T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan DURAN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAMAN**

Temmuz 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan DURAN

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

Bu tez 28 / 07 /2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAMAN Jüri Başkanı	Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL Üye	Doç. Dr. Emrah Evren KARA Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ramazan DURAN

28 / 07 /2016

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAMAN'a ve tez çalışmamda yardımlarını esirgemeyen Beykent Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Abdullah YILDIZ'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, maddi ve manevi desteklerini çocuklarından esirgemeyen babam Durmuş DURAN'a ve annem Salice DURAN'a, yüksek eğitimim boyunca yardımlarını ve desteklerini benden esirgemeyen kardeşlerim Salih DURAN'a ve Enes DURAN'a şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$[a\ ,\ b]$: a, b kapalı aralığı

$[\![a/b]\!]$: Tam değer fonksiyon

x_k : Chebyshev polinomlarının kökü

$\vec{x}$: Chebyshev polinomlarının ekstremumu

$F_T^m(x)$: $f(x)$ fonksiyonun birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$F_U^m(x)$: $f(x)$ fonksiyonun ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$F_V^m(x)$: $f(x)$ fonksiyonun üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$F_W^m(x)$: $f(x)$ fonksiyonun dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$P_T^m(x)$: Adi lineer diferansiyel denklemlerin birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$P_U^m(x)$: Adi lineer diferansiyel denklemlerin ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$P_V^m(x)$: Adi lineer diferansiyel denklemlerin üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$P_W^m(x)$: Adi lineer diferansiyel denklemlerin dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu

$T_n(x)$: n. mertebeden birinci çeşit Chebyshev polinomu

$T_n^{(p)}(x)$: n. mertebeden birinci çeşit Chebyshev polinomunun p. türevi

$T_n^*(x)$: n. mertebeden birinci çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomu

$T_n^{\circ}(x)$: n. mertebeden birinci çeşit monik Chebyshev polinomu

$U_n(x)$: n. mertebeden ikinci çeşit Chebyshev polinomu

$U_n^{(p)}(x)$: n. mertebeden ikinci çeşit Chebyshev polinomunun p. türevi

$U_n^{*}(x)$: n. mertebeden ikinci çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomu

$U_n^{\circ}(x)$: n. mertebeden ikinci çeşit monik Chebyshev polinomu

$V_n(x)$: n. mertebeden üçüncü çeşit Chebyshev polinomu

$V_n^{(p)}(x)$: n. mertebeden üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun p. türevi

$V_n^{*}(x)$: n. mertebeden üçüncü çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomu

$V_n^{\circ}(x)$: n. mertebeden üçüncü çeşit monik Chebyshev polinomu

$W_n(x)$: n. mertebeden dördüncü çeşit Chebyshev polinomu

$W_n^{(p)}(x)$: n. mertebeden dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun p. türevi

$W_n^{*}(x)$: n. mertebeden dördüncü çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomu

$W_n^{\circ}(x)$: n. mertebeden dördüncü çeşit monik Chebyshev polinomu

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Chebyshev polinomları, Chebyshev polinomlarının türevi, sabit ve değişken katsayılı homojen olmayan lineer adi diferansiyel denklem, Chebyshev yaklaşım metodu

Bu çalışmada, sınır ve başlangıç koşulları olmayan sabit veya değişken katsayılı ve homojen olmayan lineer adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri; birinci çeşit, ikinci çeşit, üçüncü çeşit ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden Chebyshev yaklaşım yöntemleriyle verilmiştir. Bu yöntemlerde, $\phi_i\left(x\right)\left(i \geq 0\right)$ birinci çeşit, ikinci çeşit, üçüncü çeşit ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomlarını göstermek üzere, $y(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i \phi_i\left(x\right)$ Chebyshev seri açılımı kullanılmıştır. Sabit katsayılı ve değişken katsayılı, homojen olmayan lineer adi diferansiyel denklemlerin Chebyshev yaklaşım polinomları Chebyshev polinomlarının türevleri ve $x^n\left(n \geq 0\right)$'lerin Chebyshev polinomları cinsinden gösterimleriyle elde edilmektedir. Ayrıca birinci ve ikinci mertebeden homojen olmayan sabit katsayılı lineer adi diferansiyel denklemlerin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden yaklaşım polinomlarının katsayılarını bulmak için bağıntılar verilmiştir.

THE SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE HELP OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS

SUMMARY

Keywords: Chebyshev polynomials, derivatives of Chebyshev polynomials, nonhomogenous linear ordinary differential equations with constant coefficient and variable coefficient, Chebyshev approximation method

In this study, the numerical solutions of nonhomogenous linear ordinary differential equations with constant coefficient or variable coefficient without initial and boundary conditions are given with Chebyshev approximation methods in terms of Chebyshev polynomials of the first, second, third and fourth kinds. Chebyshev series expansion $y(x)=\sum_{i=0}^{n} q_i \phi_i\left(x\right)$, $\phi_i\left(x\right)\left(i\geq 0\right)$ is equal to Chebyshev polynomials of the first kind or second kind or third kind or fourth kind, is used in these methods. The solutions of nonhomogenous linear ordinary differential equations with constant coefficient and variable coefficient are obtained from derivatives of Chebyshev polynomials and representation in terms of Chebyshev polynomials of $x^n\left(n\geq 0\right)$. Furthermore, the equations are given to finding coefficients of approximation polynomial of nonhomogenous the first and second order linear ordinary differential equations with constant coefficients.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Adi türevli pek çok diferansiyel denklemin analitik çözüm yöntemi olmasına karşılık, bir çoğunun da bilinen yöntemler yardımıyla çözümü mümkün olamamaktadır. Hatta değişkenlerine ayrılabilen tipten olsalar bile bazı diferansiyel denklemlerde, elemanter yöntemler yardımıyla integral hesabı yapmak çok zor olabilmektedir. Bu nedenle, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleriyle ilgili olarak pek çok araştırma yapılmış ve analitik çözümlere yakın sonuçlar veren çok sayıda yöntem ortaya konmuştur[1]. Bu yöntemlerden bazılarına örnek olarak Euler yöntemi, Heun yöntemi, Taylor seri açılımı ve Runge-Kutta yöntemi verilebilir. Fonksiyon yaklaşımlarının en basiti verilen fonksiyonun Taylor seri açılımı yöntemi ile yaklaşık çözümünü hesaplamaktır. Taylor seri açılımında; serinin istenen sonuçtan uzaklaşması, hata dağılımının düzensiz olması, maximum hatanın aralığın uçlarında toplanması, yakınsama için fazla terime gereksinim duyulması ve büyük x değerleri için başlangıç koşullarını sağlamanın oldukça zor olması gibi bazı dezavantajları vardır. Bu nedenlerden dolayı Taylor seri açılımı ve diğer metodların sahip olduğu dezavantajlardan sıyrılabilen ve analitik çözümlere oldukça yakın sonuçlar veren daha iyi metodlara ihtiyaç doğmuştur. Bu metodlardan birisi de polinomlar ailesi içinde ortogonal olmaları, rekürsif ilişkiler elde edilebilmesi ve bilgisayar programlamalarına yatkın olmaları sebebiyle yaklaşım polinomu olarak kullanılmaya çok uygun olan Chebyshev polinomlarıdır. Chebyshev polinomlarını diğer yöntemlerden üstün kılan bir özelliği ise maksimum hatayı minimum yapma eğiliminde olmalarıdır. Böylece yaklaşım polinomunun verilen aralıkta maksimum hatasının aynı dereceden diğer yaklaşım polinomlarının tümünden daha küçük olması sağlanır.

Chebyshev polinomları 1854 yılında yayınlanmış “*Theory of mechanisms known under the name parallelograms* “[2] adlı makalesiyle sayılar teorisi, olasılık teorisi, istatistik ve mekanik alanlarındaki çalışmalarıyla bilinen Rus matematikçi Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894) tarafından tanımlanmıştır. Sayısal analizin babası olarak bilinen Macar matematikçi Cornelius Lanczos (1893-1974) tarafından 1938 yılındaki [3] çalışmasıyla Chebyshev polinomları sayısal analize ilk kez uygulanmaya başlanmıştır. Lanczos'un bu çalışmasından yararlanan C.W. Clenshaw 1956 yılında adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde Chebyshev polinomlarını ve serilerini kullanmıştır. Clenshaw'un bu çalışmasından kısa bir süre sonra Lanczos 1956 yılında adi diferansiyel denklemlrin çözümü için seçilmiş noktalar adlı bir yöntem geliştirmiştir. Clenshaw 1957 yılında lineer adi diferansiyel denklemlerin başlangıç-sınır koşulları altında çözümü için reküransla çözüm [4] adlı bir Chebyshev metodu verilmiştir. Lanczos' un ve Clenshaw' ın Chebyshev polinomlarının uygulamaları üzerine yapmış olduğu çalışmalar birçok matematikçi tarafından polinomlar üzerinde yaklaşım teorisi oluşturma, fark ve integral denklemlerinin yaklaşık çözümleri, polinom enterpolasyonu, adi türevli ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümleri ve integral ve integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmıştır.

Dört çeşit Chebyshev polinomu vardır. Bunlar birinci çeşit Chebyshev polinomu, ikinci çeşit Chebyshev polinomu, üçüncü çeşit Chebyshev polinomu ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomu olarak adlandırılır. Bu Chebyshev polinomları sırasıyla $T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ ile temsil edilmektedir. J. S. Mason ve D. C. Handscomb'un "Chebyshev Polinomları" [5] adlı kitabında; üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomlarının literatürde ilk defa Walter Gautschi tarafından 1992 yılında yayınlanan "On mean convergence of extended Lagrange interpolation" [6] adlı makalesinde görüldüğü ve Chebyshev polinomlarının hiyerarşisi hakkında "$T_n(x)$'in çok yönlü ve önemli olduğunu söyleyebiliriz. Bununla birlikte $T_n(x)$ basit bir eşitlikle gösterilir. Diğer polinomlar için çözümler önemsiz sayılabilecek komplikasyonları içerebilir. Ancak, Chebyshev polinomlarının dört çeşidinin kendi rolleri vardır. Örneğin, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ +1 veya -1 uç noktasında tekil noktaların elde edilmesi durumunda yararlı olabilirken $U_n(x)$ sayısal integrasyonda yararlıdır." bilgileri verilmektedir.

BÖLÜM 2. CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Chebyshev diferansiyel denklemi, Chebyshev polinomları ve Chebyshev polinomlarının reküramns bağıntıları, ortogonallik özellikleri, kökleri, ekstremum noktaları, türevleri gibi bazı özellikleri verilmektedir. Chebyshev polinomları ve Chebyshev polinomlarının özellikleri konusu hakkında geniş bilgiye L. Fox ve I. B. Parker'ın "Nümerik Analizde Chebyshev Polinomları"[7], Martin Avery Snyder'ın "Nümerik Yaklaşımda Chebyshev Metotları"[8], Theodore J. Rivlin'in "Chebsyhev Polinomları"[9] ve J. C. Mason ve D. C. Handscomb'un "Chebyshev Polinomları"[5] adlı kitaplarından ulaşılabilir.

2.1. Chebyshev Diferansiyel Denklemi

$-1 \le x \le 1$ ve $n \ge 0$ olmak üzere

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \tag{2.1}$$

eşitliğiyle tanımlanan diferansiyel denkleme Chebyshev diferansiyel denklemi denir. (2.1) diferansiyel denkleminde $x=\cos t$ dönüşümü yapılırsa

$$\left(1-\cos^2 t\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}\right)-\cos t\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}+n^2y=0$$

$$\sin^2 t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\right)^2+\frac{dy}{dt}\left(-\frac{\cos t}{\left(\sqrt{1-\cos^2 t}\right)^3}\right)\right)-\cos t\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\right)+n^2y=0$$

$$\sin^2 t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)^2+\frac{dy}{dt}\left(-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\right)\right)-\cos t\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)+n^2y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}+n^2y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0 \tag{2.2}$$

ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir. (2.2) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y=A\cos(nt)+B\sin(nt) \tag{2.3}$$

olur. (2.3) eşitliğinde t yerine $x=\cos t$ dönüşümünden elde edilen $t=\arccos x$ yazılırsa

$$y=A\cos(n\arccos x)+B\sin(n\arccos x)\ , \qquad |x|\leq 1 \tag{2.4}$$

eşitliği elde edilir[10]. (2.4) eşitliğindeki $\cos(n\arccos x)$ ve $\sin(n\arccos x)$ yerine sırasıyla $T_n(x)$ ve $\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)$ yazılırsa

$$y=AT_n(x)+B\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x) \tag{2.5}$$

eşitliği elde edilir [11]. Sonuç olarak birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları (2.1) deki Chebyshev diferansiyel denkleminin genel çözümünün bir sonucu olarak elde edilmektedir. (2.1) deki Chebyshev diferansiyel denklemi -1 ve 1 noktalarında tekil noktalara sahiptir[11].

2.2. Chebyshev Polinom Çeşitleri ve Rekürans Bağıntıları

2.2.1. Birinci çeşit Chebyshev polinomu

Tanım 2.2.1. Birinci çeşit Chebyshev polinomu x değişkenine bağlı n. mertebeden bir polinom olmak üzere $\forall n\geq 0$ için

$$T_n(x)=\cos(n\theta), \quad x=\cos\theta, \quad 0\leq\theta\leq\pi \tag{2.6}$$

eşitliğiyle tanımlanır. $x = \cos\theta$ eşitliğinde $\theta = 0$ için $x = 1$ ve $\theta = \pi$ için $x = -1$ olduğundan $x \in [-1\ ,\ 1]$ dır. (2.6) eşitliği

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{2.7}$$

bağıntısıyla da gösterilebilir. (2.6) ve (2.7) eşitliklerine $T_n(x)$ Chebyshev polinomu da denilmektedir. $\theta = 0$ $(x = 1)$ ve $n \geq 0$ için $T_n(1) = 1$ ve $\theta = \pi$ $(x = -1)$ için $T_n(-1) = (-1)^n$ eşitlikleri elde edilir[12].

2.2.2. Birinci çeşit Chebyshev polinomu rekürans bağıntısı

Tanım 2.2.2. $T_0(x) = 1$ ve $T_1(x) = x$ başlangıç koşulları ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{2.8}$$

eşitliğine birinci çeşit Chebyshev polinomunun rekürans (yineleme) bağıntısı denir. (2.8) deki rekürans bağıntısı kullanılarak birinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk onbir terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

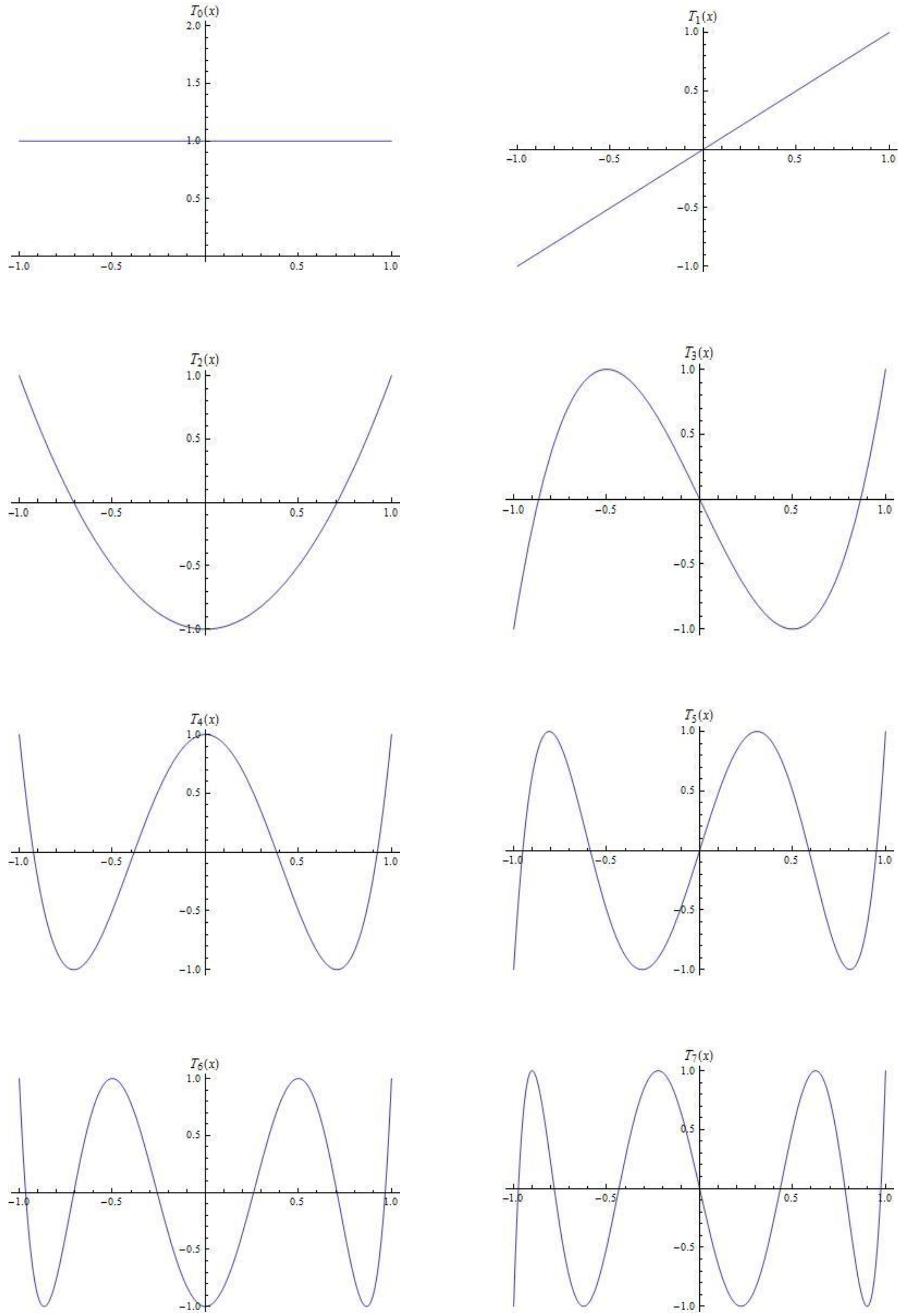
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

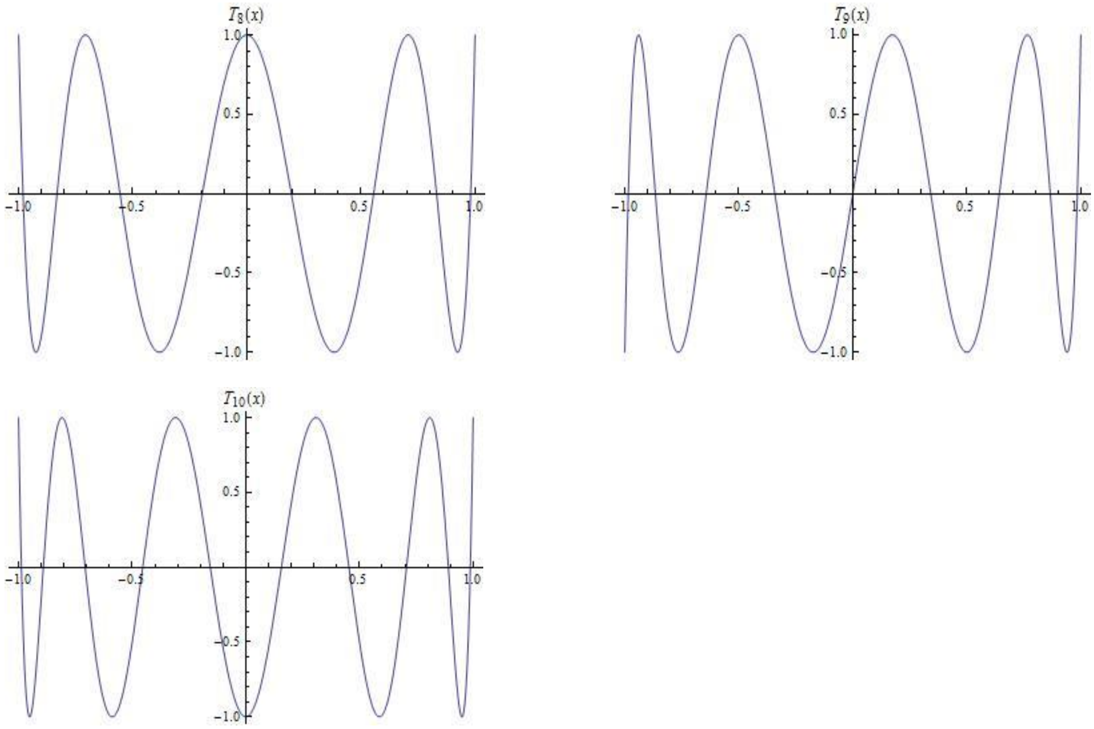
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^5 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1 \tag{2.9}$$



Şekil 2.1. $0 \leq x \leq 10$ için $T_n(x)$ in grafikleri



Şekil 2.2. (Şekil 2.1. in devamı)

2.2.3. İkinci çeşit Chebyshev polinomu

Tanım 2.2.3. İkinci çeşit Chebyshev polinomu x değişkenine bağlı n. mertebeden bir polinom olmak üzere $\forall n \geq 0$ için

$$U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\theta\right]}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \tag{2.10}$$

eşitliğiyle tanımlanır. $x = \cos\theta$ eşitliğinde $\theta = 0$ için $x = 1$ ve $\theta = \pi$ için $x = -1$ olduğundan $x \in [-1\ ,\ 1]$ dır. (2.10) eşitliği

$$U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos x\right]}{\sin(\arccos x)} \tag{2.11}$$

bağıntısıyla da gösterilebilir. (2.10) ve (2.11) eşitliklerine $U_n(x)$ Chebyshev polinomu da denilmektedir. (2.10) eşitliğinde $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ alındığında $\frac{0}{0}$ belirsizliği olur. L'hospital kuralı yardımıyla $U_n(x) = n+1$ bulunur. $\theta = 0$ $(x=1)$ ve $n \geq 0$ için $U_n(1) = n+1$ ve $\theta = \pi$ $(x=-1)$ için $U_n(-1) = (-1)^n (n+1)$ eşitlikleri elde edilir[12-13].

