T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERON ÜÇGENLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice Kübra YİĞİT

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Refik KESKİN

Haziran 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERON ÜÇGENLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice Kübra YİĞİT

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 17.06.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Refik KESKİN	**Neşe ÖMÜR**	**Olcay KARAATLI**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hatice Kübra YİĞİT

17.06.2016

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Refik KESKİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezimin yazım ve düzenleme aşamasında yardımlarını ve zamanını esirgemeyen değerli hocam Arş. Gör. Ümmügülsüm ÖĞÜT'e ve tüm süreç boyunca, başımın sıkıştığı her an yardımları ve desteği ile yanımda olan değerli dostum Fatma Zehra UZEKMEK'e teşekkür ederim. Hayatım boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, beni bugünlere getiren aileme ve bana daima inanan, zor anlarımı paylaşan eşime çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$a \mid b$	: a, b yi böler
$a \nmid b$	: a, b yi bölmez
$(a,b)=d$	: a ve b pozitif tamsayılarının en büyük ortak böleni
$(a,b)=1$	: a ve b pozitif tamsayıları aralarında asal
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$>$	: Büyüktür
$\geq$	: Büyük eşittir
$\equiv$	: Denktir
$\not\equiv$	: Denk değildir
$=$	: Eşittir
$A:=(a,b,c:\Delta)$	: Kenarları a,b,c ve alanı Δ olan üçgen
(a,b,c)	: Kenar uzunlukları a,b,c olan üçgen
$<$	: Küçüktür
$\leq$	: Küçük eşittir
$\lvert\ \rvert$	: Mutlak değer
F_n	: n-inci Fibonacci sayısı
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
s	: Üçgenin çevre uzunluğunun yarısı
Δ	: Üçgenin alanı
r	: Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı
R	: Üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı
h_a	: Üçgenin A köşesinden a kenarına inen yüksekliği
r_a	: Üçgenin a kenarına ait dış teğet çemberinin yarıçapı

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Heron üçgenleri, Pisagor üçgenleri

Bu tez sekiz bölümden ve bu bölümler de kendi içerisinde alt bölümlerden oluşmuştur. Birinci bölümde; Heron üçgenleri ile ilgili geçmişte yapılan araştırmalar, temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; Heron alan formülünün cebirsel, trigonometrik, geometrik açıdan ispatları derlendi.

Üçüncü bölümde; Heron üçgenleri ile ilgili en temel özellikler tanım ve teoremlerle ifade edildi.

Dördüncü bölümde; Heron üçgenlerinin alan ve çevre özellikleri ile ilgili teoremler verildi.

Beşinci bölümde; ardışık kenarlı Heron üçgenleri ile kenarları aritmetik dizi olan Heron üçgenleri araştırıldı.

Altıncı bölümde; Heron üçgenlerinin iç teğet çemberinin yarı çapı ve çevrel çemberinin yarıçapı ile ilgili teoremler verildi. Ayrıca, Heron üçgenlerinin iç teğet çemberinin yarıçapının, çevrel çemberinin yarıçapının, dış teğet çemberlerinin yarıçaplarının ve yüksekliklerin tamsayı olma durumları incelendi.

Yedinci bölümde; "(a,b,c) üçgeni Heron ise $(s-a,s-b,s-c)$ üçgeni de Heron mudur?" sorusunun cevabı araştırıldı.

Sekizinci bölümde; Heron üçgenlerinin λ-ailesi verildi.

HERON TRIANGLES

SUMMARY

Keywords: Heron triangles, Pythagorean triangles

This thesis consists of fundamentally eight sections and these sections consist of subsections in itself. In the first section, the history, fundamental definitions and theorems of Heron triangles are given.

In the second section, the proofs of the Heron area formulas are mentioned in term of algebraic, trigonometric and geometric.

In the third section, fundamental identities and theorems of Heron triangles are demonstrated.

In the fourth section, theorems related to area and perimeter identities of Heron triangles are given.

In the fifth section, Heron triangles which have consecutive and arithmetic sequence lengths are investigated.

In the sixth section, theorems related to incircle's radius and circumcircle's radius are given. Moreover, incircle's radius, circumcircle's radius, excircle's radius and hights are demonstrated.

In the seventh section, answer of the question that, "Is $(s-a, s-b, s-c)$ a Heron triangle when (a,b,c) is Heron triangle?" is investigated.

In the eight section, the λ-family of Heron triangles are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Heron Mısır'da doğan ünlü Yunan matematikçisidir. Bazı kaynaklar tarafından Heron'un M.Ö 150 senelerinde Mısır'a bağlı Ptalemaic'de doğduğu belirtilmektedir. Diğer taraftan bazı bilim adamları ise Roma İmparatorluğundan sonra miladi takvime göre 250 senelerinde doğduğunu tahmin etmektedirler. Ama her iki kanı hakkında da kesin bir resmi delil yoktur. Heron ilme 14 tane eser bırakmıştır. Heron buharla çalışan ilk motorları ve itfaiyede kullanılan basınçlı su pompasını yapmıştır. Kenar uzunlukları verilen üçgenlerin ve dörtgenlerin alanlarını hesaplama formülleri ile geometriye çok büyük katkısı olmuştur. Ayrıca Heron'un Alexandiria üniversitesinde ders verdiği söylenir. Heron, üçgenlerde alanları hesaplamada kullanılan

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

alan formülünün de bulucusudur. Bu sebeple bu formüle Heron'un alan formülü denir.

Heron'un adını temsil eden ve onun sunduğu problem, kenarlarının uzunluğu ve alanı tamsayı olan üçgenleri tanımlamaktadır. Bu şekildeki üçgenlere Heron üçgenleri denir. M.Ö. 100'lü yıllarda Heron bu formülü "Metrica" isimli eserinde vermiş ve kanıtlamıştır. Fakat ne yazık ki eseri kaybolduğundan, 1894'te ufak bir parçasının, 1896'da da tamamının bulunmasına kadar kimse tarafından bilinmemiştir. Ünlü Türk bilgini Muhammed El Biruni yazılarında bu formülü Arşimed'e (M.Ö. 212) ithaf etmiştir.

1.1. Kaynak Araştırması

Özel Heron üçgenleri olarak bilinen dik açılı üçgenler, Heron'dan uzun zaman önce Pisagor tarafından bulunmuştur. Ayrıca Lehmer ve Schubert özel Heron problemlerini çözmek ve onları genelleştirmek için Heron'un alan formülünü kullanmıştır.

Sierpinski, 1962 yılında tamsayı kenarlı üçgenlerin özel çeşidi olan Pisagor üçgenlerini alan, kenar, çevre v.b. yönüyle incelemiştir.

Sastry, 1975-1976 yılları arasında Heron üçgenlerini elde etmek için Lagrange özdeşliğini ve alansız yaklaşımı kullanmıştır.

Guy, 1994 yılında sayılar teorisinin, geçmişten eserin yayınlandığı 1994 yılına kadar, çözülememiş problemler ile bu problemlerle ilgili yayınları ve özetlerini veren bir eser ortaya koymuştur. "Unsolved Problems in Number Theory" isimli bu eserin Diophantine Equations isimli bölümünün D18 inci kesiminde Perfect Cuboidlerle ilgili ve D21 inci kesiminde ise Heron üçgenleri ile ilgili çözülememiş problemleri vermiştir.

Sastry, 1997 yılında iki rasyonel kenarortaylı Heron üçgenlerini elde etmiştir.

Fleenor, 1997 yılında en küçük Heron üçgeninin; alanı 6 birim kare olan $(3,4,5)$ üçgeni olduğunu ve özellikle $(3,4,5)$ üçgeninin kenarlarının uzunluklarının ardışık tamsayılar olmasından hareketle kenarları ardışık tam sayılardan oluşan diğer Heron üçgenlerinin varlığını incelemiştir.

Buchholz ve Rathbun, 1997 yılında iki rasyonel kenarortaylı Heron üçgenlerinden oluşan kümenin sonsuz elemanlı olduğunu ortaya koymuşlardır.

Beauregard ve Suryanarayan 1998 yılında, ardışık tamsayı kenarlı Heron üçgenlerinin Pell denklemine bağlı olarak nasıl üretildiğini ortaya koymuşlardır.

Rusen, 1998 yılında eşit alanlı rasyonel üçgenlerin sonsuz sayıda olduğunu ve bu üçgenlerin verilen bir rasyonel üçgene bağlı olarak üretilebileceğini göstermiştir.

Sastry, 1999 yılında 'Heron Triangles and new perspective'makalesinde özel bir üçgen ailesini elde etmiştir.

Cohen, 2000 yılında kenarlarının uzunlukları ardışık tamsayılardan oluşan Heron üçgenlerinin sonsuz sayıda olduğunu kanıtlamıştır.

Sastry, 2000 yılında Pisagor üçgenlerinden faydalanarak Heron üçgenlerinden bahsetmiştir. Ayrıca, Heron dörtgenlerinin yeni bir ailesi, Heron açıları yoluyla tanımlanmaya çalışılmıştır.

Sastry, 2000 yılında $(u_i, v_i) = 1$ ve $u = u_i$, $v = v_i$, $i = 1,2$ için

$$(a_i, b_i, c_i) = (2k(eu^2 - v^2),\ e(k-d)u^2 + (k+d)v^2,\ e(k+d)u^2 + (k-d)v^2)$$

üçgeni $T_i = (a_i, b_i, c_i)$ üçgenini sağlamak üzere $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ iken T_1 ve T_2 üçgenlerinin farklı Heron üçgenleri olduğunu göstermiştir.

Aassila 2001 yılında, aynı alanlı kongruent olmayan Heron üçgen çiftlerinin varlığı ile aynı alan ve aynı yarı çevreli kongruent olmayan Heron üçgen çiftlerinin varlığına ilişkin olarak bazı sonuçlar vermiştir. Ayrıca iç teğet çemberinin ve çevrel çemberinin yarıçaplarının özel durumları için Heron üçgenlerinin varlığını kanıtlamıştır. Yani; iç teğet çemberinin yarıçapı pozitif bir tam sayı olan bir Heron üçgeni ile çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu $4k+1$ biçiminde bir asal olan bir Heron üçgeninin varlığını kanıtlamıştır.

Kramer ve Luca 2001 yılında aynı alanlı ve aynı alan ile aynı yarı çevreli farklı Heron üçgen çiftlerinin varlığıyla ilgili olarak bazı sonuçlar vermişlerdir. Ayrıca iç teğet çemberinin ve çevrel çemberinin yarıçaplarının özel durumları için Heron üçgenlerinin varlığını kanıtlamışlardır.

Sastry, 2001 yılında bir Heron üçgenini üretmek için Gergonne – Cevian ve kenarortay perspektifini ele alarak Heron üçgenlerinin $\lambda-$ ailesini tanımlamıştır. Ayrıca bazı Heron problemlerinin elementer çözümlerini vermiştir.

Gurbanlıyev, 2003 yılında Pisagor üçgenleri, latisler, kongruent sayılar ve sürekli kesirler ile Heron üçgenleri arasındaki ilişkileri incelemiştir. Ayrıca kenar uzunlukları birbirinden farklı Fibonacci sayılarından oluşan Heron üçgenlerinin mevcut olmadığını ve kenar uzunlukları tam sayı olan bir eşkenar üçgenin Heron üçgeni olamayacağını göstermiştir.

Şenay ve Gurbanlıyev, 2003 yılında Pisagor sayıları ile kongruent sayıların arasındaki bağıntıyı kurarak özel bir Heron üçgen ailesinin bir sürekli kesire karşılık geldiğini ispatlamışlardır.

Luca, 2003 yılında herhangi negatif olmayan m tamsayısı için $F_m = 2^{2^m} + 1$, biçiminde tanımlanan m .inci Fermat sayısı F_m olmak üzere, asal Fermat sayıları ile kenarları bir asalın kuvvetleri olan Heron üçgenleri arasındaki ilişkileri araştırmıştır.

Gaál, Járási ve Luca, 2003 yılında $\wp$, asalların sonlu bir kümesi, S de sadece $\wp$ kümesindeki asallar tarafından bölünebilen tamsayıların kümesi ve $x,\ y,\ z \in S$ bir Heron üçgeninin kenar uzunlukları olmak üzere $(x, y, z) = 1$ şartını sağlayan Heron üçgenlerinin sadece sonlu sayıda olduğunu kanıtlamışlardır.

Kurz, 2004 yılında genel Heron üçgen ailesini parametrik çözümü kullanarak bulmuştur.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

Tüm tez boyunca kenarları a, b, c olan üçgeni (a, b, c) üçgeni olarak adlandıracağız.

Tanım 1.2.1. $0 \neq x$ ve y tamsayılar olsun. $y = xz$ olacak şekilde bir z tamsayısı varsa x, y'yi böler denir ve bu durum $x|y$ ile gösterilir. x, y'yi bölmez ise bu durum $x \nmid y$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.2. x, y, a, b ve z tamsayılar olmak üzere

a. x sıfırdan farklı tamsayı olmak üzere $x \mid 0$,
b. $1 \mid x$ ve $x \mid x$,
c. $x \mid y$ ise $x \mid yz$
d. $x \mid y$ ve $x \mid z$ ise $x \mid ya + zb$,
e. $x \mid y$ ve $y \mid z$ ise $x \mid z$,
f. $x \mid y$ ve $y \neq 0$ ise $|x| \leq |y|$,
g. $x \mid y$ ve $y \mid x$ ise $x = \pm y$

özellikleri geçerlidir [22].

Tanım 1.2.3. $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

a. $d \mid x$ ve $d \mid y$ ise d 'ye x ile y 'nin bir ortak böleni denir.
b. d, x ile y 'nin bir pozitif ortak böleni olsun ve x ile y aynı anda sıfır olmasın. Eğer x ile y 'nin her z ortak böleni için $z \mid d$ ise d ortak bölenine x ile y 'nin en büyük ortak böleni denir ve bu $d = (x, y)$ ile gösterilir.
c. $(x, y) = 1$ ise x ile y aralarında asaldır denir [22].

Teorem 1.2.4. Sıfırdan farklı herhangi iki tamsayının en büyük ortak böleni vardır ve $(m, n) = d$ ise $d = xm + yn$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ bulunabilir. Özel olarak, $(m, n) = 1$ olduğunda $1 = xm + yn$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır [6].

Teorem 1.2.5. p asal sayı ve $p \mid xy$ ise $p \mid x$ veya $p \mid y$ dir [32].

Teorem 1.2.6. p, $p \equiv 1(\text{mod}\,4)$ biçiminde bir asal sayı ise p sayısı iki karenin toplamı biçiminde yazılabilir [32].

Teorem 1.2.7. m ve n sıfırdan farklı iki tamsayı ve x herhangi bir tamsayı olsun. O zaman $(m,n)=1$ ve $m \mid nx$ ise $m \mid x$ dir [6].

Teorem 1.2.8.

1. $(x,m)=(y,m)=1$ ise $(xy,m)=1$ dir. Genel olarak $(x_1,m)=(x_2,m)=\ldots=(x_n,m)=1$ ise $(x_1,x_2\ldots x_n,m)=1$ olur.
2. $(y,z)=1$ ise $(y^n,z^n)=1$ ve $(y,z)^n=(y^n,z^n)$ dir. Ayrıca $(y,z)=1$ ise n, m doğal sayılar olmak üzere $(y^n,z^m)=1$ dir [6].

Teorem 1.2.9. n ve m doğal sayılar olmak üzere $(x^n,y^m)=1$ ise $(x,y)=1$ dir [30].

Teorem 1.2.10. $x,y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,mn)=1$ olması için gerek ve yeter şart $(x,m)=(x,n)=1$ dir [6].

Teorem 1.2.11. n bir doğal sayı olmak üzere $x^n \mid y^n$ ise $x \mid y$ dir [30].

Teorem 1.2.12. x,y,m,n pozitif tamsayılar ve $(m,n)=1$ olmak üzere $x^m=y^n$ ise $x=t^n$, $y=t^m$ olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı vardır [30].

Tanım 1.2.13. Sıfırdan farklı bir m tamsayısı $x-y$ farkını bölüyorsa x, m modülüne göre y'ye denktir (ya da y, m modülüne göre x e denktir) denir ve bu $x \equiv y(\text{mod}\ m)$ şeklinde gösterilir. m, $x-y$ farkını bölmüyorsa x, m modülüne göre y'ye denk değildir (ya da y, m modülüne göre x e denk değildir) denir ve bu $x \not\equiv y\ (\text{mod}\ m)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.14. x, y, z, t, a, b ve m tamsayılar olmak üzere;

a. $x \equiv y(\text{mod } m)$ ise $x - y \equiv 0(\text{mod } m)$,
b. $x \equiv y(\text{mod } m)$ ve $y \equiv z(\text{mod } m)$ ise $x \equiv z(\text{mod } m)$,
c. $x \equiv y(\text{mod } m)$ ve $z \equiv t(\text{mod } m)$ ise $xa + zb \equiv ya + tb$ $(\text{mod } m)$,
d. $x \equiv y(\text{mod } m)$ ve $z \equiv t(\text{mod } m)$ ise $xz \equiv yt$ $(\text{mod } m)$,
e. $x \equiv y(\text{mod } m)$ ve $d \mid m$, $d > 0$ ise $x \equiv y(\text{mod } d)$,
f. $x \equiv y(\text{mod } m)$ dir $\Leftrightarrow$ $y \equiv x(\text{mod } m)$,
g. $m \mid x$ ise $x \equiv 0(\text{mod } m)$

özellikleri geçerlidir [22].

Tanım 1.2.15. Bir çokgenin tüm kenarlarını teğet kabul eden çembere iç teğet çemberi denir ve r olarak gösterilir. Doğal olarak bu çember çokgenin içindedir ve merkezi çokgenin tüm kenarlarına eşit uzaklıktadır. Bu uzaklığın ölçümü iç teğet çemberinin yarıçapını verir. Her üçgenin bir iç teğet çemberi vardır ve merkezi iç açıortayının kesim noktasıdır [31].

Tanım 1.2.16. Bir üçgenin iki açısının dış açıortayı ile üçüncü açısının iç açıortayının kesim noktasını merkez kabul eden ve bu üçgenin bir kenarına dıştan teğet olan çembere üçgenin dış teğet çemberi denir ve a kenarına teğet çizilen çemberin yarıçapı r_a olarak gösterilir [31].

Tanım 1.2.17. Bir üçgenin tüm köşelerinden geçen ve herhangi iki kenarının orta dikmelerinin kesişim noktasını merkez kabul eden çembere üçgenin çevrel çemberi denir ve R ile gösterilir [44].

Teorem 1.2.18. (Sinüs Teoremi). Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları sırasıyla a, b, c; iç açıları A, B, C ve çevrel çemberinin yarıçapı da R ise;

$$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$$

dir [3].

Teorem 1.2.19. (Kosinüs Teoremi). Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları sırasıyla $a,\ b,\ c$ ve iç açıları da $A,\ B,\ C$ ise;

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}$$

dir [3].

Tanım 1.2.20. İlk terimleri $F_0=0,\ F_1=1$ olan ve genel terim F_n,

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\ n>1$$

rekurans formülü ile verilen diziye Fibonacci dizisi denir ve bu dizi $(F_n)_{n\geq 0}$ biçiminde ifade edilir. Ayrıca F_n sayısına da n inci Fibonacci sayısı denir.

Teorem 1.2.21. $a^2+b^2=c^2$ denkleminin $(a,b,c)=1$ şartını sağlayan tüm pozitif çözümleri $m>n$, m ve n aralarında asal, m ve n'den biri tek diğeri çift olmak üzere

$$a=m^2-n^2,\qquad b=2mn,\qquad c=m^2+n^2$$

ile verilir [29].

Sonuç 1.2.22. a,b,c pozitif tamsayıları $a^2+b^2=c^2$ şartını sağlar $\Leftrightarrow$ $m>n$ olacak şekilde m,n,d pozitif tamsayıları $(m,n)=1$, m ve n biri tek biri çift tamsayılar olmak üzere

$$a=\left(m^2-n^2\right)d \qquad b=2mnd \qquad c=\left(m^2+n^2\right)d$$

olacak biçimde vardır. [29].

Önerme 1.2.23. (a,b,c) bir Pisagor üçlüsüdür $\Leftrightarrow$ $a=kx,\ b=ky,\ c=kz$ olacak biçimde bir (x,y,z) primitif Pisagor üçlüsü vardır.

Tanım 1.2.24. Ardışık iki terimi arasındaki farkın sabit olduğu dizilere aritmetik dizi denir.

Tanım 1.2.25. $k\geq 1$ için $a_k>0$ olmak üzere $a_0,a_1,a_2,\ldots$ tamsayı dizisi verilsin.

$$\left[a_0,a_1,a_2,\ldots\right]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}$$

şeklindeki bir ifadeye basit sonsuz sürekli kesir denir ve buradaki a_i değerine de kısmi bölenler denir ($i=0,1,2,\ldots$ için). Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\left[a_0,a_1,\ldots,a_n\right]$ değeri varsa sonsuz sürekli kesire yakınsaktır denir ve bu değer $\left[a_0,a_1,a_2,\ldots\right]$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.26. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0,a_1,a_2,\ldots$ tamsayıları verilsin. k doğal sayı olmak üzere $\left[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_k\right]$ sürekli kesirinin $\left[a_0,a_1,a_2,\ldots\right]$ sonsuz sürekli kesirinin k. yaklaşımı denir ve bu değer C_k ile gösterilir.

Teorem 1.2.27. $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tamsayı dizisi verilsin. $C_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ise

$$\lim_{k \to \infty} C_k$$

vardır [21].

Teorem 1.2.28. α irrasyonel sayısı verilsin. Bu taktirde

$$\alpha = \alpha_0 \text{ , } a_k = [| \alpha_k |] \text{ ve } \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

şeklinde tanımlanırsa $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ dır (Ayrıca bu basit sonsuz sürekli kesir açılımı tek türlüdür) [18].

Tanım 1.2.29. d tam kare olmayan pozitif tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

Diophantine denklemlerine Pell deklemleri denir.

Tanım 1.2.30. d tam kare olmayan pozitif tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümleri arasından x 'in en küçük değerini aldığı (x, y) çözümüne denklemin temel çözümü denir.

Teorem 1.2.31. d tamkare olmayan pozitif tamsayı olsun. (p, q)

$$x^2 - dy^2 = 1$$

denkleminin bir pozitif çözümü ise $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$ 'nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır [12].

