T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER MODELLERDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLERİN ORTALAMA HATA KARELER ÖLÇÜTÜNE GÖRE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra HOŞSÖZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER**

Mayıs 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER MODELLERDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLERİN ORTALAMA HATA KARELER ÖLÇÜTÜNE GÖRE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra HOŞSÖZ

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 16/06/ 2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER Jüri Başkanı	**Yrd. Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ Üye**	**Yrd. Doç. Dr. Hakan YAKUT Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Esra HOŞSÖZ

15.05.2015

TEŞEKKÜR

Çalışmamın tüm aşamalarında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardımlarını benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e, maddi ve manevi destekleriyle daima yanımda olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Komisyon Başkanlığına (Proje No: 2015-50-01-004) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^{nx1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{mxn}$	: mxn boyutlu reel matrisler kümesi
$A, B, C, \ldots$	: Matrisler
$\left(a_{ij}\right)$	: Elemanları a_{ij} olan matris
$x, y, z, \ldots$	: Vektörler
I	: Birim matris
A'	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^{-}	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\mathcal{C}(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$\mathcal{C}(A')$	: A matrisinin satır uzayı
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin sıfır uzayı
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü
$Cov(.)$	: Kovaryans operatörü
$Var(A)$	: A matrisinin varyansı
$\in$	: Elemanıdır
$=$	: Eşittir
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
min	: minimum

ÖZET

Anahtar kelimeler: Çoklu iç ilişki, Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, Alışılmış Karma Tahmin Edici, Temel Bileşenler Regresyon Tahmin Edicisi, Ortalama Hata Kareler.

Lineer modellerde çoklu iç ilişki problemi olduğunda alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) parametreler için iyi bir tahmin edici olmayabilir. Çoklu iç ilişki probleminden kaynaklanan sorunların üstesinden gelebilmek için şimdiye kadar literatürde çok sayıda alternatif yanlı tahmin edici önerilmiştir. Bu yanlı tahmin edicilerin performansları farklı ölçütlere göre değerlendirilir. Bu ölçütlerden biri ortalama hata kareler (MSE) ölçütüdür.

Bu çalışmada, alışılmış karma tahmin edici (OME) ve temel bileşenler regresyon (PCR) tahmin edicisi için kulanılan yaklaşım kullanılarak genel lineer modeller altında rasgele kısıtlı bazı yanlı tahmin edicilerin performansları MSE ölçütüne göre karşılaştırılmıştır.

İlk bölümde, lineer modeller tanıtılmış ve bu modeller altında bazı yanlı tahmin ediciler ile ilgili kısa bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmada kullanılan bazı temel kavramlar ve ispatsız teoremler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, bir lineer modelde bazı yanlı tahmin ediciler ele alınmış ve bunların MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, üçüncü bölümde ele alınan kavramlar genel bir lineer model için ele alınarak genelleştirilmiştir. Son bölüm ise sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

COMPARISON OF SOME BIASED ESTIMATORS IN LINEAR MODELS IN TERMS OF MEAN SQUARED ERROR CRITERION

SUMMARY

Keywords: Multicollinearity, Ordinary Least Squares Estimator, Ordinary Mixed Estimator, Principal Components Regression Estimator, Mean Squared Error.

The ordinary least squares estimator (OLSE) may not be a good estimator for parameters when multicollinearity problem exists in linear models. To overcome the troubles that originated from multicollinearity problem, it has been proposed so many alternative biased estimators in literature until now. The performance of this biased estimators have been evaluated by different criteria. One of these criteria is mean squared error (MSE) criterion.

In this study, the performance of some stochastic restricted biased estimators have been compared with MSE criterion by using the approach which is used for the ordinary mixed estimator (OME) and the principal components regression (PCR) estimator.

In the first chapter, linear models have been introduced and short literature information related to some biased estimators has been given under these models. In the second chapter, some fundamental concepts and theorems which will be used in the whole of the work have been considered without proofs. In the chapter three, some biased estimators have been considered and compared with MSE criterion in a linear model. In the fourth chapter, the concepts discussed in the third chapter is generalized by taking for a general linear model. The last chapter consists of conclusion and proposals.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Akıl ile gerçek dünyadaki olguları anlama-anlatma işine modelleme ve anlatımın kendisine model denir. Model, gerçek dünyada karşılaşılan bir problemin ilgili olduğu alanın kavram ve kanunlarına bağlı olarak ifade edilmesidir. Modellemede en çok kullanılan araçlar matematik ve istatistiktir. Özellikle rasgelelik içeren olgularla ilgili problemlerin modellenmesinde istatistik kullanılır [1]. İstatistik araştırmalarının ortak amaçlarından biri nedenselliği araştırmak, tahmin edicilerdeki veya bağımsız değişkenlerdeki bir değişimin bağımlı değişken üzerindeki etkisini incelemektir. Değişkenler arasındaki ilişkileri ortaya koyma ve ele alınan konu ile ilgili sonuç çıkarma ve tahminlerde bulunma problemlerinde sıklıkla kullanılan lineer modeller genel olarak

$$y = X \quad + £ \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilir.

Gauss-Markov Teoremine [2] göre alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi

$$\hat{}_{OLSE} = (X'X)^{-1} X'y$$

olarak tanımlanır. Bu tahmin edici yansız ve diğer lineer yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahiptir. Bu nedenle ve uygun istatistiksel özelliklere sahip olmasından dolayı uzun zaman boyunca en iyi tahmin edici olarak kullanılmıştır. Lineer modellerde X model matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olduğu varsayımı altında teorik olarak bazı sonuçlar elde edilmesine rağmen uygulamalarda genellikle X matrisinin sütunlarının lineer bağımlı olduğu durumlarla karşılaşılır. Bu durum çoklu iç ilişki problemine neden olur. Lineer modellerde çoklu iç ilişki problemi olduğu durumlarda $\hat{\ }_{OLSE}$ iyi bir tahmin edici olmaz. Çünkü çoklu iç ilişki $\hat{\ }_{OLSE}$'nin gerçek değerinden uzak olmasına ve varyansının büyük çıkmasına sebep olur. Çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelmek için bazı yöntemler kullanılır. Bu yöntemlerden biri yanlı tahmin edicileri kullanmaktır. Literatürde önerilen yanlı tahmin edicilerden Stein tahmin edicisi [3], temel bileşenler regresyon (principal components regression, PCR) tahmin edicisi [4], alışılmış ridge regresyon (ordinary ridge regression, ORR) tahmin edicisi [5] ve Liu tahmin edicisi [6] en çok bilinenleridir. Çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelmenin diğer bir yöntemi ise, kesin veya rasgele kısıtlarla ek örneklem bilgisi kullanmaktır. Bu yöntem (1.1) modeli bir rasgele kısıt ile birleştirilerek Durbin [7], Theil ve Goldberger [8] ve Theil [9] tarafından kullanılmış ve   için tahmin edici olarak alışılmış karma tahmin edici (ordinary mixed estimator, OME) önerilmiştir. (1.1) modeli

$$h = H \quad + e$$

rasgele kısıtı ile birlikte ele alındığında

$$\hat{\ }_{OME} = (X'X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'y + HW^{-1}h)$$

olarak elde edilir. OME ve özellikleri için ayrıca [10-12] kaynaklarına bakılabilir. OME ve Liu tahmin edicisi birleştirilerek rasgele kısıtlı Liu tahmin edicisi (stochastic restricted Liu estimator, SRLE)

$$\hat{\ }_{SRLE}(d) = F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'y + H'W^{-1}h)$$

olarak Hubert ve Wijekoon [10] tarafından elde edilmiştir. Burada, $F_d = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)$ ve $0 < d < 1$ şeklindedir.

Temel bileşenler regresyonu ise, tahmin problemlerinin boyutunu indirgemede kullanılan bir yaklaşımdır. (1.1) modeli üzerinde

$$y = XT'T \quad + £ = Z\sim + £$$

dönüşümü ele alındığında PCR tahmin edicisi

$$\hat{\ }_{PCR} = T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}T_r'X'y$$

olarak elde edilir [13]. Burada $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ortogonal matristir. PCR tahmin edicisi de çoklu iç ilişkiyi gidermek için kullanılan yanlı tahmin edicilerden biridir ve ilk olarak Hotelling [14] tarafından önerilmiştir.

Bu şekildeki yanlı tahmin edicilerin performansları bazı farklı ölçütlere göre değerlendirilir. Bunlardan biri ortalama hata kareler (mean squared error, MSE) matrisinin kullanıldığı MSE ölçütüdür. $\hat{\ }$ tahmin edicisi için MSE matrisi,

$$M(\hat{\ }) = E(\hat{\ } - \ )(\hat{\ } - \ )' = Var(\hat{\ }) + Bias(\hat{\ })Bias(\hat{\ })'$$

olarak tanımlanır [13]. için herhangi iki tahmin edici $\hat{\ }_1$ ve $\hat{\ }_2$ olmak üzere, bu tahmin ediciler için MSE ölçütü

$$M(\hat{\ }_1) - M(\hat{\ }_2) \geq 0 \qquad (1.2)$$

olarak ifade edilir [15]. Bu ifade $\hat{\ }_2$ tahmin edicisinin $\hat{\ }_1$ tahmin edicisinden üstün olduğu anlamındadır.

Bu çalışmada (1.1) modelinde $E(£) = 0$ ve $Cov(£) = \pm^2 I$ kabulu altında OME, SRLE, PCR tahmin edicisi, rasgele kısıtlı temel bileşenler regresyon (sthocastic restricted principal components regression, SRPCR) tahmin edicisi ve ağırlıklı rasgele kısıtlı temel bileşenler regresyon (weighted restricted principal components regression, WSRPCR) tahmin edicisi ele alınmış ve bu yanlı tahmin edicilerden hangisinin üstün olduğu (1.2)'de verilen MSE ölçütü kullanılarak detaylı olarak incelenmiştir. Daha sonra (1.1) modelinde daha genel olan $E(£)=0$ ve $Cov(£)=±^2 V$ durumu kabul edilerek daha önce ele alınmış tahmin edicilerin tümünün genelleştirilmiş durumları ele alınmış ve MSE ölçütüne göre bu genel yanlı tahmin edicilerin karşılaştırılmaları yapılmıştır.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilecektir.

