boldsymbol{B} = \left(\cosh(s), \sqrt{2}, -\sinh(s)\right)$$

olarak bulunur. Böylece (4.3.2) denkleminden

$$\left(\sinh(s), 0, -\cosh(s)\right) + j\left(\sqrt{2}\cosh(s), 1, -\sqrt{2}\sinh(s)\right) = \xi^t \sigma \xi$$

elde edilir. İki tarafın s parametresine göre türevini alınırsa

$$\left(\cosh(s), 0, -\sinh(s)\right) + j\left(\sqrt{2}\sinh(s), 0, -\sqrt{2}\cosh(s)\right) = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^t \sigma\xi + \xi^t \sigma \left(\frac{d\xi}{ds}\right)$$
$$\left(\cosh(s) + j\sqrt{2}\sinh(s), 0, -\sinh(s) - j\sqrt{2}\cosh(s)\right) = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^t \sigma\xi + \xi^t \sigma \left(\frac{d\xi}{ds}\right)$$

bulunur. Burada (4.3.6) ve (4.3.2) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\left(\cosh(s) + j\sqrt{2}\sinh(s), 0, -\sinh(s) - j\sqrt{2}\cosh(s)\right) = 2f\left(\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{T}\right) - 2g\boldsymbol{B}$$
$$= 2f\left[\left(\sinh(s), 0, -\cosh(s)\right) + j\left(\sqrt{2}\cosh(s), 1, -\sqrt{2}\sinh(s)\right)\right] - 2g\left(\cosh(s), \sqrt{2}, -\sinh(s)\right)$$

$$= 2f\left[\left(\sinh(s) + \mathrm{j}\sqrt{2}\cosh(s)\right), \mathrm{j}, -\cosh(s) - j\sqrt{2}\sinh(s)\right] - 2g\left(\cosh(s), \sqrt{2}, -\sinh(s)\right)$$

$$= \left(2f\sinh(s) + 2\sqrt{2}f\ \mathrm{j}\cosh(s), 2fj, -2f\cosh(s) - 2\sqrt{2}fj\sinh(s)\right) + \left(-2\mathrm{g}\cosh(s), -2\sqrt{2}g, 2g\sinh(s)\right)$$

$$= \left(2f\sinh(s) + 2\sqrt{2}f\ \mathrm{j}\cosh(s) - 2\mathrm{g}\cosh(s), 2fj - 2\sqrt{2}g, -2f\cosh(s) - 2\sqrt{2}fj\sinh(s) + 2g\sinh(s)\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$f = \frac{\sqrt{2}}{2}j \qquad\qquad g = \frac{1}{2} \tag{4.3.20}$$

ayrıca (4.3.5) denkleminden

$$\kappa = \sqrt{2} \qquad \tau = -1$$

bulunur. (4.3.3) denkleminde (4.3.20) denklemi yerine yazılırsa

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{2} j\xi + \frac{\hat{\xi}}{2} \tag{4.3.21}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{d\hat{\xi}}{ds} = -\frac{\sqrt{2}}{2} j\hat{\xi} - \frac{\xi}{2} \tag{4.3.22}$$

bulunur. (4.3.21) ve (4.3.22) denklemleri çözülürse

$$\xi = x = c_1 e^{\frac{1}{2}s} + c_2 e^{-\frac{1}{2}s} \tag{4.3.23}$$

$$\hat{\xi} = y = \frac{-\frac{1}{2}c_1 \frac{2}{\sqrt{2}j+1} e^{\left(\frac{1+\sqrt{2}j}{2}\right)s} - \frac{1}{2}c_2 \frac{2}{\sqrt{2}j-1} e^{\left(\frac{\sqrt{2}j-1}{2}\right)s} + c}{e^{j\frac{1}{\sqrt{2}}s}} \tag{4.3.24}$$

bulunur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bölüm 1'de, spinorların tarihsel gelişiminden ve uygulama alanlarından söz edilmiştir.