Teorem 1.2.32. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin herhangi iki çözümü (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) ise bu çözümlerin çarpımı da yine denklemin bir çözümüdür. Yani

$$r + s\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d})$$

olmak üzere (r, s), $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin çözümüdür [12].

Teorem 1.2.33. d tamkare olmayan pozitif tamsayı, $n \in \mathbb{N}$ ve x, y pozitif tamsayılar olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

formülü ile elde edilir [12].

Sonuç 1.2.34. d tam kare olmayan pozitif tamsayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1 x_n + d y_1 y_n \\ y_{n+1} &= x_1 y_n + y_1 x_n \end{aligned}$$

bağıntıları sağlanır [12].

Sonuç 1.2.35. $n \in \mathbb{N}$ için $x_1 > 1,\ y_1 \geq 1$ ve $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ ise $x_{n+1} > x_n$ ve $y_{n+1} > y_n$ dir [12].

Sonuç 1.2.36. m, n pozitif tamsayılar, d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x_{n+m} &= x_n x_m + d y_n y_m \\ y_{n+m} &= x_m y_n + x_n y_m \end{aligned}$$

bağıntıları sağlanır [12].

Teorem 1.2.37. d tamkare olmayan pozitif tamsayı ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu takdirde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n x_1 - x_{n-1} \\ y_{n+1} &= 2y_n x_1 - y_{n-1} \end{aligned}$$

dir [12].

Teorem 1.2.38. d tamkare olmayan pozitif tamsayı ve $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu taktirde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n + \frac{1}{2}\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n \\ y_n &= \frac{1}{2\sqrt{d}}\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{d}}\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n \end{aligned}$$

bağıntıları sağlanır [12].

Teorem 1.2.39. $p > 2$ ve p sayısı asal sayı ise $x^2 + py^2 = z^2$ denkleminin $(x, y, z) = 1$ şartını sağlayan pozitif tamsayı çözümleri r ve s pozitif tamsayılar olmak üzere

$$
\begin{aligned}
x &= | r^2 - ps^2 |, \\
y &= 2rs, \\
z &= r^2 + ps^2
\end{aligned}
$$

formülleri ile verilir.

İspat: Eğer $(x, y, z) = 1$ ise $(x, z) = 1$ olduğu gösterilebilir. Bunu görmek için $q \mid x$ ve $q \mid z$ olacak biçimde bir q asal sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. $q = p$ ise $z^2 - x^2 = py^2$ olduğu kullanılarak $p^2 \mid py^2$, yani $p \mid y$ elde edilir. Bu durum $(x, y, z) = 1$ olmasına aykırıdır. Şu halde $q \neq p$ kabul edebiliriz. Böylece $q \mid py^2$ ve buradan da $q \mid y$ elde edilir. Bu ise yine bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla $(x, z) = 1$ olur. Eğer $x^2 + py^2 = z^2$ ise $py^2 = (z - x)(z + x)$ yazılabilir. $d = (z - x,\, z + x)$ olsun. $d \mid 2x$ ve $d \mid 2z$ ve dolayısıyla $d \mid (2x,\, 2z)$ olur. $(x, z) = 1$ olduğundan $d \mid 2$ elde edilir. Şu halde $d = 1$ veya $d = 2$ olur. $(z - x,\, z + x) = 1$ olsun. $py^2 = (z - x)(z + x)$ olduğundan $z - x = pu^2, z + x = v^2$ veya $z - x = u^2, z + x = pv^2$ olacak biçimde u ve v tamsayıları vardır. Birinci durumda

$$
z = \frac{1}{2}(v^2 + pu^2),\; x = \frac{1}{2}(v^2 - pu^2) \text{ ve } y = uv,
$$

ikinci durumda da

$$
z = \frac{1}{2}(pv^2 + u^2),\; x = \frac{1}{2}(pv^2 - u^2) \text{ ve } y = uv
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
x = \frac{1}{2}| r^2 - ps^2 |,\; z = \frac{1}{2}(r^2 + ps^2) \text{ ve } y = rs
$$

olarak yazılabilir. Şimdi de $(z-x, z+x)=2$ olsun. Bu durumda y çift ve $(\frac{z-x}{2}, \frac{z+x}{2})=1$ olur. Ayrıca

$$p(y/2)^2 = \frac{(z-x)}{2}\frac{(z+x)}{2}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$\frac{z-x}{2} = pu^2, \frac{z+x}{2} = v^2$$

veya

$$\frac{z-x}{2} = u^2, \frac{z+x}{2} = pv^2$$

olacak biçimde u ve v tamsayıları vardır. Birinci durumda

$$z = v^2 + pu^2, x = v^2 - pu^2, y = 2uv$$

ikinci durumda da

$$z = pv^2 + u^2, x = pv^2 - u^2, y = 2uv$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$x = |r^2 - ps^2|, z = (r^2 + ps^2) \text{ ve } y = 2rs$$

olarak yazılabilir.

Sonuç 1.2.40. $p > 2$ ve p sayısı asal sayı ise $x^2 + py^2 = z^2$ denklemini sağlayan tamsayı çözümleri $(x, y, z) = d$ olmak üzere

$$x = d\,|r^2 - ps^2|,$$
$$y = 2drs,$$
$$z = d(r^2 + ps^2)$$

formülü ile elde edilir.

Teorem 1.2.41. Bir t pozitif tamsayısının, bir pozitif r rasyonel sayısının l-inci kuvveti (l bir pozitif tamsayı) olması için gerek ve yeter şart r'nin bir tamsayı olmasıdır ($r^l = t \Leftrightarrow r = \sqrt[l]{t}$). Denk olarak; bir t pozitif tamsayının l-inci kökü, ya bir tamsayı veya bir irrasyonel sayıdır. Özel olarak; t'nin karekökü yani $\sqrt{t}$ ya bir tamsayı ya da bir irrasyonel sayıdır [28], [23].

Teorem 1.2.42. Herhangi bir ABC üçgeninin alanı Δ, yarı çevresi s ve iç teğet çemberinin yarıçapı r olsun. O zaman

$$r = \frac{\Delta}{s} \tag{1.1}$$

dir [11].

Teorem 1.2.43. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a,b,c, çevrel çemberinin yarıçapı R ve alanı da Δ olsun. Bu durumda

$$R = \frac{abc}{4\Delta} \tag{1.2}$$

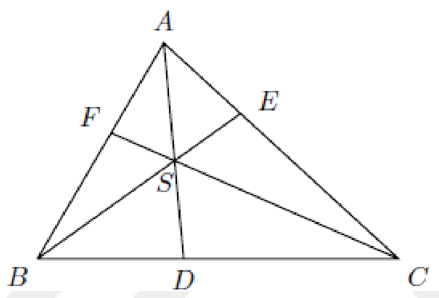
dir [44].

Teorem 1.2.44. Bir ABC üçgeninin kenarları a,b,c, dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c, yarı çevresi s ve alanı Δ olsun. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
r_a &= \frac{\Delta}{s-a} \\
r_b &= \frac{\Delta}{s-b} \\
r_c &= \frac{\Delta}{s-c}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

olur [4].

Teorem 1.2.45. (Ceva Teoremi)



Şekil 1.1. Ceva Teoremi

Bir ABC üçgeninde D, E, F sırasıyla BC, CA ve AB doğru parçaları üzerindeki noktalar olmak üzere $|AD|, |BE|$ ve $|CF|$ doğru parçalarının aynı noktada kesişmeleri için gerek ve yeter koşul

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} = 1$$

eşitliğini sağlamasıdır [43].

BÖLÜM 2. HERON FORMÜLÜ VE İSPATI

Teorem 2.1 (Heron Formülü). Kenar uzunlukları a,b,c olan ABC üçgeninin yarı çevresi s ve alanı da Δ olsun. Bu durumda

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

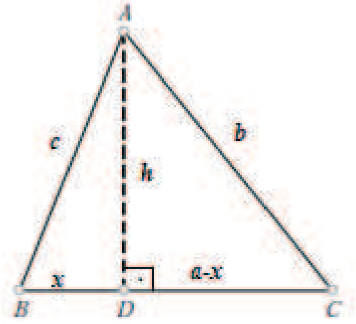
olmak üzere

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dir [8].

İspat: Cebirsel İspat:

ABC üçgeninin A köşesinden $[BC]$ kenarına inen bir yüksekliğini çizelim ve bu yüksekliğin uzunluğu h olsun. h uzunluğunu ADB ve ADC üçgenlerinde Pisagor teoremini uygulayarak bulalım. Şekil 2.1.'den



Şekil 2.1. Yüksekliği h olan ABC üçgeni

$$h^2 + (a-x)^2 = b^2\,, \tag{2.1}$$

$$x^2 + h^2 = c^2 \tag{2.2}$$

denklemleri elde edilir. (2.1) denkleminde h^2 ifadesinin yerine (2.2) denklemindeki h^2 ifadesini yazalım. Buradan

$$(a-x)^2 + c^2 - x^2 = b^2$$

ve böylece

$$a^2 - 2ax + x^2 - x^2 = b^2 - c^2\,,$$

olur. Yani

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

elde edilir. Bulduğumuz x değeri (2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 + h^2 = c^2,$$

buradan da

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 \\ &= \left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$4a^2h^2 = \left(2ac - a^2 + b^2 - c^2\right)\left(2ac + a^2 - b^2 + c^2\right) \tag{2.3}$$

bulunur. ABC üçgeninin alan formülü $\Delta = \frac{1}{2}ah$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\Delta^2 = \frac{a^2h^2}{4}, \\ &\Rightarrow 4\Delta^2 = a^2h^2, \\ &\Rightarrow 4a^2h^2 = 16\Delta^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir. Elde edilen (2.4) denklemi (2.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 16\Delta^2 &= (2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2) \\ &= \left[b^2 - (c-a)^2\right]\left[(a+c)^2 - b^2\right] \\ &= (b-c+a)(b+c-a)(a+c-b)(a+c+b) \\ &= (2s-2c)(2s-2a)(2s-2b)2s \\ &= 16s(s-a)(s-b)(s-c), \end{aligned}$$

buradan da

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

elde edilir.

Trigonometrik İspat: ABC üçgeninde Kosinüs teoremi uygulanırsa

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

olur. Burada $\cos A$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{2.5}$$

elde edilir. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ olduğundan

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$
$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

olarak yazılabilir. Şimdi $\cos A$ ifadesinin yerine (2.5) değeri yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sin A &= \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left[2bc - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right]\left[2bc + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right]}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left[a^2 - \left(b^2 + c^2 - 2bc\right)\right]\left[\left(b^2 + c^2 + 2bc\right) - a^2\right]}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left[a - (b-c)\right]\left[a + (b-c)\right]\left[(b+c) - a\right]\left[(b+c) + a\right]}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

elde edilir. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&a+b+c=2s, \\
&s-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2} &&\Rightarrow 2(s-a)=b+c-a, \\
&s-b=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+c-b}{2} &&\Rightarrow 2(s-b)=a+c-b, \\
&s-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2} &&\Rightarrow 2(s-c)=a+b-c
\end{aligned}
$$

eşitlikleri bulunur. Bu ifadeler (2.6)'da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\sin A &= \sqrt{\frac{2s2(s-a)2(s-b)2(s-c)}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4b^2c^2}} \\
&= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}
$$

olur. Δ, ABC üçgeninin alanı olmak üzere $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$ olduğundan

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

elde edilir.

Bir başka trigonometrik ispat: Heron formülünün bir başka trigonometrik ispatına geçmeden kullanacağımız bir yardımcı teorem ve ispatını verelim.

Lemma 2.1.2. Eğer $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$ olacak şekilde α,β,γ pozitif açıları var ise o zaman

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1 \tag{2.7}$$

dir [19].

İspat: İspatı iki şekilde yapabiliriz. Cebirsel ispat:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha tan\beta}$$

olduğundan

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\cot\gamma=\frac{1}{\tan\gamma} \text{ ve } \tan(\alpha+\beta)=\cot\gamma$$

olarak yazabiliriz. Buradan

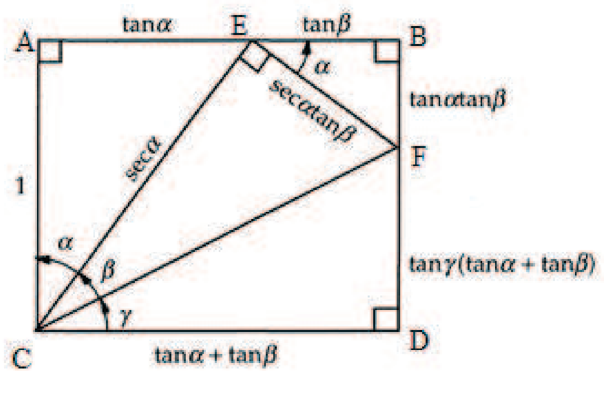
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha tan\beta}=\frac{1}{\tan\gamma}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tan\alpha\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma=1-\tan\alpha\tan\beta,$$
$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\alpha\tan\gamma=1$$

sonucuna ulaşılır.

Geometrik İspat: Kısa kenarı 1 br olan bir dikdörtgen çizelim.



Şekil 2.2. ABCD dörtgeni

Şekil 2.2.'deki CAE üçgeninden yararlanarak $|AE|$ ve $|CE|$ kenar uzunluklarını bulalım.

$\tan\alpha = \dfrac{|AE|}{1}$ olduğundan $|AE| = \tan\alpha$ elde edilir.

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{|CE|}} = |CE|$ olduğundan $|CE| = \sec\alpha$ olur.

EBF üçgeninden $|EF|$, $|EB|$ ve $|BF|$ kenar uzunluklarını bulalım.

$\tan\beta = \dfrac{|EF|}{\sec\alpha}$ olduğundan $|EF| = \sec\alpha\tan\beta$ dır.

$\cos\alpha = \dfrac{|EB|}{\sec\alpha\tan\beta}$ olduğundan $|EB| = \cos\alpha\sec\alpha\tan\beta = \cancel{\cos\alpha}\dfrac{1}{\cancel{\cos\alpha}}\tan\beta = \tan\beta$

elde edilir.

$\tan\alpha = \dfrac{BF}{\tan\beta}$ olduğundan $|BF| = \tan\alpha\tan\beta$ bulunur.

Şimdi CDF üçgeninden $|DF|$ kenar uzunluğunu bulalım.

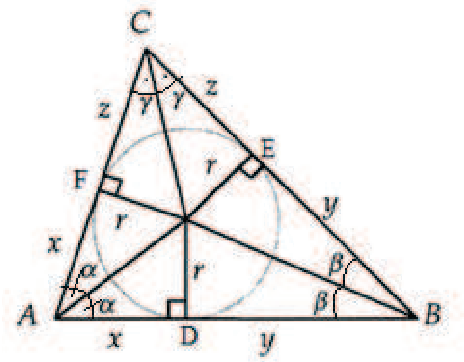
$\tan\gamma = \dfrac{|DF|}{\tan\alpha + \tan\beta}$ olduğundan $|DF| = \tan\gamma(\tan\alpha + \tan\beta)$ olur. $|AC| = |BD|$

olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \tan\alpha\tan\beta + \tan\gamma\left(\tan\alpha + \tan\beta\right) \\ &= \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\alpha\tan\gamma \end{aligned}$$

elde edilir.Şimdi Heron formülünün bir başka trigonometrik ispatını yapabiliriz.

Heron formülünün bir başka trigonometrik ispatı:



Şekil 2.3. ABC üçgeninin iç teğet çemberi

Öncelikle x, y, z uzunluklarını yarı çevre ve ABC üçgeninin kenar uzunlukları cinsinden ifade edelim. $|AB|=a, |AC|=c, |BC|=b$ olsun. O halde Şekil 2.3.'den

$$\begin{aligned} a &= x+y \\ b &= y+z \\ c &= x+z \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} a+b+c &= (x+y)+(y+z)+(x+z) \\ &= 2x+2y+2z \end{aligned}$$

ve

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z \tag{2.8}$$

bulunur. O halde x, y, z uzunlukları

$$a = x + y \text{ olduğundan } s = (x+y) + z = a + z \quad \Rightarrow z = s - a$$

$$b = y + z \text{ olduğundan } s = x + (y+z) = x + b \quad \Rightarrow x = s - b \tag{2.9}$$

$$c = x + z \text{ olduğundan } s = (x+z) + y = c + y \quad \Rightarrow y = s - c$$

olarak elde edilir. Şekil 2.3.'de ABC üçgeninin iç açıları $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ olduğundan $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ olur. Bu durumda (2.7)'den ve Şekil 2.3.'den yararlanarak

$$\begin{aligned} 1 &= \tan\alpha \tan\beta + \tan\beta \tan\gamma + \tan\gamma \tan\alpha \\ &= \frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y} + \frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z} + \frac{r}{x}\cdot\frac{r}{z} \\ &= \frac{r^2(x+y+z)}{xyz} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (2.8)'den

$$1 = \frac{r^2 s}{xyz}$$

olur. Bu ifadenin pay ve paydayı s ile çarpılırsa

$$1 = \frac{r^2 s^2}{sxyz}$$

bulunur. (1.1) ifadesinde $\Delta = rs$ olduğundan

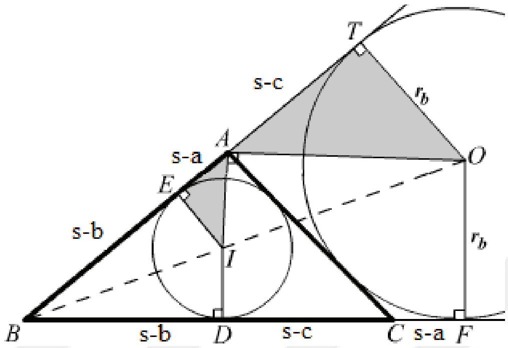
$$\begin{aligned} 1 = \frac{r^2 s^2}{sxyz} &= \frac{\Delta^2}{sxyz} \\ sxyz &= \Delta^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.9) ifadesinden $x = s - b, \quad y = s - c, \quad z = s - a$ olduğundan

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

olur.

Geometrik ispat:



Şekil 2.4. Bir ABC üçgeninin b kenarına ait dış teğet çember

Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I , b kenarına ait dış teğet çember merkezi O olsun. IDB ile OFB üçgenlerinin benzer olmasından

$$\frac{r}{r_b} = \frac{s-b}{(s-b)+(s-c)+(s-a)} = \frac{s-b}{s}$$

yazılabilir. Aynı zamanda IEA ile ATO üçgenlerinin benzer olmasından

$$\frac{r}{s-c} = \frac{s-a}{r_b}$$
$$rr_b = (s-a)(s-c)$$

olur. Her iki eşitlikten de r_b 'ler yalnız bırakılır ve kalanlar eşitlenirse

$$r_b = \frac{rs}{s-b} = \frac{(s-a)(s-c)}{r}$$

elde edilir. Buradan

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

olduğu görülür. Eşitliğin her iki tarafı s ile çarpılırsa

$$r^2 s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

olur. (1.1)'de $\Delta = rs$ olduğundan

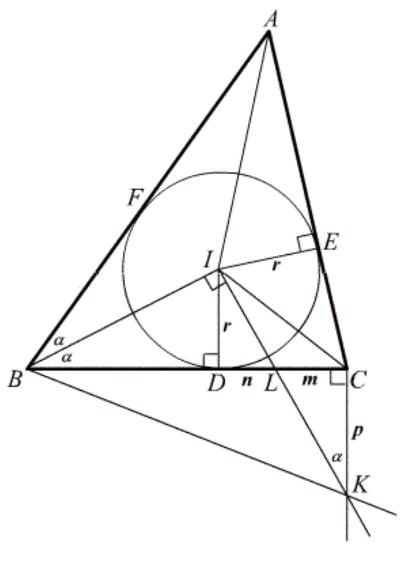
$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

yani

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

elde edilir.

Bir başka geometrik ispat:



Şekil 2.5. ABC ve BCK üçgenleri

Bir ABC üçgeni ve bu üçgenin iç teğet çemberini çizelim. Merkezine I diyelim. $[AI],[BI],[CI]$ iç açıortaylarını çizelim. C köşesinden geçen ve $[BC]$ kenarına dik bir doğru ile I merkezinden geçen ve $[BI]$ uzunluğuna dik bir doğru K noktasında kesişsinler. $BICK$ dörtgeninin bir kiriş dörtgeni olduğunu görerek gerekli açılar yerlerine yazılırsa AEI ile BCK üçgenlerinin benzer olduğu görülür. Ayrıca $|DL|=n, |LC|=m, |CK|=p$ olsun. O halde $m+n=s-c$ olur. Eşlemeyi kurarsak

$$\frac{r}{p}=\frac{s-a}{a}$$

olarak elde edilir. IDL ile KCL üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{r}{p}=\frac{n}{m}$$

yazılabilir. O halde

$$\frac{s-a}{a}=\frac{n}{m}$$

olur. Buradan

$$\frac{n}{s-a}=\frac{m}{a}$$

elde edilir. Birbirine eşit iki oranın paylarının ve paydalarının toplanması ile elde edilen yeni oranın eski orana eşit olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\frac{n}{s-a}=\frac{n+m}{s}=\frac{s-c}{s}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$ns = (s-a)(s-c)$$

bulunur. BIL dik üçgeninde Öklid teoreminden

$$r^2 = (s-b)n$$

yazılabilir. Burada n yalnız bırakılıp bir önceki ifade de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{s-b} \cdot s &= (s-a)(s-c) \\ sr^2 &= (s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafı s ile çarptıktan sonra (1.1)'den $\Delta = rs$ olduğu kullanılırsa

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

yani

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

alan formülü elde edilir.

BÖLÜM 3. HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

3.1. Temel Özellikler

Tanım 3.1.1. Kenar uzunlukları ve alanı tamsayı olan üçgene Heron üçgeni denir.

Tanım 3.1.2. Kenar uzunlukları a,b,c olan bir Heron üçgeni için $(a,b,c)=1$ ise bu üçgene primitif Heron üçgeni denir [15].

Tanım 3.1.3. a,b,c pozitif tamsayılar olmak üzere $a^2+b^2=c^2$ denklemini sağlayan a ve b kenarlı, c hipotenüslü dik üçgene Pisagor üçgeni ve (a,b,c) üçlüsüne Pisagor üçlüsü denir [27].