2.1. Bir Matrisin Sütun Uzayı, Satır Uzayı ve Rankı

Tanım 2.1.1. $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = 0$ olacak şekilde tümü birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_n$ skalerleri varsa, $x_1, x_2 ..., x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörlerinin kümesine lineer bağımlıdır, aksi takdirde lineer bağımsızdır denir [16].

Tanım 2.1.2. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $a_1, a_2, ..., a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektörü için $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen tüm vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\mathcal{C}(A) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{m\times 1} \mid y = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \right\}$ şeklinde gösterilir. $\mathcal{C}(A)$, A matrisinin sütunları tarafından üretilir [17].

Tanım 2.1.3. A matrisinin $a_1, a_2, ..., a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$ vektör uzayının alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir ve $\mathcal{C}(A')$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.1.4. A matrisinin sıfır uzayı $\mathcal{N}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid Ax = 0 \right\}$ olarak tanımlanır [17].

Teorem 2.1.5. C matrisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin satır indirgenmiş eşolon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C matrisinin satır uzayı aynıdır [18].

Tanım 2.1.6. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı, satır uzayının boyutuna ise A matrisinin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşolon biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir [18].

Teorem 2.1.7. Bir A matrisinin satır rankı, sütun rankı ve rankı eşittir [18].

2.2. Bir Matrisin Tersi

Tanım 2.2.1. $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ olmak üzere, eğer $\det(A) \neq 0$ ise A matrisine tersinir matris denir [19].

Tanım 2.2.2. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi $AGA = A$ denklemini sağlayan G matrisi olarak tanımlanır ve $G = A^{-}$ olarak gösterilir [19].

Teorem 2.2.3. Her matris en az bir genelleştirilmiş terse sahiptir. Genel olarak A^{-} tek değildir. A^{-} matrisinin tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tersinir matris olmasıdır. Bu durumda $A^{-} = A^{-1}$ dir [19].

Teorem 2.2.4. $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tersinir matrisler, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ herhangi matrisler olmak üzere, eğer $A + CBD$ tersinir ise

$$(A+CBD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1} DA^{-1}$$

dir [19].

2.3. Bir Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri

Tanım 2.3.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere $c(\text{ª}) = \det(A - \text{ª} I)$ polinomu karakteristik polinom ve $c(\text{ª}) = 0$ denklemi karakteristik denklem olarak adlandırılır. Karakteristik denklemin köklerine A matrisinin özdeğerleri denir. Özdeğerler reel veya kompleks olabilir.

$Ax = \lambda_i x$ olacak şekilde her λ_i' nin sıfırdan farklı bir x çözümü vardır. Bu x çözümüne λ_i'ye ilişkin bir özvektör denir [19].

2.4. Kuadratik Formlar, Pozitif Kararlı ve Nonnegatif Kararlı Matrisler

Tanım 2.4.1. $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik bir $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için,

$$Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$$

ifadesi $y_1, y_2, ..., y_n$ elemanlarının bir kuadratik formudur. Burada A matrisine bu kuadratik formun matrisi denir. Böyle bir A matrisi için aşağıdakiler söylenebilir.

(i) Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif kararlı matristir ve $A > 0$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif kararlı matrisitir ve $A < 0$ ile gösterilir.

(iii) Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay \geq 0$ ise A nonnegatif kararlı matristir ve $A \geq 0$ ile gösterilir [17].

Teorem 2.4.2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi r ranklı nonnegatif kararlı bir matristir ancak ve ancak $A = R'R$ olacak şekilde r ranklı $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi vardır [20].

Teorem 2.4.3. Eğer $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi pozitif kararlı ve $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ matrisi p ranklı ise CAC' matrisi pozitif kararlıdır [20].

Teorem 2.4.4. Eğer A ve B nonnegatif kararlı matrisleri için $B - A$ nonnegatif kararlı ise Löwner sıralamasına göre A, B'den daha küçüktür denir ve $A \leq B$ $(A \leq_L B)$ veya $B \geq A$ $(B \geq_L A)$ ile gösterilir. Eğer $B - A$ pozitif kararlı ise bu durumda A matrisine kesinlikle B matrisinden küçüktür denir ve $A < B$ $(A <_L B)$ veya $B > A$ $(B >_L A)$ ile gösterilir [17].

Teorem 2.4.5. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri için $A > 0$ ve $B \geq 0$ olmak üzere

$$A > B \Leftrightarrow a_1(BA^{-1}) < 1$$

dir. Burada $a_1(BA^{-1})$, BA^{-1} matrisinin en büyük özdeğeridir [21].

Teorem 2.4.6. $A > 0$ ve $\sim$ herhangi bir vektör olmak üzere $A - \sim\sim' \geq 0 \Leftrightarrow \sim' A^{-1} \sim \leq 1$ dir [22].

2.5. Parçalanmış Matrisler

Tanım 2.5.1. Bir kümenin parçalanmasına benzer olarak bir matrisin parçalanması, orijinal matrisin her bir elemanının parçalanışının yalnız ve yalnız bir alt matrisine düşecek şekilde karşılıklı ayrık matrislere ayrılmış halidir. Örneğin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ için

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ifadesi A matrisinin bir parçalanışıdır. Burada $m_1 + m_2 = m$ ve $n_1 + n_2 = n$ olmak üzere $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ dir. Yukarıda verilen matrisin transpozu

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.5.2. A_{12} ve A_{21} matrisleri sıfır matris, A_{11} ve A_{22} matrisleri tersinir kare matrisler ise A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir [23].

2.6. Lineer Denklem Sistemleri

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times t}$ ve $C \in \mathbb{R}^{m\times t}$ bilinen matrisler olmak üzere,

$$AXB = C \tag{2.1}$$

matris denklem sistemi ele alınsın. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

Tanım 2.6.1. (2.1) matris denklem sistemini sağlayan en az bir $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ matrisi varsa, sistem tutarlıdır denir. Aksi takdirde sistem tutarsızdır [24].

Teorem 2.6.2. (2.1) matris denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $\mathcal{C}(C) \subset \mathcal{C}(A)$ ve $\mathcal{C}(C') \subset \mathcal{C}(B')$ olmasıdır [24].

Teorem 2.6.3. (2.1) matris denklem sistemi tutarlı ise uygun boyutlu herhangi U ve V matrisleri için

$$X = A^{-}CB^{-} + (I - A^{-}A)U + V(I - B^{-}B)$$

ile verilen X matrisi, (2.1) matris denkleminin genel çözümüdür. (2.1) matris denklem sisteminde A ve B matrisleri tersinir ise

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

(2.1) denklem sisteminin tek çözümüdür.

(2.1) matris denkleminde X matrisi yerine $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü, $B = I$ ve C matrisi yerine $g \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ vektörü alınırsa, $Ax = g$ lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece Teorem 2.6.2 ve Teorem 2.6.3'ün daha özel durumu olarak aşağıdaki teorem verilebilir [24].

Teorem 2.6.4. $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $AA^{-}g = g$ olmasıdır. Eğer sistem tutarlı ise bu durumda herhangi bir $h \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü için $x = A^{-}g + (I - A^{-}A)h$ ile verilen x vektörü $Ax = g$ lineer denklem sisteminin genel çözümüdür [24].

2.7. Karesel ve Lineer Formların Türevleri

Tanım 2.7.1. Eğer f, x vektörünün bir fonksiyonu ise $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ kısmi türevler vektörü, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sütun vektörü aracılığıyla gösterilir. Yani $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ şeklindedir. Benzer şekilde satır vektörü için kısmi türevler vektörü $\dfrac{\partial f}{\partial x'} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)'$ şeklindedir [23].

Teorem 2.7.2. $x, a \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri ve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için

(i) $\dfrac{\partial x'a}{\partial x} = \dfrac{\partial a'x}{\partial x} = a$,

(ii) $\dfrac{\partial x'Ax}{\partial x} = (A + A')x$ ve eğer A matrisi simetrik ise $\dfrac{\partial x'Ax}{\partial x} = 2Ax$

dir [23].

2.8. Rasgele Vektörler ve Bazı İstatistiksel Kavramlar

Rasgele vektör, elemanları rasgele değişkenler olan bir vektör ve benzer şekilde rasgele matris ise, elemanları rasgele değişkenler olan matristir. Rasgele vektör ve matrislerle ilgili bazı temel kavram ve teoremler aşağıda verilmektedir.

Tanım 2.8.1. $Z = (z_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olan rasgele bir matris olmak üzere Z matrisinin beklenen değeri

$$E(Z)=\left(E(z_{ij})\right)=\begin{pmatrix} E(z_{11}) & \dots & E(z_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(z_{n1}) & \cdots & E(z_{nn}) \end{pmatrix}$$

şeklindedir [20].

Teorem 2.8.2. X rasgele bir matris ve A, B, C bilinen uygun boyutlu matrisler olmak üzere $E(AXB+C)=AE(X)B+C$ dir [20].

Sonuç 2.8.3. A ve B uygun boyutlu matrisler, x ve y uygun boyutlu rasgele vektörler olmak üzere $E(Ax+By)=AE(x)+BE(y)$ dir [20].

Tanım 2.8.4. x rasgele vektörünün varyansı $Var(x)=\pm_x^2=E(x-\text{«})^2$ şeklindedir. Burada $\text{«}=E(x)$ dir [20].

Tanım 2.8.5. X ve Y rasgele matrisleri arasındaki kovaryans

$$Cov(X,Y)=\pm_{XY}=E[(X-E(X))(Y-E(Y))']$$

şeklindedir [25].

Teorem 2.8.6. $A\in\mathbb{R}^{k\times m}$, $B\in\mathbb{R}^{p\times n}$ bilinen matrisler ve $x\in\mathbb{R}^{m\times 1}$, $y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ rasgele vektörler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır [25].

(i) $Cov(Ax,By)=AC\,\mathrm{ov}(x,y)B'$.

(ii) $Cov(Ax,Ax)=AVar(x)A'$.