2.2.4. İkinci çeşit Chebyshev polinomu rekürans bağıntısı

Tanım 2.2.4. $U_0(x) = 1$ ve $U_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \tag{2.12}$$

eşitliğine ikinci çeşit Chebyshev polinomunun rekürans (yineleme) bağıntısı denir. (2.12) deki rekürans bağıntısı kullanılarak ikinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk onbir terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

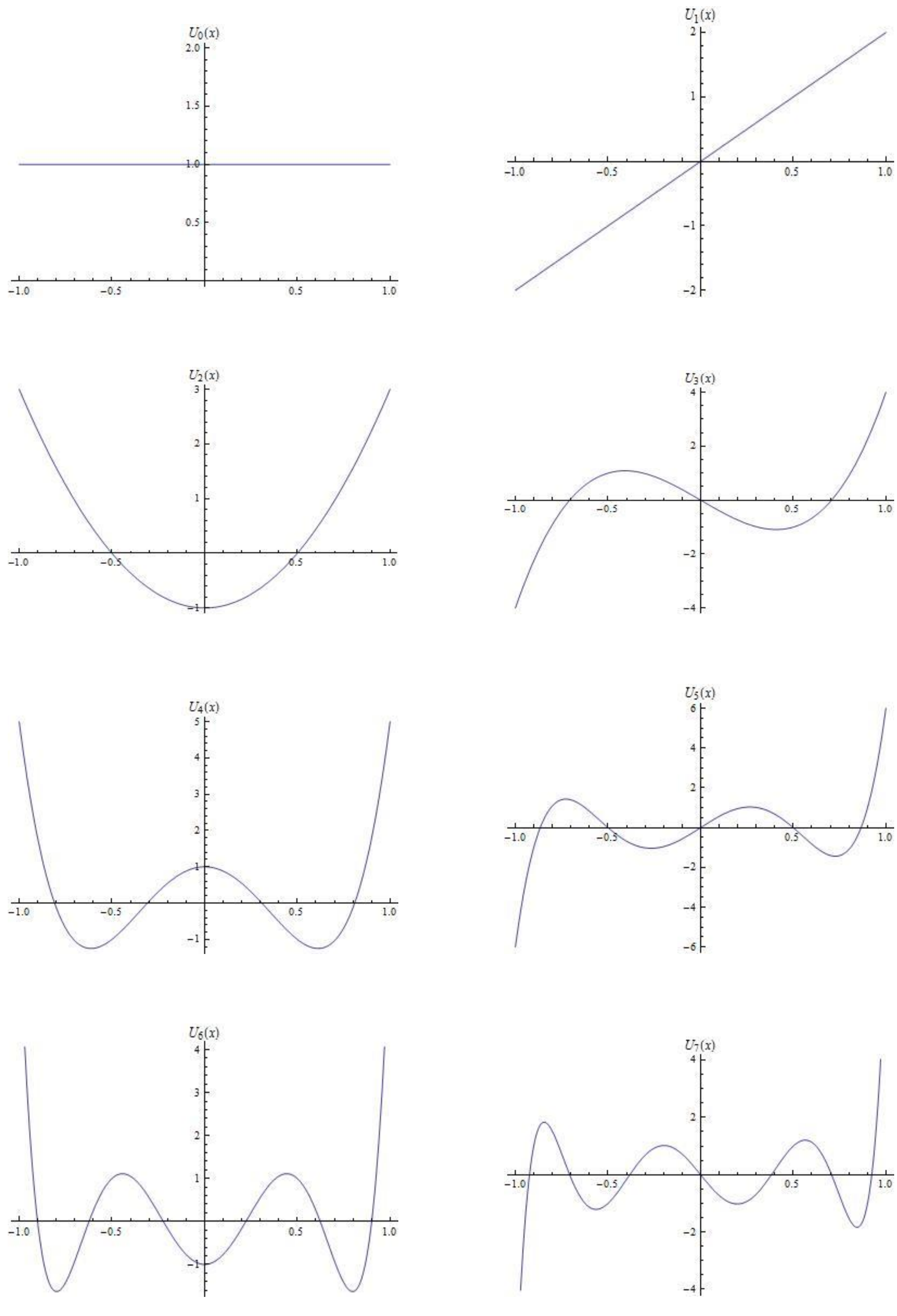
$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$

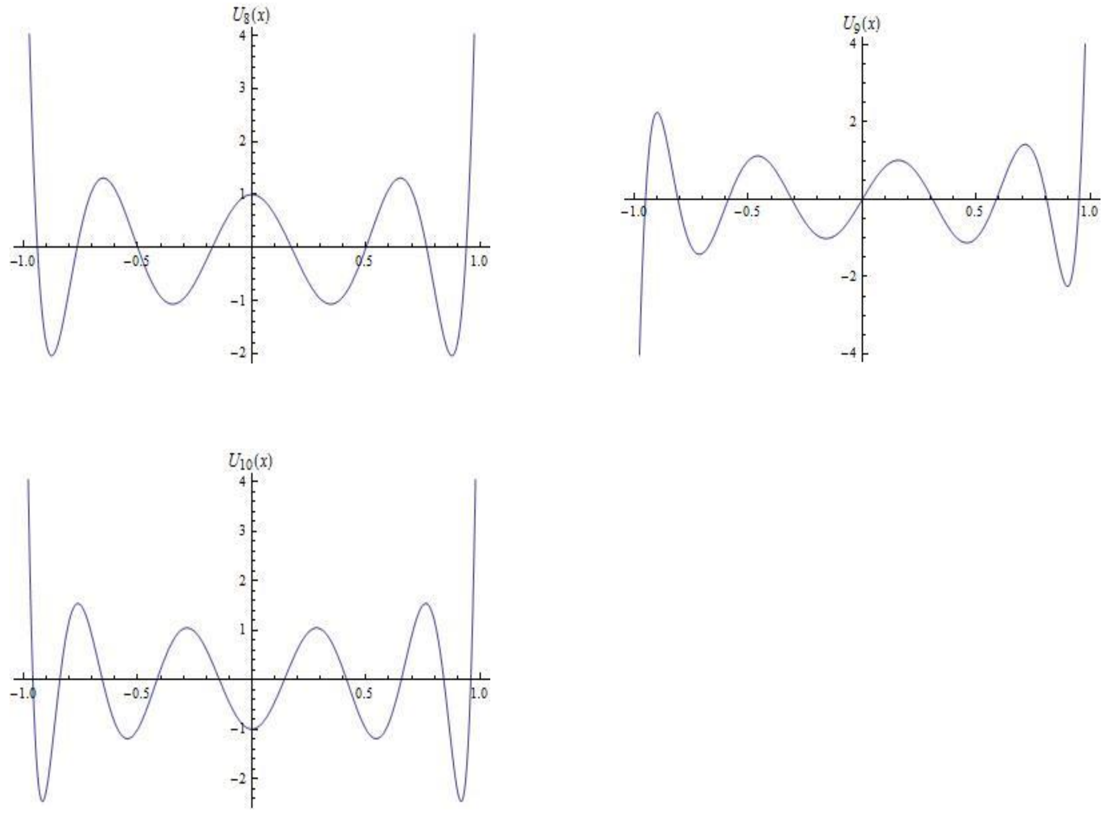
$$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$

$$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$$

$$U_{10}(x) = 1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1 \tag{2.13}$$



Şekil 2.3. $0 \le x \le 10$ için $U_n(x)$in grafikleri



Şekil 2.4. (Şekil 2.3. ün devamı)

2.2.5. Üçüncü çeşit Chebyshev polinomu

Tanım 2.2.5. Üçüncü çeşit Chebyshev polinomu x değişkenine bağlı $n.$ mertebeden bir polinom olmak üzere $\forall n \geq 0$ için

$$V_n(x) = \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}, \quad x = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \tag{2.14}$$

eşitliğiyle tanımlanır. $x = \cos\theta$ eşitliğinde $\theta = 0$ için $x = 1$ ve $\theta = \pi$ için $x = -1$ olduğundan $x \in [-1\ ,\ 1]$ dır. (2.14) eşitliği

$$V_n(x) = \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right]}{\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)} \tag{2.15}$$

bağıntısıyla da gösterilebilir. (2.14) ve (2.15) eşitliklerine $V_n(x)$ Chebyshev polinomu da denilmektedir. (2.14) eşitliğinde $\theta=\pi$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği olur. L'hospital kuralı yardımıyla $V_n(x)=2n+1$ bulunur. $\theta=\pi$ $(x=-1)$ için $V_n(-1)=(-1)^n(2n+1)$ ve $\theta=0$ $(x=1)$ için $V_n(1)=1$ eşitliği bulunur.

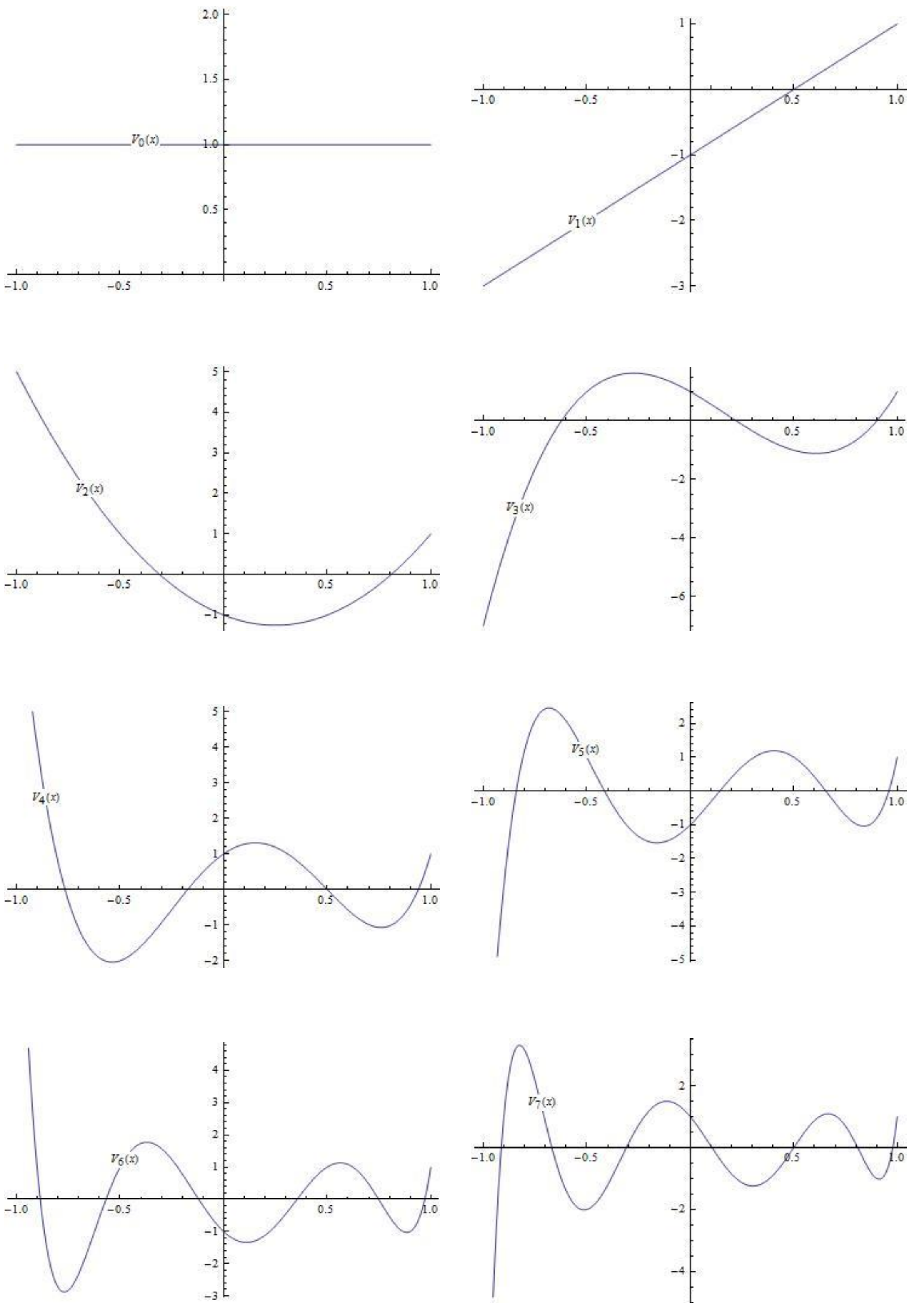
2.2.6. Üçüncü çeşit Chebyshev polinomu rekürans bağıntısı

Tanım 2.2.6. $V_0(x)=1$ ve $V_1(x)=2x-1$ başlangıç koşulları ve $n\geq 2$ olmak üzere

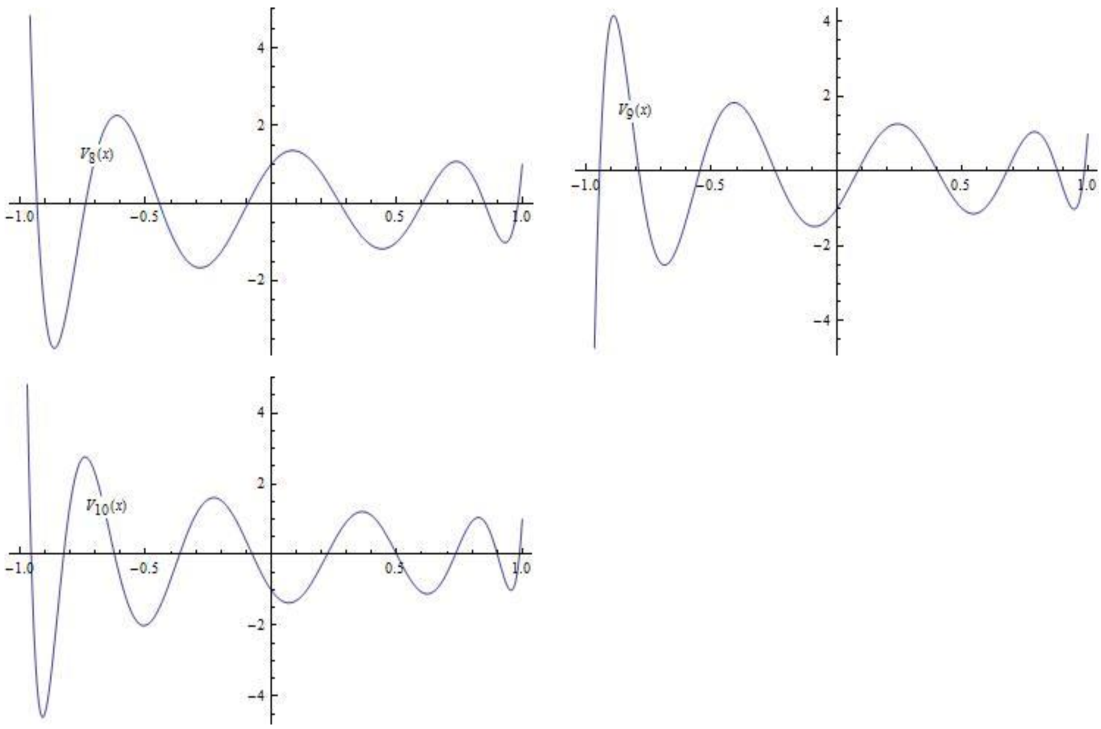
$$V_n(x)=2xV_{n-1}(x)-V_{n-2}(x) \tag{2.16}$$

eşitliğine üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun rekürans (yineleme) bağıntısı denir. (2.16) deki rekürans bağıntısı kullanılarak üçüncü çeşit Chebyshev polinomu için ilk onbir terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
V_0(x)&=1\\
V_1(x)&=2x-1\\
V_2(x)&=4x^2-2x-1\\
V_3(x)&=8x^3-4x^2-4x+1\\
V_4(x)&=16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\\
V_5(x)&=32x^5-16x^4-32x^3+12x^2+6x-1\\
V_6(x)&=64x^6-32x^5-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1\\
V_7(x)&=128x^7-64x^6-192x^5+80x^4+80x^3-24x^2-8x+1\\
V_8(x)&=256x^8-128x^7-448x^6+192x^5+240x^4-80x^3-40x^2+8x+1\\
V_9(x)&=512x^9-256x^8-1024x^7+448x^6+672x^5-240x^4-160x^3+40x^2+10x-1\\
V_{10}(x)&=1024x^{10}-512x^9-2304x^8+1024x^7+1792x^6-672x^5-560x^4+160x^3\\
&\quad+60x^2-10x-1
\end{aligned} \tag{2.17}$$



Şekil 2.5. $0 \le x \le 10$ için $V_n(x)$ in grafikleri



Şekil 2.6. (Şekil 2.5. in devamı)

2.2.7. Dördüncü çeşit Chebyshev polinomu

Tanım 2.2.7. Dördüncü çeşit Chebyshev polinomu x değişkenine bağlı n. mertebeden bir polinom olmak üzere $\forall n \geq 0$ için

$$W_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}, \qquad x = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \tag{2.18}$$

eşitliği ile tanımlanır. $x = \cos\theta$ eşitliğinde $\theta = 0$ için $x = 1$ ve $\theta = \pi$ için $x = -1$ olduğundan $x \in [-1\ ,\ 1]$ dır. (2.18) eşitliği

$$W_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)} \tag{2.19}$$

bağıntısıyla da gösterilebilir. (2.18) ve (2.19) eşitliklerine $W_n(x)$ Chebyshev polinomu da denmektedir. (2.18) eşitliğinde $\theta = 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği olur. L'hospital kuralı yardımıyla $W_n(x) = 2n+1$ bulunur. $\theta = 0$ $(x=1)$ için $W_n(1) = 2n+1$ ve $\theta = \pi$ $(x=-1)$ için $W_n(-1) = (-1)^n$ eşitliği bulunur.

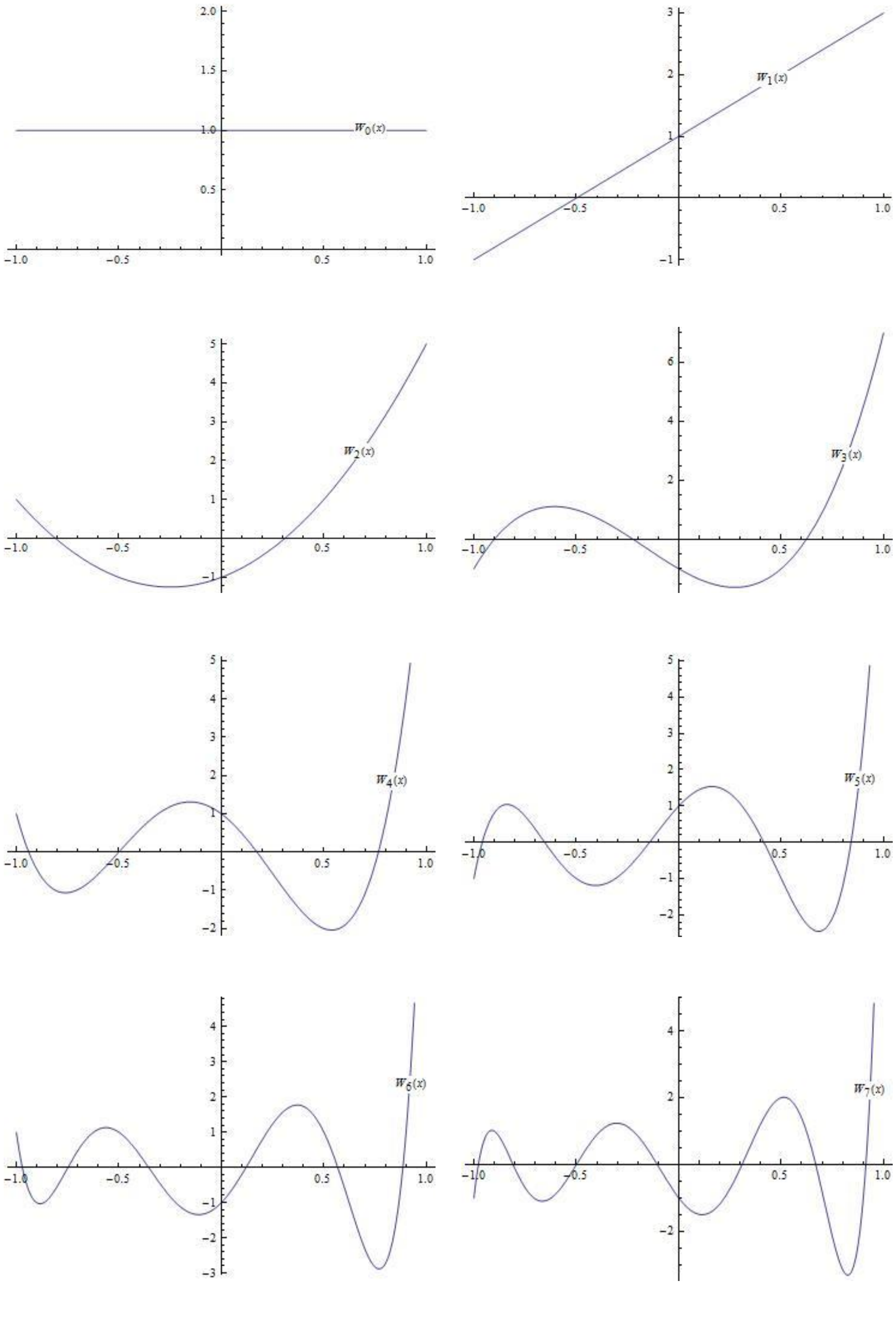
2.2.8. Dördüncü çeşit Chebyshev polinomu rekürans (yineleme) bağıntısı

Tanım 2.2.8. $W_0(x) = 1$ ve $W_1(x) = 2x+1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere

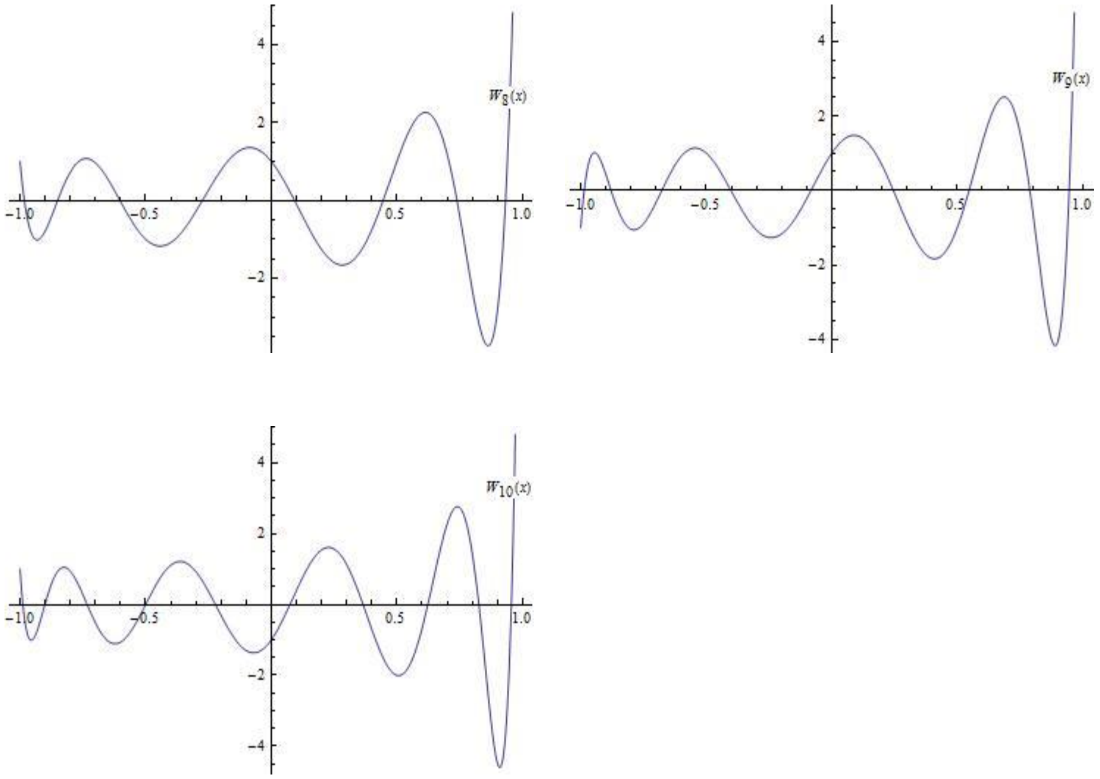
$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x) \tag{2.20}$$

eşitliğine dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun rekürans (yineleme) bağıntısı denir. (2.20) eşitliğindeki rekürans bağıntısı kullanılarak dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun ilk onbir terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
&W_0(x) = 1 \\
&W_1(x) = 2x+1 \\
&W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1 \\
&W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \\
&W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1 \\
&W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 * 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1 \\
&W_6(x) = 64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 32x^3 + 24x^2 + 6x - 1 \\
&W_7(x) = 128x^7 + 64x^6 - 192x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 24x^2 - 8x - 1 \\
&W_8(x) = 256x^8 + 128x^7 - 448x^6 - 192x^5 + 240x^4 + 80x^3 - 40x^2 - 8x + 1 \\
&W_9(x) = 512x^9 + 256x^8 - 1024x^7 - 448x^6 + 672x^5 + 240x^4 - 160x^3 - 40x^2 + 10x + 1 \\
&V_{10}(x) = 1024x^{10} + 512x^9 - 2304x^8 - 1024x^7 + 1792x^6 + 672x^5 - 560x^4 - 160x^3 \\
&\qquad + 10x - 1
\end{aligned} \tag{2.21}$$



Şekil 2.7. $0 \le x \le 10$ için $W_n(x)$in grafikleri



Şekil 2.8. (Şekil 2.7. nin devamı)

2.3. Rekürans Bağıntılarına Alternatif Eşitlikler

Rekürans bağıntılarında n. mertebeden Chebyshev polinomunu bulmak için $(n-1)$. ve $(n-2)$. mertebeden Chebyshev polinomuna ihtiyaç varken aşağıdaki denklemler yardımıyla n. mertebeden Chebyshev polinomunu elde ederiz.

2.3.1. Birinci çeşit Chebyshev polinomunu için alternatif eşitlik

$n \geq 0$ olmak üzere n. mertebeden birinci çeşit Chebyshev polinomu

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} c_k^n x^{n-2k} \tag{2.22}$$

eşitliği ile bulunmaktadır. (2.22) eşitliğindeki c_k^n ler $n > 0$ olmak üzere

$$c_k^n = (-1)^k \, 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \tag{2.23}$$

ve

$$c_k^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \quad ve \quad k = 0 \quad ise \\ 2^{n-1}, & n \geq 1 \quad ve \quad k = 0 \quad ise \\ (-1)^k, & n = 2k \quad\quad\quad\quad ise \end{cases} \tag{2.23a}$$

eşitlikleri ile hesaplanmaktadır. (2.23) deki eşitlik (2.22) deki eşitlikte yerine yazılırsa

$$T_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \quad ise \\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, & n \geq 1 \quad ise \end{cases} \tag{2.24}$$

eşitliği elde edilir[13].

2.3.2. İkinci çeşit Chebyshev polinomunu için alternatif eşitlik

$n \geq 0$ olmak üzere n. mertebeden ikinci çeşit Chebyshev polinomu

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} c_k^n x^{n-2k} \tag{2.25}$$

eşitliği yardımıyla bulunmaktadır. (2.25) eşitliğindeki c_k^n ler

$$c_k^n = (-1)^k \, 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} \tag{2.26}$$

ve

$$c_k^n = \begin{cases} 2^n, & n \geq 1 \quad ve \quad k = 0 \quad ise \\ (-1)^k, & n = 2k \quad\quad\quad\quad ise \end{cases} \tag{2.26a}$$

eşitlikleri yardımıyla bulunmaktadır. (2.26) eşitliği (2.25) deki eşitlikte yerine yazılırsa

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \binom{n-k}{k} \tag{2.27}$$

eşitliği elde edilir[13].

2.3.3. Üçüncü çeşit Chebyshev polinomunu için alternatif eşitlik

$n \geq 0$ olmak üzere n. mertebeden üçüncü çeşit Chebyshev polinomu

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} c_k^n x^{n-2k} - \sum_{\substack{k=0 \\ n\,\geq\,1}}^{[\![(n-1)/2]\!]} c_k^{n-1} x^{n-2k-1} \tag{2.28}$$

eşitliği ile bulunmaktadır. (2.28) eşitliğindeki c_k^n ler

$$c_k^n = (-1)^k \, 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} \tag{2.29}$$

ve

$$c_k^n = \begin{cases} 2^n, & n \geq 0 \quad ve \quad k = 0 \quad ise \\ (-1)^k, & n = 2k \qquad\qquad\quad ise \end{cases} \tag{2.29a}$$

eşitlikleri yardımıyla bulunmaktadır. (2.29) eşitliği (2.28) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \binom{n-k}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ n\,\geq\,1}}^{[\![(n-1)/2]\!]} (-1)^k (2x)^{n-2k-1} \binom{n-k-1}{k} \tag{2.30}$$

eşitliği elde edilir.

2.3.4. Dördüncü çeşit Chebyshev polinomunu için alternatif eşitlik

$n \geq 0$ olmak üzere n. mertebeden dördüncü çeşit Chebyshev polinomu

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[n/2 \right]\!\right]} c_k^n x^{n-2k} + \sum_{\substack{k=0 \\ n \geq 1}}^{\left[\!\left[(n-1)/2 \right]\!\right]} c_k^{n-1} x^{n-2k-1} \tag{2.31}$$

eşitliği ile bulunmaktadır. (2.31) eşitliğindeki c_k^n ler

$$c_k^n = (-1)^k \, 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} \tag{2.32}$$

ve

$$c_k^n = \begin{cases} 2^n, & n \geq 1 \quad ve \quad k = 0 \quad ise \\ (-1)^k, & n = 2k \qquad\qquad ise \end{cases} \tag{2.32a}$$

eşitlikleri yardımıyla bulunmaktadır. (2.32) eşitliği (2.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[n/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \binom{n-k}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ n \geq 1}}^{\left[\!\left[(n-1)/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k-1} \binom{n-k-1}{k} \tag{2.33}$$

eşitliği elde edilir.

2.4. $[a, b]$ Aralığında Chebyshev Polinomları

$[-1, 1]$ aralığına karşılık gelen x in verilen her sonlu $[a, b]$ aralığı s değişkeni ile gösterilen $s = \dfrac{2x - (a+b)}{b-a}$ lineer dönüşümü altında Chebyshev polinomları tanımlanabilir. $T_n(x)$ için tanımlanan bu lineer dönüşüm benzer şekilde $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ için de tanımlanabilir. $[a, b] = [0, 1]$ özel durumunda $s = 2x - 1$ olmaktadır. Bu özel durumda Chebyshev polinomları ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomları adıyla isimlendirilmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.5. Ötelenmiş (Shifted) Chebyshev Polinomları

Bazı problemlerde $[0,1]$ aralığını kullanmak $[-1,1]$ aralığını kullanmaktan daha uygun olmaktadır. Herhangi bir $-1 \le s \le 1$ için $s = 2x-1$ değişken değişimi ile $0 \le x \le 1$ aralığına dönüştürülür. Böylece $-1 \le s \le 1$ aralığında tanımlanan $T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ Chebyshev polinomları $0 \le x \le 1$ de tanımlanan $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ ile gösterilen ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomlarına dönüşmektedir. Sırasıyla birinci çeşit, ikinci çeşit, üçüncü çeşit ve dördüncü çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomları

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x-1) = \cos\left(n \arccos(2x-1)\right),$$

$$U_n^*(x) = U_n(s) = U_n(2x-1) = \frac{\sin\left((n+1)\, arc\cos(2x-1)\right)}{\sin\left(\arccos(2x-1)\right)},$$

$$V_n^*(x) = V_n(s) = V_n(2x-1) = \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) arc\cos(2x-1)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\arccos(2x-1)\right)},$$

ve

$$W_n^*(x) = W_n(s) = W_n(2x-1) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) arc\cos(2x-1)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos(2x-1)\right)}$$

eşitlikleri ile gösterilir.

2.6. Ötelenmiş (Shifted) Chebyshev Polinomlarının Rekürans (Yineleme) Bağıntıları

Tanım 2.6.1. $T_0^*(x) = 1$ ve $T_1^*(x) = 2x-1$ başlangıç koşulları ve $n \ge 2$ olmak üzere

$$T_n^*(x) = 2(2x-1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x) \tag{2.34}$$

eşitliğine birinci çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun rekürans (yineleme) bağıntısı denir. (2.34) deki rekürans bağıntısı yardımıyla birinci çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$T_0^*(x) = 1$

$T_1^*(x) = 2x - 1$

$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1$

$T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$

$T_4^*(x) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$

$T_5^*(x) = 512x^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 50x - 1$

Tanım 2.6.2. $U_0^*(x) = 1$ ve $U_1^*(x) = 4x - 2$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$U_n^*(x) = 2(2x-1)U_{n-1}^*(x) - U_{n-2}^*(x) \tag{2.35}$$

eşitliğine ikinci çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun rekürans (yineleme) bağıntısı denir. (2.35) deki rekürans bağıntısı yardımıyla ikinci çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$U_0^*(x) = 1$

$U_1^*(x) = 4x - 2$

$U_2^*(x) = 16x^2 - 16x + 3$

$U_3^*(x) = 64x^3 - 96x^2 + 46x - 4$

$U_4^*(x) = 256x^4 - 512x^3 + 336x^2 - 80x + 5$

$U_5^*(x) = 1024x^5 - 2560x^4 + 2304x^3 - 886x^2 + 144x - 6$

Tanım 2.6.3. $V_0^*(x) = 1$ ve $V_1^*(x) = 4x - 3$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$V_n^*(x) = 2(2x-1)V_{n-1}^*(x) - V_{n-2}^*(x) \tag{2.36}$$

eşitliğine üçüncü çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun reküransı (yineleme) bağıntısı denir. (2.36) deki reküransı bağıntısı yardımıyla üçüncü çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$V_0^*(x) = 1$

$V_1^*(x) = 4x - 3$

$V_2^*(x) = 16x^2 - 20x + 5$

$V_3^*(x) = 64x^3 - 112x^2 + 56x - 7$

$V_4^*(x) = 256x^4 - 576x^3 + 432x^2 - 120x + 9$

$V_5^*(x) = 1024x^5 - 2816x^4 + 2816x^3 - 1232x^2 + 220x - 11$

Tanım 2.6.4. $W_0^*(x) = 1$ ve $W_1^*(x) = 4x - 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$W_n^*(x) = 2(2x-1)W_{n-1}^*(x) - W_{n-2}^*(x) \tag{2.37}$$

eşitliğine dördüncü çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun reküransı (yineleme) bağıntısı denir. (2.37) deki reküransı bağıntısı yardımıyla dördüncü çeşit ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$W_0^*(x) = 1$

$W_1^*(x) = 4x - 1$

$W_2^*(x) = 16x^2 - 12x + 1$

$W_3^*(x) = 64x^3 - 80x^2 + 24x - 1$

$W_4^*(x) = 256x^4 - 448x^3 + 240x^2 - 32x + 1$

$W_5^*(x) = 1024x^5 - 2304x^4 + 1792x^3 - 628x^2 + 44x - 1$

2.7. Monik Chebyshev Polinomları

Tanım 2.7.1. En büyük dereceli teriminin katsayısı 1 olan (veya başkatsayısı 1 olan) polinoma monik polinom denir.

(2.8), (2.12), (2.16) ve (2.20) deki rekürans bağıntılarından elde edilen (2.9), (2.13), (2.17) ve (2.21) eşitliklerden de görüleceği üzere $n \geq 1$ olmak üzere $T_n(x)$ Chebyshev polinomunda en büyük dereceli terimin katsayısı 2^{n-1}, $n \geq 0$ olmak üzere $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ Chebyshev polinomlarında ise en büyük dereceli terimin katsayısı 2^n olduğu görülmektedir. Buradan aşağıdaki tanımlar yapılabilmektedir.

Tanım 2.7.2. $n \geq 0$ olmak üzere $T_n(x)$ Chebyshev polinomunun 2^{n-1} ile bölünmesiyle elde edilen $T_n^{\circ}(x)$ Chebyshev polinomuna birinci çeşit monik Chebyshev polinomu ya da $T_n^{\circ}(x)$ monik Chebyshev polinomu denir. Birinci çeşit monik Chebyshev polinomu

$$T_n^{\circ}(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \tag{2.38}$$

eşitliği ile gösterilir. (2.38) deki eşitlik yardımıyla birinci çeşit monik Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$T_0^{\circ}(x) = 2$$

$$T_1^{\circ}(x) = x$$

$$T_2^{\circ}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

$$T_3^{\circ}(x) = x^3 - x$$

$$T_4^{\circ}(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$$

$$T_5^{\circ}(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x$$

Tanım 2.7.3. $n \geq 0$ olmak üzere $U_n(x)$ Chebyshev polinomunun 2^n ile bölünmesiyle elde edilen $U_n^{\circ}(x)$ Chebyshev polinomuna ikinci çeşit monik Chebyshev polinomu ya da $U_n^{\circ}(x)$ monik Chebyshev polinomu denir. İkinci çeşit monik Chebyshev polinomu

$$U_n^{\circ}(x) = \frac{U_n(x)}{2^n} \tag{2.39}$$

eşitliği ile gösterilir. (2.39) deki eşitlik yardımıyla ikinci çeşit monik Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$U_0^{\circ}(x) = 1$$

$$U_1^{\circ}(x) = x$$

$$U_2^{\circ}(x) = x^2 - \frac{1}{4}$$

$$U_3^{\circ}(x) = x^3 - \frac{x}{2}$$

$$U_4^{\circ}(x) = x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}$$

$$U_5^{\circ}(x) = x^5 - x^3 + \frac{3}{16}x$$

Tanım 2.7.4. $n \geq 0$ olmak üzere $V_n(x)$ Chebyshev polinomunun 2^n ile bölünmesiyle elde edilen $V_n^{\circ}(x)$ Chebyshev polinomuna üçüncü çeşit monik Chebyshev polinomu ya da $V_n^{\circ}(x)$ monik Chebyshev polinomu denir. Üçüncü çeşit monik Chebyshev polinomu

$$V_n^{\circ}(x) = \frac{V_n(x)}{2^n} \tag{2.40}$$

eşitli ile gösterilir. (2.40) deki eşitlik yardımıyla üçüncü çeşit monik Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_0^{\circ}(x)=1$$

$$V_1^{\circ}(x)=x-\frac{1}{2}$$

$$V_2^{\circ}(x)=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

$$V_3^{\circ}(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$

$$V_4^{\circ}(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$$

$$V_5^{\circ}(x)=x^5-\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{16}x-\frac{1}{32}$$

Tanım 2.7.5. $n\geq 0$ olmak üzere $W_n(x)$ Chebyshev polinomunun 2^n ile bölünmesiyle elde edilen $W_n^{\circ}(x)$ Chebyshev polinomuna dördüncü çeşit monik Chebyshev polinomu ya da $W_n^{\circ}(x)$ monik Chebyshev polinomu denir. Dördüncü çeşit monik Chebyshev polinomu

$$W_n^{\circ}(x)=\frac{W_n(x)}{2^n} \tag{2.41}$$

eşitliği ile gösterilir. (2.41) deki eşitlik yardımıyla dördüncü çeşit monik Chebyshev polinomunun ilk altı terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$W_0^{\circ}(x)=1$$

$$W_1^{\circ}(x)=x+\frac{1}{2}$$

$$W_2^{\circ}(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

$$W_3^{\circ}(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$$

$$W_4^{\circ}(x)=x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$$

$$W_5^{\circ}(x)=x^5+\frac{1}{2}x^4-x^3-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{16}x+\frac{1}{32}$$

2.8. Chebyshev Polinomlarının Ortogonallik Özelliği

Tanım 2.8.1. Birinci çeşit Chebyshev polinomu $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre $x \in [-1,1]$ aralığında

$$\int_{-1}^{1} T_i(x)T_j(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \end{cases}$$

ortogonaldir.

Tanım 2.8.2. İkinci çeşit Chebyshev polinomu $\sqrt{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre $x \in [-1,1]$ aralığında

$$\int_{-1}^{1} U_i(x)U_j(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \end{cases}$$

ortogonaldir.

Tanım 2.8.3. Üçüncü çeşit Chebyshev polinomu $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ ağırlık fonksiyonuna göre $x \in [-1,1]$ aralığında

$$\int_{-1}^{1} V_i(x)V_j(x)\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \end{cases}$$

ortogonaldir.

Tanım 2.8.4. Dördüncü çeşit Chebyshev polinomu $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ ağırlık fonksiyonuna göre $x \in [-1,1]$ aralığında

$$\int_{-1}^{1} W_i(x) W_j(x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \end{cases}$$

ortogonaldir.

2.9. Chebyshev Polinomlarının Kökleri

$n > 0$ olmak üzere $[-1,1]$ aralığında tüm Chebyshev polinom çeşitleri n tane köke sahiptir[5].

Tanım 2.9.1. (Birinci Çeşit Chebyshev Polinomun Kökü) $x \in [-1,1]$ olmak üzere $T_n(x)$ in kökleri

$$x_k = \cos\left(\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n}\right), \qquad k = 1,2,\ldots,n \tag{2.42}$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

Tanım 2.9.2. (İkinci Çeşit Chebyshev Polinomun Kökü) $U_n(x)$ in kökleri

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{2.43}$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

Tanım 2.9.3. (Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomun Kökü) $V_n(x)$ in kökleri

$$x_k = \cos\left(\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{2.44}$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

Tanım 2.9.4. (Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomun Kökü) $W_n(x)$ in kökleri

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{2.45}$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

2.10. Chebyshev Polinomlarının Ekstremumları

$n > 0$ olmak üzere $[-1,1]$ aralığında tüm Chebyshev polinom çeşitleri için $n+1$ tane ekstremum noktası vardır[5].

Tanım 2.10.1. (Birinci Çeşit Chebyshev Polinomunun Ekstremumu) $x \in [-1,1]$olmak üzere $T_n(x)$ in ekstremum noktaları

$$\vec{x} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,n$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

Tanım 2.10.2. (İkinci Çeşit Chebyshev Polinomunun Ekstremumu) $x \in [-1,1]$olmak üzere $U_n(x)$ in ekstremum noktaları

$$\vec{x} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,n$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

Tanım 2.10.3. (Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomunun Ekstremumu) $x \in [-1,1]$ olmak üzere $V_n(x)$ in ekstremum noktaları

$$\vec{x} = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right), \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,n$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

Tanım 2.10.4. (Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomunun Ekstremumu) $x \in [-1,1]$ olmak üzere $W_n(x)$ in ekstremum noktaları

$$\vec{x} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right), \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,n$$

eşitliği ile bulunmaktadır[5].

2.11. Chebyshev Polinomlarının Türevleri

Bu bölümde $n \geq 0$ olmak üzere $n.$ mertebeden birinci çeşit, ikinci çeşit, üçüncü çeşit ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomlarının $p \geq 1$ olmak üzere $p.$ mertebeden türevini bulmakta yardımcı olacak eşitlikler verilmektedir.