Tanım 3.1.4. Eğer a,b dik kenarlı, c hipotenüslü bir Pisagor üçgeninin a,b dik kenarları; $a>b$, $a+b\equiv 1(\bmod 2)$ ve $(a,b)=1$ şartlarını sağlıyorsa o zaman bu Pisagor üçgenine primitif Pisagor üçgeni, (a,b,c) üçlüsüne de primitif Pisagor üçlüsü denir [27].

Pisagor üçgeninin bir Heron üçgeni olduğunu tanımı sebebiyle görebiliyoruz. Özel bir Heron üçgeni olan Pisagor üçgenlerinin özellikleri bilindiğinden çalışmamızda daha çok Pisagor üçgeni olmayan Heron üçgenleri üzerinde duracağız.

Teorem 3.1.5.

i. Bir Heron üçgeninin çevresinin yarısı tamsayıdır.
ii. Bir Heron üçgeninin çevresi çift tamsayıdır.

İspat: **i.** $\alpha = a+b+c$ olmak üzere $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ olsun. O zaman $s-a = \dfrac{\beta}{2}$, $s-b = \dfrac{\gamma}{2}$, $s-c = \dfrac{\delta}{2}$ olacak biçimde β, γ, δ tamsayıları vardır. Bu durumda alan

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{2}\frac{\beta}{2}\frac{\gamma}{2}\frac{\delta}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} = x$ olarak ifade edersek $\Delta = \dfrac{1}{4}x$ olur. Böylece

$$x = 4\Delta$$

ve buradan

$$x^2 = 16\Delta^2$$

elde edilir. $x^2 = \alpha\beta\gamma\delta$ olduğundan $\alpha\beta\gamma\delta = 16\Delta^2$ olarak yazılabilir. Bu ise α, β, γ, δ tamsayılarından bir tanesinin çift olduğunu gösterir. Eğer α çift ise $s = \dfrac{\alpha}{2}$ olduğundan s bir tamsayıdır. Eğer β çift ise $s-a = \dfrac{\beta}{2}$ bir tamsayıdır. Yani $s-a$ bir tamsayıdır. a tamsayı olduğundan s bir tamsayıdır. Benzer biçimde γ veya δ çift ise yine s'nin bir tamsayı olduğu görülür.

ii. Bir Heron üçgeninin yarı çevresi $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ olduğundan $2s = a+b+c$ olur. s bir tamsayı olduğu için de $a+b+c$ toplamı, yani Heron üçgeninin çevresi bir çift tamsayı olarak elde edilir.

Önerme 3.1.6. Kenarları a,b,c olan üçgenin alanı Δ ve kenarları ka,kb,kc olan üçgenin alanı Δ' ise $\Delta'=k^2\Delta$ dır.

İspat: Kenarları a,b,c olan (a,b,c) üçgeninin için yarı çevresi $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ olup alanı

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dir. $k\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere kenarları $ka,\ kb,\ kc$ olan üçgeninin yarı çevresi

$$s'=\frac{1}{2}(ka+kb+kc)=\frac{1}{2}k(a+b+c)=ks$$

olur ve buradan (ka,kb,kc) üçgeninin alanı;

$$\begin{aligned}\Delta'&=\sqrt{s'\left(s'-ka\right)\left(s'-kb\right)\left(s'-kc\right)}\\&=\sqrt{ks\left(ks-ka\right)\left(ks-kb\right)\left(ks-kc\right)}\\&=\sqrt{ksk\left(s-a\right)k\left(s-b\right)k\left(s-c\right)}\\&=\sqrt{k^4s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}\\&=k^2\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}\\&=k^2\Delta\end{aligned}$$

elde edilir. Yani kenarları a,b,c olan üçgenin alanı Δ ve kenarları ka,kb,kc olan üçgenin alanı Δ' ise $\Delta'=k^2\Delta$ bağıntısı mevcuttur.

Önerme 3.1.7. Kenarları a,b,c olan üçgen bir Heron üçgeni ise kenarları ka,kb,kc olan üçgen de bir Heron üçgenidir.

İspat: Kenarları ka, kb, kc olan üçgenin alanı Δ', kenarları a, b, c olan üçgeninin alanı Δ ise Önerme 3.1.6.'dan $\Delta' = k^2\Delta$ dır. Δ tamsayı olduğunda $\Delta' = k^2\Delta$ bağıntısından dolayı Δ' de tamsayı olur.

Teorem 3.1.8. Bir Heron üçgeninde ya bir kenar çift diğer ikisi tektir ya da üç kenarı da çifttir.

İspat: Kenarları a, b, c olan bir Heron üçgeni alalım. $d = (a, b, c)$ olsun. Bu durumda $a = da'$, $b = db'$, $c = dc'$ ve $(a', b', c') = 1$ olmak üzere a', b', c' pozitif tamsayılar vardır. O halde

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{d}{2}(a' + b' + c')$$

olur. Buradan

$$2s = d(a' + b' + c')$$

elde edilir. Eğer d çift ise a, b, c kenarları çift olur. Eğer d tek ise $2s$ çift olduğundan $a' + b' + c'$ çift olmak zorundadır. $(a', b', c') = 1$ olduğundan a', b', c' tamsayılarından biri çift diğerleri tek olmalıdır. Böylece d 'nin tek ve $a = da'$, $b = db'$, $c = dc'$ olduğu kullanılırsa a, b, c sayılarından birinin çift diğerlerinin tek olduğu elde edilir.

Sonuç 3.1.9. Bir Heron üçgeni primitif ise kenarlarından biri çift diğer ikisi tektir.

Önerme 3.1.10. a, b, c pozitif sayılar ve $d = (a, b, c)$ olsun. Kenarları a, b, c olan üçgen Heron üçgenidir $\Leftrightarrow$ Kenarları $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ olan üçgen Heron üçgenidir.

İspat: $\Leftarrow$: Kenarları $\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}$ olan üçgen Heron üçgeni olsun. Bu durumda $x=\frac{a}{d}$, $y=\frac{b}{d}$, $z=\frac{c}{d}$ olmak üzere $(x,y,z)=1$ olur. O halde $a=dx$, $b=dy$, $c=dz$ elde edilir. Burada kenarları x,y,z olan üçgenin alanı Δ ve kenarları a,b,c olan üçgenin alanı Δ' ise Önerme 3.1.6.'dan $\Delta'=d^2\Delta$ dir. Δ ve d tamsayı olduğundan Δ' bir tamsayıdır. O zaman kenarları a,b,c olan üçgen Heron üçgenidir.

$\Rightarrow$: Δ' bir tamsayı olsun. O halde Δ'

$$\begin{aligned}\Delta' = d^2\Delta &= d^2\sqrt{\left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{x+y-z}{2}\right)\left(\frac{x+z-y}{2}\right)\left(\frac{y+z-x}{2}\right)}\\ &= \frac{d^2}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$B=(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$$

olarak alınırsa

$$\Delta'=\frac{d^2}{4}\sqrt{B}$$

elde edilir. Buradan

$$4\Delta'=d^2\sqrt{B}$$

olur. B tamsayı olduğundan ve $\sqrt{B}$ rasyonel sayı olduğundan B bir tam karedir. O halde

$$\left(x+y+z\right)\left(x+y-z\right)\left(x+z-y\right)\left(y+z-x\right)=D^2 \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir D pozitif tamsayısı vardır. Ayrıca $D^2 \equiv 0,1 \pmod 4$ dır. $(x,y,z)=1$ olduğundan

1. x,y,z tamsayılarının hepsi tek olabilir.
2. x,y,z tamsayılarından ikisi çift biri tek olabilir.
3. x,y,z tamsayılarından ikisi tek biri çift olabilir.

Burada 1. ve 2. durumda x,y,z için $\pmod 4$ 'de tüm ihtimaller incelendiğinde ve x,y,z tamsayılarının tek veya çift olmasına göre aldıkları değerler (3.1) ifadesinde yerine yazıldığında tüm durumlar $D^2 \equiv 0,1 \pmod 4$ olması ile çelişir. O zaman x,y,z tamsayılarından ikisi tek biri çifttir. Bu durumda (3.1) ifadesinde eşitliğin sol tarafındaki tüm çarpanlar çifttir. O zaman $x+y+z=2a_1$, $x+y-z=2b_1$, $x+z-y=2c_1$, $y+z-x=2d_1$ olacak biçimde a_1,b_1,c_1,d_1 tamsayıları mevcuttur. Bu durumda $B=16a_1b_1c_1d_1$ olur. Buradan

$$\Delta=\frac{\sqrt{B}}{4}=\frac{4\sqrt{a_1b_1c_1d_1}}{4}=\sqrt{a_1b_1c_1d_1}$$

elde edilir. $\Delta=\dfrac{\Delta'}{d^2}$ olduğundan Δ bir rasyonel sayıdır. Fakat Δ, $a_1b_1c_1d_1$ tamsayısının karekökü olduğundan Δ bir tamsayı olmalıdır.

Sonuç 3.1.11. $d=(a,b,c)$ olmak üzere kenarları $\dfrac{a}{d},\dfrac{b}{d},\dfrac{c}{d}$ olan bir Heron üçgeninin alanı Δ olsun. Kenarları a,b,c olan bir Heron üçgeninin alanı da Δ' olsun. O halde

$$\Delta'=d^2\Delta$$

dir.

İspat: Önerme 3.1.10.'da ispat mevcuttur.

Sonuç. 3.1.12. Kenarları a,b,c olan üçgen Heron üçgeni olsun. Δ, kenarları a,b,c olan Heron üçgeninin alanı olmak üzere eğer $t|a,\ t|b,\ t|c$ ise $t^2|\Delta$ olur.

İspat: Kenarları a,b,c olan üçgen Heron üçgeni ve $d=(a,b,c)$ olsun. $t\,|\,a,\ t\,|\,b, t\,|\,c$ olduğundan $t\,|\,d$ dir. Sonuç 3.1.11.'e göre $d^2\,|\,\Delta$ olmaktadır. $t\,|\,d$ olduğundan $t^2\,|\,d^2$ olur. Böylece $t^2\,|\,\Delta$ elde edilir.

Teorem 3.1.13. Kenar uzunlukları tamsayı olan eşkenar üçgenler Heron üçgenleri değildir [10].

İspat: Üçgenimiz eşkenar olduğundan $a=b=c$ olmaktadır. Bu durumda Heron üçgeninin yarı çevresi

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(a+a+a)=\frac{3a}{2}$$

olup üçgenin alanı

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{s(s-a)^3}$$

olarak elde edilir. s'nin yerine $\frac{3a}{2}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta&=\sqrt{s(s-a)^3}\\&=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{3a}{2}-a\right)^3}\end{aligned}$$

olur. Düzenlenirse

$$\Delta = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a^3}{2^3}}$$
$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

elde edilir. $\sqrt{3}$ bir irrasyonel sayı olduğundan Heron üçgenlerinin tanımı gereği eşkenar üçgen bir Heron üçgeni olamaz.

Tanım 3.1.14. Bir ABC üçgeninde $0 < \theta < \pi$ olmak üzere θ açısının hem sinüsü hem de kosinüsü rasyonel sayı ise bu θ açısına Heron açısı denir [25].

Önerme 3.1.15. Kenarları a,b,c pozitif tamsayı olan ABC üçgeninin iç açılarından biri A olmak üzere $\cos A$ rasyonel sayı olsun. Eğer ABC üçgeni Heron üçgeni ise $\sin A$ rasyonel sayıdır. Dolayısıyla $\tan A$ rasyonel sayıdır.

İspat: Kenarları a,b,c pozitif tamsayısı olan ABC üçgen için A açısı b kenarı ile c kenarı arasındaki açı olmak üzere kosinüs teoreminden

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

yazılabilir. Burada $\cos A$ değerini yalnız bırakırsak

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\cos A$ bir rasyonel sayıdır. Ayrıca bir Heron üçgeninin alanı

$$\Delta = \frac{b.c.\sin A}{2}$$

dir ve Δ tamsayı olduğundan $\sin A$ bir rasyonel sayıdır.

Teorem 3.1.16. Bir kenarı diğer kenarının iki katı olan bir primitif Heron üçgeni mevcut değildir.

İspat: Aksini kabul edelim. Kenarları $a, 2a, b$ olan primitif Heron üçgenini ele alalım. O halde $(a, 2a, b) = 1$ olur. Ayrıca Teorem 3.1.8.'e göre a ve b tektir. Üçgenin yarı çevresi

$$s = \frac{a + 2a + b}{2} = \frac{3a + b}{2}$$

olup alanı

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{\left(\frac{3a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{3a-b}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\left(9a^2 - b^2\right)\left(b^2 - a^2\right)}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Kenarları $a, 2a, b$ olan üçgen Heron üçgeni olduğundan

$$(9a^2 - b^2)(b^2 - a^2) = 16\Delta^2$$

olmalıdır. $d = (9a^2 - b^2, b^2 - a^2)$ olsun. O halde $d \mid 9a^2 - b^2$ ve $d \mid b^2 - a^2$ olur. $d \mid b^2 - a^2$ olduğundan $d \mid 9b^2 - 9a^2$ dir. $d \mid 9a^2 - b^2$ ve $d \mid 9b^2 - 9a^2$ olduğundan $d \mid 8b^2$ ve $d \mid 8a^2$ elde edilir. Dolayısıyla $(a, b) = 1$ olduğundan $d \mid 8$ olur. Diğer yandan a ve b tek olduğu için $8 \mid 9a^2 - b^2$ ve $8 \mid b^2 - a^2$ dir. Bu ise $d = 8$ olduğunu gösterir. O halde $9a^2 - b^2 = 8m^2$ ve $b^2 - a^2 = 8n^2$ olacak şekilde m, n tamsayıları mevcuttur. $9a^2 - b^2 = 8m^2$ ve $b^2 - a^2 = 8n^2$ ifadelerini alt alta toplarsak $8a^2 = 8m^2 + 8n^2$ elde edilir. O halde $a^2 = m^2 + n^2$ dir. Ayrıca $(3a - b)(3a + b) = 8m^2$, $(b - a)(b + a) = 8n^2$ ve a ile b 'nin tek sayı olduğu kullanılırsa

$$\left(\frac{3a-b}{2}\right)\left(\frac{3a+b}{2}\right)=2m^2$$
$$\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)=2n^2$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\frac{(3a-b)}{2}=r \text{ ve } \frac{(3a+b)}{2}=s$$
$$\frac{(a-b)}{2}=x \text{ ve } \frac{(a+b)}{2}=y$$

alınırsa $rs=2m^2$ ve $xy=2n^2$ olur. Ayrıca $r+s=3a$ ve $x+a=r,\ y+a=s$ dir. O halde

$$2n^2=xy=(r-a)(s-a)=rs-a(r+s)+a^2=2m^2-a3a+a^2=2m^2-2a^2$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$n^2=m^2-a^2$$

elde edilir. $n^2=a^2-m^2$ olduğundan alt alta toplanırsa $n=0$ olarak bulunur. Bu $b=a$ demektir. Fakat bu olamaz. Kenarları $a,2a,a$ olan Heron üçgeni yoktur. O halde bir kenarı diğer kenarının iki katı olan bir primitif Heron üçgeni mevcut değildir.

Sonuç 3.1.17. Bir kenarı diğer kenarlarının iki katı olan Heron üçgeni yoktur.

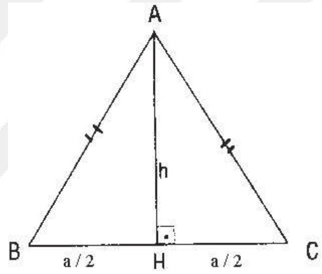
İspat: Kenarları $a,2a,b$ olan Heron üçgenini ele alalım. Eğer bu Heron üçgeni primitif ise önceki teoreme göre Heron üçgeni olamaz. Şimdi $(a,2a,b)=d$ ve $d>1$ olsun. O zaman $\left(\frac{a}{d},2\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ olur. Kenarları $\frac{a}{d},2\frac{a}{d},\frac{b}{d}$ olan üçgen Önerme

3.1.10.'a göre bir Heron üçgeni olur. Fakat önceki teoreme göre bu üçgen yine bir Heron üçgeni olamaz.

3.2. İkizkenar Heron Üçgenleri

Önerme 3.2.1. ABC kenar uzunlukları $|AB| = c = |AC| = b \neq |BC| = a$ olan bir ikizkenar üçgen olsun. ABC ikizkenar üçgeninin; Δ alanı ile a ve $b = c$ kenarlarının her biri pozitif tamsayılar olarak verilsin. Ayrıca A köşesinden $|BC|$ kenarına inilen yükseklik h olsun. O zaman a bir çift tamsayı ve h bir tamsayıdır [36].

İspat:



Şekil 3.1. İkizkenar Heron Üçgeni

ABC üçgeninin alanı $\Delta = \dfrac{ha}{2}$ olduğundan $h = \dfrac{2\Delta}{a}$ olarak yazılabilir. Burada Δ ile a tamsayı olduklarından h bir rasyonel sayı olur. Bu durumda $(k,l) = 1$ olmak üzere k, l tamsayıları $h = \dfrac{k}{l}$ olacak biçimde vardır. AHB dik üçgeninden

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$$

yazılabilir. Burada $h = \dfrac{k}{l}$ yerine yazılırsa

$$\left(\frac{k}{l}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=b^2,$$

yani

$$4k^2+a^2l^2=b^2 4l^2 \tag{3.2}$$

elde edilir. O halde $4\left|(al)^2\right.$ olur. Dolayısıyla $2|al$ dir. Bu durumda al bir tamsayı olduğundan a ile l sayılarından en az birinin çift olması gerekir. Eğer l çift ise o zaman bir pozitif l_1 tamsayısı için $l=2l_1$ olur. Bu durumda (3.2)'den

$$k^2+a^2l_1^2=4l_1^2b^2 \tag{3.3}$$

olur. Bu durumda (3.3)'den $a^2l_1^2=(al_1)^2$ ve dolayısıyla al_1 tektir. Herhangi bir tek sayının karesi 4 modülüne göre 1'e denk olduğundan

$$k^2\equiv(al_1)^2\equiv 1 \pmod 4$$

olmaktadır. O halde

$$k^2+(al_1)^2\equiv 2 \pmod 4$$

elde edilir. Bu durum $4l_1^2b^2\equiv 0 \pmod 4$ olması ile çelişir. Böylece l tamsayısı bir çift sayı olamaz. al bir çift sayı olduğundan a çift olmalıdır. a çift olduğundan pozitif bir a_1 tamsayısı için $a=2a_1$ dir. Ayrıca

$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=b^2$$

olduğundan

$$h^2 = b^2 - a_1^2$$

bir pozitif tamsayı olur. h rasyonel sayı olduğundan Teorem 1.2.41.'e göre h bir tamsayıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki önerme bütün ikizkenar Heron üçgenlerinin ailesini ifade etmektedir. Ayrıca; her bir ikizkenar Heron üçgeninin, iki eş Pisagor üçgenini dik kenarlarından biri ortak olacak şekilde birbirine yapıştırılarak elde edebileceğini göstermektedir.

Önerme 3.2.2. Kenarları $|AB| = c = |AC| = b \neq |BC| = a$ olacak şekilde bir ABC ikizkenar üçgeninde; a, b, c kenarları ve Δ alanı tamsayı ve A köşesinden $[BC]$ kenarına inilen yükseklik h olsun. O zaman $m > n$, $(m,n) = 1$ ve $m + n$ tek olmak üzere

$$a = 2d(m^2 - n^2) \qquad h = d(2mn) \qquad c = b = d(m^2 + n^2) \tag{3.4}$$

veya

$$a = 4dmn \qquad h = d(m^2 - n^2) \qquad c = b = d(m^2 + n^2) \tag{3.5}$$

olacak biçimde m ve n tamsayıları vardır. Karşıt olarak; $m > n$ olmak üzere d, m, n tamsayıları için ABC üçgeninin a, b, c kenar uzunlukları yukarıdaki formüllerden birini sağlıyorsa o zaman sırasıyla

$$h = d(2mn) \text{ veya } h = d(m^2 - n^2)$$

olur ve Δ bir tamsayıdır [36].

İspat: Önerme 3.2.1.'den dolayı a kenarı çift tamsayı ve h tamsayıdır. Böylece $a/2$ bir tamsayı olacağından Şekil 3.1.'deki her bir AHB ve AHC dik üçgenleri hipotenüs uzunlukları $b=c$ olan Pisagor üçgenleridir. O halde Sonuç. 1.2.22.'ye göre

$$a=2d\left(m^2-n^2\right) \qquad h=d\left(2mn\right) \qquad c=b=d\left(m^2+n^2\right)$$

veya

$$a=4dmn \qquad h=d\left(m^2-n^2\right) \qquad c=b=d\left(m^2+n^2\right)$$

olacak biçimde $m>n,\ (m,n)=1$ şartını sağlayan biri tek biri çift m,n tamsayıları vardır. Karşıt durum için (3.4) ve (3.5) ifadelerini sağlayan ABC üçgeninin alanının tamsayı olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu durumda yarı çevre

$$s=\frac{2dm^2-2dn^2+2dm^2+2dn^2}{2}=2dm^2$$

olup alan

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{2dm^2\left(2dm^2-2dm^2+2dn^2\right)\left(2dm^2-dm^2-dn^2\right)\left(2dm^2-dm^2-dn^2\right)}\\ &= \sqrt{2dm^2 2dn^2\left(dm^2-dn^2\right)^2}\\ &= \sqrt{4d^2m^2n^2\left(dm^2-dn^2\right)^2}\\ &= 2dmn\left(dm^2-dn^2\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. d,m,n sayıları tamsayı olduklarından Δ tamsayı olur.