BÖLÜM 3. BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

3.1. Giriş

Genel olarak bir lineer model

$$y = X \quad + £ \tag{3.1}$$

olarak ifade edilir. Burada $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rasgele vektörü, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ model matrisini, $£ \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ rasgele hata vektörünü temsil etmektedir. Bu modelde

$$E(£) = 0 \text{ ve } Cov(£) = \pm^{2} I_n$$

olmasının yanı sıra $r(X) = p$ kabul edilmektedir.

Bu bölümde Wu ve Yang tarafından [13]'de elde edilen sonuçlar detaylı bir biçimde incelenecektir. Aşağıda önce (3.1) modelindeki parametresinin tahmini için kullanılabilecek olan bazı tahmin ediciler tanıtılacaktır. Daha sonra bu tahmin edicilerin MSE ölçütüne göre karşılıştırılmaları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

3.2. Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (OLSE)

En küçük kareler tahmini yöntemindeki düşünce X vektörü için gözlemlenmiş y değerlerine mümkün olduğunca yakın olacak şekilde vektörünü bulmaktır. Bu yöntem $(y - X \quad)'(y - X \quad)$ ifadesinin vektörüne göre minimumlaştırılması işlemlerini içerir. Gauss-Markov [2] teoremine göre klasik alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\hat{\ }_{LS} = \min(y - X\ \ )'(y - X\ \ ) \tag{3.2}$$

dir. (3.2)'deki ifade düzenlenirse,

$$(y' - \ \ 'X')(y - X\ \ ) = y'y - y'X\ \ - \ \ 'X'y + \ \ 'X'X$$

elde edilir. $\ 'X'y = (\ 'X'y)' = y'X$ olduğundan

$$(y - X\ \ )'(y - X\ \ ) = y'y - 2\ \ 'X'y + \ \ 'X'X$$

olur. Bu ifadede ’ya göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$X'X\ \ = X'y \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) denklemleri normal denklemler olarak bilinir. ’nın OLSE’si bu denklemlerin çözümüyle elde edilir ve $\hat{\ }_{OLSE}$ ile gösterilir. X matrisi p ranklı olduğundan $X'X$ matrisinin tersi ve dolayısıyla (3.3) denkleminin tek çözümü vardır. Böylece

$$\hat{\ }_{OLSE} = (X'X)^{-1}X'y \tag{3.4}$$

olarak elde edilir.

Alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi yansız tahmin edicidir. Çünkü

$$\begin{aligned} E(\hat{\ }_{OLSE}) &= E[(X'X)^{-1}X'y] \\ &= (X'X)^{-1}X'E(X\ \ + £) \\ &= (X'X)^{-1}X'[E(X\ \ ) + E(£)] \\ &= (X'X)^{-1}X'X\ \ + 0 \\ &= \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $\hat{\ }_{OLSE}$ ’ nin varyansı,

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\ }_{OLSE}) &= Var[(X'X)^{-1}X'y] \\
&= (X'X)^{-1}X'Var(y)((X'X)^{-1}X')' \\
&= (X'X)^{-1}X'Var(y - X\ \ )X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'Var(\pounds)X(X'X)^{-1} \\
&= \pm^{2}(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} \\
&= \pm^{2}(X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

dir.

3.3. Alışılmış Karma Tahmin Edici (OME)

(3.1) modelinde verilen parametresi üzerinde $E(e)=0$ ve $Cov(e)=\pm^{2}W$ olmak üzere

$$h = H\ \ + e \tag{3.5}$$

formundaki lineer kısıtlar ele alınsın. Burada $H \in \mathbb{R}^{m\times p}$ rankı r $(\leq p)$ olan bir matris, $h \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $e \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ hata vektörü ve $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ bilinen pozitif kararlı bir matristir.

(3.1) modeli (3.5) kısıtı ile birlikte ele alınırsa, bu iki model

$$\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ H \end{pmatrix}\ \ + \begin{pmatrix} \pounds \\ e \end{pmatrix}$$

modeliyle ifade edilebilir. OME

$$\cdot\ = \pounds'\pounds + e'W^{-1}e \tag{3.6}$$

ifadesinin minimumlaştırılmasıyla elde edilir. (3.6) ifadesi düzenlenirse

$$\cdot \;=(y-X\quad)'(y-X\quad)+(h-H\quad)'W^{-1}(h-H\quad)$$
$$=y'y-2\quad 'X'y+\quad 'X'X\quad +h'W^{-1}h-h'W^{-1}H\quad -\quad 'H'W^{-1}h+\quad 'H'W^{-1}H$$

bulunur. Burada $h'W^{-1}H \quad = \quad 'H'W^{-1}h$ olduğundan

$$\cdot \;=y'y-2\quad 'X'y+\quad 'X'X\quad +h'W^{-1}h-2\quad 'H'W^{-1}h+\quad 'H'W^{-1}H$$

yazılır. ’ya göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$(X'X+H'W^{-1}H)\quad =X'y+H'W^{-1}h$$

elde edilir. Böylece

$$\hat{}_{OME}=(X'X+H'W^{-1}H)^{-1}(X'y+H'W^{-1}h) \tag{3.7}$$

olarak bulunur. (3.7)’de verilen $\hat{}_{OME}$ Durbin [7], Theil ve Goldberger [8] ve Theil [9] tarafından tanımlanmıştır. $\hat{}_{OME}$’nin özellikleri ve uygulamaları için ayrıca Hubert ve Wijekoon [10], Li ve Yang [11] ve Yang ve Xu [12] kaynaklarına bakılabilir.

3.4. Rasgele Kısıtlı Liu Tahmin Edicisi (SRLE)

Hubert ve Wijeekoon [10] makalesinde OME ve Liu tahmin edicileri birleştirilerek rasgele kısıtlı Liu tahmin ediciyi tanımlamışlardır. Bu tahmin edici

$$\hat{}_{SRLE}(d)=F_d(X'X+H'W^{-1}H)^{-1}(X'y+H'W^{-1}h) \tag{3.8}$$

olarak ifade edilir. Burada $0<d<1$ ve $F_d=(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)$ şeklindedir.

3.5. Temel Bileşenler Regresyon (PCR) Tahmin Edicisi

Temel bileşenler regresyonu, tahmin problemlerinin boyutunu indirgemede kullanılan bir yaklaşımdır.

$$y = XTT' \quad + £ = Z\sim + £ \tag{3.9}$$

dönüşümü ele alınsın. Burada $T = (t_1, t_2, ..., t_p) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ortogonal matristir. Ayrıca

$$T'X'XT = Z'Z = \Lambda$$

olarak yazılabilir. Burada Λ köşegen elemanları $X'X$ matrisinin özdeğerleri olan köşegen matristir. Yani $\Lambda = diag(ª_1, ª_2, ..., ª_p)$ dır.

$$Z = XT = (z_1, z_2, ..., z_p)$$

temel bileşenler matrisi olarak bilinir. Bu matrisin i. elemanı $z_i = Xt_i$, i. temel bileşendir.

’nın temel bileşenler tahmini bazı z_i değişkenlerinin ihmal edilmesi ile elde edilir. Bunun için $Z = (Z_r, Z_{p-r})$ parçalanmış matrisi ele alınsın. Bu durumda $Z_r = XT_r$ ve $T_r' \quad = \sim_r$ olur. $T_r' \quad = \sim_r$ ifadesi soldan T_r ile çarpılırsa $T_r T_r' \quad = T_r \sim_r$ elde edilir. $T_r T_r' = I$ olduğundan $\quad = T_r \sim$ olur. Yani (3.9) modelinde Z yerine $Z = (Z_r, Z_{p-r})$ parçalanmış matrisi yazılırsa

$$\begin{aligned}
y &= (Z_r, Z_{p-r}) \begin{pmatrix} \sim_r \\ \sim_{p-r} \end{pmatrix} + £ \\
&= X(T_r, T_{p-r}) \begin{pmatrix} T_r' \\ T_{p-r}' \end{pmatrix} \quad + £ \\
&= X(T_r T_r' + T_{p-r} T_{p-r}') \quad + £ \\
&= XT_r T_r' \quad + XT_{p-r} T_{p-r}' \quad + £
\end{aligned}$$

$$= Z_r \sim_r + Z_{p-r} \sim_{p-r} + £$$

elde edilir. Burada $Z_{p-r} \sim_{p-r}$ ihmal edilirse model

$$y = Z_r \sim_r + £ \tag{3.10}$$

modeline indirgenmiş olur. (3.10) modeli üzerinde en küçük kareler tahmini yöntemi uygulanırsa

$$\hat{\sim}_r = (Z_r' Z_r)^{-1} Z_r' y \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11)'de Z_r ile $\sim_r$ yerine yazılır ve bulunan ifade T_r ile soldan çarpılırsa

$$\hat{\ }_{PCR} = T_r (T_r' X' X T_r)^{-1} T_r' X' y \tag{3.12}$$

elde edilir.

3.6. Rasgele Kısıtlı Temel Bileşenler Regresyon (SRPCR) Tahmin Edicisi

(3.5)'te verilen $h = H \quad + e$ kısıtlaması

$$h = HTT' \quad + e \tag{3.13}$$

olarakta yazılabilir. Burada $T = (t_1, t_2, ..., t_p) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ortogonal matristir. $T = (T_r, T_{p-r})$ ifadesi (3.13)'te yazılırsa

$$h = (HT_r T_r' + HT_{p-r} T_{p-r}') \quad + e$$

elde edilir. $T_{p-r}' \quad = 0$ kısıtlaması varyans üzerinde bir indirgemeyi gösterir ve bu kısıtlamayla

$$h = H_r \sim_r + e \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada $\sim_r = T_r'$ ve $H_r = HT_r \in \mathbb{R}^{m\times r}$ şeklindedir. Ayrıca $H_r T_r T_r' = h$, üzerindeki daha fazla kısıtlamayı gösterir.

Uyarı: H_r matrisi ne tam sütun ranklı ne de tam satır ranklıdır [26].