2.11.1. Birinci çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$n \geq 1,\ p \geq 1$ ve $n \geq p$ olmak üzere $T_n(x)$ in p . mertebeden türevi

$$T_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(n-p)/2 \right]\!\right]} c_k^n x^{n-p-2k} \frac{(n-2k)\ !}{(n-2k-p)\ !} \tag{2.46}$$

eşitliği yardımıyla bulunur. Bu eşitlikteki c_k^n ler (2.23) ve (2.23a) deki eşitlikler yardımıyla hesaplanmaktadır. (2.23) deki eşitlik (2.46) daki eşitlikte yerine yazılırsa $T_n(x)$ in p . mertebeden türevi $n \geq p \geq 1$ için

$$T_n^{(p)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(n-p)/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \frac{1}{x^p} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \frac{(n-2k)\,!}{(n-2k-p)\,!} \tag{2.47}$$

eşitliğiyle bulunur. $n \geq 1$ ve $n = p$ için $T_n^{(p)}(x) = 2^{n-1}(n)!$ olur. $p > n$ için $T_n^{(p)}(x) = 0$ olur.

2.11.2. İkinci çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$n \geq 1,\ p \geq 1$ ve $n > p$ olmak üzere $U_n(x)$ in $p.$ mertebeden türevi

$$U_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(n-p)/2 \right]\!\right]} c_k^n x^{n-p-2k} \frac{(n-2k)\,!}{(n-2k-p)\,!} \tag{2.48}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu eşitlikteki c_k^n ler (2.26) ve (2.26a) deki eşitlikler yardımıyla hesaplanmaktadır ya da (2.26) deki eşitlik (2.48) deki eşitlikte yerine yazılırsa $U_n(x)$ in p . mertebeden türevi $n \geq p \geq 1$ için

$$U_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(n-p)/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \frac{1}{x^p} \binom{n-k}{k} \frac{(n-2k)\,!}{(n-2k-p)\,!} \tag{2.49}$$

eşitliğiyle bulunur. $n \geq 1$ ve $n = p$ için $U_n^{(p)}(x) = 2^n(n)!$ olur. $p > n$ için $U_n^{(p)}(x) = 0$ olur.

2.11.3. Üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$n \geq 1,\ p \geq 1$ ve $n > p$ olmak üzere $V_n(x)$ in p. mertebeden türevi

$$V_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(n-p)/2 \right]\!\right]} c_k^n x^{n-p-2k} \frac{(n-2k)\,!}{(n-2k-p)\,!} - \sum_{\substack{k=0 \\ n>p}}^{\left[\!\left[(n-p-1)/2 \right]\!\right]} c_k^{n-1} x^{n-p-2k-1} \frac{(n-2k-1)\,!}{(n-2k-p-1)\,!} \tag{2.50}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu denklemdeki c_k^n ler (2.29) ve (2.32a) deki eşitlikler yardımıyla hesaplanmaktadır. (2.29) deki eşitlik (2.50) deki eşitlikte yerine yazılırsa $V_n(x)$ in p. mertebeden türevi $n \geq p \geq 1$ için

$$\begin{aligned} V_n^{(p)}(x) = & \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(n-p)/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \frac{1}{x^p} \binom{n-k}{k} \frac{(n-2k)\,!}{(n-2k-p)\,!} \\ & - \sum_{\substack{k=0 \\ n \geq p+1}}^{\left[\!\left[(n-p-1)/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k-1} \frac{1}{x^p} \binom{n-k-1}{k} \frac{(n-2k-1)\,!}{(n-2k-p-1)\,!} \end{aligned} \tag{2.51}$$

eşitliğiyle bulunur. $n \geq 1$ ve $n = p$ için $V_n^{(p)}(x) = 2^n (n)!$ olur. $p > n$ için $V_n^{(p)}(x) = 0$ olur.

2.11.4. Dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$n \geq 1,\ p \geq 1$ ve $n > p$ olmak üzere $W_n(x)$ in p. mertebeden türevi

$$W_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{n-p}{2} \right]\!\right]} c_k^n x^{n-p-2k} \frac{(n-2k)\,!}{(n-2k-p)\,!} + \sum_{\substack{k=0 \\ n>p}}^{\left[\!\left[\frac{n-p-1}{2} \right]\!\right]} c_k^{n-1} x^{n-p-2k-1} \frac{(n-2k-1)\,!}{(n-2k-p-1)\,!} \tag{2.52}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu denklemdeki c_k^n ler (2.32) ve (2.32a) deki eşitlikler yardımıyla hesaplanmaktadır. (2.32) deki eşitlik (2.52) deki eşitlikte yerine yazılırsa $W_n(x)$ in p . mertebeden türevi $n \geq p \geq 1$ için

$$W_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(n-p)/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k} \frac{1}{x^p} \binom{n-k}{k} \frac{(n-2k)\,!}{(n-2k-p)\,!}$$
$$+ \sum_{\substack{k=0 \\ n>p}}^{\left[\!\left[(n-p-1)/2 \right]\!\right]} (-1)^k (2x)^{n-2k-1} \frac{1}{x^p} \binom{n-k-1}{k} \frac{(n-2k-1)\,!}{(n-2k-p-1)\,!} \tag{2.53}$$

eşitliğiyle bulunur. $n \geq 1$ ve $n = p$ için $W_n^{(p)}(x) = 2^n (n)!$ olur. $p > n$ için $W_n^{(p)}(x) = 0$ olur.

2.12. x^n ' lerin Chebyshev Polinomları Cinsinden Gösterimi

$n \geq 0$ olmak üzere x^n ' lerin;

Birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi,

$$x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}} \left(-\dfrac{T_0(x)}{2} \dbinom{n}{n/2} + \displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\!\left[n/2 \right]\!\right]} T_{n-2i}(x) \dbinom{n}{i} \right), & n \quad \textit{çift} \quad \textit{ise} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\!\left[n/2 \right]\!\right]} T_{n-2i}(x) \dbinom{n}{i}, & n \quad \textit{tek} \quad \textit{ise} \end{cases} \tag{2.54}$$

İkinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi,

$$x^n = \frac{1}{2^n} \left(U_n(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ n \geq 2}}^{\left[\!\left[n/2 \right]\!\right]} \frac{n-2i+1}{n-i+1} U_{n-2i}(x) \binom{n}{i} \right) \tag{2.55}$$

Üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi,

$$x^n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{\left[\!\left[n/2 \right]\!\right]} V_{n-2i}(x)\binom{n}{i} + \sum_{\substack{i=1 \\ n \geq 1}}^{\left[\!\left[(n+1)/2 \right]\!\right]} V_{n-2i+1}(x)\binom{n}{i-1} \right) \tag{2.56}$$

Dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi,

$$x^n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{\left[\!\left[n/2 \right]\!\right]} W_{n-2i}(x)\binom{n}{i} - \sum_{\substack{i=1 \\ n \geq 1}}^{\left[\!\left[(n+1)/2 \right]\!\right]} W_{n-2i+1}(x)\binom{n}{i-1} \right) \tag{2.57}$$

eşitlikleri ile bulunmaktadır.

BÖLÜM 3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde $n \geq 1$ olmak üzere

$$\rho_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{n} \rho_k(x)y^{(k)}(x) = f(x) \neq 0 \tag{3.1}$$

tipindeki adi lineer diferansiyel denklemleri ve $f(x)$ fonksiyonu için Chebyshev yaklaşım metotları verilecektir.

3.1. $f(x) \neq 0$ Fonksiyonu için Chebyshev Yaklaşım Metotları

3.1.1. $f(x)$ fonksiyonu için birinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$[-1,1]$ aralığında sürekli olan $f(x)$ fonksiyonunun birinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden *m.* mertebeden yaklaşım polinomu $F_T^m(x)$'in seri açılımı

$$F_T^m(x) = \frac{C_0}{2}T_0(x) + C_1T_1(x) + \ldots + C_mT_m(x) \tag{3.2}$$

$$F_T^m(x) = \frac{C_0}{2}T_0(x) + \sum_{i=1}^{m} C_iT_i(x) \tag{3.3}$$

$$F_T^m(x) = \sum_{i=0}^{m}{}' C_iT_i(x) \tag{3.4}$$

eşitlikleriyle gösterilmektedir. $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$ için C_i katsayıları

$$C_i = \frac{2}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1} f\left(x_k\right)T_i\left(x_k\right) \tag{3.5}$$

eşitliğiyle ve (3.5) eşitliğindeki x_k lar

$$x_k = \cos\left(\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{m+1}\right) \tag{3.6}$$

eşitliğiyle bulunmaktadır [5]. (3.5) eşitliğindeki $T_i\left(x_k\right)$ da (3.6) eşitliği yerine yazılırsa

$$T_i\left(x_k\right) = \cos\left(\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot i\cdot\pi}{m+1}\right) \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (3.5) eşitliğinde (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$C_i = \frac{2}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1} f\left(\cos\left(\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{m+1}\right)\right)\cos\left(\frac{i\cdot\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)}{m+1}\right) \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. (3.8) eşitliğinden yaklaşım polinomundaki C_i katsayıları bulunmaktadır. Bulunan C_i katsayıları (3.2) eşitliğinde yerine yazılarak $f(x)$ fonksiyonunun birinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu olan $F_T^m\left(x\right)$ bulunmaktadır.

3.1.2. $f(x)$ fonksiyonu için ikinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$[-1,1]$ aralığında sürekli olan $f(x)$ fonksiyonunun ikinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu $F_U^m(x)$ in seri açılımı

$$F_U^m(x) = C_0U_0(x) + C_1U_1(x) + \ldots + C_mU_m(x) \tag{3.9}$$

$$F_U^m(x) = \sum_{i=0}^{m} C_iU_i(x) \tag{3.10}$$

eşitlikleriyle gösterilmektedir. $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$ için (3.10) daki $F_U^m(x)$ yaklaşım polinomundaki C_i katsayıları

$$C_i = \frac{2}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{1-(x_k)^2} \cdot f(x_k) \cdot U_i(x_k) \tag{3.11}$$

eşitliğiyle ve (3.11) deki x_k 'lar

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{m+2}\right) \tag{3.12}$$

eşitliğiyle bulunmaktadır[5]. (3.11) deki $U_i(x_k)$ da (3.12) eşitliği yerine yazılırsa

$$U_i(x_k) = \frac{\sin\left[(i+1)\left(\frac{k\pi}{m+2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{m+2}\right)} \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (3.11) eşitliğinde (3.12) ve (3.13) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$C_i = \frac{2}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{k\pi}{m+2}\right)\right)^2} \cdot f\left(\cos\left(\frac{k\pi}{m+2}\right)\right) \cdot \frac{\sin\left[(i+1)\left(\frac{k\pi}{m+2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{m+2}\right)} \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir. (3.14) eşitliğinden C_i katsayıları bulunmaktadır. Bulunan C_i katsayıları (3.9) da yerine yazılarak $f(x)$ fonksiyonunun ikinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu olan $F_U^m(x)$ bulunmaktadır.

3.1.3. $f(x)$ fonksiyonu için üçüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$[-1,1]$ aralığında sürekli olan $f(x)$ fonksiyonunun üçüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu $F_V^m(x)$ in seri açılımı

$$F_V^m(x)=C_0V_0(x)+C_1V_1(x)+\ldots+C_mV_m(x) \tag{3.15}$$

$$F_V^m(x)=\sum_{i=0}^{m}C_iV_i(x) \tag{3.16}$$

eşitlikleriyle gösterilmektedir. (3.16) deki C_i sabitleri $i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ m$ için

$$C_i=\frac{1}{m+\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{1+x_k}\cdot f(x_k)\cdot V_i(x_k) \tag{3.17}$$

eşitliğiyle ve (3.17) deki x_k 'lar ise

$$x_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+3}\right) \tag{3.18}$$

eşitliğiyle bulunmaktadır[5]. (3.17) deki $V_i(x_k)$ da (3.18) eşitliği yerine yazılırsa

$$V_i(x_k)=\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+3}\right)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+3}\right)\right]} \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (3.17) eşitliğinde (3.18) ve (3.19) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$C_i = \frac{2}{2m+3}\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+3}\right)}\cdot f\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+3}\right)\right)\cdot\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+3}\right)\right]}{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+3}\right)} \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. (3.20) eşitliğinden C_i katsayıları bulunmaktadır. Bulunan C_i katsayıları (3.15) de yerine yazılarak $f(x)$ fonksiyonunun üçüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu olan $F_V^m(x)$ bulunmaktadır.

3.1.4. $f(x)$ fonksiyonu için dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$[-1,1]$ aralığında sürekli olan $f(x)$ fonksiyonunun dördüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu $F_W^m(x)$ in seri açılımı

$$F_W^m(x) = C_0W_0(x) + C_1W_1(x) + \ldots + C_mW_m(x) \quad (3.21)$$

$$F_W^m(x) = \sum_{i=0}^{m} C_iW_i(x) \quad (3.22)$$

eşitlikleriyle gösterilmektedir. $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$ için (3.22) deki $F_W^m(x)$ yaklaşım polinomundaki C_i katsayıları

$$C_i = \frac{1}{m+\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{1-x_k}\cdot f(x_k)\cdot W_i(x_k) \quad (3.23)$$

eşitliğiyle ve (3.23) deki x_k lar

$$x_k = \cos\left(\frac{(m-k+2)\pi}{m+\frac{3}{2}}\right) \tag{3.24}$$

eşitliğiyle bulunmaktadır[5]. (3.23) deki $W_i(x_k)$ da (3.24) eşitliği yerine yazılırsa

$$W_i(x_k) = \frac{\sin\left[(2i+1)\left(\frac{(m-k+2)\pi}{2m+3}\right)\right]}{\sin\left[\left(\frac{(m-k+2)\pi}{2m+3}\right)\right]} \tag{3.25}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (3.23) eşitliğinde (3.24) ve (3.25) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$C_i = \frac{2}{2m+3}\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(m-k+2)\pi}{2m+3}\right)}\cdot f\left(\cos\left(\frac{2(m-k+2)\pi}{2m+3}\right)\right)\cdot\frac{\sin\left[(2i+1)\left(\frac{(m-k+2)\pi}{2m+3}\right)\right]}{\sin\left(\frac{(m-k+2)\pi}{2m+3}\right)} \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilir. (3.26) eşitliğinden C_i katsayıları bulunmaktadır. Bulunan C_i katsayıları (3.21) de yerine yazılarak $f(x)$ fonksiyonunun dördüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden $m.$ mertebeden yaklaşım polinomu olan $F_W^m(x)$ bulunmaktadır.

3.2. Sabit Katsayılı Adi Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Chebyshev Yaklaşım Metotları

(3.1) denkleminde $\rho_0(x)=\alpha_0$, $\rho_1(x)=\alpha_1$, $\ldots$, $\rho_n(x)=\alpha_n$ ve $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 0)$ alınırsa (3.1) diferansiyel denklemi

$$\alpha_0 y(x) + \sum_{t=1}^{n}\alpha_t y^{(t)}(x) = f(x) \neq 0 \tag{3.27}$$

sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemine dönüşmektedir. Aşağıdaki adımlar izlenerek sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için Chebyshev yaklaşım metodu elde edilir.

1.Adım: $y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i\phi_i(x)$ $\left(\phi_i(x)=T_i(x),U_i(x),V_i(x),W_i(x)\right)$ eşitliği (3.27) eşitliğinde $y(x)$ ve $y^{(t)}(x)$ de yerine yazılır,

2. Adım: 1. Adım sonucu elde edilecek eşitlikte $\phi_i^{(t)}(x)$ yerine (2.47), (2.49), (2.51) ve (2.53) deki Chebyshev polinomları için türev eşitlikleri yerine yazılır,

3. Adım: 2. Adım sonucu elde edilecek eşitlikte x^n $(n\geq 1)$ değişkenini Chebyshev polinomları cinisinden yazmak için (2.54), (2.55), (2.56) ve (2.57) deki eşitlikler yerine yazılır,

4. Adım: 3. Adım sonucunda elde edilecek eşitlik q_i bilinmeyen katsayıları ve $\phi_i(x)$ Chebyshev polinomları cinsinden elde edilmektedir. Elde edilen bu eşitliği daha sade bir eşitlik haline getirmek için eşitliğe farklı parametreler atanır.

3.2.1. Sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için birinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$m\geq 0$ yaklaşım polinomunun mertebesi, $n\geq 1$ diferansiyel denklemin mertebesi ve q_i sabit katsayılar olmak üzere (3.27) eşitliğinde $y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_iT_i(x)$ seri açılımı yerine yazıldığında

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_iT_i(x)+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t}^{m} q_iT_i^{(t)}(x)= f(x) \tag{3.28}$$

eşitliği elde edilir. (3.28) eşitliğindeki $T_i^{(t)}(x)$ yerine (2.47) deki eşitlik yazıldığında

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_iT_i(x)+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t}^{m} q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2\right]\!\right]}(-1)^k\,2^{i-2k}x^{i-2k-t}\,\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}=F_T^m(x) \tag{3.29}$$

eşitliği elde edilir. (3.29) eşitliğinde x^{i-2k-t} yerine (2.54) deki eşitlikler ayrı ayrı yazıldığında

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} (-1)^k \, 2^{i-2k} \, \frac{i}{i-k} \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}$$

$$\frac{1}{2^{i-2k-t-1}} \left(-\frac{T_0(x)}{2} \binom{i-2k-t}{(i-2k-t)/2} + \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} T_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \right) = F_T^m(x) \quad (3.30)$$

ve

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} (-1)^k \, 2^{i-2k} \, \frac{i}{i-k} \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}$$

$$\frac{1}{2^{i-2k-t-1}} \left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} T_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \right) = F_T^m(x) \quad (3.31)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.30) ve (3.31) eşitlikleri düzenlendiğinde

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} (-1)^k \, 2^{t} \, \frac{i}{i-k} \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}$$

$$\left(-\frac{T_0(x)}{2} \binom{i-2k-t}{(i-2k-t)/2} + \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} T_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \right) = F_T^m(x) \quad (3.32)$$

ve

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} (-1)^k \, 2^{t} \, \frac{i}{i-k} \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}$$

$$\left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} T_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \right) = F_T^m(x) \quad (3.33)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.32) ve (3.33) eşitliklerini

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} c_{(t,i)}^{k} d_{(t,i)}^{k} = F_T^m(x) \tag{3.34}$$

eşitliği ile yazabiliriz. (3.34) eşitliğindeki

$$c_{(t,i)}^{k} = (-1)^k 2^t \frac{i}{i-k} \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)!}{(i-2k-t)!} \tag{3.34a}$$

$(i-2k-t)$ çift ise,

$$d_{(t,i)}^{k} = -\frac{T_0(x)}{2} \binom{i-2k-t}{(i-2k-t)/2} + \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} T_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \tag{3.34b}$$

$(i-2k-t)$ tek ise,

$$d_{(t,i)}^{k} = \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} T_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \tag{3.34c}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır. (3.34) eşitliği ve (3.34a), (3.34b) ve (3.34c) koşulları yardımıyla $q_i \left(i = 0,1,2,\ldots,m\right)$ katsayıları bulunabilmektedir. Bu katsayılar $P_T^m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x)$ eşitliğinde yerine yazıldığında n. mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için birinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu bulunmaktadır.

3.2.2. Sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için ikinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$m \geq 0$ yaklaşım polinomunun mertebesi, $n \geq 1$ diferansiyel denklemin mertebesi ve q_i sabit katsayılar olmak üzere (3.27) eşitliğinde $y(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x)$ seri açılımı yerine yazıldığında

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i U_i^{(t)}(x) = f(x) \tag{3.35}$$

eşitliği elde edilir. (3.35) eşitliğindeki $U_i^{(t)}(x)$ yerine (2.49) daki eşitlik yazıldığında

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} (-1)^k \, 2^{i-2k} \, x^{i-2k-t} \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!} = F_U^m(x) \tag{3.36}$$

eşitliği elde edilir. (3.36) eşitliğinde x^{i-2k-t} yerine (2.55) deki eşitlik yazılır ve elde edilen eşitlikte sadeleştirme yapıldığında aşağıdaki eşitlik

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} (-1)^k \, 2^{t} \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}$$
$$\left(U_{i-2k-t}(x) + \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} \frac{i-2k-t-2p+1}{i-2k-t-p+1} U_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \right) = F_U^m(x) \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.37) eşitliğini

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} c_{(t,i)}^k d_{(t,i)}^k = F_U^m(x) \tag{3.38}$$

eşitliği ile yazabiliriz. (3.34) eşitliğindeki

$$c_{(t,i)}^k = (-1)^k \, 2^t \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)!}{(i-2k-t)!} \tag{3.38a}$$

ve

$$d_{(t,i)}^k = U_{i-2k-t}(x) + \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} \frac{i-2k-t-2p+1}{i-2k-t-p+1} U_{i-2k-t-2p}(x) \binom{i-2k-t}{p} \tag{3.38b}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır. (3.38) eşitliği ve (3.38a) ve (3.38b) koşulları yardımıyla $q_i\left(i=0,1,2,\ldots,m\right)$ katsayıları bulunabilmektedir. Bu katsayılar $P_U^m\left(x\right)=\sum_{i=0}^{m} q_i U_i\left(x\right)$ eşitliğinde yerine yazıldığında n. mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için ikinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu bulunmaktadır.