Örnek 3.2.3. $m=2,n=1,d=1$ olsun. O halde ilk üçgenin kenarları a_1,b_1,c_1 olmak üzere

$$a_1=2\cdot 1\cdot\left(4-1\right)=6 \qquad b_1=c_1=1\cdot\left(4+1\right)=5$$

dir. İkinci üçgenin kenarları a_2,b_2,c_2 olmak üzere

$$a_2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \qquad\qquad b_2 = c_2 = 1 \cdot (4+1) = 5$$

olur. Kenarları a_1, b_1, c_1 olan üçgen için yarı çevre

$$s_1 = \frac{6+5+5}{2} = 8$$

olup alan

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sqrt{8(8-6)(8-5)(8-5)}\\ &= \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}\\ &= 12\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(6,5,5)$ üçgeni bir ikizkenar Heron üçgenidir. Kenarları a_2, b_2, c_2 olan üçgen için yarı çevre

$$s_2 = \frac{8+5+5}{2} = 9$$

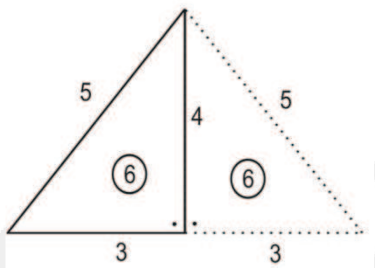
olup alan

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)}\\ &= \sqrt{9 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4}\\ &= 12\end{aligned}$$

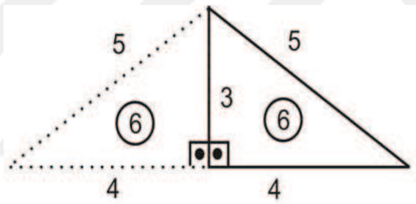
olduğundan $(8,5,5)$ üçgeni bir ikizkenar Heron üçgenidir. Dik üçgenlerin hangi dik kenarından birleştirildiğine bağlı olarak bir dik üçgenden iki ikizkenar Heron üçgeni oluşmaktadır.

3.3. Heron Üçgeni Üretme Metodları

Örnek 3.3.1. Önerme 3.2.2.'de bir ikizkenar Heron üçgenini iki eş Pisagor üçgenin ortak kenarları boyunca birleştirilmesiyle elde edileceğini anlatmıştık. Bunu bir örnek ile ifade edebiliriz. Kenarları $(3,4,5)$ ve alanı 6 olan iki Pisagor üçgeni ele alalım. Ortak dik kenarlarından yapıştıralım.

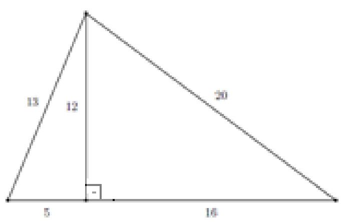


Şekil 3.2. Heron üçgeni üretme metodu 1



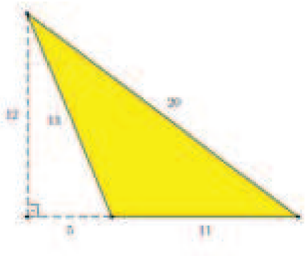
Şekil 3.3. Heron üçgeni üretme metodu 2

Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 üçgenleri elde edilir. Yani yeni oluşturduğumuz $(8,5,5)$ üçgeni ile $(6,5,5)$ üçgeni alanları $12\, br^2$ olan ikizkenar Heron üçgenleridir. Şimdi birer kenarları eş olan farklı iki Pisagor üçgenini ortak kenarlarından zıt yönlü olarak yapıştıralım. $(5,12,13)$ ve $(12,16,20)$ dik üçgenlerini ele alalım.



Şekil 3.4. Heron üçgeni üretme metodu 3

Elde ettiğimiz ACD üçgeni, alanı $126\,br^2$ ve kenarları $(13,20,21)$ olan Heron üçgenidir. Birer kenarları eş olan farklı iki Pisagor üçgenini ortak kenarlardan aynı yönde yapıştırıp daha küçük olan dik üçgeni kesip çıkartalım.



Şekil 3.5. Heron üçgeni üretme metodu 4

Bu durumda kenarları $(11,13,20)$ ve alanı $66\,br^2$ olan ACD Heron üçgeni elde edilir.

Tanım 3.3.2. Eğer

$$a_3 = \varepsilon x_1 + x_2, \qquad \Delta = \varepsilon\Delta_1 + \Delta_2 \qquad \varepsilon = \pm 1$$

olacak biçimde $A_1 := (x_1, y, a_1 : \Delta_1)$ ve $A_2 := (x_2, y, a_2 : \Delta_2)$ Pisagor üçgenleri varsa $A := (a_1, a_2, a_3 : \Delta)$ Heron üçgeni ayrılabilirdir. $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ olmasına göre A üçgeni, A_1 ve A_2 Pisagor üçgenlerinin birleşiminden veya A_2 üçgeninden A_1 üçgeninin çıkarılmasından elde edilir [33].

$$A = A_1 \cup A_2 \text{ veya } A = A_2 - A_1$$

O halde yukarıdaki örnekleri tanımdaki gibi yazalım. Şekil 3.4 için

$$(13,20,21;126) = (5,12,13;30) \cup (16,12,20;96)$$

olur Şekil 3.5 için

$$(13,20,11;66)=(16,12,20;96)-(5,12,13;30)$$

olarak yazılabilir. Gerçekten de Şekil 3.4.'de $a_3=21$ olmak üzere $x_1=5,\ x_2=16$ için (İki dik üçgenin toplamı olduğundan $\varepsilon=1$)

$$a_3=\varepsilon x_1+x_2=x_1+x_2=5+16=21$$

ve alan

$$\Delta=\varepsilon\Delta_1+\Delta_2=\Delta_1+\Delta_2=30+96=126$$

olur. Şekil 3.5.'de $a_3=11$ olmak üzere $x_1=5\ \ x_2=16$ için (Bir dik üçgenden diğerini çıkaracağımız için $\varepsilon=-1$)

$$a_3=\varepsilon x_1+x_2=-x_1+x_2=-5+16=11$$

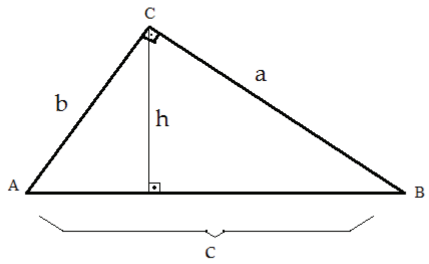
ve alan

$$\Delta=\varepsilon\Delta_1+\Delta_2=-\Delta_1+\Delta_2=-30+96=66$$

elde edilir.

Önerme 3.3.3. Bir primitif Pisagor üçgeni iki Pisagor üçgenine bölünemez.

İspat: Bir primitif Pisagor üçgeninin hipotenüsüne indirilen yükseklik h olsun.



Şekil 3.6. Primitif Pisagor üçgeni

Şekil 3.6.'da ABC üçgeninin alanı $\frac{ab}{2}$ ve $\frac{ch}{2}$ olduğundan $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$ yazılabilir. Dolayısıyla $ab = ch$ olur. Buradan

$$h = \frac{ab}{c}$$

olarak elde edilir. Yüksekliğin tamsayı olması için $c \mid ab$ olması gerekmektedir. $(a,b,c) = 1$ olduğundan $(c,ab) = 1$ olur. Bu durumda $c = 1$ elde edilir. Bu olamaz. O halde h bir tamsayı değildir. Kenarlarından biri tamsayı olmadığından h yüksekliğinin ayırdığı iki üçgen Pisagor üçgeni değildir.

Önerme 3.3.4. Bir Primitif ikizkenar Heron üçgeni sadece iki denk Pisagor üçgenine bölünebilir.

İspat: Önerme 3.2.1.'den bir ikizkenar Heron üçgenin taban uzunluğu, Teorem 3.1.5.'den de bir Heron üçgeninin çevresi çift tamsayıdır. Önerme 3.2.2.'ye göre tabana inen yükseklik, ikizkenar Heron üçgenini iki eş Pisagor üçgenine böler. O halde '$[AC]$ veya $[BC]$ kenarlarına inen yükseklikler ile bir ikizkenar Heron üçgeninden iki Pisagor üçgeni elde edilir mi?' sorusunun cevabını inceleyeceğiz. Ayrıca Önerme 3.2.2.'ye göre bir ikizkenar Heron üçgeni tabana inen yükseklik ile iki farklı şekilde ifade edilebilirdi. Durumlardan birini incelersek diğeri benzer şekilde yapılabilir. O halde $(m,n) = 1$, $m > n$, $m + n$ tek olmak üzere bir ABC primitif ikizkenar Heron üçgeninin kenarları $(m^2 + n^2)$, $(m^2 + n^2)$, $2(m^2 - n^2)$ olsun.

Bu durumda Önerme 3.2.2.'den tabana inen yükseklik $h_a = 2mn$ olur. Yani h_a bir tamsayıdır. ABC üçgeninin yarı çevresi

$$s = \frac{2m^2 + 2n^2 + 2m^2 - 2n^2}{2} = 2m^2$$

olur ve buradan alan

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{2m^2(2m^2 - m^2 - n^2)(2m^2 - m^2 - n^2)(2m^2 - 2m^2 + 2n^2)} \\ &= \sqrt{2m^2(m^2 - n^2)(m^2 - n^2)2n^2} \\ &= 2mn(m^2 - n^2) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğik kenarlardan inen yükseklik ile alan ($h_b = h_c$)

$$\Delta = \frac{h_b b}{2} = \frac{h_c c}{2}$$

olarak yazılabilir. Burada h_b yüksekliğini çekip b ve Δ değerleri yerine yazılırsa

$$h_b = \frac{2\Delta}{b} = \frac{2.2mn(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}$$

elde edilir. $(m,n) = 1$ olduğundan $(m^2 + n^2, 4mn(m^2 - n^2)) = 1$ olur. Bu durumda h_b ve h_c tamsayı olamaz. O halde bir ikizkenar primitif Heron üçgeni sadece tabana inen yükseklik ile iki Pisagor üçgene bölünebilir.

Önerme 3.3.5. Eğer bir Pisagor olmayan Heron üçgeninin iki yüksekliği tamsayı ise, o zaman bu üçgen primitif olamaz.

İspat: $(a,b,c;\Delta)$ bir Heron üçgeni ve b ile c kenarlarına inen yükseklikler tamsayı olsun. Ayrıca Pisagor üçgeni olmasın. Açıkça b ve c aralarında asal olamaz. Kabul edelim ki $(b,c)=1$ olsun. ABC üçgeninin alanı $\frac{h_b b}{2}$ ve $\frac{h_c c}{2}$ olduğundan $\frac{h_b b}{2}=\frac{h_c c}{2}$ olur. O halde

$$h_b b = h_c c \tag{3.6}$$

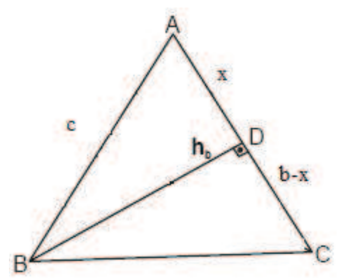
olarak yazılabilir. h_c 'yi yalnız bırakırsak

$$\frac{h_b b}{c} = h_c$$

elde edilir. h_c yüksekliğinin tamsayı olması için $c \mid h_b$ olması gerekirdi. Bu da $c < h_b$ olması anlamına gelir. Bu ise imkansızdır. Çünkü (a,b,c) üçgeni dik açı içermemektedir. $h_b < c$ dir. O halde $(b,c)=g>1$ olsun. O zaman $(b',c')=1$ olmak üzere $b=gb'$ ve $c=gc'$ olacak şekilde b' ve c' tamsayıları mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} h_b b &= h_c c \\ h_b &= \frac{ch_b}{b} = \frac{gc'h_c}{gb'} = \frac{c'h_c}{b'} \end{aligned}$$

olur. $(b',c')=1$ olduğundan $b' \mid h_c$ dir. Burada $h=\frac{h_c}{b'}$ alalım. O zaman $h_b = c'h$ ve $h_c = b'h$ olur.



Şekil 3.7. Pisagor olmayan Heron üçgeni

Şekil 3.7.'den

$$
\begin{aligned}
&{h_b}^2 + x^2 = c^2 \\
&(b-x)^2 + {h_b}^2 = a^2
\end{aligned}
$$

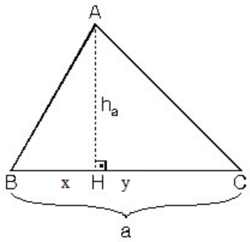
olarak elde edilir. Burada birinci denklemden çekilen h_b, ikinci denklemde yerine yazılıp düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&(b-x)^2 + \left(c^2 - x^2\right) = a^2 \\
&b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2 = a^2 \\
&c^2 + b^2 - 2bx = a^2 \\
&(gc')^2 + (gb')^2 - 2(gb')x = a^2 \\
&g\left(g(c')^2 + g(b')^2 - 2b'x\right) = a^2
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. $(b,c) = g > 1$ olduğundan $p \mid g$ olan p asalı vardır. Bu durumda $p \mid b$ ve $p \mid c$ olur. O halde $p \mid g$ olduğundan $p \mid a^2$ dir. Böylece $p \mid a$ olur. Sonuç olarak $p \mid a, p \mid b, p \mid c$ elde edilir. Bu durumda (a,b,c) Heron üçgeni primitif olamaz.

Teorem 3.3.6. Bir primitif Heron üçgeninin en fazla bir yüksekliği tamsayı ise iki Pisagor üçgenine bölünebilir [33].

İspat: Önerme 3.3.3.'den primitif Pisagor üçgenlerinin iki Pisagor üçgene bölünemeyeceğini gösterdik. Önerme 3.3.4.'den ikizkenar Heron üçgenlerinin yalnızca bir şekilde bölünebileceğini gösterdik. Önerme 3.3.4.'den eğer bir Pisagor olmayan Heron üçgeninin iki yüksekliği tamsayı ise primitif olamayacağını gösterdik. Şimdi sadece bir yüksekliğin tamsayı olduğu durumda ikiye bölünen kenarın her bir parçasının tamsayı olduğunu göstermemiz ispatı tamamlamamız için yeterlidir.



Şekil 3.8. Primitif Heron üçgeni

h_a tamsayı olsun. AHB üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$x^2 + h_a^{\,2} = c^2 \tag{3.7}$$

olur. AHC üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak

$$y^2 + h_a^{\,2} = b^2 \tag{3.8}$$

bulunur. (3.7) denklemi ile (3.8) denklemini taraf tarafa çıkarılırsa

$$x^2 - y^2 = c^2 - b^2$$

elde edilir. c ve b kenarları tamsayı olduğundan $x^2 - y^2$ bir tamsayı olur. Yani $(x-y)(x+y)$ bir tamsayıdır. $(x-y)(x+y) = k,\ k \in \mathbb{Z}$ olsun. $x + y = a$ ve a bir tamsayı olduğu için

$$(x-y) = \frac{k}{a} \tag{3.9}$$

olur. Yani $x - y$ bir rasyonel sayı olur. $x + y = a$ olduğu için $y = a - x$ yazılabilir. (3.9) denkleminde y değerini yerine yazar ve düzenleyip x'i yalnız bırakırsak

$$\frac{k}{a} = x - y = x - (a - x)$$
$$\frac{k}{a} = 2x - a$$
$$x = \frac{\frac{k}{a} + a}{2} = \frac{k + a^2}{2a}$$

elde edilir. x bir rasyonel sayı olduğundan $(r,s) = 1$ olmak üzere $x = \frac{r}{s}$ olacak biçimde r, s tamsayıları mevcuttur. (3.7) denkleminde x değerini yerine yazarsak

$$\frac{r^2}{s^2} + h_a^{\ 2} = c^2$$
$$r^2 + s^2 h_a^{\ 2} = s^2 c^2$$

olduğu görülür. Buradan $s^2 \mid r^2$ dir ve dolayısıyla $s \mid r$ olur. $(r,s) = 1$ olduğundan $s = 1$ elde edilir. Bu durumda x bir tamsayıdır. $y = a - x$ olduğundan y bir tamsayı olur. Bu durumda ispat tamamlanmıştır.

Teorem 3.3.7. (a,b,c) ve (a',b',c') primitif Pisagor üçgenleri olsun. $d = (b,b')$ olmak üzere bu üçgenler $\left(\frac{cb'}{d}, \frac{c'b}{d}, \frac{ba' + b'a}{d}\right)$ şeklindeki Heron üçgenini üretir [10].

İspat: (a,b,c) ve (a',b',c') primitif Pisagor üçgenleri olsun. $d = (b,b')$ olduğundan $\frac{b'}{d}$ ve $\frac{b}{d}$ birer pozitif tamsayılar olur. Her iki (a,b,c) ve (a',b',c') üçgenlerinin kenar uzunluklarını sırasıyla $\frac{b'}{d}$ ve $\frac{b}{d}$ pozitif tamsayıları ile çarparsak

$$\left(\frac{ab'}{d}, \frac{bb'}{d}, \frac{cb'}{d}\right) \text{ ve } \left(\frac{a'b}{d}, \frac{b'b}{d}, \frac{c'b}{d}\right)$$

üçgenleri elde edilir. Sonuç 1.2.22.'den bu üçgenlerinde Pisagor üçgeni olduklarını söyleyebiliriz. Her iki üçgeninde ortak $\frac{bb'}{d}$ kenar uzunluğu olduğundan bu ortak kenar boyunca zıt yönde birleştirdiğimiz Pisagor üçgenlerinden

$$\left(\frac{cb'}{d}, \frac{c'b}{d}, \frac{ba'+b'a}{d}\right)$$

üçgeni bulunur. Elde edilen yeni üçgenin alanı iki dik üçgenin alanları toplamına eşit olduğundan yine bir tamsayı olur ve bu da teoremi ispatlar.

Örnek 3.3.8. A, B, C bir primitif Heron üçgeninin iç açılarını göstersin. $t_1 = \tan\frac{A}{2}$, $t_2 = \tan\frac{B}{2}$, $\mathrm{t}_3 = \tan\frac{C}{2}$ olsun. Bu durumda $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$ olduğu için (2.7)'ye göre $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=1$ olur. Eğer kenarları $a=\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}$, $b=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_3}$, $c=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}$ olan üçgeni oluşturursak yarı çevresi

$$s=\frac{\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)+\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_3}\right)+\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)}{2}$$
$$s=\frac{t_2t_3+t_1t_3+t_1t_2}{t_1t_2t_3}$$

olur. $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=1$ olduğundan

$$s=\frac{1}{t_1t_2t_3}$$

olduğu görülür. Bu durumda kenarları a, b, c olan üçgenin alanı

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{t_1t_2t_3}\left(\frac{1}{t_1t_2t_3}-\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}\right)\left(\frac{1}{t_1t_2t_3}-\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_1}\right)\left(\frac{1}{t_1t_2t_3}-\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{t_1t_2t_3}\left(\frac{1-t_1t_3-t_1t_2}{t_1t_2t_3}\right)\left(\frac{1-t_1t_2-t_2t_3}{t_1t_2t_3}\right)\left(\frac{1-t_2t_3-t_1t_3}{t_1t_2t_3}\right)}$$

elde edilir. $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=1$ olduğu kullanılırsa

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{t_1t_2t_3}\left(\frac{t_2t_3}{t_1t_2t_3}\right)\left(\frac{t_1t_3}{t_1t_2t_3}\right)\left(\frac{t_1t_2}{t_1t_2t_3}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{t_1t_2t_3}\cdot\frac{1}{t_1t_2t_3}}$$
$$= \frac{1}{t_1t_2t_3}$$

olur. $i=1,2$ için p_i,q_i aralarında asal olmak üzere $t_i=\dfrac{p_i}{q_i}$ olsun. t_1,t_2,t_3 yerine $\dfrac{p_1}{q_1},\dfrac{p_2}{q_2},\dfrac{p_3}{q_3}$ yazalım. O halde üçgenin kenarlarının her birini $p_1p_2p_3$ ile çarparak

$$a' = (p_1p_2p_2)a = \frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} = \frac{1}{\frac{p_2}{q_2}}+\frac{1}{\frac{p_3}{q_3}} = \frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3} = p_1p_3q_2+p_1p_2q_3$$
$$b' = (p_1p_2p_2)b = \frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_1} = \frac{1}{\frac{p_3}{q_3}}+\frac{1}{\frac{p_1}{q_1}} = \frac{q_3}{p_3}+\frac{q_1}{p_1} = p_1p_2q_3+p_2p_3q_1$$
$$c' = (p_1p_2p_2)c = \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2} = \frac{1}{\frac{p_1}{q_1}}+\frac{1}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2} = p_2p_3q_1+p_1p_3q_2$$

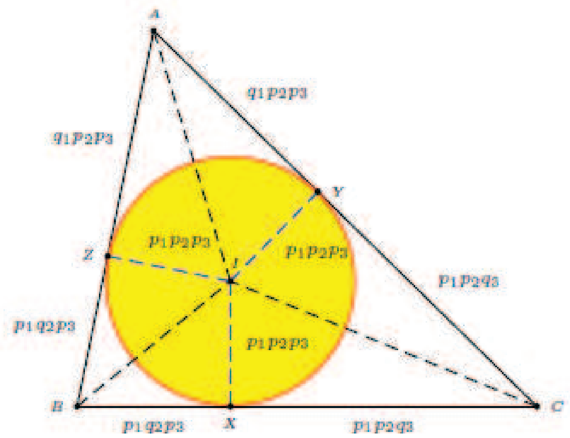
değerleri elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} a' &= p_1\left(p_2q_3 + p_3q_2\right) \\ b' &= p_2\left(p_3q_1 + p_1q_3\right) \\ c' &= p_3\left(p_1q_2 + p_2q_1\right) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla kenarları a', b', c' olan üçgenin Δ' alanı Önerme 3.1.6.'ya göre

$$\begin{aligned} \Delta' &= (p_1p_2p_2)^2\,\Delta \\ &= (p_1p_2p_2)^2 \cdot \frac{1}{t_1t_2t_3} \\ &= (p_1p_2p_2)^2 \cdot \frac{1}{\frac{p_1}{q_1}\,\frac{p_2}{q_2}\,\frac{p_3}{q_3}} \\ &= (p_1p_2p_2)^2 \cdot \frac{q_1q_2q_3}{p_1p_2p_3} \\ &= q_1q_2q_3p_1p_2p_3 \end{aligned}$$

olur. Şu halde kenarları a', b', c' olan üçgen bir Heron üçgenidir



Şekil 3.9. ABC Heron üçgeni [34].

BÖLÜM 4. HERON ÜÇGENİNİN ALAN VE ÇEVRE ÖZELLİKLERİ

Teorem 4.1. Bir Heron üçgeninin alanı 6'nın bir katıdır [34].