(3.10) modeli ve (3.14) kısıtı birlikte ele alınırsa

$Y = \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} Z_r \\ H_r \end{pmatrix}$ ve $u = \begin{pmatrix} \pounds \\ e \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$Y = G \sim_r + u \tag{3.15}$$

modeli elde edilir. Burada

$$E(u) = 0\,,\ Cov(u) = \sum = \pm^2 \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

ve W pozitif kararlı matristir. (3.15) modelinde OME'nin elde edilme yöntemi kullanılarak yeni tahmin edici

$$\cdot = (y - Z_r \sim_r)'(y - Z_r \sim_r) + (h - H_r \sim_r)' W^{-1} (h - H_r \sim_r)$$

ifadesinin $\sim_r$ 'ye göre minimumlaştırılmasıyla elde edilir. Yani $\cdot$ 'nin $\sim_r$ 'ye göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$Z_r' y - Z_r Z_r' \sim_r + H_r' W^{-1} h - H_r' W^{-1} H_r \sim_r = 0$$

yazılır ve buradan

$$(Z_r'Z_r + H_r'W^{-1}H_r)\gamma_r = Z_r'y + H_r'W^{-1}h$$

bulunur. Böylece

$$\gamma_r^* = (Z_r'Z_r + H_r'W^{-1}H_r)^{-1}(Z_r'y + H_r'W^{-1}h)$$

elde edilir. Burada H_r ile γ_r yerine yazılır ve bulunan ifade T_r ile soldan çarpılırsa

$$\hat{\beta}_{SRPCR} = T_r(T_r'X'XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'y + T_r'H'W^{-1}h) \qquad (3.16)$$

olarak bulunur.

3.7. Ağırlıklı Rasgele Kısıtlı Temel Bileşenler Resgesyon (WSRPCR) Tahmin Edicisi

(3.1) modeli ve (3.5) kısıtlamasında regresyon parametrelerinin tahmininde eşit ağırlıkların gerekliliği söz konusu olmadığında

$$\hat{\beta}_{WSRPCR}(w) = T_r(T_r'X'XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'y + wT_r'H'W^{-1}h) \qquad (3.17)$$

ile verilen ağırlıklı rasgele temel bileşenler resgesyon tahmin edicisi (WSRPCR) tanımlanmıştır. Burada w rasgele değildir ve $0 \leq w \leq 1$ aralığındadır [13].

3.8. Hata Kareler Ortalaması (MSE)

Lineer regresyon modellerinde ortaya çıkan bazı problemlerin üstesinden gelebilmek için $\hat{\beta}_{OLSE}$ yerine birçok alternatif tahmin edici ve bu tahmin edicilerin bazı kombinasyonları ele alınmıştır. Bu tahmin edicilerin performansları bazı ölçütlere göre değerlendirilir. Bu ölçütlerden biri hata kareler ortalaması (Mean Squared Error, MSE) ölçütüdür. β'nın herhangi bir $\hat{\beta}$ tahmin edicisi için MSE matrisi,

$$M(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'$$

olarak tanımlanır [13].   ile $E(\hat{\ })$ arasındaki fark $Bias(\hat{\ })$ ile gösterilirse

$$M(\hat{\ }) = Var(\hat{\ }) + Bias(\hat{\ })Bias(\hat{\ })' \qquad (3.18)$$

olarak yazılır. Bu matrisin izi

$$SMSE(\hat{\ }) = E(\hat{\ } - \ )(\hat{\ } - \ )' + iz(Var(\hat{\ })) + Bias(\hat{\ })Bias(\hat{\ })' \qquad (3.19)$$

olarak tanımlanır [15].

$\hat{\ }_1$ ve $\hat{\ }_2$,   için herhangi iki tahmin edici olarak kabul edilirse,

$$M(\hat{\ }_1) - M(\hat{\ }_2) \geq 0 \qquad (3.20)$$

olduğunda $\hat{\ }_2$ tahmin edicisinin $\hat{\ }_1$ tahmin edicisinden daha üstün olduğu kabul edilir [15].

3.9. Bazı Yanlı Tahmin Edicilerin MSE Ölçütüne Göre Karşılaştırılmaları

Şimdi yukarıda verilen bazı yanlı tahmin edicilerin MSE ölçütine göre karşılaştırılması ayrı başlıklar halinde aşağıda incelenecektir.

3.9.1. SRPCR ve PCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

$$\begin{aligned}
E(\hat{\ }_{PCR}) &= T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}T_r'X'E(y) \\
&= T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}T_r'X'E(Z_r\sim_r + £) \\
&= T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}T_r'X'Z_r\sim_r \\
&= T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}(T_r'X'XT_r)T_r' \\
&= T_rT_r' \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

olduğundan $\hat{\ }_{PCR}$ tahmin edicisinin yanlılığı

$$\begin{aligned}
Bias(\hat{\ }_{PCR}) &= E(\hat{\ }_{PCR}) - \\
&= T_r T_r' \quad - \\
&= (T_r T_r' - I) \\
&= -T_{p-r} T_{p-r}'
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\ }_{PCR}) &= (T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')Cov(y)(T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')' \\
&= (T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')Cov(y - X \quad)(T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')' \\
&= (T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')Cov(\text{£})(T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')' \\
&= (T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')\pm^2 I(T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X')' \\
&= \pm^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X' X T_r \Lambda_r^{-1} T_r' \\
&= \pm^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r' \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece (3.18)'e göre $\hat{\ }_{PCR}$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$M(\hat{\ }_{PCR}) = \pm^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + T_{p-r} T_{p-r}' \qquad ' T_{p-r} T_{p-r}'$$

olarak elde edilir.

$$E(\hat{\ }_{SRPCR}) = T_r (T_r' X' X T_r + T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} (T_r' X' E(y) + T_r' H' W^{-1} E(h))$$

dir.

$$E(y) = E(Z_r \sim_r + \text{£}) = E(Z_r \sim_r) = Z_r \sim_r = X T_r T_r' \quad ,$$

$$E(h) = E(H_r \sim_r + e) = E(H_r \sim_r) = H_r \sim_r = H T_r T_r'$$

olduğundan

$$E(\hat{\beta}_{SRPCR}) = T_r(T_r'X'XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'XT_rT_r'\beta + T_r'H'W^{-1}HT_rT_r'\beta)$$

bulunur. Bu ifade sağdan $T_r'\beta$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_{SRPCR}) &= T_r(T_r'X'XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)T_r'\beta \\ &= T_rT_r'\beta \end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. Bu ifade (3.21) ile aynı olduğundan, benzer şekilde $\hat{\beta}_{SRPCR}$ tahmin edicisinin yanlılığı $\hat{\beta}_{PCR}$ ile aynı bulunur.

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_{SRPCR}) &= T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'\underbrace{Cov(y)}_{\sigma^2 I}XT_r + T_r'H'W^{-1}\underbrace{Cov(H)}_{\sigma^2 W}W^{-1}HT_r) \\ &\quad \times(T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1})' \\ &= T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}\sigma^2(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r) \\ &\quad \times(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \\ &= T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}\sigma^2 T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r) \\ &\quad \times(T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1})' \\ &= \sigma^2 T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \end{aligned} \tag{3.24}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.18)'e göre $\hat{\beta}_{SRPCR}$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$M(\hat{\beta}_{SRPCR}) = \sigma^2 T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' + T_{p-r}T_{p-r}'\beta\beta'T_{p-r}T_{p-r}' \tag{3.25}$$

yazılabilir.

$\hat{}_{PCR}$ ve $\hat{}_{SRPCR}$ tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9.1. MSE ölçütüne göre $\hat{}_{SRPCR}$ tahmin edicisi her zaman $\hat{}_{PCR}$ tahmin edicisinden üstündür.

İspat: $\hat{}_{SRPCR}$ ve $\hat{}_{PCR}$ tahmin edicilerinin yanlılıkları aynı olduğundan MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları yapılırken sadece kovaryans matrislerinin farklarına bakmak yeterli olacakır. Böylece (3.22) ve (3.24) eşitliklerinden

$$Cov(\hat{}_{PCR}) - Cov(\hat{}_{SRPCR}) = \pm^2 T_r[\Lambda_r^{-1} - (\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}]T_r' \qquad (3.26)$$

elde edilir. Teorem 2.2.4'e göre

$$(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} = \Lambda_r^{-1} - \Lambda_r^{-1}T_r'H'(W + HT_r\Lambda_r^{-1}T_r'H')^{-1}HT_r\Lambda_r^{-1}$$

olduğundan bu ifade (3.26)'da yerine yazılır ve Teorem 2.4.3 kullanılırsa

$$Cov(\hat{}_{PCR}) - Cov(\hat{}_{SRPCR}) = \Lambda_r^{-1}T_r'H'(W + HT_r\Lambda_r^{-1}T_r'H')^{-1}HT_r\Lambda_r^{-1} \geq 0$$

olur ve ispat biter. ■

3.9.2. WSRPCR ve PCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

$$\begin{aligned} E[\hat{}_{WSRPCR}(w)] &= T_r(T_r'X'XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'\underbrace{E(y)}_{XT_rT_r'} + wT_r'H'W^{-1}\underbrace{E(h)}_{HT_rT_r'}) \\ &= T_r(T_r'X'XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'XT_rT_r' \quad + wT_r'H'W^{-1}T_rT_r' \quad) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade sağdan T_r' parantezine alınırsa

$$E[\hat{\ }_{WSRPCR}(w)] = T_r(T_r'X'XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'XT_r + wT_r'H'W^{-1}T_r)T_r'$$
$$= T_rT_r'$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde yanlılık

$$Bias[\hat{\ }_{WSRPCR}(w)] = -T_{p-r}T_{p-r}' \tag{3.27}$$

olur.

$$Cov[\hat{\ }_{WSRPCR}(w)] = T_r(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}$$
$$\times(T_r'X'\underbrace{Cov(y)}_{\pm^2 I}XT_r + wT_r'H'W^{-1}\underbrace{Cov(h)}_{\pm^2 W}W^{-1}HT_rw)$$
$$\times(T_r(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1})'$$
$$= \pm^2 T_r(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(\Lambda_r + w^2T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}$$
$$\times(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \tag{3.28}$$

elde edilir. Böylece (3.18)'e göre $\hat{\ }_{WSRPCR}(w)$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$M[\hat{\ }_{WSRPCR}(w)] = \pm^2 T_r(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(\Lambda_r + w^2T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}$$
$$\times(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' + T_{p-r}T_{p-r}' \quad 'T_{p-r}T_{p-r}' \tag{3.29}$$

olarak bulunur.