3.2.3. Sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için üçüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$m \geq 0$ yaklaşım polinomunun mertebesi, $n \geq 1$ diferansiyel denklemin mertebesi ve q_i sabit katsayılar olmak üzere (3.27) eşitliğinde $y\left(x\right)=\sum_{i=0}^{m} q_i V_i\left(x\right)$ eşitliği yazılırsa

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i V_i\left(x\right)+\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i V_i^{(t)}\left(x\right)= f\left(x\right) \tag{3.39}$$

eşitliği elde edilir. (3.39) eşitliğinde $V_i^{(t)}\left(x\right)$ yerine (2.51) deki eşitlik yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i V_i\left(x\right)+\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[(i-t)/2\right]\right]} \left(-1\right)^k 2^{i-2k} x^{i-2k-t} \binom{i-k}{k} \frac{\left(i-2k\right)!}{\left(i-2k-t\right)!} \\
&-\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t+1}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[(i-t-1)/2\right]\right]} \left(-1\right)^k 2^{i-2k-1} x^{i-2k-t-1} \binom{i-k-1}{k} \frac{\left(i-2k-1\right)!}{\left(i-2k-t-1\right)!} = F_V^m\left(x\right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

eşitliği elde edilir. (3.40) eşitliğindeki x^{i-2k-t} ve $x^{i-2k-t-1}$ yerine (2.56) deki eşitlik yazıldığında ve elde edilen eşitlik düzenlendiğinde

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_i V_i\left(x\right)+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]}\left(-1\right)^k 2^t\binom{i-k}{k}\frac{\left(i-2k\right)\,!}{\left(i-2k-t\right)\,!}$$

$$\cdot\left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p(x)}\binom{i-2k-t}{p}+\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p+1}\left(x\right)\binom{i-2k-t}{p-1}\right)$$

$$-\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t+1}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2 \right]\!\right]}\left(-1\right)^k 2^t\binom{i-k-1}{k}\frac{\left(i-2k-1\right)\,!}{\left(i-2k-t-1\right)\,!}$$

$$\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2 \right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p-1}\left(x\right)\binom{i-2k-t-1}{p}\Bigg)\left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2 \right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p-1}\left(x\right)\binom{i-2k-t-1}{p}\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2 \right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p}\left(x\right)\binom{i-2k-t-1}{p-1}\right)=F_V^m\left(x\right) \qquad (3.41)$$

eşitliği elde edilir. (3.41) eşitliğini

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_i V_i\left(x\right)+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} c_{1(t,i)}^{\,k} d_{1(t,i)}^{\,k}-\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t+1}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2 \right]\!\right]} c_{2(t,i)}^{\,k} d_{2(t,i)}^{\,k}=F_V^m\left(x\right) \qquad (3.42)$$

eşitliği ile yazabiliriz. (3.42) eşitliğindeki

$$c_{1(t,i)}^{\,k}=\left(-1\right)^k 2^t\binom{i-k}{k}\frac{\left(i-2k\right)!}{\left(i-2k-t\right)!} \qquad (3.42a)$$

$$c_{2(t,i)}^{\,k}=\left(-1\right)^k 2^t\binom{i-k-1}{k}\frac{\left(i-2k-1\right)!}{\left(i-2k-t-1\right)!} \qquad (3.42b)$$

ve

$$d_{1(t,i)}^{\,k}=\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p(x)}\binom{i-2k-t}{p}+\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p+1}\left(x\right)\binom{i-2k-t}{p-1} \qquad (3.42c)$$

$$d_{2(t,i)}^{\,k}=\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2\right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p-1}(x)\binom{i-2k-t-1}{p}+\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2\right]\!\right]} V_{i-2k-t-2p}(x)\binom{i-2k-t-1}{p-1} \tag{3.42d}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır. (3.42) eşitliği ve (3.42a), (3.42b), (3.42c) ve (3.42d) koşulları yardımıyla q_i katsayıları bulunmaktadır. Bulunan q_i katsayıları $P_V^m(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x)$ seri açılımında yerine yazıldığında $n.$ mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin üçüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden $m.$ mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.2.4. Sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

$m \geq 0$ yaklaşım polinomunun mertebesi, $n \geq 1$ diferansiyel denklemin mertebesi ve q_i sabit katsayılar olmak üzere (3.27) eşitliğinde $y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)$ eşitliği yazılırsa

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)+\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i W_i^{(t)}(x)=f(x) \tag{3.43}$$

eşitliği elde edilir. (3.43) eşitliğinde $W_i^{(t)}(x)$ yerine (2.53) deki eşitlik yazılırsa

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)+\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2\right]\!\right]} (-1)^k\, 2^{i-2k} x^{i-2k-t}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}$$

$$+\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \sum_{i=t+1}^{m} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2\right]\!\right]} (-1)^k\, 2^{i-2k-1} x^{i-2k-t-1}\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)\,!}{(i-2k-t-1)\,!}=F_W^m(x) \tag{3.44}$$

elde edilir. (3.44) eşitliğindeki x^{i-2k-t} ve $x^{i-2k-t-1}$ yerine (2.57) deki eşitlik yazıldığında ve elde edilen eşitlik düzenlendiğinde

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{m}q_iW_i(x)+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2\right]\!\right]}(-1)^k2^t\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}\left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p}(x)\binom{i-2k-t}{p}\right.$$

$$\left.-\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p+1}(x)\binom{i-2k-t}{p-1}\right)+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t+1}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2\right]\!\right]}(-1)^k2^t\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)\,!}{(i-2k-t-1)\,!}$$

$$\left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p-1}(x)\binom{i-2k-t-1}{p}-\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p}(x)\binom{i-2k-t-1}{p-1}\right)=F_W^m(x) \quad (3.45)$$

eşitliği elde edilir. (3.45) eşitliğini

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{m}q_iW_i(x)+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2\right]\!\right]}c_{1(t,i)}^{\,k}d_{1(t,i)}^{\,k}+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t\sum_{i=t+1}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2\right]\!\right]}c_{2(t,i)}^{\,k}d_{2(t,i)}^{\,k}=F_W^m(x) \quad (3.46)$$

eşitliği ile yazabiliriz. (3.46) eşitliğindeki

$$c_{1(t,i)}^{\,k}=(-1)^k2^t\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)!}{(i-2k-t)!} \quad (3.46a)$$

$$c_{2(t,i)}^{\,k}=(-1)^k2^t\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)!}{(i-2k-t-1)!} \quad (3.46b)$$

ve

$$d_{1(t,i)}^{\,k}=\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p}(x)\binom{i-2k-t}{p}-\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p+1}(x)\binom{i-2k-t}{p-1} \quad (3.46c)$$

$$d_{2(t,i)}^{\,k}=\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p-1}(x)\binom{i-2k-t-1}{p}-\sum_{p=1}^{\left[\!\left[(i-2k-t-1)/2\right]\!\right]}W_{i-2k-t-2p}(x)\binom{i-2k-t-1}{p-1} \quad (3.46d)$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır. (3.46) eşitliği ve (3.46a), (3.46b), (3.46c) ve (3.46d) koşulları yardımıyla q_i katsayıları bulunmaktadır. Bulunan q_i katsayıları

$P_W^m(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)$ seri açılımında yerine yazıldığında $n.$ mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin dördüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden $m.$ mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.3. Değişken Katsayılı Adi Lineer Diferansiyel Denklemler için Chebyshev Yaklaşım Metotları

(3.1) denkleminde $\rho_0(x)=\alpha_0(x),\ \rho_1(x)=\alpha_1(x),\ \ldots,\ \rho_n(x)=\alpha_n(x)$ olmak üzere

$$\alpha_0(x)y(x)+\sum_{t=1}^{n}\alpha_t(x)y^{(t)}(x)=f(x)\neq 0 \tag{3.47}$$

eşitliği değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemini göstermektedir. Aşağıdaki adımlar izlenerek değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için Chebyshev yaklaşım metodu elde edilmektedir.

1. Adım: $\alpha_0(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}x^s$, $\alpha_t(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}x^s$ $(t\geq 1)$ olarak alınır ve $y(x)=\sum_{i=0}^{m}q_i\phi_i(x)$ $(\phi_i(x)=T_i(x),U_i(x),V_i(x),W_i(x))$ eşitliği (3.47) eşitliğindeki $y(x)$ ve $y^{(t)}(x)$ de yerine yazılır,

2. Adım: 1. Adım sonucu elde edilecek eşitikte $\phi_i(x)$ yerine (2.24), (2.27), (2.30) ve (2.33) deki Chebyshev polinomlar için alternatif eşitlikleri ve $\phi_i^{(t)}(x)$ yerine (2.47), (2.49), (2.51) ve (2.53) deki Chebyshev polinomları için türev eşitlikleri yerine yazılır,

3. Adım: 2. Adım sonucu elde edilen eşitlikteki x^n $(n\geq 1)$ parametrelerini Chebyshev polinomları cinsinden göstermek için (2.54), (2.55), (2.56) ve (2.57) eşitlikleri yerine yazılır,

4. Adım: 3. Adım sonucunda elde edilecek eşitlik q_i bilinmeyen katsayıları ve $\phi_i(x)$ Chebyshev polinomları cinsinden elde edilmektedir. Elde edilen bu eşitliği daha sade bir eşitlik haline getirmek için eşitliğe farklı parametreler atanır.

3.3.1. Değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için birinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.47) eşitliğinde $\alpha_0(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}x^s$, $t\geq 1$ olmak üzere $\alpha_t(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}x^s$ alınır ve $y(x)=\sum_{i=0}^{m}q_iT_i(x)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}x^s\sum_{i=0}^{m}q_iT_i(x)+\sum_{t=1}^{n}\ \sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}x^s\sum_{i=t}^{m}q_iT_i^{(t)}(x)=f(x) \tag{3.48}$$

eşitliği elde edilir. (3.48) eşitliğinde $T_i(x)$ yerine (2.24) eşitliği ve $T_i^{(t)}(x)$ yerine (2.47) deki eşitlik yazıldığında

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k-1}x^{i-2k+s}\,\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}+\sum_{t=1}^{n}\ \sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\\&\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k-1}x^{i-2k+s-t}\,\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}=F_T^m(x)\end{aligned} \tag{3.49}$$

eşitliği bulunur. (3.49) eşitliğinde x^{i-2k+s} ve $x^{i-2k+s-t}$ yerine (2.54) deki eşitlikler yazıldığında

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}(-1)^k\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}\frac{1}{2^{s+1}}\left(-\frac{T_0(x)}{2}\binom{i-2k+s}{(i-2k+s)/2}\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s)/2 \right]\!\right]}T_{i-2k+s-2p}(x)\binom{i-2k+s}{p}\right)+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{i=t}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]}\frac{1}{2^{s-t+1}}\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}$$

$$\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}\left(-\frac{T_0(x)}{2}\binom{i-2k+s-t}{(i-2k+s-t)/2}\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s-t)/2 \right]\!\right]}T_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p}\right)=F_T^m(x) \tag{3.50}$$

ve

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}(-1)^k\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}\frac{1}{2^{s+1}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s)/2 \right]\!\right]}T_{i-2k+s-2p}(x)\binom{i-2k+s}{p}\right)$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{i=t}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]}\frac{1}{2^{s-t+1}}\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}$$

$$\left(\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s-t)/2 \right]\!\right]}T_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p}\right)=F_T^m(x) \tag{3.51}$$

eşitlikleri elde edilmektedir. (3.50) ve (3.51) eşitliklerini

$$\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=0}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_s^{(0)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(s,0)}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]}e_s^{(t)}c_{(i,k)}^{s}d_{(i,k)}^{(s,t)}=F_T^m(x) \tag{3.52}$$

eşitliği ile yazabiliriz. (3.52) eşitliğindeki

$$e_s^{(t)}=\frac{1}{2^{s-t+1}}\beta_s^{(t)} \tag{3.52a}$$

$$c_{(i,k)}^{s}=(-1)^{k}\frac{i}{i-k}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)!}{(i-2k-t)!}\,,\ c_{(0,0)}^{0}=1(i,k=0) \tag{3.52b}$$

$(i-2k+s-t)$ çift ise,

$$d_{(i,k)}^{(s,t)}=\frac{T_0(x)}{2}\binom{i-2k+s-t}{(i-2k+s-t)/2}+\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s-t)/2\right]\!\right]}T_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p} \tag{3.52c}$$

$(i-2k+s-t)$ tek ise,

$$d_{(i,k)}^{(s,t)}=\sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s-t)/2\right]\!\right]}T_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p} \tag{3.52d}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır. (3.52) eşitliği ve (3.52a), (3.52b), (3.52c) ve (3.52d) koşulları yardımıyla q_i katsayıları bulunabilmektedir. Bulunan q_i katsayıları $P_T^m(x)=\sum_{i=0}^{m}q_iT_i(x)$ seri açılımında yerine yazılarak değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin birinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden yaklaşım polinomu bulunmaktadır.

3.3.2. Değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için ikinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.47) eşitliğinde $\alpha_0(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}x^s$, $t\geq 1$ olmak üzere $\alpha_t(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}x^s$ alınır ve $y(x)=\sum_{i=0}^{m}q_iU_i(x)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}x^s\sum_{i=0}^{m}q_iU_i(x)+\sum_{t=1}^{n}\ \sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}x^s\sum_{i=t}^{m}q_iU_i^{(t)}(x)=f(x) \tag{3.53}$$

eşitliği elde edilir. (3.53) eşitliğinde $U_i(x)$ yerine (2.27) eşitliği ve $U_i^{(t)}(x)$ yerine (2.49) eşitliği yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k}\,x^{i-2k+s}\binom{i-k}{k}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i$$

$$\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k}\,x^{i-2k+s-t}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}=F_T^m(x) \tag{3.54}$$

eşitliği bulunur. (3.54) eşitliğinde x^{i-2k+s} ve $x^{i-2k+s-t}$ yerine (2.55) eşitliği yazıldığında

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}(-1)^k\binom{i-k}{k}\frac{1}{2^s}\left(U_{i-2k+s}(x)+\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s)/2]\!]}\frac{i-2k+s-2p+1}{i-2k+s-p+1}U_{i-2k+s-2p}(x)\right)$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{i=t}^{[\![(i-t)/2]\!]}(-1)^k\frac{1}{2^{s-t}}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}\Bigg(U_{i-2k+s-t}(x)$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s)/2]\!]}\frac{i-2k+s-t-2p+1}{i-2k+s-t-p+1}U_{i-2k+s-t-2p}(x)\right)=F_U^m(x) \tag{3.55}$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.55) eşitliğini

$$\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=0}^{m}q_i\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}e_s^{(0)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(s,0)}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=t}^{m}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]}e_s^{(t)}c_{(i,k)}^{s}d_{(i,k)}^{(s,t)}=F_U^m(x) \tag{3.56}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.56) eşitliğindeki

$$e_s^{(t)} = \frac{1}{2^{s-t}} \beta_s^{(t)} \tag{3.56a}$$

$$c_{(i,k)}^{s} = (-1)^k \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)!}{(i-2k-t)!}, \; c_{(0,0)}^{0} = 1(i,k=0) \tag{3.56b}$$

$$d_{(i,k)}^{(s,t)} = U_{i-2k+s-t}(x) + \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{i-2k+s-t}{2} \right\rfloor} \frac{i-2k+s-t-2p+1}{i-2k+s-t-p+1} U_{i-2k+s-t-2p}(x) \tag{3.56c}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır. (3.56) eşitliği ve (3.56a), (3.56b) ve (3.56c) koşulları yardımıyla q_i katsayıları bulunabilmektedir. Bulunan q_i katsayıları $P_U^m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x)$ seri açılımında yerine yazılarak değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin ikinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden yaklaşım polinomu bulunmaktadır.

3.3.3. Değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için üçüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.47) eşitliğinde $\alpha_0(x) = \sum_{s=0}^{d} \beta_s^{(0)} x^s$, $t \geq 1$ olmak üzere $\alpha_t(x) = \sum_{s=0}^{d} \beta_s^{(t)} x^s$ alınır ve $y(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{d} \beta_s^{(0)} x^s \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) + \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=0}^{d} \beta_s^{(t)} x^s \sum_{i=t}^{m} q_i V_i^{(t)}(x) = f(x) \tag{3.57}$$

eşitliği elde edilir. (3.57) eşitliğinde $V_i(x)$ yerine (2.30) eşitliği ve $V_i^{(t)}(x)$ yerine (2.51) eşitliği yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k}\,x^{i-2k+s}\binom{i-k}{k}-\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k-1}x^{i-2k+s-1}\binom{i-k-1}{k}\right)$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\ \sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k}\,x^{i-2k+s-t}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]}(-1)^k\,2^{i-2k-1}x^{i-2k+s-t-1}\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)\,!}{(i-2k-t-1)\,!}\right)=F_V^m(x) \tag{3.58}$$

eşitliği bulunur. (3.58) eşitliğinde x^{i-2k+s}, $x^{i-2k+s-1}$, $x^{i-2k+s-t}$ ve $x^{i-2k+s-t-1}$ yerine (2.56) eşitliği yazıldığında

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\left[\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}(-1)^k\,\frac{1}{2^s}\binom{i-k}{k}\left(\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s)/2]\!]}V_{i-2k+s-2p}(x)\binom{i-2k+s}{p}\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s\,\geq\,1}}^{[\![(i-2k+s+1)/2]\!]}V_{i-2k+s-2p+1}(x)\binom{i-2k+s}{p-1}\right)-\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]}(-1)^k\,\frac{1}{2^s}\binom{i-k-1}{k}$$

$$\left.\left(\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s+1)/2]\!]}V_{i-2k+s-2p+1}(x)\binom{i-2k+s-1}{p}+\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s\,\geq\,2}}^{[\![(i-2k+s)/2]\!]}V_{i-2k+s-2p}(x)\binom{i-2k+s-1}{p-1}\right)\right]$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\ \sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\left[\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]}(-1)^k\,\frac{1}{2^{s-t}}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}\right.$$

$$\left(\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s-t)/2]\!]}V_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p}+\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s-t\,\geq\,1}}^{[\![(i-2k+s-t+1)/2]\!]}V_{i-2k+s-t-2p+1}(x)\binom{i-2k+s-t}{p-1}\right) \tag{3.59}$$

$$-\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,t+1}}^{\left[\!\left[\frac{(i-t-1)}{2}\right]\!\right]}(-1)^k\frac{1}{2^{s-t}}\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)\,!}{(i-2k-t-1)\,!}\left(\sum_{\substack{p=0\\ i-2k+s-t\,\geq\,1}}^{\left[\!\left[\frac{(i-2k+s-t-1)}{2}\right]\!\right]}V_{i-2k+s-t-2p-1}(x)\binom{i-2k+s-t-1}{p}\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s-t\,\geq\,2}}^{\left[\!\left[\frac{(i-2k+s-t)}{2}\right]\!\right]}V_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t-1}{p-1}\right)\Bigg]=F_V^m(x) \tag{3.59a}$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.59)-(3.59a) eşitliğini

$$\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=0}^{m}q_i\left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{i}{2}\right]\!\right]}e_s^{(0)}c_{1(i,k)}^{(s,0)}d_{1(i,k)}^{(s,0)}-\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,1}}^{\left[\!\left[\frac{(i-1)}{2}\right]\!\right]}e_s^{(0)}c_{2(i,k)}^{(s,0)}d_{2(i,k)}^{(s,0)}\right)+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=t}^{m}q_i$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(i-t)}{2}\right]\!\right]}e_s^{(t)}c_{1(i,k)}^{(s,t)}d_{1(i,k)}^{(s,t)}-\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,t+1}}^{\left[\!\left[\frac{(i-t-1)}{2}\right]\!\right]}e_s^{(t)}c_{2(i,k)}^{(s,t)}d_{2(i,k)}^{(s,t)}\right)=F_V^m(x) \tag{3.60}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.60) eşitliğindeki

$$e_s^{(t)}=\frac{1}{2^{s-t}}\beta_s^{(t)} \tag{3.60a}$$

$$c_{1(i,k)}^{(s,t)}=(-1)^k\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)!}{(i-2k-t)!},\ c_{1(0,0)}^{(s,t)}=1(i,k=0) \tag{3.60b}$$

$$c_{2(i,k)}^{(s,t)}=(-1)^k\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)!}{(i-2k-t-1)!},\ c_{2(0,0)}^{(s,t)}=1(i,k=0) \tag{3.60c}$$

$$d_{1(i,k)}^{(s,t)}=\sum_{p=0}^{\left[\!\left[\frac{(i-2k+s-t)}{2}\right]\!\right]}V_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p}+\sum_{\substack{p=1\\ i-2k-t\,\geq\,1}}^{\left[\!\left[\frac{(i-2k-t+1)}{2}\right]\!\right]}V_{i-2k+s-t-2p+1}(x)\binom{i-2k+s-t}{p-1} \tag{3.60d}$$

$$d_{2(i,k)}^{(s,t)}=\sum_{\substack{p=0\\ i-2k+s-t\,\geq\,1}}^{\left[\!\left[\frac{(i-2k+s-t-1)}{2}\right]\!\right]}V_{i-2k+s-t-2p-1}(x)\binom{i-2k+s-t-1}{p}+\sum_{\substack{p=1\\ i-2k-t\,\geq\,2}}^{\left[\!\left[\frac{(i-2k-t)}{2}\right]\!\right]}V_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p-1} \tag{3.60e}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır.. (3.60) eşitliği ve (3.60a), (3.60b), (3.60c), (3.60d) ve (3.60e) koşulları yardımıyla q_i katsayıları bulunabilmektedir. Bulunan q_i katsayıları $P_V^m(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x)$ seri açılımında yerine yazılarak değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin üçüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden yaklaşım polinomu bulunmaktadır.