İspat: $(a,b,c)=1$ olmak üzere kenarları a,b,c olan Heron üçgeninin alanı $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ olmak üzere

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dır. O halde $s(s-a)(s-b)(s-c)$ bir tamsayının karesi olmalıdır. Ayrıca Teorem 3.1.5.'den dolayı s bir tamsayıdır. Dolayısıyla

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=\Delta^2 \tag{4.1}$$

olur. $(a,b,c)=1$ olduğundan Teorem 3.1.8.'e göre a,b,c kenarlarından ikisi tek biri çift olmalıdır. a,b tek, c çift olsun. O halde

1. s çift olabilir.
2. s tek olabilir.

s çift olursa (4.1)'den dolayı $2\,|\,\Delta^2$ olur. O halde $2\,|\,\Delta$ dır. s tek olursa a tek olduğunda $s-a$ çifttir. Dolayısıyla $2\,|\,\Delta^2$ olur ve buradan $2\,|\,\Delta$ elde edilir. Şimdi $3\,|\,\Delta$ olduğunu gösterelim. Öncelikle aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz. $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ olduğundan $a+b+c=2s$ olur. Bu durumda

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-(a+b+c)=3s-2s=s \tag{4.2}$$

elde edilir. Tersine $3 \nmid \Delta$ olsun. O zaman $\Delta^2 \equiv 1(\bmod 3)$ dir. (4.1)'den dolayı

$$s(s-a)(s-b)(s-c) \equiv 1(\bmod 3)$$

olur. $3 \nmid \Delta$ olduğundan $3 \nmid s, 3 \nmid s-a,\ 3 \nmid s-b,\ 3 \nmid s-c$ olur. Bu durumda $s \equiv 1(\bmod 3)$ veya $s \equiv 2(\bmod 3)$ dir. Her iki durum içinde aşağıdaki ihtimaller mevcuttur.

1. $s-a \equiv 1(\bmod 3)$, $s-b \equiv 1(\bmod 3)$, $s-c \equiv 1(\bmod 3)$ olabilir.
2. $s-a \equiv 1(\bmod 3)$, $s-b \equiv 1(\bmod 3)$, $s-c \equiv 2(\bmod 3)$ olabilir.
3. $s-a \equiv 2(\bmod 3)$, $s-b \equiv 2(\bmod 3)$, $s-c \equiv 1(\bmod 3)$ olabilir.
4. $s-a \equiv 2(\bmod 3)$, $s-b \equiv 2(\bmod 3)$, $s-c \equiv 2(\bmod 3)$ olabilir.

Tüm durumları (4.1) ve (4.2) denklemlerinde kontrol edersek $\Delta^2 \equiv 1(\bmod 3)$ olması ile çelişen sonuçlar elde ederiz. O halde $3|\Delta$ olur. $2|\Delta$ ve $3|\Delta$ olduğundan $6|\Delta$ elde edilir. Şimdi (a,b,c) herhangi bir Heron üçgeni olsun. $d=(a,b,c)$ olmak üzere (a,b,c) üçgeninin alanı Δ' ve $\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}$ üçgeninin alanı Δ olsun. Sonuç 3.1.11.'e göre $\Delta' = d^2\Delta$ dır. O halde $6|\Delta$ olduğundan $6|\Delta'$ olur. Sonuç olarak bir Heron üçgeninin alanı 6 'nın bir katıdır.

Şimdi aynı alana sahip farklı sonsuz sayıda Heron üçgeni çiftinin var olduğunu göstereceğiz.

Önerme 4.2. n bir pozitif tamsayı olmak üzere F_n $n-$inci Fibonacci sayısı olsun. O zaman alanları

$$\Delta = F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3} F_{n+4} F_{n+5}$$

olan aynı alana sahip farklı Heron üçgenleri vardır [15].

İspat: u ve v pozitif tamsayıları için $u \geq 2$ ve $v \geq 1$ olmak üzere kenarları

$$
\begin{aligned}
a &= u^2 + v^2 \\
b &= (uv)^2 + 1 \\
c &= (uv)^2 + u^2 - v^2 - 1
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

olan bir $T(u,v)$ alınsın. Gerçekten $a+c$ ve $a-c$ ifadelerinin (4.3)'deki değerleri yerine yazılırsa

$$a+c = u^2 + v^2 + (uv)^2 + u^2 - v^2 - 1 = (uv)^2 + 2u^2 - 1$$

elde edilir. $u \geq 2$ kabulünden dolayı $(uv)^2 + 2u^2 - 1 > (uv)^2 + 1$ bulunur. Böylece $a+c > b$ olur. Ayrıca $(uv)^2 + 1 > (uv)^2 - 2v^2 > (uv)^2 - 2v^2 - 1$ olur. Bu durumda $c-a = (uv)^2 - 2v^2 - 1$ olduğundan $b > c-a$ elde edilir. Böylece $T(u,v)$ bir üçgen belirtir. Kenarları a,b,c olan üçgenin yarı çevresi

$$s = \frac{u^2 + v^2 + (uv)^2 + 1 + (uv)^2 + u^2 - v^2 - 1}{2} = u^2 + (uv)^2$$

olur. Bu durumda kenarları a,b,c olan üçgenin alanı

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \sqrt{(u^2 + (uv)^2)(u^2 + (uv)^2 - u^2 - v^2)(u^2 + (uv)^2 - (uv)^2 - 1)(u^2 + (uv)^2 - (uv)^2 - u^2 + v^2 + 1)} \\
&= \sqrt{(u^2 + (uv)^2)((uv)^2 - v^2)(u^2 - 1)(v^2 + 1)} \\
&= \sqrt{((u^2 v)^2 - u^2 v^2 + (u^2 v^2)^2 - (uv^2)^2)((uv)^2 + u^2 - v^2 - 1)} \\
&= \sqrt{u^2 v^2 (u^2 - 1 + u^2 v^2 - v^2)((uv)^2 + u^2 - v^2 - 1)} \\
&= uv((uv)^2 + u^2 - v^2 - 1) \\
&= uv\left(u^2 - 1\right)\left(v^2 + 1\right)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

olur.

$$\left(u,v\right)=\begin{cases}\left\{\left(F_{n+1},F_{n+4}\right),\left(F_{n+2},F_{n+3}\right)\right\} & ;n \ \text{çift ise}\\ \left\{\left(F_{n+4},F_{n+1}\right),\left(F_{n+3},F_{n+2}\right)\right\} & ;n \ \text{tek ise}\end{cases}$$

seçimine karşılık gelen $T(u,v)$ üçgenlerinin denk olmadığını ama alanlarının $\Delta = F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}F_{n+5}$ olacak şekilde (u,v) sıralı ikililerinin yukarıdaki gibi farklı şekilde seçilebileceğini göstermemiz ispatı tamamlar. Sadece n 'nin çift olması durumunu kontrol edeceğiz, çünkü tek olduğu durum benzer şekilde yapılabilir. $n \geq 0$ olan tüm sayılar için

$$F_{n+1}^{\ 2} + (-1)^{n+1} = F_nF_{n+2} \tag{4.5}$$

$$F_{n+2}^{\ 2} + (-1)^{n+1} = F_nF_{n+4} \tag{4.6}$$

olduğunu biliyoruz. n çift olmak üzere $(u,v)=(F_{n+1},F_{n+4})$ parametreli T_1 üçgeninin alanı

$$\Delta_1 = F_{n+1}F_{n+4}(F_{n+1}^{\ 2}-1)(F_{n+4}^{\ 2}+1)$$

olarak bulunur. Burada n çift olduğu için $(-1)^{n+1}=-1$ olur ve $F_{n+1}^{\ 2}-1=F_nF_{n+2}$ elde edilir. Ayrıca yine (4.5) denkleminde n yerine $n+3$ yazarsak, $F_{n+4}^{\ 2}-1=F_{n+3}F_{n+5}$ olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned}\Delta &= F_{n+1}F_{n+4}(F_nF_{n+2})(F_{n+3}F_{n+5})\\ &= F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}F_{n+5}\end{aligned}$$

olur. n çift olmak üzere $(u,v)=(F_{n+2},F_{n+3})$ için T_2 üçgeninin alanı

$$\Delta_2 = F_{n+2}F_{n+3}(F_{n+2}^{\ 2}-1)(F_{n+3}^{\ 2}+1)$$

olarak elde edilir. Burada (4.6)'da $(-1)^{n+1}=-1$ olduğu için ${F_{n+2}}^2-1=F_nF_{n+4}$ olur ve n yerine $n+1$ yazarak ${F_{n+3}}^2+1=F_{n+1}F_{n+5}$ olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= F_{n+2}F_{n+3}(F_nF_{n+4})(F_{n+1}F_{n+5})\\ &= F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}F_{n+5}\end{aligned}$$

olmaktadır. T_1 ve T_2 üçgenlerinin denk olmadığını göstermek için (4.3)'de verilen a kenarının üçgenin en kısa kenarı olduğunu belirtmek yeterlidir. Yani

$${F_{n+1}}^2+{F_{n+4}}^2 \neq {F_{n+2}}^2+{F_{n+3}}^2 \tag{4.7}$$

olduğunu ispatlamak gerekir. Her iki üçgende u^2+v^2 olarak belirtilmiş kenarların farklı olduğunu göstermeye çalışıyoruz. (4.7)'nin sol tarafı sağ tarafından daha büyüktür. Yani

$${F_{n+1}}^2+{F_{n+4}}^2 > {F_{n+2}}^2+{F_{n+3}}^2$$

olduğunu göstermeliyiz. Açık olarak

$${F_{n+4}}^2-{F_{n+3}}^2 > {F_{n+2}}^2-{F_{n+1}}^2$$

ifadesini

$$(F_{n+4}-F_{n+3})(F_{n+4}+F_{n+3}) > (F_{n+2}-F_{n+1})(F_{n+2}+F_{n+1}) \tag{4.8}$$

olarak yazılabilir. Fibonacci sayılarını veren tekrarlama bağıntısı ve (4.8)'den

$$F_{n+2}F_{n+5} > F_nF_{n+3}$$

olur. Bu son eşitlik daima doğrudur. Çünkü $n \geq 0$ tamsayısı için $F_{n+2} > F_{n+1}$ ve $F_{n+5} > F_{n+3}$ olmaktadır. O halde T_1 ve T_2 üçgenleri denk olmayan fakat aynı alanlı Heron üçgenleridir.

Örnek 4.3. $n=1$ için $(u_1, v_1) = (F_5, F_2)$ ve $(u_2, v_2) = (F_4, F_3)$ alalım. O halde $(F_5, F_2) = (5,1)$ ve $(F_4, F_3) = (3,2)$ olur. O zaman $(F_5, F_2) = (5,1)$ değerleri için üçgenin kenar uzunlukları

$$
\begin{aligned}
a_1 &= u_1^2 + v_1^2 = 5^2 + 1^2 = 26 \\
b_1 &= (u_1 v_1)^2 + 1 = (5.1)^2 + 1 = 26 \\
c_1 &= (u_1 v_1)^2 + u_1^2 - v_1^2 - 1 = (5.1)^2 + 5^2 - 1^2 - 1 = 25 + 25 - 2 = 48
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $(26, 26, 48)$ üçgeni için alanın

$$\Delta_1 = u_1 v_1 (u_1^2 - 1)(v_1^2 + 1) = 5.(25-1)(1+1) = 240$$

olduğu görülür. Gerçekten de

$$\Delta_1 = F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 = 1.1.2.3.5.8 = 240$$

bulunur. $(u_2, v_2) = (F_4, F_3) = (3,2)$ değerleri için üçgenin kenar uzunlukları

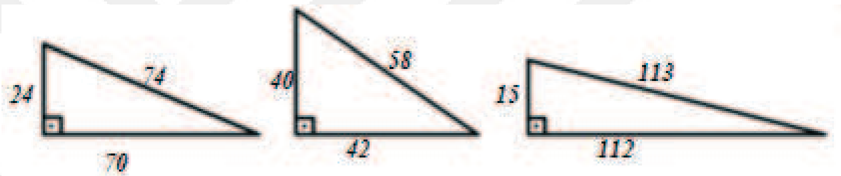
$$
\begin{aligned}
a_2 &= u_2^2 + v_2^2 = 9 + 4 = 13 \\
b_2 &= (u_2 v_2)^2 + 1 = 6^2 + 1 = 37 \\
c_2 &= (u_2 v_2)^2 + u_2^2 - v_2^2 - 1 = 36 + 9 - 4 - 1 = 40
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $(13, 37, 40)$ üçgeni için alan

$$\Delta_2 = u_2 v_2 (u_2^2 - 1)(v_2^2 + 1) = 3.2.(9-1)(4+1) = 240$$

olarak elde edilir. $(26,26,48)$ ve $(13,37,40)$ üçgen çifti alanları aynı olan Heron üçgenleridir.

Örnek 4.4. Şimdi aynı alanlı Heron üçgenlerini ve aynı alan aynı çevreli Heron üçgenlerini inceleyeceğiz. Eşit alan ve çevreye sahip iki farklı üçgen için en küçük durum $(7,7,12)$ ve $(4,11,11)$ üçgenleridir. Her ikisinin de çevresi 26 olup alanı $6\sqrt{13}\ br^2$ bulunur. Fakat alanları tamsayı olmadığı için bu üçgenler Heron üçgeni değildir. $(24,35,53)$ ve $(48,14,50)$ üçgenlerinin yarı çevreleri $s=56$ ve alanları $\Delta=336$ olur. Bu durumda alanı ile çevreleri aynı farklı Heron üçgenleridir. Daha sonra alanları eşit ikiden fazla Heron üçgeni araştırılmıştır. 1945'te C.L.Shedd üç farklı Pisagor üçgeni için en küçük durumu bulmuştur;



Şekil 4.1. Alanları aynı olan üç Pisagor üçgeni

Bu üçgenlerin alanı $840\,br^2$ dir.

Şimdi t parametresine bağlı aynı alan ve aynı yarı çevreli Heron üçgen çifti için genel formülü oluşturalım.

Teorem 4.5. t, $t\geq 1$ olan herhangi bir pozitif tamsayı ve $T(t)$ ile $T_1(t)$ üçgenleri kenarları;

$$\begin{aligned} a &= t^8+5t^6+9t^4+7t^2+1 \\ b &= t^{10}+5t^8+10t^6+10t^4+6t^2+3 \\ c &= t^{10}+6t^8+15t^6+19t^4+11t^2+1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

ve

$$\begin{aligned} a_1 &= t^{10} + 6t^8 + 14t^6 + 16t^4 + 9t^2 + 2 \\ b_1 &= t^6 + 4t^4 + 6t^2 + 3 \\ c_1 &= t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 18t^4 + 9t^2 + 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

olsun. O zaman $T(t)$ ve $T_1(t)$ üçgenlerinin yarı çevreleri ve alanları sırasıyla

$$s = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 12t^2 + 3 \tag{4.11}$$

$$\Delta = t(t^2+1)^4(t^2+2)(t^4+3t^2+3) \tag{4.12}$$

dır [15].

İspat: Üçgenlerin (4.9) ve (4.10)'da verilen kenar uzunlukları yarı çevre ve alan formüllerine yerleştirildiğinde (4.11) ve (4.12) formüllerini elde edildiğini görmek kolaydır. Biz ispatta bu ifadeleri nasıl bulduğumuzu açıklayacağız.

Kenarları a,b,c ve yarı çevresi s olan bir T üçgeni için $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$ olduğunu kabul edelim.

Bu notasyonlarla

$$\begin{aligned} a &= y+z \\ b &= x+z \\ c &= x+y \\ s &= x+y+z \\ \Delta &= \sqrt{xyz\left(x+y+z\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. $(24,35,53)$ ve $(48,14,50)$ üçgen çiftinden Örnek 4.4.'de bahsetmiştik. Yukarıdaki kabulümüze göre

$$x = 32, \qquad y = 21, \qquad z = 3 \tag{4.13}$$

ve

$$x_1 = 8, \qquad y_1 = 42, \qquad z_1 = 6 \tag{4.14}$$

olmaktadır. (4.13) ve (4.14)'deki örneği genellemek için u, v, λ, m, n, k tamsayı değerli parametreler olmak üzere

$$x = \lambda^n, \qquad y = uv, \qquad z = u \tag{4.15}$$

$$x_1 = \lambda^m, \qquad y_1 = \lambda^k uv, \qquad z_1 = \lambda^k u \tag{4.16}$$

değerlerine sahip aynı alanlı ve aynı yarı çevreli Heron üçgeni çiftini inceleyelim. İki üçgen aynı yarı çevre ve aynı alana sahip olduğu için

$$\sqrt{xyz\left(x+y+z\right)} = \sqrt{x_1 y_1 z_1\left(x_1+y_1+z_1\right)}$$

$$xyz\,\cancel{\left(x+y+z\right)} = x_1 y_1 z_1\,\cancel{\left(x_1+y_1+z_1\right)}$$

$$xyz = x_1 y_1 z_1 \tag{4.17}$$

eşitliği elde edilir. O halde (4.15) ve (4.16) değerlerini (4.17)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & xyz = x_1 y_1 z_1 \\ & \Rightarrow \lambda^n uvu = \lambda^m \lambda^k uv \lambda^k u \\ & \Rightarrow \lambda^n = \lambda^{m+2k} \\ & \Rightarrow n = m + 2k \end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda aynı yarı çevreye sahip olduklarından

$$\begin{aligned} & x + y + z = x_1 + y_1 + z_1 \\ & \Rightarrow \lambda^n + uv + u = \lambda^m + \lambda^k uv + \lambda^k u \\ & \Rightarrow \lambda^m(\lambda^{n-m} - 1) = (\lambda^k - 1)(uv + u) \end{aligned} \tag{4.18}$$

olduğu görülür. $n - m = 2k$ değeri (4.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda^m(\lambda^{2k} - 1) = (\lambda^k - 1)(uv + u)$$

elde edilir. $\lambda^{2k}-1=(\lambda^k-1)(\lambda^k+1)$ olduğundan buradan

$$\lambda^m(\lambda^k+1)=uv+u \tag{4.19}$$

olur. Bu durumda

$$u=\lambda^k+1 \text{ ve } v=\lambda^m-1 \tag{4.20}$$

olarak seçebiliriz. Böylece (4.19) formülü bu seçimle sağlanır.

Şimdi bu iki üçgenin alanlarının gerçekten de bir tamsayı olduğunu göstermemiz gerekir. Bu durumda $xyz(x+y+z)$ ifadesi bir tam kare olmalıdır. (4.15)'deki x,y,z değerleri yerine yazılırsa

$$xyz(x+y+z)=\lambda^n u^2 v(\lambda^n+u(v+1))$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.20)'den

$$\begin{aligned} xyz(x+y+z)&=\lambda^n u^2 v(\lambda^n+u(v+1)) \\ &=\lambda^n(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)(\lambda^n+(\lambda^k+1)(\lambda^m-1+1)) \\ &=\lambda^n(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)(\lambda^n+\lambda^m(\lambda^k+1)) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafını λ^m ile çarpıp bölersek

$$xyz(x+y+z)=\lambda^{m+n}(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)\left(\frac{\lambda^n}{\lambda^m}+(\lambda^k+1)\right)$$
$$xyz(x+y+z)=\lambda^{m+n}(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)(\lambda^{n-m}+\lambda^k+1)$$

olur. $n-m=2k$ olduğundan

$$xyz(x+y+z)=\lambda^{2m+2k}(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)(\lambda^{2k}+\lambda^k+1)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafının bir tam kare olması için

$$(\lambda^m - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k) \tag{4.21}$$

ifadesi bir tam kare olacak şekilde λ, k, m değerlerinin seçilmesi gerekir. Eğer $m = 3k$ seçilirse (4.21) formülünden

$$(\lambda^{3k} - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) = (\lambda^k - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1)^2$$

olur. Yukarıdaki denklemde verilen sayılar $k = 1$ ve bazı t pozitif tamsayısı için $\lambda = t^2 + 1$ olduğundan bir tam karedir. Böylece $m = 3$, $n - m = 2k$ olduğundan $n = 5$, $u = \lambda^k + 1 = \lambda + 1 = t^2 + 2$, $v = \lambda^m - 1 = \lambda^3 - 1 = (t^2 + 1)^3 - 1 = t^6 + 3t^4 + 3t^2$ elde edilir. Elde edilen m, n, u, v, λ değerleri (4.15) ve (4.16)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x &= \lambda^n = (t^2 + 1)^5 \\ y &= uv = (t^2 + 2)(t^6 + 3t^4 + 3t^2) \\ z &= u = t^2 + 2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda^m = (t^2 + 1)^3 \\ y_1 &= \lambda^k uv = (t^2 + 1)(t^2 + 2)(t^6 + 3t^4 + 3t^2) \\ z_1 &= \lambda^k u = (t^2 + 1)(t^2 + 2) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde üçgenlerin kenar uzunluklarının

$$\begin{aligned} a &= y + z = (t^2 + 2)(t^6 + 3t^4 + 3t^2) + t^2 + 2 = t^8 + 5t^6 + 9t^4 + 7t^2 + 2 \\ b &= x + z = (t^2 + 1)^5 + t^2 + 2 = t^{10} + 5t^8 + 10t^6 + 10t^4 + 6t^2 + 3 \\ c &= x + y = (t^2 + 1)^5 + (t^2 + 2)(t^6 + 3t^4 + 3t^2) = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 11t^2 + 1 \end{aligned}$$

ve

$$a_1 = y_1 + z_1 = (t^2+1)(t^2+2)(t^6+3t^4+3t^2)+(t^2+1)(t^2+2) = t^{10}+6t^8+14t^6+16t^4+9t^2+2$$
$$b_1 = x_1 + z_1 = (t^2+1)^3+(t^2+1)(t^2+2) = t^6+4t^4+6t^2+3$$
$$c_1 = x_1 + y_1 = (t^2+1)^3+(t^2+1)(t^2+2)(t^6+3t^4+3t^2) = t^{10}+6t^8+15t^6+18t^4+9t^2+1$$

olduğu görülür.

Uyarı: Teorem 4.5.'in ifadesi $\left(T(t),T_1(t)\right)_{t\geq 1}$ çiftleri, farklı t değerleri için benzer olmadığı anlamında aşikar olmayan bir çözümdür. Gerçekten $(24,35,53)$ ve $(48,14,50)$ iki Heron üçgeni aynı alana ve yarı çevreye sahip olduğu için $(24t,35t,53t)$ ve $(48t,14t,50t)$ iki Heron üçgeni herhangi bir pozitif t tamsayısı içinde aynı alan ve aynı yarı çevreye sahip olarak elde edilir. Özellikle $T(t)$ üçgeni için $ebob(a,b,c) = ebob(x,y,z)$ olur. Bu durumda (4.15)'den ve Teorem 4.5.'in ispatında elde edilen x ve u değerlerinden

$$ebob(x,y,z) = ebob(x,u) = ebob(\lambda^n, \lambda^{k+1}) = 1$$

elde edilir. Bu durumda $T(t)$ üçgeni primitiftir. Ancak $T_1(t)$ üçgeninin primitif olamayacağı (4.16)'dan hemen görülür. $m = n-2k$ olduğu için λ^k; x_1, y_1, z_1 sayılarının ortak bölenidir.