$\hat{\ }_{PCR}$ ve $\hat{\ }_{WRPCR}(w)$ tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9.2 MSE ölçütüne göre $\hat{\ }_{WSRPCR}(w)$ tahmin edicisi her zaman $\hat{\ }_{PCR}$ tahmin edicisinden üstündür.

İspat: $\hat{\ }_{WSRPCR}(w)$ ve $\hat{\ }_{PCR}$ tahmin edicilerinin yanlılıkları aynı olduğundan MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları yapılırken sadece kovaryans matrislerinin farklarına bakmak yeterli olacaktır. Böylece (3.22) ve (3.28) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
& Cov(\hat{\ }_{PCR}) - Cov(\hat{\ }_{WSRPCR}(w)) \\
& \quad = \pm^{2} T_r \Lambda_r^{-1} T_r' - \pm^{2} T_r (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\
& \qquad \times (\Lambda_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r' \\
& \quad = \pm^{2} T_r \left\{ \Lambda_r^{-1} T_r' - (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \right. \\
& \qquad \left. \times (\Lambda_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \right\} T_r' \\
& \quad = \pm^{2} T_r \left\{ (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \right. \\
& \qquad \left. - (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (\Lambda_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \right\} T_r' \\
& \quad = \pm^{2} T_r (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} [(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r) \Lambda_r^{-1} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r) \\
& \qquad - (\Lambda_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)](\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r' \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r) \Lambda_r^{-1} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)$$

ifadesi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
& (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r) \Lambda_r^{-1} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r) \\
& \quad = \Lambda_r + 2wT_r'H'W^{-1}HT_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r \Lambda_r^{-1} T_r'H'W^{-1}HT_r
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifade (3.30)'da tekrar yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
& M(\hat{\ }_{PCR}) - M[\hat{\ }_{WSRPCR}(w)] = \pm^{2} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \left[(2-w)\, wT_r'H'W^{-1}HT_r' \right. \\
& \qquad \left. + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r \Lambda_r^{-1} T_r'H'W^{-1}HT_r \right] (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r'
\end{aligned}
$$

bulunur. $0 \le w \le 1$ olduğundan $2 - w > 0$ olur ve Teorem 2.4.3'e göre

$$M(\hat{}_{PCR}) - M[\hat{}_{WSRPCR}(w)] \ge 0$$

elde edilir ve ispat biter. ■

3.9.3. WSRPCR ve SRPCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Teorem 3.9.3. MSE ölçütüne göre $\hat{}_{SRPCR}$ tahmin edicisi her zaman $\hat{}_{WSRPCR}(w)$ tahmin edicisinden üstündür.

İspat: $\hat{}_{WSRPCR}(w)$ ve $\hat{}_{SRPCR}$ tahmin edicilerinin yalılıkları aynı olduğundan MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları yapılırken sadece kovaryans matrislerinin farklarına bakmak yeterli olacaktır. Böylece (3.24) ve (3.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&Cov(\hat{}_{SRPCR}) - Cov[\hat{}_{WSRPCR}(w)] \\
&\quad = \pm^{2} T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' - \pm^{2} T_r(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\
&\qquad \times(\Lambda_r + w^2T_r'H'W^{-1}HT_r)(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \\
&\quad = \pm^{2} T_r\left\{(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' - (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}\right. \\
&\qquad \left.\times(\Lambda_r + w^2T_r'H'W^{-1}HT_r)(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}\right\}T_r' \\
&\quad = -\pm^{2}(w-1)^2 T_r(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)\Lambda_r \\
&\qquad \times(T_r'H'W^{-1}HT_r)(\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r'
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 \le w \le 1$ olduğundan $0 \le (w-1)^2 \le 1$ dır. Dolayısıyla Teorem 2.4.3'e göre

$$M(\hat{}_{SRPCR}) - M(\hat{}_{WSRPCR}(w)) \le 0$$

olur ve ispat biter. ■

3.9.4. SRLE ve SRPCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

$$E[\;\hat{}\;_{SRLE}(d)] = E(F_d\;\hat{}\;_{OME}) = F_d$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} Bias[\;\hat{}\;_{SRLE}(d)] &= E[\;\hat{}\;_{SRLE}(d)] - \;\hat{}\;_{SRLE}(d) \\ &= F_d \quad - \quad = (F_d - I) \end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} Cov[\;\hat{}\;_{SRLE}(d)] &= Cov(F_d\;\hat{}\;_{OME}) \\ &= Cov(F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'y + H'W^{-1}h)) \\ &= F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'\underbrace{Cov(y)}_{\pm^2 I}X + H'W^{-1}\underbrace{Cov(h)}_{\pm^2 W}W^{-1}H) \\ &\quad \times (X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' \\ &= \pm^2 F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'X + H'W^{-1}H)(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' \\ &= \pm^2 F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d{}' \end{aligned} \tag{3.32}$$

olur. Böylece (3.18)'e göre $\hat{}\;_{SRLE}(d)$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$M[\;\hat{}\;_{SRLE}(d)] = \pm^2 F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' + (F_d - I) \quad '(F_d - I)' \tag{3.33}$$

şeklinde olur. $\hat{}\;_{SRLE}(d)$ ve $\hat{}\;_{SRPCR}$ tahmin edicilerinin MSE matris farkları

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= M[\;\hat{}\;_{SRLE}(d)] - M(\;\hat{}\;_{SRPCR}) \\ &= \pm^2 F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' + (F_d - I) \quad '(F_d - I)' \\ &\quad - \left[\pm^2 T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' + T_{p-r}T_{p-r}' \quad 'T_{p-r}T_{p-r}'\right] \end{aligned} \tag{3.34}$$

olarak gösterilir.

$$D_1 = F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' - T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \,,$$
$$b_1 = (F_d - I) \quad ,$$
$$b_2 = T_{p-r}T_{p-r}'$$

olmak üzere (3.34)

$$\Delta_1 = \pm^2 D_1 + b_1b_1' - b_2b_2'$$

olarakta yazılabilir

$\hat{}_{SRPCR}$ ve $\hat{}_{SRLE}(d)$ tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9.4. $0 < d < 1$ ve

$$\text{a}_1\left\{\left[T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r'\right]\left[F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d'\right]\right\} < 1$$

iken MSE ölçütüne göre $\hat{}_{SRPCR}$ tahmin edicisi, $\hat{}_{SRLE}(d)$ tahmin edicisinden üstündür. Yani

$$\Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow b_2'(\pm^2 D_1 + b_1b_1')^{-1}b_2 \leq 1$$

dir.

İspat: $0 < d < 1$ iken $F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' > 0$, $T_r(\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \geq 0$ olduğu açıktır. $D_1 = A - B$ olarak düşünülürse Teorem 2.4.5'e göre $\text{a}_1(BA^{-1}) < 1$ olduğundan

$$D_1 = A - B > 0$$

elde edilir. Teorem 2.4.6’dan

$$\Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow b_2'(\pm^2 D_1 + b_1 b_1')^{-1} b_2 \leq 1$$

olur ve ispat biter. ■

3.9.5. SRLE ve WSRPCR tahmin edicilerin karşılaştırılması

$\hat{}_{SRLE}(d)$ ve $\hat{}_{WSRPCR}(w)$ tahmin edicilerinin MSE matris farkları

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= M(\hat{}_{SRLE}(d)) - M(\hat{}_{WSRPCR}(w)) \\ &= \pm^2 F_d (X'X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d' + (F_d - I) \quad '(F_d - I)' \\ &\quad - \{\pm^2 T_r (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (\Lambda_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\ &\quad \times (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r' + T_{p-r}T_{p-r}' \quad 'T_{p-r}T_{p-r}'\}\end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak gösterilir.

$$\begin{aligned}D_2 &= F_d (X'X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d' - T_r (\Lambda_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\ &\quad \times (\Lambda_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (\Lambda_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r',\end{aligned}$$

$$b_1 = (F_d - I) \quad ,$$

$$b_2 = T_{p-r}T_{p-r}'$$

olmak üzere (3.35)

$$\Delta_2 = \pm^2 D_2 + b_1 b_1' - b_2 b_2'$$

olarakta yazılabilir.

$\hat{\ }_{SRLE}(d)$ ve $\hat{\ }_{WSRPCR}(w)$ tahmin edicilerinin MSE ölçütine göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9.5. $0 < d < 1,\ 0 \leq w \leq 1$ ve

$$a_1 \Big\{ [T_r(\Lambda_r + T_r{}' H'W^{-1}HT_r)^{-1}(\Lambda_r + w^2 T_r{}' H'W^{-1}HT_r)^{-1}(\Lambda_r + wT_r{}' H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r{}']$$

$$\times [F_d(X'X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d{}']^{-1} \Big\} < 1 \qquad (3.36)$$

iken MSE ölçütüne göre $\hat{\ }_{WSRPCR}(w)$ tahmin edicisi $\hat{\ }_{SRLE}(d)$ tahmin edicisinden üstündür. Yani

$$\Delta_2 \geq 0 \Leftrightarrow b_2'(\pm^2 D_2 + b_1 b_1')^{-1} b_2 \leq 1$$

dir.

İspat: $D_2 = A - B$ olarak düşünülürse $0 < d < 1,\ 0 \leq w \leq 1$ iken $A > 0$ ve $B \geq 0$ dır ve $a_1(BA^{-1}) < 1$ olduğu zaman Teorem 2.4.5'e göre $D_2 > 0$ dır. Teorem 2.4.6'ya göre

$$\Delta_2 \geq 0 \Leftrightarrow b_2{}'(\pm^2 D_2 + b_1 b_1{}')^{-1} b_2 \leq 1$$

olur ve ispat biter. ■

BÖLÜM 4. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ YANLI TAHMİN EDİCİLER

4.1. Giriş

$E(£)=0$ ve $Cov(£)=\pm^{2}V$ olmak üzere ,

$$y = X \quad + £ \tag{4.1}$$

modeli ele alınsın. Burada $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rasgele vektörü, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ model matrisini, $£ \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ rasgele hata vektörünü temsil etmektedir. Ayrıca V pozitif kararlı matristir.

Bu bölümde (3.1)’de verilen lineer modelin genel hali olan (4.1) modeli ele alınarak bazı yanlı tahmin ediciler ve bunların MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ele alınacaktır.