3.3.4. Değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.47) eşitliğinde $\alpha_0(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}x^s$, $t\geq 1$ olmak üzere $\alpha_t(x)=\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}x^s$ alınır ve $y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}x^s\sum_{i=0}^{m}q_iW_i(x)+\sum_{t=1}^{n}\ \sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}x^s\sum_{i=t}^{m}q_iW_i^{(t)}(x)=f(x) \tag{3.61}$$

eşitliği elde edilir. (3.61) eşitliğinde $W_i(x)$ yerine (2.33) eşitliği ve $W_i^{(t)}(x)$ yerine (2.53) eşitliği yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}(-1)^k\,2^{i-2k}\,x^{i-2k+s}\binom{i-k}{k}+\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,1}}^{\left[\!\left[(i-1)/2 \right]\!\right]}(-1)^k\,2^{i-2k-1}x^{i-2k+s-1}\binom{i-k-1}{k}\right)\\
&+\sum_{t=1}^{n}\ \sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]}(-1)^k\,2^{i-2k}\,x^{i-2k+s-t}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}\right.\\
&\left.+\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,t+1}}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2 \right]\!\right]}(-1)^k\,2^{i-2k-1}x^{i-2k+s-t-1}\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)\,!}{(i-2k-t-1)\,!}\right)=F_W^m(x)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

eşitliği bulunur. (3.62) eşitliğinde x^{i-2k+s}, $x^{i-2k+s-1}$, $x^{i-2k+s-t}$ ve $x^{i-2k+s-t-1}$ yerine (2.57) eşitliği yazıldığında

$$\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(0)}\sum_{i=0}^{m}q_i\left[\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}(-1)^k\frac{1}{2^s}\binom{i-k}{k}\left(\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s)/2]\!]}W_{i-2k+s-2p}(x)\binom{i-2k+s}{p}\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s\,\geq\,1}}^{[\![(i-2k+s+1)/2]\!]}W_{i-2k+s-2p+1}(x)\binom{i-2k+s}{p-1}\right)+\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]}(-1)^k\frac{1}{2^s}\binom{i-k-1}{k}$$

$$\left.\left(\sum_{\substack{p=0\\ i-2k+s\,\geq\,1}}^{[\![(i-2k+s-1)/2]\!]}W_{i-2k+s-2p-1}(x)\binom{i-2k+s-1}{p}-\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s\,\geq\,2}}^{[\![(i-2k+s)/2]\!]}W_{i-2k+s-2p}(x)\binom{i-2k+s-1}{p-1}\right)\right]$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\beta_s^{(t)}\sum_{i=t}^{m}q_i\left[\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]}(-1)^k\frac{1}{2^{s-t}}\binom{i-k}{k}\frac{(i-2k)\,!}{(i-2k-t)\,!}\left(\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s-t)/2]\!]}W_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t}{p}\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s-t\,\geq\,1}}^{[\![(i-2k+s-t+1)/2]\!]}W_{i-2k+s-t-2p+1}(x)\binom{i-2k+s-t}{p-1}\right)+\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]}(-1)^k\frac{1}{2^{s-t}}\binom{i-k-1}{k}\frac{(i-2k-1)\,!}{(i-2k-t-1)\,!}$$

$$\left.\left(\sum_{p=0}^{[\![(i-2k+s-t-1)/2]\!]}W_{i-2k+s-t-2p-1}(x)\binom{i-2k+s-t-1}{p}-\sum_{\substack{p=1\\ i-2k+s-t\,\geq\,2}}^{[\![(i-2k+s-t)/2]\!]}W_{i-2k+s-t-2p}(x)\binom{i-2k+s-t-1}{p-1}\right)\right]=F_W^m(x) \tag{3.63}$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.63) eşitliğini

$$\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=0}^{m}q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}e_s^{(0)}c_{1(i,k)}^{(s,0)}d_{1(i,k)}^{(s,0)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]}e_s^{(0)}c_{2(i,k)}^{(s,0)}d_{2(i,k)}^{(s,0)}\right)+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\sum_{i=t}^{m}q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]}e_s^{(t)}c_{1(i,k)}^{(s,t)}d_{1(i,k)}^{(s,t)}\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=0\\ i\,\geq\,t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]}e_s^{(t)}c_{2(i,k)}^{(s,t)}d_{2(i,k)}^{(s,t)}\right)=F_W^m(x) \tag{3.64}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.64) eşitliğindeki

$$e_s^{(t)} = \frac{1}{2^{s-t}} \beta_s^{(t)} \tag{3.64a}$$

$$c_{1(i,k)}^{(s,t)} = (-1)^k \binom{i-k}{k} \frac{(i-2k)!}{(i-2k-t)!},\ c_{1(0,0)}^{(s,t)} = 1(i,k=0) \tag{3.64b}$$

$$c_{2(i,k)}^{(s,t)} = (-1)^k \binom{i-k-1}{k} \frac{(i-2k-1)!}{(i-2k-t-1)!},\ c_{2(0,0)}^{(s,t)} = 1(i,k=0) \tag{3.64c}$$

$$d_{1(i,k)}^{(s,t)} = \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s-t)/2 \right]\!\right]} W_{i-2k+s-t-2p}(x) \binom{i-2k+s-t}{p} - \sum_{\substack{p=1 \\ i-2k-t\,\geq\,1}}^{\left[\!\left[(i-2k-t+1)/2 \right]\!\right]} W_{i-2k+s-t-2p+1}(x) \binom{i-2k+s-t}{p-1} \tag{3.64d}$$

$$d_{2(i,k)}^{(s,t)} = \sum_{p=0}^{\left[\!\left[(i-2k+s-t-1)/2 \right]\!\right]} W_{i-2k+s-t-2p-1}(x) \binom{i-2k+s-t-1}{p} - \sum_{\substack{p=1 \\ i-2k-t\,\geq\,2}}^{\left[\!\left[(i-2k-t)/2 \right]\!\right]} W_{i-2k+s-t-2p}(x) \binom{i-2k+s-t-1}{p-1} \tag{3.64e}$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır. (3.64) eşitliği ve (3.64a), (3.64b), (3.64c), (3.64d) ve (3.64e) koşulları yardımıyla q_i katsayıları bulunabilmektedir. Bulunan q_i katsayıları $P_W^m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)$ seri açılımında yerine yazılarak değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin dördüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden yaklaşım polinomu bulunmaktadır.

3.4. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Adi Lineer Diferansiyel Denklem için Chebyshev Yaklaşım Metotları

(3.1) eşitliğinde $n=1$ ve $\alpha_0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\rho_0(x) = \alpha_0$ ve $\rho_1(x) = \alpha_1$ alınırsa

$$\alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = f(x) \neq 0 \tag{3.65}$$

birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

3.4.1. Birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için birinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.65) eşitliğinde

$$y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) \tag{3.66}$$

birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_1\left(\sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x)\right)'+\alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x)=F_T^m(x) \tag{3.67}$$

olur. Buradan

$$\alpha_1\sum_{i=1}^{m} q_i T_i'(x)+\alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x)=F_T^m(x) \tag{3.68}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $T_i(x)$ in ilk dokuz teriminin birinci mertebeden türevinin birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$T_0'(x)=0$$

$$T_1'(x)=1=T_0(x)$$

$$T_2'(x)=4x=4T_1(x)$$

$$T_3'(x)=12x^2-3=3T_0(x)+6T_2(x)$$

$$T_4'(x)=32x^3-16x=8T_1(x)+8T_3(x)$$

$$T_5'(x)=80x^4-60x^2+5=5T_0(x)+10T_2(x)+10T_4(x)$$

$$T_6'(x)=192x^5-192x^3+36x=12T_1(x)+12T_3(x)+12T_5(x)$$

$$T_7'(x)=448x^6-560x^4+168x^2-7=7T_0(x)+14T_2(x)+14T_4(x)+14T_6(x)$$

$$T_8'(x)=1024x^7-1536x^5+640x^3-64x=16T_1(x)+16T_3(x)+16T_5(x)+16T_7(x) \tag{3.69}$$

şeklindedir. (3.69) deki eşitlikler yardımıyla da $T_i(x)$ in birinci mertebeden türevleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$$T_i'(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]} 2iT_{2k+1}(x), & i \geq 1 \quad çift \quad ise \\ 0, & i = 0 \quad ise \\ -iT_0(x) + \sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]} 2iT_{2k}(x), & i \geq 1 \quad tek \quad ise \end{cases} \tag{3.70}$$

hesaplanabilmektedir. $i \geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.8) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.68) eşitliğindeki $T_i'(x)$' ler (3.70) deki eşitlikler yardımıyla türevlerinden kurtarılarak $T_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. Elde edilen eşitliğin sağ ve sol tarafı $T_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $T_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i = 0$ ise,

$$\frac{C_0}{2} = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 \sum_{\substack{k=0 \\ m \geq 1}}^{\left[\!\left[(m-1)/2 \right]\!\right]} (2k+1) q_{2k+1} \tag{3.71}$$

ve $i \geq 1$ ise,

$$C_i = \begin{cases} \alpha_0 q_m, & i = m \;\; ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=\frac{i+1}{2}}^{[\![m/2]\!]} 4k q_{2k}, & 1 \le i \le m-1 \;\; tek \;\; ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=\frac{i}{2}}^{[\![(m-1)/2]\!]} (4k+2) q_{2k+1}, & 1 \le i \le m-1 \;\; çift \;\; ise \end{cases} \tag{3.72}$$

hesaplanabilmektedir. (3.71) ve (3.72) eşitlikleri yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_T^m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılarak (3.65) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden $m.$ mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.4.2. Birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için ikinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.65) eşitliğinde

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) \tag{3.73}$$

ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_1 \left(\sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) \right)' + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) = F_U^m(x) \tag{3.75}$$

olur. Buradan

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{m} q_i U_i'(x) + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x) = F_U^m(x) \tag{3.75}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $U_i(x)$ in ilk dokuz teriminin birinci mertebeden türevinin ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$\begin{aligned}
&U_0'(x)=0\\
&U_1'(x)=2=2U_0(x)\\
&U_2'(x)=8x=4U_1(x)\\
&U_3'(x)=24x^2-4=2U_0(x)+6U_2(x)\\
&U_4'(x)=64x^3-24x=4U_1(x)+8U_3(x)\\
&U_5'(x)=160x^4-96x^2+6=2U_0(x)+6U_2(x)+10U_4(x)\\
&U_6'(x)=384x^5-320x^3+48x=4U_1(x)+8U_3(x)+12U_5(x)\\
&U_7'(x)=896x^6-960x^4+240x^2-8=2U_0(x)+6U_2(x)+10U_4(x)+14U_6(x)\\
&U_8'(x)=2048x^7-2688x^5+960x^3-80x=4U_1(x)+8U_3(x)+12U_5(x)+16U_7(x)
\end{aligned}\tag{3.76}$$

şeklindedir. Yukarıdaki (3.76) eşitlikleri yardımıyla $U_i(x)$ in birinci mertebeden türevleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$$U_i'(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{[\![i/2]\!]}4kU_{2k-1}(x), & i\geq 1 \quad \textit{çift} \quad \textit{ise}\\[2ex] 0, & i=0 \quad \textit{ise}\\[2ex] \displaystyle\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}(4k+2)U_{2k}(x), & i\geq 1 \quad \textit{tek} \quad \textit{ise}\end{cases}\tag{3.77}$$

hesaplanabilmektedir. $i\geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.14) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.75) eşitliğindeki $U_i'(x)$ ' ler (3.77) deki eşitlikler yardımıyla türevlerinden kurtarılarak $U_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. (3.75) deki eşitliğin sağ ve sol tarafı $U_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $U_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i = 0$ için,

$$C_0 = \alpha_0 q_0 + 2\alpha_1 \sum_{\substack{k=0 \\ m \geq 1}}^{\left[\!\left[(m-1)/2 \right]\!\right]} q_{2k+1} \tag{3.78}$$

ve $i \geq 1$ için,

$$C_i = \begin{cases} \alpha_0 q_i, & i = m \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \displaystyle\sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} (2i+2) q_{2k}, & 1 \leq i \leq m-1 \ \ tek \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \displaystyle\sum_{k=\frac{i}{2}}^{\left[\!\left[(m-1)/2 \right]\!\right]} (4i+2) q_{2k+1}, & 1 \leq i \leq m-1 \ \ \c{c}ift \ \ ise \end{cases} \tag{3.79}$$

hesaplanabilmektedir. (3.78) ve (3.79) eşitlikleri yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_U^m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılarak (3.65) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.4.3. Birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için üçüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.65) eşitliğinde

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) \tag{3.80}$$

üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_1\left(\sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x)\right)' + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) = F_V^m(x) \tag{3.81}$$

olur. Buradan

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{m} q_i V_i'(x) + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) = F_V^m(x) \tag{3.82}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $V_i(x)$ in ilk dokuz teriminin birinci mertebeden türevinin üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$V_0'(x) = 0$$

$$V_1'(x) = 2 = 2V_0(x)$$

$$V_2'(x) = 8x - 2 = 2V_0(x) + 4V_1(x)$$

$$V_3'(x) = 24x^2 - 8x - 4 = 4V_0(x) + 2V_1(x) + V_2(x)$$

$$V_4'(x) = 64x^3 - 24x^2 - 24x + 4 = 4V_0(x) + 6V_1(x) + 2V_2(x) + 8V_3(x)$$

$$\begin{aligned} V_5'(x) &= 160x^4 - 64x^3 - 96x^2 + 24x + 6 \\ &= 6V_0(x) + 4V_1(x) + 8V_2(x) + 2V_3(x) + 10V_4(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_6'(x) &= 384x^5 - 160x^4 - 320x^3 + 96x^2 + 48x - 6 \\ &= 6V_0(x) + 8V_1(x) + 4V_2(x) + 10V_3(x) + 2V_4(x) + 12V_5(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_7'(x) &= 896x^6 - 384x^5 - 960x^4 + 320x^3 + 240x^2 - 48x - 8 \\ &= 8V_0(x) + 6V_1(x) + 10V_2(x) + 4V_3(x) + 12V_4(x) + 2V_5(x) + 14V_6(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_8'(x) &= 2048x^7 - 896x^6 - 2688x^5 + 960x^4 + 960x^3 - 240x^2 - 80x + 8 \\ &= 8V_0(x) + 10V_1(x) + 6V_2(x) + 12V_3(x) + 4V_4(x) + 14V_5(x) + 2V_6(x) + 16V_7(x) \end{aligned} \tag{3.83}$$

şeklindedir. (3.83) deki eşitlikler yardımıyla $V_i(x)$ in birinci mertebeden türevleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$$V_i'(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}(i-2k)V_{2k}(x)+\sum\limits_{k=1}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}(i+2k)V_{2k-1}(x), & i\geq 1 \quad çift \quad ise\\ 0, & i=0 \quad ise\\ \sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}(i+2k+1)V_{2k}(x)+\sum\limits_{\substack{k=1\\ i\geq 2}}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}(i-2k+1)V_{2k-1}(x), & i\geq 1 \quad tek \quad ise\end{cases} \tag{3.84}$$

hesaplanabilmektedir. $i\geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.20) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.82) eşitliğindeki $V_i'(x)$' ler (3.84) deki eşitlikler yardımıyla türevlerinden kurtarılarak $V_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. (3.82) deki eşitliğin sağ ve sol tarafı $V_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $V_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile bilinmeyen q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i=0$ için,

$$C_0=\alpha_0 q_0+\alpha_1\sum_{\substack{k=1\\ m\geq 1}}^{\left[\!\left[(m+1)/2 \right]\!\right]}2kq_{2k-1}+\alpha_1\sum_{\substack{k=1\\ m\geq 2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]}2kq_{2k} \tag{3.85}$$

ve $i\geq 1$ için,

$$C_i=\begin{cases}\alpha_0 q_i, & i=m \quad ise\\ \alpha_0 q_i+\alpha_1\sum\limits_{k=\frac{i+1}{2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]}(2k+i+1)q_{2k}+\alpha_1\sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]}2kq_{2k+i}, & 1\leq i\leq m-1 \quad tek \quad ise\\ \alpha_0 q_i+\alpha_1\sum\limits_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i+1)/2 \right]\!\right]}(2k+2i)q_{2k+i-1}+\alpha_1\sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]}2kq_{2k+i}, & 1\leq i\leq m-1 \quad çift \quad ise\end{cases} \tag{3.86}$$

hesaplanabilmektedir. (3.85) ve (3.86) eşitlikleri yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_V^m(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılarak (3.65) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden $m.$ mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.4.4. Birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.65) eşitliğinde

$$y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x) \tag{3.87}$$

dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_1\left(\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)\right)' + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x) = F_W^m(x) \tag{3.88}$$

olur. Buradan

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{m} q_i W_i'(x) + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x) = F_W^m(x) \tag{3.89}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $W_i(x)$ in ilk dokuz teriminin birinci türevinin dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$\begin{aligned}
W_0'(x) &= 0 \\
W_1'(x) &= 2 = 2W_0(x) \\
W_2'(x) &= 8x+2 = -2W_0(x)+4W_1(x) \\
W_3'(x) &= 24x^2+8x-4 = 4W_0(x)-2W_1(x)+6W_2(x) \\
W_4'(x) &= 64x^3+24x^2-24x-4 = -4W_0(x)+6W_1(x)-2W_2(x)+8W_3(x)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$W_5'(x) = 160x^4 + 64x^3 - 96x^2 - 24x + 6$$
$$= 6W_0(x) - 4W_1(x) + 8W_2(x) - 2W_3(x) + 10W_4(x)$$

$$W_6'(x) = 384x^5 + 160x^4 - 320x^3 - 96x^2 + 48x + 6$$
$$= -6W_0(x) + 8W_1(x) - 4W_2(x) + 10W_3(x) - 2W_4(x) + 12W_5(x)$$

$$W_7'(x) = 896x^6 + 384x^5 - 960x^4 - 320x^3 + 240x^2 + 48x - 8$$
$$= 8W_0(x) - 6W_1(x) + 10W_2(x) - 4W_3(x) + 12W_4(x) - 2W_5(x) + 14W_6(x)$$

$$W_8'(x) = 2048x^7 + 896x^6 - 2688x^5 - 960x^4 + 960x^3 + 240x^2 - 80x - 8$$
$$= -8W_0(x) + 10W_1(x) - 6W_2(x) + 12W_3(x) - 4W_4(x) + 14W_5(x) - 2W_6(x) + 16W_7(x) \qquad (3.90a)$$

şeklindedir. (3.90)-(3.90a) daki eşitlikler yardımıyla $W_i(x)$ in birinci mertebeden türevleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$$W_i'(x) = \begin{cases} -\sum\limits_{k=0}^{[\![i/2]\!]} (i-2k)W_{2k}(x) + \sum\limits_{k=1}^{[\![i/2]\!]} (i+2k)W_{2k-1}(x), & i \geq 1 \quad \textit{çift} \quad \textit{ise} \\ 0, & i = 0 \quad \textit{ise} \\ \sum\limits_{k=0}^{[\![i/2]\!]} (i+2k+1)W_{2k}(x) - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ i \geq 2}}^{[\![i/2]\!]} (i-2k+1)W_{2k-1}(x), & i \geq 1 \quad \textit{tek} \quad \textit{ise} \end{cases} \qquad (3.91)$$

hesaplanabilmektedir. $i \geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.26) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.89) deki eşitliğindeki $W_i'(x)$' ler (3.91) deki eşitlikler yardımıyla türevlerinden kurtarılarak $W_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. (3.89) deki eşitliğin sağ ve sol tarafı $W_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $W_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile eşitliğin sol tarafındaki bilinmeyen q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i = 0$ için,

$$C_0 = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 \sum_{\substack{k=1 \\ m \geq 1}}^{\left[\!\left[(m+1)/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k-1} - \alpha_1 \sum_{\substack{k=1 \\ m \geq 2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k} \tag{3.92}$$

ve $i \geq 1$ için,

$$C_i = \begin{cases} \alpha_0 q_i, & i = m \;\; ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} (2k+i+1) q_{2k} - \alpha_1 \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k+i}, & 1 \leq i \leq m-1 \;\; tek \;\; ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i+1)/2 \right]\!\right]} (2k+2i) q_{2k+i-1} - \alpha_1 \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k+i}, & 1 \leq i \leq m-1 \;\; çift \;\; ise \end{cases} \tag{3.93}$$

hesaplanabilmektedir. (3.92) ve (3.93) eşitlikleri yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_W^m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılarak (3.65) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemin dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden $m.$ mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.5. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Adi Lineer Diferansiyel Denklemler için Chebyshev Yaklaşım Metotları

$n = 2$ ve $\rho_0(x) = \alpha_0$, $\rho_1(x) = \alpha_1$ ve $\rho_2(x) = \alpha_2$ sabitler olmak üzere (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\alpha_2 y''(x) + \alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = f(x) \tag{3.94}$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

3.5.1. İkinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için birinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.94) eşitliğinde

$$y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) \tag{3.95}$$

birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_2\left(\sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x)\right)'' + \alpha_1\left(\sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x)\right)' + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) = F_T^m(x) \tag{3.96}$$

bulunur. Buradan

$$\alpha_2 \sum_{i=2}^{m} q_i T_i''(x) + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m} q_i T_i'(x) + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i T_i(x) = F_T^m(x) \tag{3.97}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $T_i(x)$ in ilk dokuz teriminin ikinci mertebeden türevinin birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$T_0''(x)=0$$

$$T_1''(x)=0$$

$$T_2''(x)=4=4T_0(x)$$

$$T_3''(x)=24x=24T_1(x)$$

$$T_4''(x)=96x^2-16=32T_0(x)+48T_2(x)$$

$$T_5''(x)=320x^3-120x=120T_1(x)+80T_3(x)$$

$$T_6''(x)=960x^4-576x^2+36=108T_0(x)+192T_2(x)+120T_4(x)$$

$$T_7''(x)=2688x^5-2240x^3+336x=336T_1(x)+280T_3(x)+168T_5(x)$$

$$\begin{aligned} T_8''(x) &= 7168Tx^6-7680x^4+1920x^2-64 \\ &= 256T_0(x)+480T_2(x)+384T_4(x)+224T_6(x) \end{aligned} \tag{3.98}$$