Örnek 4.6. $t=1$ için (a,b,c) üçgeni

$$a = 1^8 + 5.1^6 + 9.1^4 + 7.1^2 + 2 = 24$$
$$b = 1^{10} + 5.1^8 + 10.1^6 + 10.1^4 + 6.1^2 + 3 = 35$$
$$c = 1^{10} + 6.1^8 + 15.1^6 + 19.1^4 + 11.1^2 + 1 = 53$$

olarak bulunur. (a_1,b_1,c_1) üçgeni de

$$a_1 = 1^{10} + 6.1^8 + 14.1^6 + 16.1^4 + 9.1^2 + 2 = 48$$
$$b_1 = 1^6 + 4.1^4 + 6.1^2 + 3 = 14$$
$$c_1 = 1^{10} + 6.1^8 + 15.1^6 + 18.1^4 + 9.1^2 + 1 = 50$$

olarak elde edilir. $(24,35,53)$ üçgeninin yarı çevresi ve alanı

$$s = \frac{24+35+53}{2} = \frac{112}{2} = 56$$
$$\Delta = \sqrt{56(56-24)(56-35)(56-53)}$$
$$\Delta = \sqrt{56.32.21.3} = 336$$

olur. $(14,48,50)$ üçgeninin yarı çevresi ve alanı

$$s_1 = \frac{14+48+50}{2} = \frac{112}{2} = 56$$
$$\Delta = \sqrt{56(56-14)(56-48)(56-50)}$$
$$\Delta = \sqrt{56.42.8.6} = 336$$

dır. $(14,48,50)$ ve $(24,35,53)$ üçgenleri aynı yarı çevreye ve aynı alana sahip Heron üçgenleridir. Ayrıca $(24,35,53) = 1$ iken $(14,48,50) = 2$ olur. Dolayısıyla $(24,35,53)$ üçgeni primitif iken, $(14,48,50)$ üçgeni primitif değildir.

Örnekleri farklı t değerleri için de çoğaltabiliriz. $t = 2$ için yarı çevreleri 3875 ve alanları 232500 olan $(750,3131,3869)$ ve $(3750,155,3845)$ biçiminde Heron üçgenleri mevcuttur. Teorem 4.5 aynı alana ve aynı yarı çevreye sahip Heron üçgeni çiftlerinin sonsuz bir ailesini ispatlar. Fakat bu teorem yoluyla bu özellikteki Heron üçgenlerinin tamamını üretemeyiz. Örneğin $\{(51,52,101),(17,87,100)\}$ veya $\{(20,21,29),(17,25,28)\}$ ya da $\{(17,28,39),(12,35,37)\}$ Heron üçgeni çiftleri aynı alanlara ve aynı yarı çevreye sahip olmalarına rağmen bunlar (4.9) ve (4.10) formüllerinden elde edilemezler.

BÖLÜM 5. ARDIŞIK VE ARİTMETİK DİZİ KENARLI HERON ÜÇGENLERİ

5.1. Ardışık Kenarlı Heron Üçgenleri

Şimdi kenarları ardışık tamsayı olan bir üçgeni ele alalım. Bu durumda üçgenin kenarları $b-1$, b, $b+1$ olsun. O zaman yarı çevre

$$s=\frac{3b}{2}$$

olur ve s değeri Heron alan formülünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{s\left(s-(b-1)\right)\left(s-b\right)\left(s-(b+1)\right)} \triangleright \\
&= \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2}-b+1\right)\left(\frac{3b}{2}-b\right)\left(\frac{3b}{2}-b-1\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{b+2}{2}\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b-2}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3b^2}{16}\left(b^2-4\right)} \\
&= \frac{b}{4}\sqrt{3b^2-12}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

olarak elde edilir. Alanın bir tamsayı olması için $3b^2-12$ ifadesinin bir tam kare olması gerekir. O zaman $v^2=3b^2-12=3(b^2-4)$ olacak şekilde bir v tamsayısı vardır. Burada $v=3u$ olarak alalım ($u\in\mathbb{Z}$). O halde

$$\begin{aligned} v^2 &= 3b^2 - 12 \\ (3u)^2 &= 3b^2 - 12 \\ 9u^2 &= 3b^2 - 12 \\ 3u^2 &= b^2 - 4 \end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir. Eğer u tek ise $b^2 = 3u^2 + 4 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ olur. Bu olamaz. O halde u çifttir. Dolayısıyla b de çifttir. O zaman $u = 2y$ ve $b = 2x$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. (5.2)'den

$$\begin{aligned} 3u^2 &= b^2 - 4 \\ 3(2y)^2 &= (2x)^2 - 4 \\ 3.4y^2 &= 4x^2 - 4 \\ 3y^2 &= x^2 - 1 \\ x^2 - 3y^2 &= 1 \end{aligned} \tag{5.3}$$

olduğu görülür. (5.3)'de elde ettiğimiz denklem bir Pell denklemidir. Bu durumda x ve y pozitif çözümlerini elde edilirse $b = 2x$ pozitif bir tamsayı olacaktır. O zaman ilgili üçgenin kenarları

$$\begin{aligned} b - 1 &= 2x - 1 \\ b &= 2x \\ b + 1 &= 2x + 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan $(2x-1, 2x, 2x+1)$ üçgeninin yarı çevresi

$$s = \frac{(b-1) + b + (b+1)}{2} = \frac{(2x-1) + 2x + (2x+1)}{2} = \frac{6x}{2} = 3x \tag{5.4}$$

dir. O halde alanı

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{s\left(s-(b-1)\right)\left(s-b\right)\left(s-(b+1)\right)}\\ &= \sqrt{3x\left(3x-(2x-1)\right)\left(3x-2x\right)\left(3x-(2x+1)\right)}\\ &= \sqrt{3x\left(x+1\right)x\left(x-1\right)}\\ &= \sqrt{3x^2\left(x^2-1\right)}\end{aligned}$$

olur. (5.3)'de $x^2-3y^2=1$ olduğundan $x^2-1=3y^2$ olarak yazılabilir. O halde $(2x-1,2x,2x+1)$ üçgeninin alanı

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{3x^2 3y^2}\\ \Delta &= 3xy\end{aligned} \tag{5.5}$$

olarak elde edilir. (5.3) denkleminde $d=3$ ve $\sqrt{3}$ için sürekli kesir açılımı Tanım 1.2.25.'e göre

$$\left[1;\overline{1,2}\right] = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

olur. Burada $\sqrt{3}$ için yakınsak dizi

$$\frac{2}{1},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{26}{15},\frac{71}{41},\frac{97}{56},\frac{265}{153}\ldots$$

elde edilir. Yukarıdaki dizide baştan başlayıp birer atlayarak

$$(2,1),(7,4),(26,15),(97,56),\ldots$$

ikilileri bulunur ki bunların her biri denklemin çözümlerine karşılık gelir. Bunlar da b 'nin değerlerini verir.

İlk bulunan çözümden hareketle bütün çözümleri üreten bir yol mevcuttur. Teorem 1.2.33.'e göre denklemin temel çözümü (x_1, y_1) olmak üzere tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{3} = (x_1 + y_1\sqrt{3})^n$$

formülü ile elde edilir. Öte yandan $x^2 - 3y^2 = 1$ Pell denkleminin en küçük çözümü $(2,1)$ olduğu kolayca görülebilir. Teorem 1.2.38.'den $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n + \frac{1}{2}\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \\ y_n &= \frac{1}{2\sqrt{d}}\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{d}}\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \end{aligned}$$

çözümlerini yazabiliriz. Ayrıca Teorem 1.2.37.'den $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n x_1 - x_{n-1} \\ y_{n+1} &= 2y_n x_1 - y_{n-1} \end{aligned} \tag{5.6}$$

yazılabilir. Ayrıca Sonuç 1.2.34.'den

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1 x_n + d y_1 y_n = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= x_1 y_n + y_1 x_n = 2y_n + x_n \end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. Son olarak Sonuç 1.2.36.'dan

$$\begin{aligned} x_{n+m} &= x_n x_m + d y_n y_m = x_n x_m + 3y_n y_m \\ y_{n+m} &= x_m y_n + x_n y_m \end{aligned} \tag{5.8}$$

yazabiliriz. Teorem 1.1.37.'den ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n x_1 - x_{n-1} = 4x_n - x_{n-1} \\ y_{n+1} &= 2y_n x_1 - y_{n-1} = 4y_n - y_{n-1} \end{aligned} \tag{5.9}$$

yazmamız mümkündür.

Örnek 5.1.1. Yukarıda elde edilen formüllerle birkaç ardışık kenarlı Heron üçgeni bulalım. $n=1$ için $(x_1, y_1)=(2,1)$ olduğundan $(3,4,5)$ Heron üçgenini elde ederiz. $n=2$ için (5.7)'den

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 + 3y_1 = 2.2 + 3.1 = 7 \\ y_2 &= 2y_1 + x_1 = 2.1 + 2 = 4 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde üçgenin kenarları

$$\begin{aligned} 2x_2 - 1 &= 2.7 - 1 = 13 \\ 2x_2 &= 2.7 = 14 \\ 2x_2 + 1 &= 15 \end{aligned}$$

bulunur. Alan ise

$$\Delta = 3y_2 x_2 = 3.4.7 = 84$$

olur. Bu durumda $(13,14,15)$ üçgenini elde etmiş olduk. $n=3$ için (5.7)'den

$$\begin{aligned} x_3 &= 2x_2 + 3y_2 = 2.7 + 3.4 = 26 \\ y_3 &= 2y_2 + x_2 = 2.4 + 7 = 15 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde üçgenin kenarları $51, 52, 53$ olmaktadır. Alanı ise

$$\Delta = 3y_3 x_3 = 3.26.15 = 1170$$

olarak bulunur. $(51,52,53)$ Heron üçgenini elde ettik.

5.2. Aritmetik Dizi Kenarlı Heron Üçgenleri

Bir önceki tanımlanan üçgenlerden herhangi birisinin bütün kenarları bir k tamsayısı ile çarparsak o zaman aritmetik dizi şeklinde kenarlara sahip Heron üçgenleri elde edilmiş olur yani üçgenin alanı eskisinin k^2 ile çarpılmış halidir (Önerme 3.1.6). Örneğin $(3,4,5)$ Heron üçgeninin kenarlarını 5 ile çarparsak $(15,20,25)$ üçgenini elde etmiş oluruz. Alanı ise yarı çevre $s=30$ olmak üzere

$$\Delta=\sqrt{30(30-15)(30-20)(30-25)}=\sqrt{30.15.10.5}=150$$

elde edilir. Gerçekten $(3,4,5)$ üçgeninin alanı 6 iken $(15,20,25)$ üçgeninin alanı

$$\Delta=5^2.6=150$$

olur. Heron üçgeninin kenarlarını k ile çarparsak yine bir Heron üçgeni elde edeceğimizi ve alanının, ilk üçgenin alanının k^2 katı olduğunu Teorem 3.1.11.'in ispatında göstermiştik. Ancak ardışık kenarlı Heron üçgenlerinin kenarlarını bir k doğal sayısı ile çarparak elde edemeyeceğimiz aritmetik kenarlı Heron üçgenleri de var mıdır? Kenarları $1\le d\le b$ iken $b-d,\ b,\ b+d$ olan bir üçgen alalım. O zaman yarı çevre

$$s=\frac{(b-d)+b+(b+d)}{2}=\frac{3b}{2}$$

olur. s değeri Heron alan formülünde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{s\left(s-\left(b-d\right)\right)\left(s-b\right)\left(s-\left(b+d\right)\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2}-b+d\right)\left(\frac{3b}{2}-b\right)\left(\frac{3b}{2}-b-d\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{b+2d}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b-2d}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3b^2}{16}\left(b+2d\right)\left(b-2d\right)} \\
&= \frac{b}{4}\sqrt{3\left(b^2-4d^2\right)}
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

elde edilir. Bir önceki ardışık kenarlı Heron üçgenlerini incelediğimiz kısımda b nin tek olamayacağını belirtmiştik. Özetlersek eğer b tek olursa o zaman kök içi tek sayı olur. Bu durumda (5.10)'da pay tek sayı olur ve 4 tarafından bölünemez. O halde b çift olmalıdır. $b=2x$ olacak şekilde $x\in\mathbb{Z}$ vardır. b değeri (5.10)'da yerine yazılırsa

$$
\Delta=\frac{b}{4}\sqrt{3\left(b^2-4d^2\right)}=\frac{2x}{4}\sqrt{3\left(4x^2-4d^2\right)}=\frac{2x.2}{4}\sqrt{3\left(x^2-d^2\right)}=x\sqrt{3\left(x^2-d^2\right)}
$$

olduğu görülür. Heron üçgeni olması için $3(x^2-d^2)$ ifadesi bir tam kare olmalıdır. Bu durumda $y\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$
d^2+3y^2=x^2 \tag{5.11}
$$

denklemi elde edilir. Teorem 1.2.39.'dan bu denklemin pozitif tamsayı çözümleri $(m,n)=1,\ m,n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
d &= \left|m^2-3n^2\right| \\
y &= 2mn \\
x &= \left(m^2+3n^2\right)
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

dır.

Örnek 5.2.1. $m=3,\ n=2$ alalım. $(3,2)=1$ dir. (5.12)'den

$$d=\left|m^2-3n^2\right|=\left|9-12\right|=3$$
$$y=2mn=2.3.2=12$$
$$x=\left(m^2+3n^2\right)=9+3.4=21$$

olarak bulunur. $b=2x$ ve $d=3$ olduğundan üçgenin kenarları

$$b-d=2x-d=2.21-3=39$$
$$b=2x=2.21=42$$
$$b+d=2x+d=2.21+3=45$$

olur. O halde yarı çevresi

$$s=\frac{39+42+45}{2}=63$$

elde edilir. s değeri Heron alan formülünde yerine yazılırsa

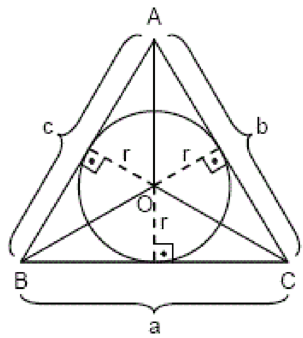
$$\Delta=\sqrt{s\left(s-(b-d)\right)(s-b)\left(s-(b+d)\right)}$$
$$\Delta=\sqrt{63(63-39)(63-42)(63-45)}$$
$$\Delta=\sqrt{63.24.21.18}=756$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 6. HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

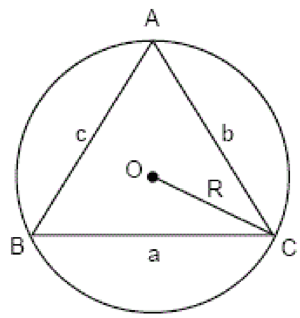
6.1. Heron Üçgenlerinin Bazı Geometrik Özellikleri İle İlgili Teoremler

Tüm Tez kapsamında bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapını r, çevrel çemberinin yarıçapını R, kenarlarına ait dış teğet çemberlerinin yarıçaplarını sırasıyla r_a, r_b, r_c ile göstereceğiz. Bahsettiğimiz geometrik özellikleri şekil üzerinde gösterelim. ABC üçgeninin iç teğet çemberi Şekil 6.1.'de gösterilmektedir.



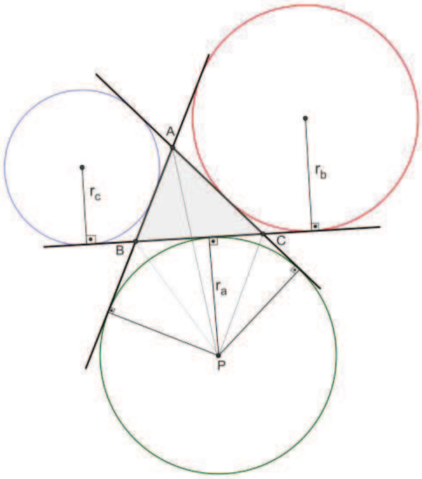
Şekil 6.1. ABC üçgeninin iç teğet çemberi

ABC üçgeninin çevrel çemberi Şekil 6.2.'de gösterilmektedir.



Şekil 6.2. ABC üçgeninin çevrel çemberi

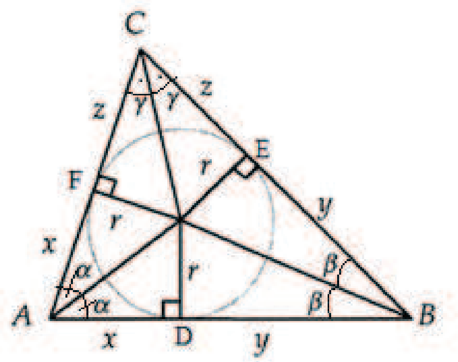
ABC üçgeninin dış teğet çemberleri Şekil 6.3.'de gösterilmektedir.



Şekil 6.3. ABC üçgeninin dış teğet çemberleri

Teorem 6.1.1. k bir tamsayı ve $k \geq 1$ olsun. O zaman $r = k$ olan bir T Heron üçgeni vardır [15].

İspat: Bir (a,b,c) üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı r olsun. (2.9)'a göre ve Şekil 2.3.'den dolayı $x = s-b,\ \ y = s-c,\ \ z = s-a$ olarak alabiliriz. Bu durumda



Şekil 6.4. ABC üçgeninin iç teğet çemberi

$$x + y + z = (s-b) + (s-c) + (s-a) = 3s - (a+b+c) = 3s - 2s = s$$

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}$$

olarak elde edilir. (1.1)'den

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{(x+y+z)xyz}}{x+y+z}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{(x+y+z)xyz}{(x+y+z)^2} \\ &= \frac{xyz}{x+y+z}=k^2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

bulunur. (6.1) denkleminin x, y, z pozitif çözümleri olduğunu göstermek yeterlidir. $z=1$ olarak alalım. O halde x

$$\begin{aligned} xy &= k^2(x+y+1) \\ x(y-k^2) &= k^2(y+1) \\ x &= \frac{k^2(y+1)}{y-k^2} \end{aligned} \tag{6.2}$$

elde edilir. $y=k^2+1$ olsun. Bu durumda (6.2) denklemi $x=k^4+2k^2$ biçiminde olur. Böylece üçgeninin yarı çevresi

$$s=x+y+z=k^4+2k^2+k^2+1+1=k^4+3k^2+2$$

olarak bulunur. Şu halde (a,b,c) üçgeninin kenarları

$$\begin{aligned} a &= s-x=k^4+3k^2+2-k^4-2k^2=k^2+2 \\ b &= s-y=k^4+3k^2+2-k^2-1=k^4+2k^2+1 \\ c &= s-c=k^4+3k^2+2-1=k^4+3k^2+1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda (a,b,c) üçgenini $r=k$ parametresine bağlı bir Heron üçgenidir.

Örnek 6.1.2. $k=3$ için üçgenin kenarları

$$\begin{aligned} a &= k^2+2=3^2+2=11 \\ b &= k^4+2k^2+1=3^4+2.3^2+1=100 \\ c &= k^4+3k^2+1=3^4+3.3^2+1=109 \end{aligned}$$

olarak bulunur (Üçgen eşitsizliğini sağlar). Buradan $(11,100,109)$ üçgeninin yarı çevresi

$$s=\frac{11+100+109}{2}=\frac{220}{2}=110$$

olur. O halde s değeri Heron alan formülünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{110(110-11)(110-100)(110-109)} \\ \Delta &= \sqrt{110.99.10.1}=330 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi r'yi bulalım. Gerçekten $r=k$ olur mu? (1.1)'den

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{330}{110}=3$$

olarak bulunur. Yani $r=k$ olur.

Teorem 6.1.3. Bir (a,b,c) üçgeninin çebrel çemberinin yarıçapı R olsun. $p,\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ olan bir asal sayı olsun. O zaman $R=p$ olan bir T Heron üçgeni mevcuttur [15].

İspat: $p,\ p \equiv 1(\bmod 4)$ olan bir asal sayı olsun. Teorem 1.2.6.'ya göre u ve v pozitif tamsayılar olmak üzere $p = u^2 + v^2$ olarak yazılabilir. O zaman kenarları

$$\begin{aligned} a &= 2(u^2 + v^2) \\ b &= 2\left|u^2 - v^2\right| \\ c &= 4uv \end{aligned} \tag{6.3}$$

olan üçgen Heron üçgenidir. Gerçekten de yarı çevre

$$s = \frac{2u^2 + 2v^2 + 2u^2 - 2v^2 + 4uv}{2} = 2(u^2 + uv)$$

olur. Buradan s değeri Heron alan formülünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{2\left(u^2 + uv\right)\left(2u^2 + 2uv - 2u^2 - 2v^2\right)\left(2u^2 + 2uv - 2u^2 + 2v^2\right)\left(2u^2 + 2uv - 4uv\right)} \\ &= \sqrt{\left(2u^2 + 2uv\right)\left(2uv - 2v^2\right)\left(2uv + 2v^2\right)\left(2u^2 - 2uv\right)} \\ &= \sqrt{16u^2v^2\left(u+v\right)^2\left(u-v\right)^2} \\ &= 4uv\left(u+v\right)\left(u-v\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani kenarları a,b,c olan üçgen bir Heron üçgenidir. Çevrel çemberin yarıçapı

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{2\left(u^2+v^2\right)2\left(u^2-v^2\right)4uv}{4.\left(4uv\left(u+v\right)\left(u-v\right)\right)} = u^2 + v^2 = p$$

olarak elde edilir. $p \equiv 1(\bmod 4)$ olduğundan p bir tek tamsayıdır. $p = u^2 + v^2$ olduğundan u ve v tamsayılarından biri çift diğeri tektir. Ayrıca p asal olduğundan $(u,v) = 1$ olduğunu görmek kolaydır. O halde bu üçgen bir dik üçgendir. Ayrıca çevrel çemberin yarıçapı hipotenüsün yarısı olarak elde edildi. Burada $p \equiv 1 (\bmod 4)$ şeklinde sonsuz sayıda asal sayı bulunduğundan çevrel çemberin yarıçapı $R = p$ olan sonsuz sayıda Heron üçgeninin bulunduğu sonucuna ulaşırız. Eğer k bir p asalının katı biçiminde keyfi bir pozitif tamsayı ise o zaman $R = k$ yarıçaplı bir Heron üçgeni vardır. Bunu görmek için $R = k$ yarıçaplı Heron üçgenini (6.3) ile verilen üçgene benzer bir üçgen olarak düşünmek yeterlidir. O halde çevrel çemberinin yarıçapı bir tamsayı olan sonsuz sayıda Heron üçgeni elde edilebilir.