4.2. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (GLSE)

Kısım (3.2)’de ifade edildiği gibi en küçük kareler tahmini yöntemindeki düşünce X vektörü için gözlemlenmiş y değerlerine mümkün olduğunca yakın olacak şekilde vektörünü bulmaktır. Genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile GLSE ise $(y-X\quad)'V^{-1}(y-X\quad)$ ifadesinin vektörüne göre minimumlaştırılması ile yani

$$\hat{\ }_{LS} = \min (y-X\quad)'V^{-1}(y-X\quad)$$

ile bulunur. Buradaki $(y-X\quad)'V^{-1}(y-X\quad)$ ifadesi düzenlenirse

$$(y'-\quad'x')V^{-1}(y-X\quad) = y'V^{-1}y - y'V^{-1}X\quad - \quad'X'V^{-1}y + \quad'X'V^{-1}X$$

$$= y'V^{-1}y - 2\quad 'X'V^{-1}y + \quad 'X'V^{-1}X$$

elde edilir. Bu ifadenin ’ya göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$X'V^{-1}X \quad = X'V^{-1}y \tag{4.2}$$

olur. (4.2) denklemi normal denklemler olarak bilinir, ’nın GLSE’si bu denklemin çözümüyle elde edilir ve $\hat{\ }_{GLSE}$ ile gösterilir. Böylece

$$\hat{\ }_{GLSE} = (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}y) \tag{4.3}$$

bulunur.

4.3. Genelleştirilmiş Alışılmış Karma Tahmin Edici (GOME)

(4.1) lineer modeli ve (3.5) kısıtı birlikte ele alınırsa, bu iki ifade

$$\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ H \end{pmatrix} \quad + \begin{pmatrix} \pounds \\ e \end{pmatrix},$$

modeli ile gösterilebilir. Burada $Cov\begin{pmatrix} \pounds \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$ dir. GOME

$$\cdot \; = \pounds'V^{-1}\pounds + e'W^{-1}e \tag{4.4}$$

ifadesinin minimumlaştırılmasıyla elde edilir. (4.4) ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} \cdot \; &= (y - X\quad)'V^{-1}(y - X\quad) + (h - H\quad)'W^{-1}(h - H\quad) \\ &= y'V^{-1}y - 2\quad 'X'V^{-1}y + \quad 'X'V^{-1}X \quad + h'W^{-1}h - 2\quad 'H'W^{-1}h + \quad 'H'W^{-1}H \end{aligned}$$

bulunur. ’ya göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$(X'V^{-1}X + H'W^{-1}H) \quad = X'V^{-1}y + H'W^{-1}h$$

olur. Böylece

$$\hat{}_{GOME} = (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'V^{-1}y + H'W^{-1}h) \tag{4.5}$$

olarak elde edilir.

4.4. Genelleştirilmiş Rasgele Kısıtlı Liu Tahmin Edicisi (GSRLE)

GOME ve Liu tahmin edicileri birleştirilerek genelleştirilmiş rasgele kısıtlı Liu tahmin edicisi

$$\hat{}_{GSRLE}(d) = F_d\,(X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'V^{-1}y + H'W^{-1}h) \tag{4.6}$$

olarak tanımlanabilir.

4.5. Genelleştirilmiş Temel Bileşenler Regresyon (GPCR) Tahmin Edicisi

PCR’nin elde edilme yöntemine paralel olarak (4.1) modelinde

$$y = XTT' \quad + £ = Z\sim + £ \tag{4.7}$$

dönüşümü ele alnsın. Burada $T = (t_1, t_2, ..., t_p) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ ortogonal matristir. Ayrıca

$$T'X'XT = Z'Z$$

olarakta yazılabilir. $Z = XT = (z_1, z_2, ..., z_p)$ matrisi temel bileşenler matrisi olarak bilinir. Bu matrisin i. elemanı $z_i = Xt_i$, i. temel bileşendir. ’nın genelleştirilmiş temel bileşenler tahmin edicisi bazı z_i değişkenlerinin ihmal edilmesi ile elde edilir.

Bunun için $Z=(Z_r\,, Z_{p-r})$ parçalanmış matrisi ele alınsın. Bu durumda $Z_r = XT_r$ ve $T_r' \quad = \sim_r$ olur. Ayrıca $T_r' \quad = \sim_r$ ifadesi soldan T_r ile çarpılırsa

$$T_r T_r' \quad = T_r \sim_r$$

elde edilir. $T_r T_r' = I$ olduğundan $\quad = T_r \sim$ olur. Yani (4.7) modelinde Z matrisinin yerine $Z=(Z_r\,, Z_{p-r})$ parçalanmış matrisi yazılırsa

$$
\begin{aligned}
y &= (Z_r\,, Z_{p-r}) \begin{pmatrix} \sim_r \\ \sim_{p-r} \end{pmatrix} + \pounds \\
&= X(T_r\,, T_{p-r}) \begin{pmatrix} T_r' \\ T_{p-r}' \end{pmatrix} \quad + \pounds \\
&= X(T_r T_r' + T_{p-r} T_{p-r}') \quad + \pounds \\
&= XT_r T_r' \quad + XT_{p-r} T_{p-r}' \quad + \pounds \\
&= Z_r \sim_r + Z_{p-r} \sim_{p-r} + \pounds
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $Z_{p-r} \sim_{p-r}$ ihmal edilirse model

$$y = Z_r \sim_r + \pounds \tag{4.8}$$

modeline indirgenmiş olur. (4.8) modeli üzerinde genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini yöntemi uygulanırsa

$$\hat{\sim}_r = (Z_r' V^{-1} Z_r)^{-1} (Z_r' V^{-1} y) \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9)'da Z_r ile $\sim_r$ yerine yazılır ve bulunan ifade T_r ile soldan çarpılırsa

$$\hat{\ }_{GPCR} = T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} y) \tag{4.10}$$

olarak elde edilir.

4.6. Genelleştirilmiş Rasgele Kısıtlı Temel Bileşenler Regresyon (GSRPCR) Tahmin Edicisi

(4.1) lineer modeli ve (3.14) kısıtı ile birlikte ele alınsın. Bu iki model birlikte $Y = \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} Z_r \\ H_r \end{pmatrix}$ ve $u = \begin{pmatrix} £ \\ e \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$Y = G\sim_r + u \tag{4.11}$$

modeli ile ifade edilebilir. Burada

$$E(u) = 0\,,\ Cov(u) = \Sigma = \pm^2 \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

ve W pozitif kararlı matristir. (4.11) modelinde GOME'nin elde edilme yöntemi kullanılarak yeni tahmin edici

$$\cdot\ = (y - Z_r\sim_r)'V^{-1}(y - Z_r\sim_r) + (h - H_r\sim_r)'W^{-1}(h - H_r\sim_r)$$

ifadesinin $\sim_r$'ye göre minimumlaştırılmasıyla elde edilir. Yani $\cdot$ 'nin $\sim_r$'ye göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$(Z_r'V^{-1}Z_r + H_r'W^{-1}H_r)\sim_r = Z_r'V^{-1}y + H_r'W^{-1}h$$

bulunur. Buradan

$$\sim_r^* = (Z_r'V^{-1}Z_r + H_r'W^{-1}H_r)^{-1}(Z_r'V^{-1}y + H_r'W^{-1}h)$$

elde edilir. H_r ile $\sim_r$ yerine yazılır ve bulunan ifade T_r ile soldan çarpılırsa

$$\hat{}_{GSRPCR} = T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}y + T_r'H'W^{-1}h) \tag{4.12}$$

bulunur.

4.7. Genelleştirilmiş Ağırlıklı Rasgele Temel Bileşenler Regresyon (GWSRPCR) Tahmin Edicisi

(4.1) modeli ve (3.5) kısıtlamasında regresyon parametrelerinin tahmininde eşit ağırlıkların gerekliliği söz konusu olmadığında

$$\hat{\ }_{GWSRPCR}(w) = T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}y + wT_r'H'W^{-1}h) \qquad (4.13)$$

ile verilen genelleştirilmiş ağırlıklı rasgele temel bileşenler resgesyon tahmin edicisi (GWSRPCR) ele alınabilir. Burada WSRPCR’de olduğu gibi w rasgele değildir ve $0 \le w \le 1$ olarak alınabilir.

4.8. Bazı Genelleştirilmiş Yanlı Tahmin Edicilerin MSE Ölçütüne Göre Karşılaştırılmaları

4.8.1. GSRPCR ve GPCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

$$\begin{aligned} E(\hat{\ }_{GPCR}) &= T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}E(y)) \\ &= T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}E(Z_r \sim_r + £)) \\ &= T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}Z_r \sim_r) \\ &= T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_r)T_r' \\ &= T_rT_r' \qquad (4.14) \end{aligned}$$

olduğundan $\hat{\ }_{GPCR}$’nin yanlılığı

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\ }_{GPCR}) &= E(\hat{\ }_{GPCR}) - \\ &= T_rT_r' \; - \\ &= (T_rT_r' - I) \\ &= -T_{p-r}T_{p-r}' \qquad (4.15) \end{aligned}$$

dir.

$$
\begin{aligned}
Cov(\hat{\ }_{GPCR}) &= [T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'X'V^{-1}]Cov(y)[T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'X'V^{-1}]' \\
&= [T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'X'V^{-1}]Cov(y - X\quad)[T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'X'V^{-1}]' \\
&= [T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'X'V^{-1}]Cov(£)[V^{-1}XT_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'] \\
&= [T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'X'V^{-1}]\pm^2 V[V^{-1}XT_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'] \\
&= \pm^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}VV^{-1}XT_r)(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r' \\
&= \pm^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r' \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Böylece (3.18)’e göre $\hat{\ }_{GPCR}$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$M(\hat{\ }_{GPCR}) = \pm^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r' + T_{p-r}T_{p-r}' \qquad 'T_{p-r}T_{p-r}'$$

olarak elde edilir.

$$E(\hat{\ }_{GSRPCR}) = T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}[T_r'X'V^{-1}E(y) + T_r'H'W^{-1}E(h)]$$

dir.

$$
\begin{aligned}
E(y) &= E(Z_r\sim_r + £) = E(Z_r\sim_r) = Z_r\sim_r = XT_rT_r' \quad , \\
E(h) &= E(H_r\sim_r + e) = E(H_r\sim_r) = H_r\sim_r = HT_rT_r'
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$E(\hat{\ }_{GSRPCR}) = T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_rT_r' \quad + T_r'H'W^{-1}HT_rT_r' \quad)$$

olarak bulunur. Bu ifade sağdan T_r' parantezine alınırsa

$$E(\hat{\beta}_{GSRPCR}) = T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)T_r'$$

$$= T_rT_r' \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.17) aynı olduğundan $\hat{\beta}_{GSRPCR}$ tahmin edicisinin yanlılığıda $\hat{\beta}_{GPCR}$'nin yanlılığı ile aynı bulunur.