şeklindedir. (3.98) deki eşitlikler yardımıyla $T_i(x)$ in ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki eşitlik yardımıyla da

$$T_i''(x)=\begin{cases} -\left(\dfrac{i^3}{2}\right)T_0(x)+\displaystyle\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} 2i\left(\dfrac{i^2-4k^2}{2}\right)T_{2k}(x), & i\geq 2 \quad \textit{çift} \quad \textit{ise} \\ 0, & i=0,1 \quad \textit{ise} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{[\![i/2]\!]} i\left(i^2-(2k-1)^2\right)T_{2k-1}(x), & i\geq 2 \quad \textit{tek} \quad \textit{ise} \end{cases} \tag{3.99}$$

bulunabilmektedir. $i\geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.8) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.97) deki eşitliğin sol tarafında bulunan $T_i''(x)$ ve $T_i'(x)$' ler sırasıyla (3.70) ve (3.99) deki eşitlikler yardımıyla birinci ve ikinci mertebeden türevlerinden kurtarılarak $T_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. (3.97) deki eşitliğin sağ ve sol tarafı $T_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $T_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile eşitliğin sol tarafındaki bilinmeyen q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i=0$ ise,

$$\frac{C_0}{2}=\alpha_0 q_0+\alpha_1\sum_{\substack{k=0\\ m\,\geq\,1}}^{[\![(m-1)/2]\!]}(2k+1)q_{2k+1}+\alpha_2\sum_{k=0}^{[\![(m)/2]\!]}4k^3 q_{2k} \tag{3.100}$$

ve $i\geq 1$ ise,

$$C_i = \begin{cases} \alpha_0 q_m, & i = m \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=\frac{i+1}{2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} 4k q_{2k} + \alpha_2 \sum\limits_{k=\frac{i+1}{2}}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]} 4k\left(2k+i\right)\left(k+i\right) q_{2k+i}, & 1 \le i \le m-1 \ \ tek \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=\frac{i}{2}}^{\left[\!\left[(m-1)/2 \right]\!\right]} \left(4k+2\right) q_{2k+1} + \alpha_2 \sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[(m-1)/2 \right]\!\right]} 4k\left(2k+i\right)\left(k+i\right) q_{2k+j}, & 1 \le i \le m-1 \ \ çift \ \ ise \end{cases} \tag{3.101}$$

hesaplanabilmektedir. (3.100) ve (3.101) yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_T^m\left(x\right) = \sum\limits_{i=0}^{m} q_i T_i\left(x\right)$ eşitliğinde yerine yazılarak (3.94) deki ikinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden m. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.5.2. İkinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için ikinci çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.94) eşitliğinde

$$y\left(x\right) = \sum_{i=0}^{m} q_i U_i\left(x\right) \tag{3.102}$$

ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_2 \left(\sum_{i=0}^{m} q_i U_i\left(x\right) \right)'' + \alpha_1 \left(\sum_{i=0}^{m} q_i U_i\left(x\right) \right)' + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i\left(x\right) = F_U^m\left(x\right) \tag{3.103}$$

olur. Buradan

$$\alpha_2 \sum_{i=2}^{m} q_i U_i''\left(x\right) + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m} q_i U_i'\left(x\right) + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i U_i\left(x\right) = F_U^m\left(x\right) \tag{3.104}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $U_i(x)$ in ilk dokuz teriminin ikinci mertebeden türevinin ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$U_0''(x) = 0$$

$$U_1''(x) = 0$$

$$U_2''(x) = 8 = 8U_0(x)$$

$$U_3''(x) = 48x = 24U_1(x)$$

$$U_4''(x) = 192x^2 - 24 = 24U_0(x) + 48U_2(x)$$

$$U_5''(x) = 640x^3 - 192x = 64U_1(x) + 80U_3(x)$$

$$U_6''(x) = 1920x^4 - 960x^2 + 48 = 48U_0(x) + 120U_2(x) + 120U_4(x)$$

$$U_7''(x) = 5376x^5 - 3840x^3 + 480x = 120U_1(x) + 192U_3(x) + 168U_5(x)$$

$$\begin{aligned} U_8''(x) &= 14336x^6 - 13440x^4 + 2880x^2 - 80 \\ &= 80U_0(x) + 216U_2(x) + 280U_4(x) + 224U_6(x) \end{aligned} \tag{3.105}$$

şeklindedir. $i \geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.14) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.104) daki eşitliğin sol tarafında bulunan $U_i''(x)$ ve $U_i'(x)$' ler sırasıyla (3.105) ve (3.70) deki eşitlikler yardımıyla türevlerinden kurtarılarak $U_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. (3.104) daki eşitliğin sağ ve sol tarafı $U_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $U_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile eşitliğin sol tarafındaki bilinmeyen q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i = 0$ için,

$$C_0 = \alpha_0 q_0 + 2\alpha_1 \sum_{\substack{k=0 \\ m \geq 1}}^{[\![(m-1)/2]\!]} q_{2k+1} + \alpha_2 \sum_{\substack{k=0 \\ m \geq 1}}^{[\![m/2]\!]} 4k(k+1) q_{2k} \tag{3.106}$$

ve $i \geq 1$ için,

$$C_i = \begin{cases} \alpha_0 q_i \ , & i = m \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=\frac{i+1}{2}}^{[\![m/2]\!]} (2i+2) q_{2k} + \alpha_2 \sum\limits_{k=0}^{[\![(m-i)/2]\!]} 4k(i+1)(k+i+1) q_{2k+j} \ , & 1 \leq i \leq m-1 \ \ tek \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=\frac{i}{2}}^{[\![(m-1)/2]\!]} (2i+2) q_{2k+1} + \alpha_2 \sum\limits_{k=0}^{[\![(m-i)/2]\!]} 4k(i+1)(k+j+1) q_{2k+j} \ , & 1 \leq i \leq m-1 \ \ çift \ \ ise \end{cases} \quad (3.107)$$

hesaplanabilmektedir. (3.106) ve (3.107) eşitlikleri yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_U^m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i U_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılarak (3.94) deki ikinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden $m.$ mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.5.3. İkinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için üçüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.94) eşitliğnde

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) \quad (3.108)$$

üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_2 \left(\sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) \right)'' + \alpha_1 \left(\sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) \right)' + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) = F_V^m(x) \quad (3.109)$$

olur. Buradan

$$\alpha_2 \sum_{i=2}^{m} q_i V_i''(x) + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m} q_i V_i'(x) + \alpha_0 \sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x) = F_V^m(x) \quad (3.110)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $V_i(x)$ in ilk dokuz teriminin ikinci mertebeden türevinin üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$
\begin{aligned}
&V_0''(x) = 0 \\
&V_1''(x) = 0 \\
&V_2''(x) = 8 = 8V_0(x) \\
&V_3''(x) = 48x - 16 = 16V_0(x) + 24V_1(x) \\
&V_4''(x) = 192x^2 - 48x - 12 = 48V_0(x) + 24V_1(x) + 48V_2(x) \\
&V_5''(x) = 640x^3 - 192x^2 - 192x + 24 = 72V_0(x) + 96V_1(x) + 32V_2(x) + 80V_3(x) \\
&V_6''(x) = 1920x^4 - 640x^3 - 960x^2 + 192x + 48 \\
&\qquad = 144V_0(x) + 96V_1(x) + 160V_2(x) + 40V_3(x) + 120V_4(x) \\
&V_7''(x) = 5376x^5 - 1920x^4 - 3840x^3 + 960x^2 + 480x - 48 \\
&\qquad = 192V_0(x) + 240V_1(x) + 120V_2(x) + 240V_3(x) + 48V_4(x) + 168V_5(x) \\
&V_8''(x) = 14336x^6 - 5376x^5 - 13440x^4 + 3840x^3 + 2880x^2 - 480x - 80 \\
&\qquad = 320V_0(x) + 240V_1(x) + 360V_2(x) + 144V_3(x) \\
&\qquad +336V_4(x) + 56V_5(x) + 224V_6(x)
\end{aligned}
\tag{3.111}
$$

$i \geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.17) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.110) deki eşitliğin sol tarafında bulunan $V_i''(x)$ ve $V_i'(x)$'ler sırasıyla (3.111) ve (3.84) deki eşitlikler yardımıyla türevlerinden kurtarılarak $V_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. (3.110) deki eşitliğin sağ ve sol tarafı $V_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $V_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile eşitliğin sol tarafındaki bilinmeyen q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i = 0$ için,

$$C_0=\alpha_0 q_0+\underset{m\ge 1}{\alpha_1\sum_{k=1}^{\left[\!\left[(m+1)/2 \right]\!\right]} 2kq_{2k-1}}+\underset{m\ge 2}{\alpha_1\sum_{k=1}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} 2kq_{2k}}+\underset{m\ge 2}{\alpha_2\sum_{k=1}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} 4k(k+1)q_{2k}}+\underset{m\ge 3}{\alpha_2\sum_{k=1}^{\left[\!\left[(m-1)/2 \right]\!\right]} 4k(k+1)^2 q_{2k+1}} \qquad (3.112)$$

ve $i\ge 1$ için,

$$C_i=\begin{cases} \alpha_0 q_i, & i=m \;\; ise \\[2ex] \alpha_0 q_i+\alpha_1\displaystyle\sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]}(2k+i+1)q_{2k}+\alpha_1\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]}2kq_{2k+i} & \\ +\alpha_2\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i-1)/2 \right]\!\right]}4k(k+i+1)(k+1)q_{2k} & \\ +\alpha_2\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]}4k(k+i+1)(k+i)q_{2k+i}, & 1\le i\le m-1 \;\; tek \;\; ise \\[2ex] \alpha_0 q_i+\alpha_1\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i+1)/2 \right]\!\right]}(2k+2i)q_{2k+i-1}+\alpha_1\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]}2kq_{2k+i} & \\ +\alpha_2\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]}4k(k+i+1)(k+i)q_{2k+i} & \\ +\alpha_2\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i-1)/2 \right]\!\right]}4k(k+i+1)(k+1)q_{2k+i+1}, & 1\le i\le m-1 \;\; çift \;\; ise \end{cases} \qquad (3.113)$$

hesaplanabilmektedir. (3.112) ve (3.113) eşitlikleri yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_V^m(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i V_i(x)$ eşitliğindede yerine yazılarak (3.94) deki ikinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden *m.* mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

3.5.4. İkinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler için dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metodu

(3.94) eşitliğinde

$$y(x)=\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x) \tag{3.114}$$

dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden seri açılımını yerine yazarsak

$$\alpha_2\left(\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)\right)'' + \alpha_1\left(\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x)\right)' + \alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x) = F_W^m(x) \tag{3.115}$$

olur. Buradan

$$\alpha_2\sum_{i=2}^{m} q_i W_i''(x) + \alpha_1\sum_{i=1}^{m} q_i W_i'(x) + \alpha_0\sum_{i=0}^{m} q_i W_i(x) = F_W^m(x) \tag{3.116}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $W_i(x)$ in ilk dokuz teriminin ikinci mertebeden türevinin dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimi

$$W_0''(x)=0$$

$$W_1''(x)=0$$

$$W_2''(x)=8=8W_0(x)$$

$$W_3''(x)=48x+8=-16W_0(x)+24W_1(x)$$

$$W_4''(x)=192x^2+48x-24=48W_0(x)-24W_1(x)+48W_2(x)$$

$$W_5''(x)=640x^3+192x^2-192x-24=-72W_0(x)+96W_1(x)-32W_2(x)+80W_3(x)$$

$$\begin{aligned} W_6''(x) &= 1920x^4+640x^3-960x^2-192x+48 \\ &= 144W_0(x)-96W_1(x)+160W_2(x)-40W_3(x)+120W_4(x) \end{aligned} \tag{3.117}$$

$$W_7''(x) = 5376x^5 + 1920x^4 - 3840x^3 - 960x^2 + 480x + 48$$
$$= -192W_0(x) + 240W_1(x) - 120W_2(x) + 240W_3(x) - 48W_4(x) + 168W_5(x)$$

$$W_8''(x) = 14336x^6 + 5376x^5 - 13440x^4 - 3840x^3 + 2880x^2 + 480x - 80$$
$$= 320W_0(x) - 240W_1(x) + 360W_2(x) - 144W_3(x) \qquad (3.117a)$$
$$+336W_4(x) - 56W_5(x) + 224W_6(x)$$

şeklindedir. $i \geq 0$ olmak üzere C_i katsayıları (3.22) deki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır. (3.116) deki eşitliğin sol tarafında bulunan $W_i''(x)$ ve $W_i'(x)$ ' ler (3.117)-(3.117a) ve (3.91) daki eşitlikler yardımıyla türevlerinden kurtarılarak $W_i(x)$ ler cinsinden bir eşitlik elde edilir. (3.116) deki eşitliğin sağ ve sol tarafı $W_i(x)$ ler cinsinden olduğundan $W_i(x)$ lerin katsayıları eşitlenip elde edilen lineer denklem sistemleri ile eşitliğin sol tarafındaki bilinmeyen q_i katsayıları bulunur. m yaklaşım polinomunun mertebesi ve $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ olmak üzere q_i katsayıları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da

$i = 0$ için,

$$C_0 = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 \sum_{\substack{k=1 \\ m \geq 1}}^{\left[\!\left[(m+1)/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k-1} - \alpha_1 \sum_{\substack{k=1 \\ m \geq 2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k} + \alpha_1 \sum_{\substack{k=1 \\ m \geq 2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} 4k(k+1) q_{2k} - \alpha_2 \sum_{\substack{k=1 \\ m \geq 3}}^{\left[\!\left[(m-1)/2 \right]\!\right]} 4k(k+1)^2 q_{2k+1} \qquad (3.118)$$

ve $i \geq 1$ için,

$$C_i = \begin{cases} \alpha_0 q_i, & i = m \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=\frac{i+1}{2}}^{\left[\!\left[m/2 \right]\!\right]} (2k+i+1) q_{2k} - \alpha_1 \sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k+i} & \\ +\alpha_2 \sum\limits_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i-1)/2 \right]\!\right]} 4k(k+i+2)(k+i+1) q_{2k+j+1} & \\ -\alpha_1 \sum\limits_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]} 4k(k+i+1)(k+j) q_{2k+i}, & 1 \leq i \leq m-1 \ \ tek \ \ ise \\ \alpha_0 q_i + \alpha_1 \sum\limits_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i+1)/2 \right]\!\right]} (2k+2i) q_{2k+i-1} - \alpha_1 \sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]} 2k q_{2k+i} & \\ +\alpha_1 \sum\limits_{k=1}^{\left[\!\left[(m-i)/2 \right]\!\right]} 4k(k+i+1)(k+i) q_{2k+i} & \\ -\alpha_1 \sum\limits_{k=0}^{\left[\!\left[(m-i-1)/2 \right]\!\right]} 4k(k+1)(k+i+1) q_{2k+i+1}, & 1 \leq i \leq m-1 \ \ çift \ \ ise \end{cases} \tag{3.119}$$

hesaplanabilmektedir. (3.118) ve (3.119) eşitlikleri yardımıyla bulunan q_i değerleri $P_W^m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} q_i W_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılarak (3.94) deki ikinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden *m.* mertebeden yaklaşım polinomu $P_W^m(x)$yaklaşım polinomu elde edilmektedir.

BÖLÜM 4. UYGULAMALAR

Örnek 4.1. $y' + \frac{1}{x} y = 3\cos(2x)$ (4.1)

Birinci mertebeden adi lineer diferansiyel denkleminde $f(x) = 3\cos(2x)$ fonksiyonunun $F_T^6(x)$, $F_U^6(x)$, $F_V^6(x)$ ve $F_W^6(x)$ yaklaşım polinomlarını bulunuz.

Çözüm 4.1.

1. $F_T^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$n = 6$ için (3.8) eşitliğinden

$$C_0 = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7} f\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right)\right),$$

$$C_1 = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right)\right)\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right),$$

$$C_2 = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right)\right)\cos\left(\frac{2(2k-1)\pi}{14}\right),$$

$$C_3 = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right)\right)\cos\left(\frac{3(2k-1)\pi}{14}\right),$$

$$C_4 = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right)\right)\cos\left(\frac{4(2k-1)\pi}{14}\right),$$

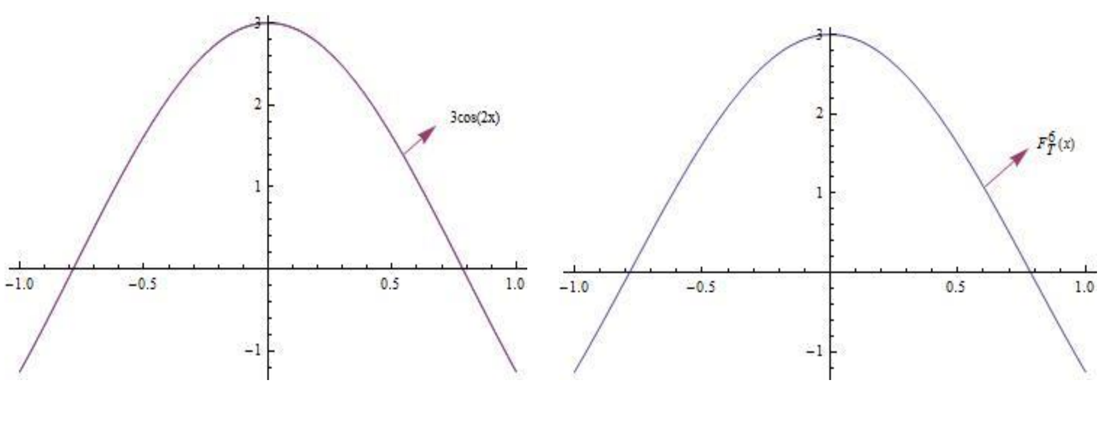
$$C_5 = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right)\right)\cos\left(\frac{5(2k-1)\pi}{14}\right), \tag{4.2}$$

$$C_6 = \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{14}\right)\right)\cos\left(\frac{6(2k-1)\pi}{14}\right) \qquad (4.2a)$$

eşitlikleri bulunur. (4.2)-(4.2a) deki eşitlikler yardımıyla $\frac{C_0}{2} = 0.6716723374880837$, $C_1 = -6.344131569286608\times10^{-17}$, $C_2 = -2.1170041832902666$, $C_3 = -6.344131569286608\times10^{-17}$, $C_4 = -0.20397582807718137$, $C_5 = -1.633613879091301\times10^{-15}$ ve $C_6 = -0.007347651144468004$ bulunur. Bu değerler $F_T^6(x) = \frac{C_0}{2}T_0(x) + \sum_{i=1}^{6} C_i T_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_T^6(x) = {} & 0.6716723374880837 T_0(x) - 6.344131569286608\times10^{-17} T_1(x) \\ & -2.1170041832902666 T_2(x) - 6.344131569286608\times10^{-17} T_3(x) \\ & +0.20397582807718137 T_4(x) - 1.633613879091301\times10^{-15} T_5(x) \\ & -0.007347651144468004 T_6(x) \end{aligned}$$

$f(x) = 3\cos(2x)$ fonksiyonunun birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir. Sırasıyla soldan sağa $f(x) = 3\cos(2x)$ ve $F_T^6(x)$ in grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 4.1. $f(x) = 3\cos(2x)$ ve $F_T^6(x)$ in grafiği

2. $F_U^6\left(x\right)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$n=6$ için (3.14) eşitliğinden

$$C_0=\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)^2}\,3\cos\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right),$$

$$C_1=\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)^2}\,3\cos\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)\frac{\sin\left[2\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)},$$

$$C_2=\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)^2}\,3\cos\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)\frac{\sin\left[3\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)},$$

$$C_3=\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)^2}\,3\cos\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)\frac{\sin\left[4\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)},$$

$$C_4=\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)^2}\,3\cos\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)\frac{\sin\left[5\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)},$$

$$C_5=\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)^2}\,3\cos\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)\frac{\sin\left[6\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)},$$

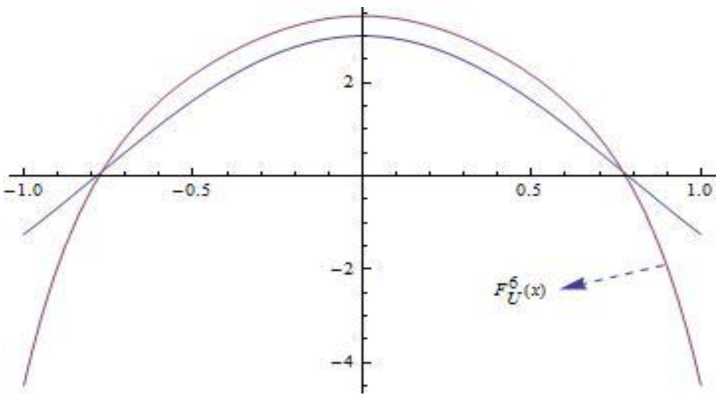
$$C_6=\frac{2}{7}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)^2}\,3\cos\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right)\frac{\sin\left[7\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)} \tag{4.3}$$

eşitlikleri bulunur. (4.3) deki eşitlikler yardımıyla $C_0=2.0089118892692746$, $C_1=0$, $C_2=-1.5742566127198199$, $C_3=0$, $C_4=-0.2380355066119847$, $C_5=0$,

$C_6 = -0.0834384331943182$ bulunur. Bu değerler $F_U^6(x) = \sum_{i=0}^{6} C_i U_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$F_U^6(x) = 2.0089118892692746 U_0(x) - 1.5742566127198199 U_2(x)$$
$$-0.2380355066119847 U_4(x) - 0.0834384331943182 U_6(x)$$

$f(x) = 3\cos(2x)$ fonksiyonunun ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir. $F_U^6(x)$ ve $f(x)$ in grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 4.2. $f(x) = 3\cos(2x)$ ve $F_U^6(x)$ in grafiği

3. $F_V^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$n = 6$ için (3.20) eşitliğinden

$$C_0 = \frac{2}{15} \sum_{k=1}^{7} \sqrt{1 + \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right),$$

$$C_1 = \frac{2}{15} \sum_{k=1}^{7} \sqrt{1 + \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)} 3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right) \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)}, \qquad (4.4)$$

$$C_2 = \frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)},$$

$$C_3 = \frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{7}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)},$$

$$C_4 = \frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{9}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)},$$