6.2. Heron Üçgenlerinin Bazı Geometrik Değerlerinin Tamsayı Olma Durumları

6.2.1. Pisagor üçgenlerinin bazı geometrik değerlerinin tamsayı olma durumları

Kenarları a, b, c olan ABC Pisagor üçgenini ele alalım. λ keyfi pozitif tamsayı olsun. $m > n$, $(m, n) = 1$ ve biri tek biri çift sayı olan m, n tamsayıları için üçgenin kenarları Sonuç. 1.2.22.'ye göre b çift olmak üzere

$$a = \lambda(m^2 - n^2) \qquad b = 2\lambda mn \qquad c = \lambda(m^2 + n^2)$$

olarak yazılabilir. Açıktır ki bu Pisagor üçgeninin alanı

$$\Delta = \frac{a.b}{2} = \lambda^2 mn(m^2 - n^2) \tag{6.4}$$

olur. Ayrıca Pisagor üçgeninin yarı çevresi

$$s = \frac{\lambda m^2 - \lambda n^2 + 2\lambda mn + \lambda m^2 + \lambda n^2}{2} = \lambda(m^2 + mn) \tag{6.5}$$

olarak bulunur. O halde iç teğet çemberinin yarıçapı

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\lambda^2 mn\left(m^2 - n^2\right)}{\lambda\left(m^2 + mn\right)} = \lambda n\left(m - n\right) = s - c$$

dir. Dolayısıyla $r = s - c$, s ve c tamsayı ise r de tamsayıdır.
Pisagor üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapını da

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{\lambda\left(m^2 - n^2\right)2\lambda mn\lambda\left(m^2 + n^2\right)}{4\lambda^2 mn\left(m^2 - n^2\right)} = \frac{\lambda\left(m^2 + n^2\right)}{2} = \frac{c}{2} \tag{6.6}$$

olur. Burada yalnızca λ çift ise R bir tamsayıdır.

Yükseklikleri inceleyelim. $h_a = b,\ \ h_b = a$ olduğu açıktır. Yani birer tamsayıdırlar. Pisagor üçgeninin alan formülünden

$$\frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

yazılabilir. Burada h_c 'yi yalnız bırakırsak

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

elde edilir. Tüm yükseklikler yalnızca $c \mid ab$ olduğunda tamsayıdır. Buradan $(m^2 + n^2) \mid 2mn\lambda(m^2 - n^2)$ yazılabilir. $(m, n) = 1$ olduğundan $(m^2 + n^2, 2mn(m^2 - n^2)) = 1$ olur. O halde $(m^2 + n^2) \mid \lambda$ olur ki buradan $\lambda = K(m^2 + n^2)$, $K > 0$ elde edilir.

Özet olarak; bir Pisagor üçgeninde h_a, h_b, h_c, r, R aynı anda tamsayıdır $\Leftrightarrow K = 2d$ ((6.6)'dan dolayı R tamsayı olması için λ çift tamsayı olmalıdır.) olmak üzere

$$a = 2d(m^4 - n^4) \qquad b = 4dmn(m^2 + n^2) \qquad c = 2d(m^2 + n^2)$$

olarak verilir. Dış teğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{\lambda^2 mn\left(m^2 - n^2\right)}{\lambda\left(m^2 + mn\right) - \left(\lambda\left(m^2 - n^2\right)\right)} = \lambda m\left(m - n\right) = s - b$$

$$r_b = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{\lambda^2 mn\left(m^2 - n^2\right)}{\lambda\left(m^2 + mn\right) - 2\lambda mn} = \lambda n\left(m + n\right) = s - a$$

$$r_c = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{\lambda^2 mn\left(m^2 - n^2\right)}{\lambda\left(m^2 + mn\right) - \left(\lambda\left(m^2 + n^2\right)\right)} = \lambda m\left(m + n\right) = s$$

olarak bulunur. $s, \left(s-a\right), \left(s-b\right)$ tamsayı olduğundan Pisagor üçgeninin tüm dış teğet çemberinin yarıçapları tamsayıdır.

6.2.2. Ardışık kenarlı Heron üçgenlerinin bazı geometrik değerlerinin tamsayı olma durumları

Kenarları $b-1$, b, $b+1$ olan Heron üçgeni için (5.5), (5,6) ve (5.8)'den

$$\begin{aligned} b &= 2x \\ s &= 3x \\ \Delta &= 3xy \end{aligned}$$

yazılabilir. x_n ve y_n'ler ise

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= 2y_n + x_n \end{aligned}$$

denklemlerinden elde edilir. Ayrıca $(x_1, y_1) = (2,1)$ olduğunu hatırlayalım. İç teğet çemberinin yarıçapı

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{3xy}{3x} = y \tag{6.7}$$

olur. O halde ardışık tamsayı kenarlı Heron üçgeninin iç teğet çemberini yarıçapı bir tamsayıdır. Çevrel çemberinin yarıçapı

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{(2x-1)2x(2x+1)}{4.3xy} = \frac{4x^2-1}{6y}$$

olarak bulunur. Burada pay bir tek sayı iken payda bir çift sayıdır. Bir çift sayı bir tek sayıyı bölemediğinden ardışık tamsayı kenarlı Heron üçgenlerinin çevrel çemberinin yarıçapı tamsayı değildir. Yükseklikleri bulalım. $2x$ kenarına inen yükseklik h_{2x} olsun. O halde alan

$$\Delta = \frac{h_{2x}.2x}{2}$$

olarak elde edilir. Burada h_{2x} yalnız bırakılırsa

$$h_{2x} = \frac{\Delta}{x} = \frac{3xy}{x} = 3y$$

olarak bulunur. y bir tamsayı olduğu için $2x$ kenarına inen yükseklik bir tamsayıdır. Öte yandan Pisagor üçgeni olmayan ardışık kenarlı bir Heron üçgeninde ($(3,4,5)$ üçgeni hariç) diğer tüm yükseklikler bir tamsayı olamaz. Gerçekten $(2x-1)$ kenarına indirilen yükseklik

$$\Delta = \frac{h_{2x-1}.(2x-1)}{2}$$

ve böylece

$$3xy = \frac{h_{2x-1}.(2x-1)}{2}$$
$$h_{2x-1} = \frac{6xy}{2x-1}$$

olarak bulunur. h_{2x-1} yüksekliğinin tamsayı olması için $2x-1 \mid 6xy$ olmalıdır. $(2x-1,2x)=1$ olduğundan $2x-1 \mid 3y$ olur. (5.3)' den $x^2-3y^2=1$ eşitliğinin her iki tarafını 4 ile çarparsak $4x^2-12y^2=4$ olur. Buradan $(2x)^2-1^2=12y^2+3$ olarak yazabiliriz. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$(2x-1)(2x+1)=3(4y^2+1)=4(3y^2)+3$$

elde edilir. Bu nedenle $2x-1 \mid 3y$ ise $2x-1 \mid 3y^2$ ve buradan $2x-1 \mid 3$ olur. Böylece $x>1$ olduğundan $x=2$ elde edilir. O halde sadece $x=2$ yani $(3,4,5)$ üçgeninde h_{2x-1} yüksekliği bir tamsayıdır. h_{2x+1} yüksekliği için inceleyelim. Benzer şekilde h_{2x+1} yüksekliği için

$$\Delta = \frac{h_{2x+1}.(2x+1)}{2}$$

olduğundan

$$3xy = \frac{h_{2x+1}.(2x+1)}{2}$$

ve buradan

$$h_{2x+1} = \frac{6xy}{2x+1}$$

elde edilir. h_{2x+1} yüksekliğinin tamsayı olması için $2x+1 \mid 6xy$ olmalıdır. $(2x+1,2x)=1$ olduğundan $2x+1 \mid 3y$ olmalıdır. $x^2-3y^2=1$ denkleminin her iki tarafını 4 ile çarpar ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $(2x)^2-1^2=12y^2+3$ elde edilir. Böylece $2x+1 \mid 12y^2+3$ ve $2x+1 \mid 3y$ olduğundan $2x+1 \mid 3$ elde edilir. Bu durumda $x=1$ olmalıdır. O halde h_{2x+1} yüksekliği tüm ardışık tamsayı kenarlı Heron üçgenlerinde tamsayı olamaz. Şimdi dış teğet çemberlerin yarıçaplarını inceleyelim.

$$r_{2x} = \frac{\Delta}{s-2x} = \frac{3xy}{3x-2x} = 3y$$

olarak bulunur. y bir tamsayı olduğundan r_{2x} bir tamsayıdır.

$$r_{2x-1} = \frac{\Delta}{s-(2x-1)} = \frac{3xy}{3x-(2x-1)} = \frac{3xy}{x+1}$$

ve

$$r_{2x+1} = \frac{\Delta}{s-(2x+1)} = \frac{3xy}{3x-(2x+1)} = \frac{3xy}{x-1}$$

elde edilir. Burada $(x, x+1)=1$ olduğundan r_{2x-1} yalnızca $x+1 \mid 3y$ olduğunda tamsayıdır. (5.3)'den

$$\begin{aligned} &x^2-3y^2=1 \\ &x^2-1=3y^2 \\ &(x-1)(x+1)=3y^2=y(3y) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $3y=(x+1)k$ olduğundan

$$3(x-1)=3yk=(x+1)k^2$$

ve

$$x-1=yk$$

elde edilir.

$$k^2 = \frac{3(x-1)}{x+1} = 3 - \frac{6}{x+1}$$

olduğundan $x+1 \mid 6$ elde edilir. O halde $x \in \{1,2,5\}$ olur. Burada sadece $k=1$ iken $x=2$ olur. Böylece r_{2x-1} sadece $(3,4,5)$ Pisagor üçgeni olduğunda tamsayıdır.

6.2.3. İkizkenar Heron üçgenlerinin bazı geometrik değerlerinin tamsayı olma durumları

ABC bir ikizkenar Heron üçgen olsun. $|AB| = |AC| = b, |BC| = a$ olarak alalım. Önerme 3.2.1. ve Önerme 3.2.2.'de ikizkenar üçgenlerin kenarlarının genel formülünü verip a kenarına inen yüksekliğin tamsayı olduğunu göstermiştik. İkizkenar Heron üçgeninin kenarları (3.4) ve (3.5)'den

$$a = 2d(m^2 - n^2) \qquad h = d(2mn) \qquad c = b = d(m^2 + n^2)$$

veya

$$a = 4dmn \qquad h = d(m^2 - n^2) \qquad c = b = d(m^2 + n^2)$$

olarak yazılabilir. Burada $m > n,\ (m,n) = 1$, m ve n sayılarından biri tek diğeri çift olacak şekilde d, m, n tamsayılardır. İncelemelerimizi ikinci duruma göre yapalım. Birinci durum içinde benzer işlemler yapılabilir. Önerme 3.2.2.'nin ispatından yarı çevre ve alan

$$s = d(2mn + m^2 + n^2)$$
$$\Delta = 2dmn(dm^2 - dn^2)$$

olarak bulunur. a kenarına inen yüksekliğin tamsayı olduğunu Önerme 3.2.1.'den göstermiştik. Şimdi b ve c kenarlarına inen yükseklikler aynı olduğundan birini incelememiz yeterlidir. Eğik kenarlardan inen yükseklik cinsinden alanı ($h_b = h_c$)

$$\Delta = \frac{h_b \cdot b}{2} = \frac{h_c \cdot c}{2}$$

olarak yazabiliriz. Burada h_b yüksekliğini çekip b ve Δ değerlerini yerine yazarsak

$$h_b = \frac{2\Delta}{b} = \frac{4d^2mn\left(m^2 - n^2\right)}{d\left(m^2 + n^2\right)}$$

elde ederiz. $(m,n) = 1$ olduğundan $(m^2 + n^2, 4mn(m^2 - n^2)) = 1$ olur. Bu durumda $m^2 + n^2 \mid d$ olmalıdır. O halde $d = k(m^2 + n^2)$, $k \in \mathbb{Z}$ olması durumunda h_b yüksekliği tamsayı olur. Bu durumda

$$a = 4kmn(m^2 + n^2), \qquad b = k(m^2 + n^2)^2$$

veya

$$a = 2kmn(m^4 - n^4), \qquad b = km(m^2 + n^2)^2$$

olduğunda bir ikizkenar üçgenin tüm yükseklikleri tamsayı olur. İç teğet çemberin yarıçapları

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{2dmn\left(dm^2 - dn^2\right)}{d\left(2mn + m^2 + n^2\right)} = \frac{2dmn\left(m - n\right)}{m + n}$$

olur. r bir tamsayı olması için $m + n \mid 2dmn(m - n)$ olmalıdır. $(m,n) = 1$ olduğundan $(m + n, 2mn(m - n)) = 1$ olur. Buradan $m + n \mid d$ olmalıdır. O halde, ikinci durum için

$d = k(m+n)$ ve birinci durum için $m \mid d$ olacağından $d = km$ olmalıdır. Bu nedenle bir ikizkenar Heron üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı kenarlar

$$b = k(m+n)(m^2+n^2), \qquad a = 4mnk(m+n)$$

veya

$$b = km(m^2+n^2), \qquad a = km(m^2-n^2)$$

olduğunda tamsayıdır. İkizkenar Heron üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{ab^2}{4\Delta} = \frac{(4dmn).\left(d\left(m^2+n^2\right)\right)^2}{4.\left(2dmn\left(dm^2-dn^2\right)\right)} = \frac{d\left(m^2+n^2\right)^2}{2\left(m^2-n^2\right)}$$

olur. R 'nin tamsayı olması için $2(m^2-n^2) \mid d(m^2+n^2)^2$ olması gerekir. $(m,n)=1$ olduğundan $(2(m^2-n^2),(m^2+n^2))=1$ ve $2(m^2-n^2) \mid d$ olmalıdır. Benzer şekilde diğer durumda, $4mn \mid d(m^2+n^2)^2$ olması gerektiği ve $(m,n)=1$ iken $(4mn,(m^2+n^2))=1$ olduğundan $4mn \mid d$ olmalıdır. O halde R yalnızca;

$$d = 2k\left(m^2-n^2\right)$$

veya

$$d = 4kmn$$

olması durumunda bir tamsayıdır.

Buraya kadar tüm yüksekliklerin, iç teğet çemberin yarıçapının ve çevrel çemberin yarıçapının tamsayı olduğu ikizkenar Heron üçgenlerini belirleyebiliriz. İki durum mevcuttur. Belirtilen uzunlukların tamsayı olması için kenar uzunlukları

$$a = 4kmn(m^4 - n^4) \qquad\qquad b = 2k(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)^2$$

veya

$$a = 4kmnkm^2n^2 \qquad\qquad b = 2kmn(m^2 + n^2)$$

olması gerekir. Burada $k \geq 1$ keyfi tamsayı, $(m,n) = 1$, $m > n$, m ve n den biri çift diğeri tektir. a kenarına ait dış teğet çemberin yarıçap uzunluğu

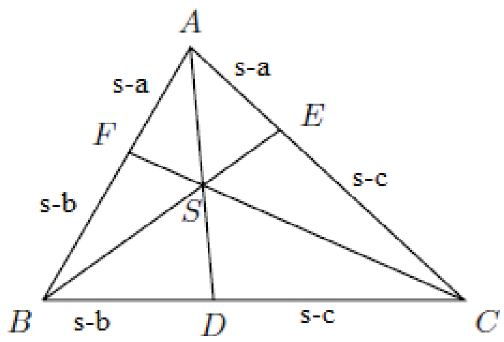
$$r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{2dmn\left(dm^2 - dn^2\right)}{d\left(2mn + m^2 + n^2\right) - 4dmn} = \frac{2dmn\left(m^2 - n^2\right)}{\left(m-n\right)^2}$$

elde edilir. r_a uzunluğunun bir tamsayı olması için; $(m-n)^2 \mid 2dmn(m^2 - n^2)$ olması gerekir. $(m,n) = 1$ olduğu için $(m-n, 2mn(m^2 - n^2)) = 1$ olur. O halde $m-n \mid d$ olmalıdır. Bu durumda $d = k(m-n)$ seçimi ile r_a bir tamsayı olur. Diğer durum içinde benzer şekilde $2n^2 \mid 2dmn(m^2 - n^2)$ olması gerekir. Bu durumda $n \mid d$ olmalıdır. $d = kn$ seçimi ile r_a bir tamsayı olur. Benzer şekilde r_b ve r_c yarıçaplarının tamsayı oldukları durumlar da elde edilebilir.

BÖLÜM 7. (a,b,c) VE (a',b',c') HERON ÜÇGENLERİ

7.1. (a',b',c') Üçgeninin Heron Üçgeni Olması İle İlgili Özellikler

(a,b,c) bir Heron üçgeni olsun. $a' = s-a,\ b' = s-b,\ c' = s-c$ olarak alalım. (Şekil 7.1.)



Şekil 7.1. ABC üçgeni

Bu sayılar türetilmiş üçgen olarak isimlendireceğimiz bir üçgenin kenarları olabilir mi? Hangi durumlarda bir Heron üçgeninde türetilmiş üçgeni yine bir Heron üçgeni olur? Kesinlikle her zaman bu tip üçgenler Heron üçgeni değildir. Örneğin, $(13,14,15)$ üçgenini ele alalım. O zaman alan $\Delta = 84$ olduğundan bu üçgen bir Heron üçgenidir. Yarı çevresi $s = 21$ dir. O halde a',b',c' kenarları

$$\begin{aligned} a' &= 21-13 = 8 \\ b' &= 21-14 = 7 \\ c' &= 21-15 = 6 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan $s' = \frac{21}{2}$ olur. O halde alan $\Delta' = \frac{21}{4}\sqrt{15}$ dir. Bu durumda alan bir tamsayı olmadığından (a', b', c') bir Heron üçgeni değildir. Şimdi hangi koşullarda (a', b', c') üçgeninin bir Heron üçgeni olabileceğini inceleyeceğiz.

Teorem 7.1.1. s, (a, b, c) üçgeninin yarı çevresi olsun. Eğer a, b, c kenar uzunlukları $\frac{s}{2} < a, b, c < s$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (a', b', c') üçlüsü bir üçgen oluşturur [26].

İspat: (a', b', c') üçlüsü bir üçgen oluşturduğunda $a' + b' > c'$ olması gerekir. Buradan a', b', c' değerleri yerine yazıldığında $(s-a)+(s-b) > s-c$ olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &2s > s - c + a + b \\ &s > a + b - c \end{aligned} \tag{7.1}$$

elde edilir. $s = \frac{a+b+c}{2}$ olduğundan $2s = a+b+c$ olur ve buradan $2s - c = a + b$ yazılabilir. $a+b$ değerini (7.1)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &s > 2s - c - c \\ &\Rightarrow s > 2(s-c) \\ &\Rightarrow \frac{s}{2} > s - c \\ &\Rightarrow c > \frac{s}{2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

olarak bulunur. Ayrıca $s - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} > 0$ dır. Yani

$$s > c \tag{7.3}$$

dir. (7.2) ve (7.3)'den $\frac{s}{2} < c < s$ olur. Her iki durumu c nin yerine a ve b'yi kullanarak tekrarladığımızda ispatın tamamlanması için gerekli olan tüm koşullar elde edilecektir. O halde (a,b,c) üçgeninin kenar uzunlukları $\frac{s}{2} < a,b,c < s$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 7.1.2. Eğer (a,b,c) ve (a',b',c') üçlülerinin oluşturduğu her iki üçgen de Heron üçgeni ise, o zaman s bir çift tamsayıdır [26].

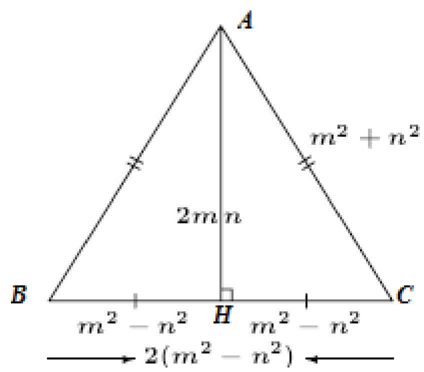
İspat: s', (a',b',c') üçgeninin yarı çevresi olmak üzere

$$\begin{aligned} s' &= \frac{a'+b'+c'}{2} \\ &= \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{2} \\ &= \frac{3s-(a+b+c)}{2} \\ &= \frac{3s-2s}{2} \\ &= \frac{s}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. (a',b',c') bir Heron üçgeni olduğundan Teorem 3.1.5.'e göre s' bir tamsayıdır. O halde s bir çift tamsayı olur.

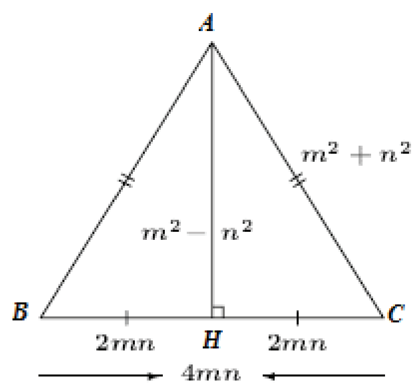
7.2 İkizkenar (a',b',c') Heron Üçgeni

Önerme 3.2.1.'de bir ikizkenar Heron üçgeninin aynı iki primitif Pisagor üçgeninin ortak kenarlarının birleştirilmesiyle oluşturulduğunu göstermiştik. Ayrıca Teorem 1.2.20.'den $m > n,\ (m,n) = 1$ olmak üzere biri çift diğeri tek olan m,n doğal sayıları için bir primitif Pisagor üçgeninin kenarları $m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2$ olarak gösterilir. Primitif Pisagor üçgeninin kenar uzunluklarıdan yararlanarak ikizkenar Heron üçgenini iki yolla genelleştirmiştik.