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_{GSRPCR}) &= T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}\underbrace{Cov(y)}_{\sigma^2 V}V^{-1}XT_r \\ &\quad + T_r'H'W^{-1}\underbrace{Cov(h)}_{\sigma^2 W}W^{-1}HT_r)[T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}]' \\ &= \sigma^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r) \\ &\quad \times (T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \\ &= \sigma^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \end{aligned} \tag{4.18}$$

olarak bulunur. Böylece (3.18)'e göre $\hat{\beta}_{GSRPCR}$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$M(\hat{\beta}_{GSRPCR}) = \sigma^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' + T_{p-r}T_{p-r}'\beta\beta'T_{p-r}T_{p-r}' \tag{4.19}$$

şeklindedir.

$\hat{\beta}_{GPCR}$ ve $\hat{\beta}_{GSRPCR}$ tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.8.1. MSE ölçütüne göre $\hat{\beta}_{GSRPCR}$ tahmin edicisi her zaman $\hat{\beta}_{GPCR}$ tahmin edicisinden üstündür.

İspat: $\hat{\ }_{GSRPCR}$ ve $\hat{\ }_{GPCR}$ tahmin edicilerinin yanlılıkları aynı olduğundan MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları yapılırken sadece kovaryans matrislerinin farklarına bakmak yeterli olacaktır. Böylece (4.18) ve (4.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &Cov(\hat{\ }_{GPCR}) - Cov(\hat{\ }_{GSRPCR}) \\ &\quad = \pm^2 T_r[(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1} - (T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}]T_r' \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Teorem 2.2.4'e göre,

$$\begin{aligned} &(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\ &= (T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1} - (T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'H'(W + HT_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'H')^{-1}HT_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik (4.20)'de yerine yazılır ve Teorem 2.4.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} &Cov(\hat{\ }_{GPCR}) - Cov(\hat{\ }_{GSRPCR}) \\ &= \pm^2 T_r[(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'H'(W + HT_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}T_r'H')^{-1}HT_r(T_r'X'V^{-1}XT_r)^{-1}]T_r' \geq 0 \end{aligned}$$

olur ve ispat biter. ■

4.8.2. GWSRPCR ve GPCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

$$E[\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)] = T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}[T_r'X'V^{-1}\underbrace{E(y)}_{XT_rT_r'} + wT_r'H'W^{-1}\underbrace{E(h)}_{HT_rT_r'}]$$

olarak yazılır. Bu ifade sağdan T_r' parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} E[\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)] &= T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}T_r)T_r' \\ &= T_rT_r' \end{aligned}$$

elde edilir.

$$Bias[\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)] = -T_{p-r}T'_{p-r} \tag{4.21}$$

olarak bulunur. $\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)$ ve $\hat{\ }_{GPCR}(w)$'nin sırasıyla (4.21) ve (4.14)'te verilen yanlılıkların aynı olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
Cov[\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)] &= T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\
&\quad \times(T_r'X'V^{-1}\underbrace{Cov(y)}_{\pm^2 V}V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}\underbrace{Cov(h)}_{\pm^2 W}W^{-1}HT_r w) \\
&\quad \times(T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1})' \\
&= \pm^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_r \\
&\quad + w^2T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r'
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. Böylece (3.18)'e göre $\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$\begin{aligned}
M[\hat{\ }_{WSRPCR}(w)] &= \pm^2 T_r(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'V^{-1}XT_r + w^2T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\
&\quad \times(T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' + T_{p-r}T'_{p-r} \quad 'T_{p-r}T'_{p-r}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olarak bulunur.

$\hat{\ }_{GPCR}$ ve $\hat{\ }_{GWRPCR}(w)$ tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.8.2. MSE ölçütüne göre $\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)$ tahmin edicisi her zaman $\hat{\ }_{GPCR}$ tahmin edicisinden üstündür.

İspat: $\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)$ ve $\hat{\ }_{GPCR}$ tahmin edicilerinin yanlılıkları aynı olduğundan MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları yapılırken kovaryans matrislerinin farklarına bakılacaktır. (4.22) ve (4.16) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&Cov(\hat{\ }_{GPCR}) - Cov[\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)] \\
&= \pm^{2} T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} T_r' - \pm^{2} T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \\
&\quad \times (T_r' X' V^{-1} X T_r + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} T_r' \\
&= \pm^{2} T_r \Big[(T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} - (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \\
&\quad \times (T_r' X' V^{-1} X T_r + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \Big] T_r' \\
&= \pm^{2} T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \\
&\quad \times \Big[(T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)(T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r) \\
&\quad - (T_r' X' V^{-1} X T_r + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \Big] (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} T_r' \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
(T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)(T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)
$$

ifadesi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&(T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)(T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r) \\
&= T_r' X' V^{-1} X T_r + 2w T_r' H' W^{-1} H T_r + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} T_r' H' W^{-1} H T_r
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifade (4.24)'te yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&= \pm^{2} T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \Big[(2-w)\, w T_r' H' W^{-1} H T_r' \\
&\quad + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r)^{-1} T_r' H' W^{-1} H T_r \Big] (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} T_r'
\end{aligned}
$$

bulunur. $0 \le w \le 1$ olduğundan $2 - w > 0$ olur ve Teorem 2.4.3'e göre

$$
M(\hat{\ }_{GPCR}) - M(\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)) \ge 0
$$

elde edilir ve ispat biter. ■

4.8.3. GWSRPCR ve GSRPCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Teorem 4.8.3. MSE ölçütüne göre $\hat{}_{GSRPCR}$ tahmin edicisi her zaman $\hat{}_{GWSRPCR}(w)$ tahmin edicisinden üstündür.

İspat: $\hat{}_{GWSRPCR}(w)$ ve $\hat{}_{GSRPCR}$ tahmin edicilerinin yanlılıkları aynı olduğundan MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları yapılırken kovaryans matrislerinin farklarına bakılacaktır. (4.18) ve (4.22) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&Cov(\hat{}_{GSRPCR}) - Cov[\hat{}_{GWSRPCR}(w)] \\
&\quad = \pm^2 T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} T_r' - \pm^2 T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \\
&\qquad \times (T_r' X' V^{-1} X T_r + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r)(T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} T_r' \\
&\quad = \pm^2 T_r \Big[(T_r' X' V^{-1} X T_r + T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} - (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \\
&\qquad \times (T_r' X' V^{-1} X T_r + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r)(T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \Big] T_r' \\
&\quad = -\pm^2 (w-1)^2 T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} X T_r + T_r' H' W^{-1} H T_r) \\
&\qquad \times (T_r' X' V^{-1} X T_r)(T_r' H' W^{-1} H T_r)(T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} T_r'
\end{aligned}
$$

elde edilir. $0 \le w \le 1$ olduğundan $0 \le (w-1)^2 \le 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 2.4.3'e göre

$$
M(\hat{}_{GSRPCR}) - M[\hat{}_{GWSRPCR}(w)] \le 0
$$

olur ve ispat biter. ■

4.8.4. GSRLE ve GSRPCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

$$
E[\hat{}_{GSRLE}(d)] = E(F_d \hat{}_{GOME}) = F_d
$$

dir. Böylece

$$Bias[\hat{\ }_{GSRLE}(d)] = E[\hat{\ }_{GSRLE}(d)] - \hat{\ }_{GSRLE}(d)$$
$$= F_d \quad - \quad = (F_d - I) \qquad (4.25)$$

elde edilir. Ayrıca

$$Cov[\hat{\ }_{GSRLE}(d)] = Cov(F_d \ \hat{\ }_{GOME})$$
$$= Cov[F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'V^{-1}y + H'W^{-1}h)]$$
$$= F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'\underbrace{Cov(y)}_{\pm^2 V} X + H'W^{-1}\underbrace{Cov(h)}_{\pm^2 W} W^{-1}H)$$
$$\times (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d'$$
$$= \pm^2 F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)$$
$$\times (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d'$$
$$= \pm^2 F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d' \qquad (4.26)$$

olur. Böylece (3.18)'ye göre $\hat{\ }_{GSRLE}(d)$ tahmin edicisinin MSE matrisi

$$M[\hat{\ }_{GSRLE}(d)] = \pm^2 F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d' + (F_d - I) \quad '(F_d - I)' \qquad (4.27)$$

olarak yazılır. $\hat{\ }_{GSRLE}(d)$ ve $\hat{\ }_{GSRPCR}$ tahmin edicilerinin MSE matris farkları

$$\Delta_1 = M[\hat{\ }_{GSRLE}(d)] - M(\hat{\ }_{GSRPCR})$$
$$= \pm^2 F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d' + (F_d - I) \quad '(F_d - I)'$$
$$- \left[\pm^2 T_r (T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r' + T_{p-r}T_{p-r}' \quad 'T_{p-r}T_{p-r}'\right] \qquad (4.28)$$

olarak gösterilir.

$$D_1 = F_d\,(X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' - T_r\,(T_r'\,X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r'\,,$$

$$b_1 = (F_d - I) \quad ,$$

$$b_2 = T_{p-r}T_{p-r}'$$

olmak üzere (4.28)

$$\Delta_1 = \pm^{\,2} D_1 + b_1 b_1' - b_2 b_2'$$

olarakta yazılabilir.