Bölüm 2'de çalışma boyunca kullanılan bazı temel tanım ve teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Bölüm 3 ve Bölüm 4 çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümlerde $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında orijin etrafındaki dönmelerin grubu olan $SU(1,3)$ ile 2×2 tipinde üniter matrisler grubu $SU(2,H)$ arasındaki homomorfizm ayrıntılı olarak anlatıldı ve bunun bir sonucu olarak hiperbolik spinorlar ve ortonormal taban arasındaki bağıntı incelendi. Üçüncü bölümde hiperbolik spinorlar Minkowski uzayındaki ortonormal taban yardımıyla tanıtıldı. Dördüncü bölümde Minkowski eğriler tanıtılmış, spacelike ve timelike eğriler için Frenet türev denklemleri hiperbolik spinorlar cinsinden verilmiştir. Ayrıca tezimizdeki teoremleri destekleyici uygulamalara yer verilmiştir.

Diferensiyel geometride yüzey üzerindeki eğriler E^3 Öklid uzayında, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında veya G_3 Galilean uzayında çalışılmıştır. Yüzey üzerindeki eğrilerle ilgili yapılan bu çalışmaların, hiperbolik spinor gösterimi araştırılabilir.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın kısa bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak yeni araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] CARTAN, E., The Theory of Spinors, Dover Publ., 1966.

[2] VIVARELLI, M.D., Development of spinor descriptions of rotational mechanics from Euler's rigid body displacement teorem, Celestial Mechanics, 32, 193-207, 1984.

[3] BROUER, R., and WEYL, H., Spinors in n dimensions, Am. J. Math 57, 425- 449, 1935.

[4] TORRES DEL CASTILLO, G.F., and SANCHEZ BARRALES, G., Spinor formulation of the differential geometry arrales, Spinor formulation of the differential geometry of curves, Revista Colombiana de Matematicas, 38, 27-34, 2004.

[5] KİŞİ, İ., and TOSUN, M., Spinor Darboux Equations of Curves in Euclidean 3- Space, Mathematica Moravica, 19(1), 87–93, 2015.

[6] ÜNAL, D., KİŞİ, İ., and TOSUN, M., Spinor Bishop Equation of Curves in Euclidean 3-Space, Adv. In Appl. Cliff. Algebr., 23, 3, 757-765, 2013.

[7] O'NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry, Acamemic Press, New York, 1983.

[8] HACISALİHOĞLU, H.H., Diferensiyel Geometri, 1. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 4, 2000.

[9] IKAWA, T., On curves and submanifolds in an indefinite-Riemannian manifold, Tsukuba J. Math. 9, 2, 353-371, 1985.

[10] ÖZDEMİR, M., and ERGİN, A.A., Spacelike Darboux curves in Minkowski 3- space, Differ. Geom. Dyn. Syst., 9, 131-137, 2007.

[11] AKKAŞ, S., HACISALİHOĞLU, H.H., ÖZEL, Z., SABUNCUOĞLU A., Soyut Matematik, Ankara, 1984.

[12] ÇALLIALP, F., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2009.

[13] HACISALİHOĞLU, H.H., Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1985.

[14] HACISALİHOĞLU, H.H., SABUNCUOĞLU, A., Diferensiyel Geometri, Milli Eğitim Basımevi, 1983.

[15] LAWSON, H.B., Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.

[16] MONTAGUE, B.W., Elementary spinor algebra for polarized beams in strage rings, Particle Accelerators, 11, 219-231, 1981.

[17] O'NEILL, B., Elementary Differential Geometry, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1997.

[18] BOOTHBY, W.M., An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, London, 1975.

[19] HACISALİHOĞLU, H.H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2, 1983.

[20] BİRMAN, G.S., and NOMİZU K., Trigonomerty in Lorentzian Geometry, Ann. Math. Month. 91(9), 534-549, 1984.

[21] DAS, A., The Special Theory of Relativity, Springer-Verlag New York, Inc., 1993.

[22] WEINSTEIN, T., Lorentz Surfaces, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, 1995.

[23] RATCLIFFE, J.G., Foundation of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1994.

[24] EKMEKÇİ, N., Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1987.

[25] BAŞ, S., Minkowski Uzayında Hareketlerin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2011.

[26] KULA, L., Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep KETENCİ, 23.12.1989 tarihinde Artvin'de doğdu. İlköğrenimini Sakarya'nın Adapazarı ilçesinde Ozanlar Şehit Mustafa Özen İlkokulunda, ortaöğrenimini Adapazarı Atatürk Lisesinde tamamladı. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2012 yılında tamamladı. 2012-2014 yılları arasında bir dershanede matematik öğretmeni olarak görev aldı. Şu anda Özel Neva Okulları'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.