Şekil 7.2. İkizkenar Heron üçgeni

Şekil 7.1.'de verilen birinci birleşmede $(a,b,c)=(2(m^2-n^2),m^2+n^2,m^2+n^2)$ olmaktadır. Bu durumda $s=2m^2$ olur ve böylece $(a',b',c')=(2n^2,m^2-n^2,m^2-n^2)$ elde edilir. Buradan s ve a' sayılarının çift, b' ve c' sayılarının ise tek olduğu görülür. O halde Teorem 7.1.1. ile uyumlu bir sonuç elde edilir.



Şekil 7.3. İkizkenar Heron üçgeni

Şekil 7.2.'de verilen ikinci birleşme de $(a,b,c)=(4mn,m^2+n^2,m^2+n^2)$ olmaktadır. Bu durumda $s=(m+n)^2$ olur ve böylece $(a',b',c')=((m-n)^2,2mn,2mn)$ elde edilir. Buradan s ve a' sayılarının tek, b' ve c' sayılarının çift olduğu görülür. Bu ise Teorem 7.1.1. ile çelişir. Böylece ikizkenar (a',b',c') üçgeni için genel formül $(m,n)=1,\ \ m>n,\ m+n$ tek olmak üzere $(a',b',c')=(2n^2,m^2-n^2,m^2-n^2)$ dir.

Teorem 7.2.1. $(a,b,c)=(2(m^2-n^2),m^2+n^2,m^2+n^2)$ üçgeni ve ondan türemiş $(a',b',c')=(2n^2,m^2-n^2,m^2-n^2)$ üçgeninin her ikisi de Heron üçgenidir $\Leftrightarrow$ u tek tamsayı, $(u,v)=1$ olmak üzere $m=u^2+2v^2$ ve $n=2uv$ dir [26].

İspat: $\Rightarrow$: s' , (a',b',c') üçgeninin yarı çevresi olmak üzere

$$s'=\frac{2n^2+m^2-n^2+m^2-n^2}{2}=m^2$$

olur. Buradan (a',b',c') üçgeninin alanı

$$\begin{aligned}\Delta' &= \sqrt{m^2(m^2-2n^2)(m^2-m^2+n^2)(m^2-m^2+n^2)}\\ &= mn^2\sqrt{m^2-2n^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Δ' değerinin bir tamsayı olması için $m^2-2n^2=l^2$ olacak şekilde bir l tamsayısının olması gerekir. Buradan

$$m^2=l^2+2n^2$$

olarak yazılabilir. Teorem 1.2.40.'da $p=2$ için $(u,v)=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}m &= (u^2+2v^2)\\ l &= \left|u^2-2v^2\right|\\ n &= (2uv)\end{aligned} \tag{7.4}$$

elde edilir. Eğer u çift ise o zaman $(l,m,n)=2$ olur. Bu ise Teorem 1.2.40.'a göre $(m,l,n)=1$ olması ile çelişir. Bu nedenle u tek tamsayı olmalıdır.

$\Leftarrow$: Tersine u tek $(u,v)=1$ olmak üzere $m=u^2+2v^2$ ve $n=2uv$ olsun. $(a,b,c)=(2(m^2-n^2),m^2+n^2,m^2+n^2)$ üçgenin için yarı çevresi

$$s = \frac{2m^2 - 2n^2 + m^2 + n^2 + m^2 + n^2}{2}$$
$$= 2m^2$$

olur. Bu durumda (a,b,c) üçgeninin alanı

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{2m^2(2m^2 - 2m^2 + 2n^2)(2m^2 - m^2 - n^2)(2m^2 - m^2 - n^2)} \\ &= \sqrt{2m^2 2n^2 (m^2 - n^2)(m^2 - n^2)} \\ &= 2mn(m^2 - n^2)\end{aligned}$$

elde edilir. m,n bir tamsayı olduklarından alan bir tamsayıdır. (a',b',c') üçgeni için yarı çevre ve alanı yukarıda m ve n cinsinden bulmuştuk. Şimdi alanın tamsayı olduğunu m ve n değerlerini yerine koyarak gösterelim. Bu durumda Δ'

$$\begin{aligned}\Delta' &= mn\sqrt{m^2 - 2n^2} \\ &= (u^2 + 2v^2)(2uv)^2 \sqrt{(u^2 + 2v^2)^2 - 2(2uv)^2} \\ &= (u^2 + 2v^2)(2uv)^2 \sqrt{u^4 + 4u^2v^2 + 4v^4 - 8u^2v^2} \\ &= (u^2 + 2v^2)(2uv)^2 \sqrt{u^4 + 4v^4 - 4u^2v^2} \\ &= (u^2 + 2v^2)(2uv)^2 \sqrt{(u^2 - 2v^2)^2} \\ &= (u^2 + 2v^2)(2uv)^2 (u^2 - 2v^2)\end{aligned}$$

olur. u,v tamsayı olduklarından (a',b',c') üçgeni de Heron üçgenidir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 7.2.2. $u = v = 1$ olarak alınırsa (7.4) denkleminde $m = 3, n = 2$ olur. Buradan $(a,b,c) = (10,13,13)$ ve $(a',b',c') = (8,5,5)$ bulunur. $u = 3, v = 1$ iken $m = 11, n = 6$ olur. Bu durumda $(a,b,c) = (170,157,157)$ ve $(a',b',c') = (75,85,85)$ elde edilir.

BÖLÜM 8. HERON ÜÇGENİ AİLESİ

8.1. Gergonne Cevian Doğrusu ve Kenarortay

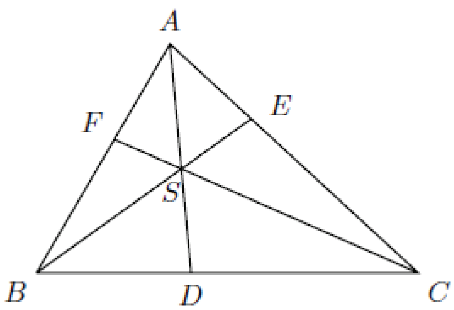
Gergonne Cevian Doğrusu; üçgenin bir köşesinden karşı kenarın iç teğet çembere değdiği noktaya çizilen doğru olarak adlandırılır.

Teorem 8.1.1. S noktasında kesişen ABC üçgeninin Cevian doğruları AD, BE, CF olsun. O zaman

$$\frac{|AS|}{|SD|}=\frac{|AE|}{|EC|}+\frac{|AF|}{|FB|}$$

dir [25].

İspat: $[T]$, herhangi bir T üçgeninin alanını belirtsin. Eğer iki üçgen bir ortak yüksekliğe sahip ise, o zaman onların alanları, karşılık gelen tabanlar ile orantılıdır. Ayrıca $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}=k$ ise $k=\frac{p\pm q}{r\pm s}$ olduğunu hatırlayalım. Böylece Şekil 8.1.'den



Şekil 8.1. Gergonne Cevian doğrusu

$$\frac{|AS|}{|SD|}=\frac{[ABS]}{[SBD]}=\frac{[ASC]}{[SDC]}=\frac{[ABS]+[ASC]}{[SBD]+[SDC]}=\frac{[ABS]}{[SBC]}+\frac{[ASC]}{[SBC]} \tag{8.1}$$

ve

$$\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{[ABE]}{[EBC]}=\frac{[ASE]}{[ESC]}=\frac{[ABE]-[ASE]}{[EBC]-[ESC]}=\frac{[ABS]}{[SBC]} \tag{8.2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{[ASC]}{[SBC]} \tag{8.3}$$

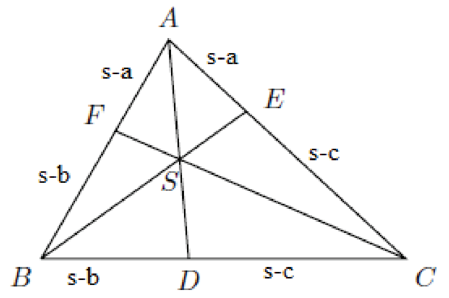
olarak bulunur. (8.1), (8.2) ve (8.3)'den ispat tamamlanır.

Sonuç. 8.1.2. $[AD]$ kenarortay ve $|BE|$ Gergonne Cevian doğrusu olsun. O zaman s, (a,b,c) üçgeninin yarı çevresi olmak üzere

$$\frac{|AS|}{|SD|}=\frac{2(s-a)}{s-c}$$

olur.

İspat: $[AD]$ kenarortay olduğu için $|BD|=|DC|$ dir. Ayrıca E içteğet çemberin $|AC|$ kenarına teğet olduğu noktadır.



Şekil 8.2. Gergonne Cevian doğrusu ve kenarortay

(2.8)'den dolayı $AE = s-a,\ EC = s-c$ dir. Şimdi Ceva Teoreminden

$$\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}=1$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{s-a}{s-b}$$

elde edilir. $|BD|=|DC|$ olduğundan

$$\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{s-a}{s-c}$$

yazmamız mümkündür. Teorem 8.1.1.'den

$$\frac{|AS|}{|SD|}=\frac{|AE|}{|EC|}+\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{s-a}{s-c}+\frac{s-a}{s-c}=\frac{2(s-a)}{s-c}$$

olarak bulunur. Heron üçgeninde a,b,c ve s doğal sayılar olduğundan

$$\frac{|AS|}{|SD|}=\frac{2(s-a)}{s-c}=\lambda$$

bir rasyonel orandır. Bu oran Δ tamsayı olmasa bile doğru olacaktır. Ayrıca $a \geq c$ ise $0<\lambda\leq 2$ olur. Böylece her bir rasyonel λ sabiti için sonsuz sayıda Heron üçgenleri ailesi oluşturacağız.

8.2. Heron Üçgenlerinin λ ailesi

Teorem 8.2.1 λ, $0<\lambda\leq 2$ olacak şekilde bir rasyonel sayı olsun. Heron üçgeninin λ-ailesi, m ve n aralarında asal doğal sayılar ve $m>n\sqrt{2\lambda}$ olmak üzere

$$(a,b,c)=(2(m^2+\lambda^2n^2),(2+\lambda)(m^2-2\lambda n^2),\lambda(m^2+4n^2)$$

olarak verilir [25].

İspat: s, (a,b,c) üçgeninin yarı çevresi olmak üzere $\dfrac{2(s-a)}{s-c}=\lambda$ olduğunu biliyoruz. Yarı çevresi

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

olduğundan

$$\frac{2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-a\right)}{\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-c\right)}=\lambda$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2(b+c-a)=\lambda(a+b-c)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} 2b+2c-2a&=\lambda a+\lambda b-\lambda c\\ b(2-\lambda)&=(2+\lambda)(a-c)\\ b&=\frac{2+\lambda}{2-\lambda}(a-c) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $a-c=\dfrac{b}{2+\lambda}(2-\lambda)$ olur. O halde $p=\dfrac{b}{2+\lambda}$ olsun. Eğer $\lambda \neq 2$ ise $a-c=(2-\lambda)p$ olur. Buradan $b=(2+\lambda)p$ bulunur. Eğer $\lambda=2$ ise o zaman $b=4p$ olarak tanımlayabiliriz. O halde

$$a=(2-\lambda)p+c$$
$$b=(2+\lambda)p$$
$$c=c$$

olur. Bu durumda yarı çevre

$$s=c+2p$$

dir. Bulduğumuz kenar uzunlukları ve yarı çevre değerini alıp Heron alan formülünde yerine koyarsak

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &= \sqrt{(c+2p)\lambda p(c-\lambda p)2p}\\ &= \sqrt{2\lambda p^2(c+2p)(c-\lambda p)}\end{aligned} \tag{8.4}$$

elde edilir. (a,b,c) Heron üçgeni olduğundan

$$(c+2p)(c-\lambda p)=2\lambda q^2$$

olmalıdır. 2λ değerinin bir rasyonel kare olması veya olmaması durumlarını ayırmaya gerek yoktur. $\dfrac{m}{n}$ rasyonel sayısı yardımı ile

$$c+2p=\frac{m}{n}q \tag{8.5}$$

ve

$$c-\lambda q=\frac{n}{m}2\lambda q \tag{8.6}$$

yazılabilir. (8.5) ve (8.6) denklemlerini taraf tarafa toplarsak p ve c için çözümler,

$$\begin{aligned} p&=\frac{m^2-2\lambda n^2}{(2+\lambda)mn}\cdot q \\ c&=\frac{\lambda(m^2+4n^2)}{(2+\lambda)mn}\cdot q \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{m^2-2\lambda n^2}=\frac{q}{(2+\lambda)mn}=\frac{c}{\lambda(m^2+4n^2)}$$

elde edilir. p,q,c,λ,m,n pozitif sayılar olduğu için $m>n\sqrt{2\lambda}$ sağlanır. Orantılılık sabitini göz ardı edersek

$$\begin{aligned} p&=m^2-2\lambda n^2 \\ q&=(2+\lambda)mn \\ c&=\lambda(m^2+4n^2) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (8.4)'de gösterilen alan formülünde p ve c değerleri yerlerine yazıldığında Heron üçgenleri formülüze edilmiş olur ve sınıflandırma yapabiliriz. Bu durumda alan

$$\begin{aligned} \Delta&=\sqrt{2\lambda p^2(c+2p)(c-\lambda p)} \\ &=\sqrt{2\lambda(m^2-2\lambda n^2)^2(\lambda m^2+4\lambda n^2+2m^2-4\lambda n^2)(\lambda m^2+4\lambda n^2-\lambda m^2+2\lambda^2 n^2)} \\ &=\sqrt{2\lambda(m^2-2\lambda n^2)^2 m^2(\lambda+2)2n^2\lambda(2+\lambda)} \\ &=\sqrt{4\lambda^2(m^2-2\lambda n^2)^2 m^2 n^2(\lambda+2)^2} \\ &=2\lambda(\lambda+2)mn(m^2-2\lambda n^2) \end{aligned}$$

olur. O halde kenar uzunluklar

$$a = 2(m^2 + \lambda^2 n^2)$$
$$b = (2+\lambda)(m^2 - 2\lambda n^2)$$
$$c = \lambda(m^2 + 4n^2)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Örnek 8.2.2. $\lambda = 1,\ m = 4,\ n = 1$ olsun. $(a,b,c) = (34,42,20)$ olur ve buradan alan $\Delta = 336$ elde edilir. $(a,b,c) = 2$ olduğundan kenarları 2'ye böldüğümüzde $(a,b,c) = (17,21,10)$ bulunur ve alanı $\Delta = 84$ dür.

Örnek 8.2.3. $\lambda = \frac{3}{2},\ m = 5,\ n = 2$ olsun. O halde kenar uzunluklar $(a,b,c) = (68, \frac{91}{2}, \frac{123}{2})$ olarak bulunur ve alan $\Delta = 1365$ dir. Burada b ve c kenarları tamsayı değildir. Bu durumda 2 ile genişletildiğinde $(a,b,c) = (136,91,123)$ olur ve alan $\Delta = 5460$ elde edilir. Heron üçgenlerinin durumuna göre sadeleştirdiğinde veya genişletildiğinde alanları yine tamsayı olacaktır. (Burada $a \geq c$ korunmalıdır.)

Örnek 8.2.4. $\lambda = 1,\ m = 4,\ n = 1$ için $(17,21,10)$ üçgeni $\lambda = \frac{3}{7},\ m = 12,\ n = 7$ veya $\lambda = \frac{6}{7},\ m = 12,\ n = 7$ olduğu zaman da elde edilebilir.

Sonuç 8.2.5. Teorem 8.2.1.'de $\lambda = \frac{2v}{u}$, $m = 2$, $n = 1$ için

$$(a,b,c) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2uv)$$

bir Pisagor üçgeni olur [25].

Örneğin; $v=2,\ u=1$ için $(5,3,4)$, $v=4,\ u=3$ için $(25,7,24)$ üçgenleri elde edilir.

Sonuç. 8.2.6. Teorem 8.2.1. Heron üçgenleri kümesinin tamamını tanımlar. Çünkü, Gergonne cevian doğrusu BE bir tek noktada AD kenar ortayı ile kesişir. Bu nedenle tüm Heron üçgenleri için $0<\lambda\leq 2$ dir. Varsayalım λ' yı bir rasyonel sayı olarak sabitleyelim. O zaman Teorem 8.2.1 aynı oranda BE ve AD kesişimine sahip bir üye tüm Heron üçgenlerinin λ ailesini verir. $0<\lambda\leq 2$ rasyonel sayılar üzerinde λ değişir [25].

Sonuç. 8.2.7. (Hoppe'nin Problemi) Teorem 8.2.1.'de $\lambda=\dfrac{m^2}{6n^2}$ için aritmetik dizi kenarlarına sahip $(a,b,c)=(m^2+9n^2,2(m^2+3n^3),3(m^2+n^2))$ Heron üçgenlerini sağlar [25].

KAYNAKLAR

[1] Aassila, M. 2001. Some results on Heron triangle. Elem. Math., 56: 143-146.

[2] Abdelalim, S., Dyani, H. 2014. The solution of the diophantine equation $x^2 + 3y^2 = z^2$. International Journal of Algebra, 8(15):729-732.

[3] Ayres, F. 1954. Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry. 1st edition, New York: Schoum Publishing.

[4] Bell, A. 2006. Hansen's right triangle theorem, its converse and a generalization. Forum Geometricorum, 6: 335-342.

[5] Chrıstensen, L. 2010. Pell's equation and nearly equilateral triangles. The University of New Mexico, Master Thesis.

[6] Çallıalp, F. 2011. Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[7] Darıyeri, M. 2006. Heron üçgenlerinin bazı özellikleri üzerine bir araştırma. Selçuk Üniversitesi, İlköğretim Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi.

[8] Dickson, L. E. 1971. History of the Theory of Numbers. 5th edition, New York: AMS Chelsea Publishing.

[9] Eşen, T. 2010. Açıları ve kenarları aritmetik, geometrik ve harmonik dizi oluşturan üçgenler ile $x^2 + 3y^2 = z^2$ diophantine denklemi arasındaki ilişki üzerine bir araştırma. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi.

[10] Gurbanlıyev, A. 2003. Heron üçgenleri üzerine. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

[11] Gustauson, R. D., Frisk, P. D. 1991. Elementary Geometry. Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[12] Güney, M. 2012. Pell Denklemleri. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

[13] Hamza, A. 2009. Heron üçgenleri üretme metodları. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi.

[14] Kızıl, D. G. 2007. Paralelkenar ve Heron üçgenleri. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

[15] Kramer, A. V., Luca, F. 2001. Some remarks on Heron triangle. Acta. Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 27: 25-38.

[16] Krizova, Mgr. D. 2003. Heron Triangles and Heron's Formula. The Mathematics Education into the 21st Century Project, Proceeding of the International Conference, The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education, Brno, Czech Republic.

[17] Macdougall, J.A. 2003. Heron triangle with sides in arithmetic progression. Jour. Rec. Math., 31(3): 189-196.

[18] Mollin, R. A. 1998. Fundamental Number Theory with Applications. CRC Press, Boca Raton, New York-London-Tokyo.

[19] Nelsen, R. B. 2001. Heron's formula via proof's without words. The College Mathematics Journal, 32(4): 290-292.

[20] Özdemir, H. B. 2015. Bazı özel diyofant denklemleri ve çözümleri. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

[21] Pekasil, M. 2006. Sürekli kesirler ve Pell denklemleri. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

[22] Redmond, D. 1996. Number Theory: An Introduction. Merkel Dekker, Inc.

[23] Rosen, K. H. 1993. Elemantary Number Theory and İts Applications. Third Edition. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

[24] Sastry, K. R. S. 2000. Geometric and arithmetic triangles. Mathematics and Computer Education, 34: 259–264.

[25] Sastry, K. R. S. 2001. Heron triangles: A Gergonne – Cevian - median perspective. Forum Geometricorum, 1: 17-24.

[26] Sastry, K. R. S. 2002. If (a,b,c) is Heron, can $(s-a,s-b,s-c)$ also be Heron?. Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem, 28(1): 23-27.

[27] Sierpinski, W. 1962. Pythagorean Triangle. Graduate School of Science, Yeshiva University.

[28] Sierpinski, W. 1964. Elemantary Theory of Numbers. 2nd Edition. Warsaw, Poland: Original Education.

[29] Sierpinski, W. 1988. Elemantry Theory of Numbers: Second English Edition. Elsevier.

[30] Stark, H. 1979. An Introduction to Number Theory. M.I.T.Press.

[31] Şahin, R. ve Arkadaşları. 1997. Geometri 1-2. 1.Basım, İstanbul: Sürat Yayınları.

[32] Şenay, H. 1989. Sayılar Teorisine Giriş. Selçuk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Konya

[33] Yiu, P. 1998. Construction of indecomposable Heronian triangles. Journal of Mathematics, 28(3):1189-1202.

[34] Yiu, P. 2007. Number Theory 2. Florida Atlantic University, Department of Mathematics, 221-227.

[35] Yiu. P. 2008. Heron Triangles Which Cannot Be Decomposed into Two Integers Right Triangles. 41st Meeting of Florida Section of Mathematical Association of America, Flordia Southern College, Lakeland, Florida.

[36] Zelator, K. 2008. Heron isosceles triangles with integral external radii $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$. Arxiv: Math. 08. 04. 4640.

[37] http://northshore.k12.ny.us/schools/High%20School/gerver/ALTERNATIVEemail.pdf , Erişim Tarihi: 11.04.2016.

[38] www.mustafayagci.com. 2015. Heron formülü ve üçgenleri, Geometri notları.

[39] http://everything.explained.today/Integer_triangle/#Ref-8, Erişim Tarihi: 14.04.2016.

[40] http://gutenberg.us/articles/integer_triangle#Pythagorean_triangles_with_integer_altitude_from_the_hypotenuse, Erişim Tarihi: 14.04.2016.

[41] http://www.mathalino.com/reviewer/derivation-of-formulas/derivation-of-formula-for-radius-of-circumcircle , Erişim Tarihi: 14.04.2016.

[42] https://in.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090627001829AAVBhqI, Erişim Tarihi: 11.04.2016.

[43] https://tr.m.wikipedia.org/wiki/Ceva_teoremi , Erişim Tarihi: 21.04.2016.

[44] https://tr.wikipedia.org/wiki/Çevrel_çember, Erişim Tarihi: 02.08.2016.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice Kübra Yiğit, 14.07.1990'da Elazığ'da doğdu. İlk ve orta eğitiminin bir kısmını Elazığ'da, orta eğitiminin devamı ile lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2008 yılında Mithat Paşa Şükrü Ayna YDA Lisesi'nden mezun oldu. 2009 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2013 yılında bitirdi. 2014 yılında Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde Formasyon eğitimi aldı.