$\hat{}_{GSRPCR}$ ve $\hat{}_{GSRLE}(d)$ tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.8.4. $0 < d < 1$ ve

$$\text{a}_1\left\{\left[T_r\,(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r'\right]\left[F_d\,(X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d'\right]\right\} < 1$$

iken MSE ölçütüne göre $\hat{}_{GSRPCR}$ tahmin edicisi $\hat{}_{GSRLE}(d)$ tahmin edicisinden üstündür. Yani

$$\Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow b_2'(\pm^{\,2} D_1 + b_1 b_1')^{-1} b_2 \leq 1$$

dir.

İspat: $0 < d < 1$ iken

$$F_d\,(X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1}F_d' > 0 \text{ ve } T_r\,(T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}T_r' \geq 0$$

olduğu açıktır. $D_1 = A - B$ olarak düşünülürse Teorem 2.4.5'e göre $\text{a}_1(BA^{-1}) < 1$ olduğundan $D_1 = A - B > 0$ elde edilir. Teorem 2.4.6'ya göre

$$\Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow b_2'(\pm^2 D_1 + b_1 b_1')^{-1} b_2 \leq 1$$

olur ve ispat biter. ■

4.8.5. GSRLE ve GWSRPCR tahmin edicilerinin karşılaştırılması

$\hat{\ }_{GSRLE}(d)$ ve $\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)$ tahmin edicilerinin MSE matris farkları

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= M[\hat{\ }_{GSRLE}(d)] - M[\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)] \\
&= \pm^2 F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d' + (F_d - I) \quad '(F_d - I)' \\
&\quad - \Big[\pm^2 T_r (T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (T_r'X'V^{-1}XT_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\
&\quad \times (T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r' + T_{p-r}T_{p-r}' \quad 'T_{p-r}T_{p-r}' \Big]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

olarak gösterilir.

$$\begin{aligned}
D_2 &= F_d (X'V^{-1}X + H'W^{-1}H)^{-1} F_d' - T_r (T_r'X'V^{-1}XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} \\
&\quad \times (T_r'X'V^{-1}XT_r + w^2 T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} (T_r'X'V^{-1}XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1} T_r' \\
b_1 &= (F_d - I) \\
b_2 &= T_{p-r}T_{p-r}'
\end{aligned}$$

olmak üzere (4.29)

$$\Delta_2 = \pm^2 D_2 + b_1 b_1' - b_2 b_2'$$

olarakta yazılabilir.

$\hat{\ }_{GSRLE}(d)$ ve $\hat{\ }_{GWSRPCR}(w)$ tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.8.5. $0 < d < 1,\ 0 \le w \le 1$ ve

$$\begin{aligned} &a_1 \Big\{ [T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} (T_r' X' V^{-1} X T_r + w^2 T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} \\ &\times (T_r' X' V^{-1} X T_r + w T_r' H' W^{-1} H T_r)^{-1} T_r'][F_d (X'X + H'W^{-1} H)^{-1} F_d']^{-1} \Big\} < 1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

iken MSE ölçütüne göre $\hat{}_{GWSRPCR}(w)$ tahmin edicisi $\hat{}_{GSRLE}(d)$ tahmin edicisinden üstündür. Yani

$$\Delta_2 \ge 0 \Leftrightarrow b_2' (\pm^2 D_2 + b_1 b_1')^{-1} b_2 \le 1$$

dir.

İspat: $D_2 = A - B$ olarak düşünülürse $0 < d < 1$ ve $0 \le w \le 1$ iken $A > 0$ ve $B \ge 0$ dır. $a_1 (BA^{-1}) < 1$ olduğundan Teorem 2.4.5'e göre $D_2 > 0$ dır. Teorem 2.4.6'ya göre ise

$$\Delta_2 \ge 0 \Leftrightarrow b_2' (\pm^2 D_2 + b_1 b_1')^{-1} b_2 \le 1$$

olur ve ispat biter. ■

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer modeller altında bazı yanlı tahmin ediciler ayrıntılı olarak incelendi ve bu tahmin edicilerin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili bazı sonuçlar verildi.

Bölüm 3'te $E(\varepsilon)=0$ ve $Cov(\varepsilon)=\sigma^2 I$ varsayımları altında $y = X\beta+\varepsilon$ lineer modeli ve bu model için $E(e)=0$ ve $Cov(e)=\sigma^2 W$ olmak üzere $h = H\beta + e$ kısıtı ele alınarak

$$\hat{\beta}_{OME} = (X'X + H'W^{-1}H)^{-1}(X'y + H'W^{-1}h)$$

tahmin edicisi elde edildi. Daha sonra $y = X\beta+\varepsilon$ modeli için $y = XTT'\beta+\varepsilon = Z\alpha+\varepsilon$ dönüşümü ele alınarak

$$\hat{\beta}_{PCR} = T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}T_r'X'y$$

tahmin edicisi ve $h = H\beta + e$ kısıtı için $h = HTT'\beta + e$ dönüşümü ele alınarak OME' nin elde edilme yönemi kullanılarak

$$\hat{\beta}_{SRPCR} = T_r(T_r'X'XT_r + T_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'y + T_r'H'W^{-1}h)$$

tahmin edicisi elde edildi. $\hat{\beta}_{SRPCR}$'nin

$$\hat{\beta}_{WSRPCR}(w) = T_r(T_r'X'XT_r + wT_r'H'W^{-1}HT_r)^{-1}(T_r'X'y + wT_r'H'W^{-1}h)$$

ağırlıklı tahmin edicisi detaylı olarak incelendi. Daha sonra bu ele alınan tahmin edicilerinin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili teoremler ve ispatları verildi.

Bölüm 4'te önceki bölümde ele alınan lineer model $E(\pounds) = 0$ $Cov(\pounds) = \pm^{2}V$ varsayımları altında ele alınarak Bölüm 3'te incelenen yanlı tahmin ediciler ve özellikleri bu varsayımlar altında genelleştirildi. Daha sonra elde edilen genelleştirilmiş yanlı tahmin edicilerin MSE ölçütüne göre karşılaştırılmaları ile ilgili teoremler ve ispatları verildi.

Bu çalışmada ele alınan genelleştirilmiş yanlı tahmin edicilerin performansları farklı ölçütlere göre karşılaştırılabilir. Ayrıca ele alınan lineer modelde hata vektörünün kovaryans matrisinin nonnegatif kararlı olması durumunda daha genel sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] ÖZTÜRK, F., Olasılık ve istatistiğe giriş II., Ankara, 2011.

[2] ALBERT, A., The Gauss-Markov thorem for regression models with possible singular covariances, SIAM Journal on Applied Mathematics, 24, 182-187, 1973.

[3] STEIN, C., Inadmissibility of the usual estimator for mean of multivariate normal distribution, in Proceedings of the 3rd Berkley Symposium on Mathematical and Statistics Probability, J. Neyman, 1, 197-206, 1956.

[4] MASSY, W. F., Principal components regression in exploratory statical research, Journal of the American Statical Association, 60(309), 234-266, 1965.

[5] HOERL A. E., KENNARD R. W., Ridge regression: biased estmation for nonorthogonal problems, Thecnometrics, 12(1), 55-67, 2000.

[6] LIU K., A new class of biased estimate in linear regression, Communications in Statistics-Theory and Methods, 22(1), 393-402, 1993.

[7] DURBIN, J., A note on regression when there is extraneous information that one of cofficients, J. Amer. Statist. Assoc., 48, 799-808, 1953.

[8] THEIL, H., GOLDBERGER, A. S., On pure and mixed statistical estimation in economics, Inern. Econ. Rev., 2, 65-78, 1961.

[9] THEIL. H., On the use of incompleteprior information in regression analysis, J. Amer. Statist. Assoc., 58, 401-414, 1963.

[10] HUBERT, M. H., WIJEKOON, P., Improvement of the Liu estimator in linear regression model, Statical Paper, 47, 471-479, 2006.

[11] LI, Y. L. , YANG, H., A new stochastic mixed ridge estimator in linear regression model, Statical Paper, 51, 315-323, 2010.

[12] YANG, H., XU, J. W., An alternative stochastic restricted Liu estimator in linear regression, Statical Paper, 50, 639-647, 2009.

[13] WU, J. and YANG, H., Two stochastic restricted principal components regression estimator in linear regression, Communications in Statistics–Theory and Methods, 42, 3793-3804, 2013.

[14] HOTELLING, H., Analysis of a complex of statistical variables into principal components, Journal of Educational Pschology, 24, 417-441 and 489-520, 1933.

[15] PUNTANEN, S., STYAN, G.P.H., ISOTALO, J., Matrix tricks for linear statistical models, Our Personal Top Twenty, Springer, Heidelberg, 2011.

[16] MAGNUS, J. R., NEUDECKER, H., Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, John Wiley, G.Britain, 1988.

[17] SENGUPTA, D., JAMMALAMADAKA, S. R., Linear models an integrated approach, World Scientific, Singapore, 2003.

[18] VENIT, S., BISHOP, W.,Elemantary linear algebra, PWS publishers, Massachusetts, 1985.

[19] SCHOTT, J. R., Matrix analysis for statistic, Wiley Sries in Probability and Statistic, 2005.

[20] SEBER, G. A. F., Linear regression analysis, John Wiley, New York, 1977.

[21] WANG, S. G., WU, M. X., JIA, Z. Z., Matrix inequalties, 2nd ed. Beijing: Chinese Science Press, 2006.

[22] FAREBROTHER, R. W., Further results on the mean square error of ridge regression, J. Roy. Statist. Soc. B, 38, 248-250, 1976.

[23] SEBER, G. A. F., A matrix handbook for statisticians, John Wiley & Sons, Inc. , New Jersey, 2008.

[24] GRAYBILL, F. A., Introduction to matrices with applications in statistics, Wadworth Publising Company inc., California, 1969.

[25] JOHNSON, R. A, WICHERN, D. W., Applied multivariate statistical analysis, Prentice –Hall, New Jersey, 1982.

[26] ÖZKALE, M. R., Principal components regression estimator and a test for the restrictions, Statistics, 43, 541-551, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Esra Hoşsöz, 26.08.1987 de Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ankara'da tamamladı. 2006 yılında Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2011 yılında tamamladı. 2012 yılında yüksek lisans eğitimine başladı. Ayrıca 2012-2013 yılları arasında Sakarya'da özel bir bankada çalıştı. Şu anda özel bir okulda öğretmenlik yapmaktadır.