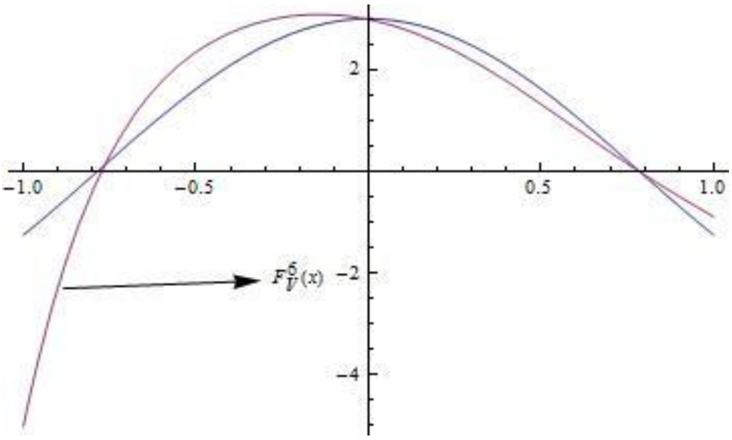
$$C_5 = \frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{11}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)},$$

$$C_6 = \frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{13}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{15}\right)\right)} \qquad (4.4a)$$

eşitlikleri bulunur. (4.4)-(4.4a) eşitlikleri yardımıyla $C_0 = 0.7331797538774443$, $C_1 = -1.0214319864433308$, $C_2 = -0.9394300716848903$, $C_3 = 0.37199953124873286$, $C_4 = -0.05733845474948591$, $C_5 = 0.05374582828680197$ ve $C_0 = -0.03089116637429669$ bulunur. Bu değerler $F_V^6(x) = \sum_{i=0}^{6} C_i V_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_V^6(x) = {} & 0.7331797538774443 V_0(x) - 1.0214319864433308 V_1(x) \\ & -0.9394300716848903 V_2(x) + 0.37199953124873286 V_3(x) \\ & -0.05733845474948591 V_4(x) + 0.05374582828680197 V_5(x) \\ & -0.03089116637429669 V_6(x) \end{aligned}$$

$f(x)=3\cos(2x)$ fonksiyonunun üçüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir. $F_V^6(x)$ ve $f(x)=3\cos(2x)$ in grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 4.3. $f(x)=3\cos(2x)$ ve $F_V^6(x)$ in grafiği

4. $F_W^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$n=6$ için (3.26) eşitliğinden

$$C_0=\frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right),$$

$$C_1=\frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)\frac{\sin\left(3\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)}{\sin\left(\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)},$$

$$C_2=\frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)\frac{\sin\left(5\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)}{\sin\left(\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)}, \quad (4.5)$$

$$C_3=\frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)\frac{\sin\left(7\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)}{\sin\left(\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)},$$

$$C_4=\frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)\frac{\sin\left(9\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)}{\sin\left(\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)},$$

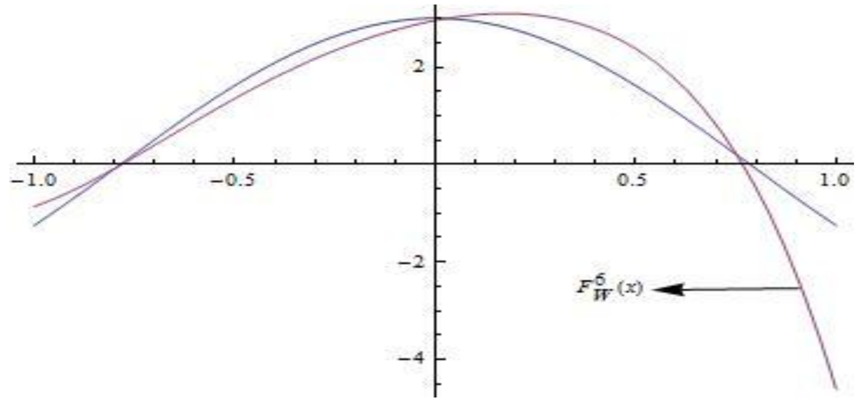
$$C_5=\frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)\frac{\sin\left(11\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)}{\sin\left(\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)},$$

$$C_6=\frac{2}{15}\sum_{k=1}^{7}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)}3\cos\left(2\cos\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)\frac{\sin\left(13\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)}{\sin\left(\left(\frac{2(8-k)\pi}{15}\right)\right)} \quad (4.5a)$$

eşitlikleri bulunur. (4.5)-(4.5a) deki eşitlikler yardımıyla $C_0=0.7331797538774443$, $C_1=1.0214319864433303$, $C_2=-0.9394300716848908$ $C_3=-0.37199953124873264$, $C_4=-0.05733845474948546$, $C_5=-0.05374582828680177$, $C_6=0$ bulunur. Bu değerler $F_W^6(x)=\sum_{i=0}^{6}C_iW_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}F_W^6(x)=&\,0.7331797538774443W_0(x)+1.0214319864433303W_1(x)\\&-0.9394300716848908W_2(x)-0.37199953124873264W_3(x)\\&-0.05733845474948546W_4(x)-0.05374582828680177W_5(x)\end{aligned}$$

$f(x)=3\cos(2x)$ fonksiyonunun dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 6. Mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir. $F_W^6(x)$ ve $f(x)=3\cos(2x)$ in grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 4.4. $f(x)=3\cos(2x)$ ve $F_W^6(x)$ in grafiği

Örnek 4.2. $y^{(8)}-4y^{(6)}+3y^{(5)}+8y'''=-0.0005x$ (4.6)

Sekizinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için $P_T^{11}(x)$, $P_U^{11}(x)$, $P_V^{11}(x)$ ve $P_W^{11}(x)$ yaklaşım polinomlarını bulunuz.

Çözüm 4.2. (4.6) diferansiyel denkleminde $\alpha_0(x)=0$, $\alpha_1(x)=0$, $\alpha_2(x)=0$, $\alpha_3(x)=8$, $\alpha_4(x)=0$, $\alpha_5(x)=3$, $\alpha_6(x)=-4$, $\alpha_7(x)=0$ ve $\alpha_8(x)=1$ ve eşitliğin sol tarafındaki $f(x)=x$ fonkisyonun birinci çeşit, ikinci çeşit, üçüncü çeşit ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 11. mertebeden yaklaşım polinomları sırasıyla $F_T^{11}(x)=-0.0005T_1(x)$, $F_U^{11}(x)=-0.0005\cdot\dfrac{U_1(x)}{2}$, $F_V^{11}(x)=-0.0005\cdot\dfrac{V_0(x)+V_1(x)}{2}$ ve $F_W^{11}(x)=-0.0005\cdot\dfrac{-W_0(x)+W_1(x)}{2}$ dir.

1. $P_T^{11}(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$m=11$ ve $n=8$ değerleri (3.34) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{11}q_iT_i(x)+\sum_{t=1}^{8}\alpha_t\sum_{i=t}^{11}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2\right]\!\right]}c_{(t,i)}^{k}d_{(t,i)}^{k}=F_T^{11}(x) \tag{4.7}$$

olur. (4.7) eşitliği $t=0,1,2,3,4,5,6,7,8$ değerleri için

$$8\sum_{i=3}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{(3,i)}^{k} d_{(3,i)}^{k} + 3\sum_{i=5}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-5)/2 \right]\!\right]} c_{(5,i)}^{k} d_{(5,i)}^{k} - 4\sum_{i=6}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-6)/2 \right]\!\right]} c_{(6,i)}^{k} d_{(6,i)}^{k}$$
$$+\sum_{i=8}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-8)/2 \right]\!\right]} c_{(8,i)}^{k} d_{(8,i)}^{k} = F_T^{11}(x) \tag{4.8}$$

şeklinde bulunur. (4.8) eşitliğinden

$$8q_3\left(c_{(3,3)}^0 d_{(3,3)}^0\right)+8q_4\left(c_{(3,4)}^0 d_{(3,4)}^0\right)+8q_5\left(c_{(3,5)}^0 d_{(3,5)}^0+c_{(3,5)}^1 d_{(3,5)}^1\right)+8q_6\left(c_{(3,6)}^0 d_{(3,6)}^0+c_{(3,6)}^1 d_{(3,6)}^1\right)$$
$$+8q_7\left(c_{(3,7)}^0 d_{(3,7)}^0+c_{(3,7)}^1 d_{(3,7)}^1+c_{(3,7)}^2 d_{(3,7)}^2\right)+8q_8\left(c_{(3,8)}^0 d_{(3,8)}^0+c_{(3,8)}^1 d_{(3,8)}^1+c_{(3,8)}^2 d_{(3,8)}^2\right)$$
$$+8q_9\left(c_{(3,9)}^0 d_{(3,9)}^0+c_{(3,9)}^1 d_{(3,9)}^1+c_{(3,9)}^2 d_{(3,9)}^2\right)+8q_{10}\left(c_{(3,10)}^0 d_{(3,10)}^0+c_{(3,10)}^1 d_{(3,10)}^1+c_{(3,10)}^2 d_{(3,10)}^2\right.$$
$$\left.+c_{(3,10)}^3 d_{(3,10)}^3\right)+8q_{11}\left(c_{(3,11)}^0 d_{(3,11)}^0+c_{(3,11)}^1 d_{(3,11)}^1+c_{(3,11)}^2 d_{(3,11)}^2+c_{(3,11)}^3 d_{(3,11)}^3+c_{(3,11)}^4 d_{(3,11)}^4\right)$$
$$+3q_5\left(c_{(5,5)}^0 d_{(5,5)}^0\right)+3q_6\left(c_{(5,6)}^0 d_{(5,6)}^0\right)+3q_7\left(c_{(5,7)}^0 d_{(5,7)}^0+c_{(5,7)}^1 d_{(5,7)}^1\right)+3q_8\left(c_{(5,8)}^0 d_{(5,8)}^0\right.$$
$$\left.+c_{(5,8)}^1 d_{(5,8)}^1\right)+3q_9\left(c_{(5,9)}^0 d_{(5,9)}^0+c_{(5,9)}^1 d_{(5,9)}^1+c_{(5,9)}^2 d_{(5,9)}^2\right)+3q_{10}\left(c_{(5,10)}^0 d_{(5,10)}^0+c_{(5,10)}^1 d_{(5,10)}^1\right.$$
$$\left.+c_{(5,10)}^2 d_{(5,10)}^2\right)+3q_{11}\left(c_{(5,11)}^0 d_{(5,11)}^0+c_{(5,11)}^1 d_{(5,11)}^1+c_{(5,11)}^2 d_{(5,11)}^2+c_{(5,11)}^2 d_{(5,11)}^2\right)$$
$$-4q_6\left(c_{(6,6)}^0 d_{(6,6)}^0\right)-4q_7\left(c_{(6,7)}^0 d_{(6,7)}^0\right)-4q_8\left(c_{(6,8)}^0 d_{(6,8)}^0+c_{(6,8)}^1 d_{(6,8)}^1\right)-4q_9\left(c_{(6,9)}^0 d_{(6,9)}^0\right.$$
$$\left.+c_{(6,9)}^1 d_{(6,9)}^1\right)-4q_{10}\left(c_{(6,10)}^0 d_{(6,10)}^0+c_{(6,10)}^1 d_{(6,10)}^1+c_{(6,10)}^2 d_{(6,10)}^2\right)-4q_{11}\left(c_{(6,11)}^0 d_{(6,11)}^0\right.$$
$$\left.+c_{(6,11)}^1 d_{(6,11)}^1+c_{(6,11)}^2 d_{(6,11)}^2\right)+q_8\left(c_{(8,8)}^0 d_{(8,8)}^0\right)+q_9\left(c_{(8,9)}^0 d_{(8,9)}^0\right)$$
$$+q_{10}\left(c_{(8,10)}^0 d_{(8,10)}^0+c_{(8,10)}^1 d_{(8,10)}^1\right)+q_{11}\left(c_{(8,11)}^0 d_{(8,11)}^0+c_{(8,11)}^1 d_{(8,11)}^1\right)=-0.0005T_1(x) \tag{4.9}$$

olur. (3.34a) daki eşitlikten

$$c_{(3,3)}^0=48,\quad c_{(3,4)}^0=192,\quad c_{(3,5)}^0=480,\quad c_{(3,5)}^1=-240,\quad c_{(3,6)}^0=960,\quad c_{(3,6)}^1=-1152,$$
$$c_{(3,7)}^0=1680,\ c_{(3,7)}^1=-3360,\ c_{(3,7)}^2=672,\ c_{(3,8)}^0=2688,\ c_{(3,8)}^1=-7680, \tag{4.10}$$

$c_{(3,8)}^{2}=3840$, $c_{(3,9)}^{0}=4032$, $c_{(3,9)}^{1}=-15120$, $c_{(3,9)}^{2}=12960$, $c_{(3,9)}^{3}=-1440$,
$c_{(3,10)}^{0}=5760$, $c_{(3,10)}^{1}=-26880$, $c_{(3,10)}^{2}=33600$, $c_{(3,10)}^{3}=-9600$, $c_{(3,11)}^{0}=7920$,
$c_{(3,11)}^{1}=-44352$, $c_{(3,11)}^{2}=73920$, $c_{(3,11)}^{3}=-36960$, $c_{(3,11)}^{4}=2640$, $c_{(5,5)}^{0}=3840$,
$c_{(5,6)}^{0}=23040$, $c_{(5,7)}^{0}=80640$, $c_{(5,7)}^{1}=-26880$, $c_{(5,8)}^{0}=215040$, $c_{(5,8)}^{1}=-184320$,
$c_{(5,9)}^{0}=483840$, $c_{(5,9)}^{1}=-725760$, $c_{(5,9)}^{2}=103680$, $c_{(5,10)}^{0}=967680$,
$c_{(5,10)}^{1}=-2150400$, $c_{(5,10)}^{2}=806400$, $c_{(5,11)}^{0}=1774080$, $c_{(5,11)}^{1}=-5322240$,
$c_{(5,11)}^{2}=3548160$, $c_{(5,11)}^{3}=-295680$, $c_{(6,6)}^{0}=46080$, $c_{(6,7)}^{0}=322560$,
$c_{(6,8)}^{0}=1290240$, $c_{(6,8)}^{1}=-368640$, $c_{(6,9)}^{0}=3870720$, $c_{(6,9)}^{1}=-2903040$,
$c_{(6,10)}^{0}=9676800$, $c_{(6,10)}^{1}=-12902400$, $c_{(6,10)}^{2}=1612800$, $c_{(6,11)}^{0}=21288960$,
$c_{(6,11)}^{1}=-42577920$, $c_{(6,11)}^{2}=14192640$, $c_{(8,8)}^{0}=10321920$, $c_{(8,9)}^{0}=92897280$,
$c_{(8,10)}^{0}=464486400$, $c_{(8,10)}^{1}=-103219200$, $c_{(8,11)}^{0}=1703116800$,
$c_{(8,11)}^{1}=-1021870080$ (4.10a)

bulunur. $(i-2k-t)$ çift ise (3.34b) eşitliğinden

$$d_{(3,3)}^{0}=d_{(3,5)}^{1}=d_{(3,7)}^{2}=d_{(3,9)}^{3}=d_{(3,11)}^{4}=d_{(5,5)}^{0}=d_{(5,7)}^{1}=d_{(5,9)}^{2}=d_{(5,11)}^{3}=d_{(6,6)}^{0}=\frac{T_0(x)}{2}$$

$$d_{(6,8)}^{1}=d_{(6,10)}^{2}=d_{(8,8)}^{0}=d_{(8,10)}^{1}=\frac{T_0(x)}{2}$$

$$d_{(3,5)}^{0}=d_{(3,7)}^{1}=d_{(3,9)}^{2}=d_{(3,11)}^{3}=d_{(5,7)}^{0}=d_{(5,9)}^{1}=d_{(5,11)}^{2}=d_{(6,8)}^{0}=T_2(x)+T_0(x)$$

$$d_{(6,10)}^{1}=d_{(8,10)}^{0}=T_2(x)+T_0(x)$$

$$d_{(3,7)}^{0}=d_{(3,9)}^{1}=d_{(3,11)}^{2}=d_{(5,9)}^{0}=d_{(5,11)}^{1}=d_{(6,10)}^{0}=T_4(x)+4T_2(x)+3T_0(x)$$

$$d_{(3,9)}^{0}=d_{(3,11)}^{1}=d_{(5,11)}^{0}=T_6(x)+6T_4(x)+15T_2(x)+10T_0(x)$$

$$d_{(3,11)}^{0}=T_8(x)+8T_6(x)+28T_4(x)+56T_2(x)+70T_0(x) \tag{4.11}$$

$\left(i-2k-t\right)$ tek ise (3.34c) eşitliğinden

$$d_{(3,4)}^{0}=d_{(3,6)}^{1}=d_{(3,8)}^{2}=d_{(3,10)}^{3}=d_{(5,6)}^{0}=d_{(5,8)}^{1}=d_{(5,10)}^{2}=d_{(6,7)}^{0}=T_1(x)$$

$$d_{(6,9)}^{1}=d_{(6,11)}^{2}=d_{(8,9)}^{0}=d_{(8,11)}^{1}=T_1(x)$$

$$d_{(3,6)}^{0}=d_{(3,8)}^{1}=d_{(3,10)}^{2}=d_{(5,8)}^{0}=d_{(5,10)}^{1}=d_{(6,9)}^{0}=d_{(6,11)}^{1}=d_{(8,11)}^{0}=T_3(x)+3T_1(x)$$

$$d_{(3,8)}^{0}=d_{(3,10)}^{1}=d_{(5,10)}^{0}=d_{(6,11)}^{0}=T_5(x)+5T_3(x)+10T_1(x)$$

$$d_{(3,10)}^{0}=T_7(x)+7T_5(x)+21T_3(x)+35T_1(x) \tag{4.12}$$

bulunur. (4.10)-(4.10a), (4.11) ve (4.12) deki eşitlikler (4.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&192q_3T_0(x)+1536q_4T_1(x)+8q_5\left(480T_2(x)+360T_0(x)\right)+8q_6\left(960T_3(x)+1728T_1(x)\right)\\
&+8q_7\left(1680T_4(x)+3360T_2(x)+2016T_0(x)\right)+8q_8\left(2688T_5(x)+5760T_3(x)+7680T_1(x)\right)\\
&+8q_9\left(4032T_6(x)+9072T_4(x)+12960T_2(x)+7200T_0(x)\right)+8q_{10}\left(5760T_6(x)\right.\\
&\left.+9072T_4(x)+12960T_2(x)+7200T_0(x)\right)+8q_{10}\left(5760T_7(x)+13440T_5(x)+20160T_3(x)\right.\\
&\left.+24000T_1(x)\right)+8q_{11}\left(7920T_8(x)+19008T_6(x)+29568T_4(x)+36960T_2(x)+297000T_0(x)\right)\\
&+3q_5\left(1920T_0(x)\right)+3q_6\left(23040T_1(x)\right)+3q_7\left(80640T_2(x)+67200T_0(x)\right)\\
&+3q_8\left(215040T_3(x)+460800T_1(x)\right)+3q_9\left(483840T_4(x)+1209600T_2(x)\right.\\
&\left.+777600T_0(x)\right)+3q_{10}\left(967680T_5(x)+2688000T_3(x)+4032000T_1(x)\right)\\
&+3q_{11}\left(1774080T_6(x)+5322240T_4(x)+8870400T_2(x)+5174400T_0(x)\right)\\
&-4q_9\left(3870720T_3(x)+8709120T_1(x)\right)-4q_{10}\left(9676800T_4(x)+25804800T_2(x)\right.\\
&\left.+15321600T_0(x)\right)-4q_{11}\left(21288960T_5(x)+63866880T_3(x)+99348480T_1(x)\right)\\
&+q_8\left(5160960T_0(x)\right)+q_9\left(92897280T_1(x)\right)+q_{10}\left(464486400T_2(x)+4128768000T_0(x)\right)\\
&+q_{11}\left(1703116800T_3(x)+40874803200T_1(x)\right)=-0.0005T_1(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$T_0(x)(192q_3+8640q_5-92160q_6+217728q_7+737280q_8+2390400q_9$$
$$+351590400q_{10}+17899200q_{11})+T_1(x)(1536q_4+82944q_6-1290240q_7$$
$$+1443840q_8+5806800q_9+12288000q_{10}+3690086400q_{11})+T_2(x)(3840q_5$$
$$+268800q_7-5160960q_8+3732480q_9+361267200q_{10}+26906880q_{11})$$
$$T_3(x)(7680q_6+691200q_8-15482880q_9+8225280q_{10}+1447649280q_{11})$$
$$+T_4(x)(13440q_7+1524096q_9-38707200q_{10}+16203264q_{11})+T_5(x)(21504q_8$$
$$+3010560q_{10}-8515840q_{11})+T_6(x)(32256q_9+5474304q_{11})+T_7(x)(46080q_{10})$$
$$T_8(x)(63360q_{11})=-0.0005T_1(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$192q_3+8640q_5-92160q_6+217728q_7+737280q_8+2390400q_9$$
$$351590400q_{10}+17899200q_{11}=0$$
$$1536q_4+82944q_6-1290240q_7+1443840q_8+58060800q_9+12288000q_{10}$$
$$+3690086400q_{11}=-0.0005$$
$$3840q_5+268800q_7-5160960q_8+3732480q_9+361267200q_{10}$$
$$+26906880q_{11}=0$$
$$7680q_6+691200q_8-15482880q_9+8225280q_{10}+1447649280q_{11}=0$$
$$13440q_7+1524096q_9-38707200q_{10}+16203264q_{11}=0$$
$$21504q_8+3010560q_{10}-8515840q_{11}=0$$
$$32256q_9+5474304q_{11}=0$$
$$46080q_{10}=0$$
$$63360q_{11}=0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0=0$, $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=0$, $q_4=-1.027286649802971\times10^{-15}$, $q_5=0$, $q_6=0$, $q_7=0$,

$q_8 = 0$, $q_9 = 0$, $q_{10} = 0$, $q_{11} = 0$ bulunur. Bu değerler $P_T^{11}(x) = \sum_{i=0}^{11} q_i T_i(x)$ de yerine yazılırsa

$$P_T^{11}(x) = -1.027286649802971 \times 10^{-15} T_4(x)$$

(4.6) daki sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için birinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 11. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

2. $P_U^{11}(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$m = 11$ ve $n = 8$ değerleri (3.38) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{11} q_i T_i(x) + \sum_{t=1}^{8} \alpha_t \sum_{i=t}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} c_{(t,i)}^k d_{(t,i)}^k = F_U^{11}(x) \tag{4.13}$$

olur. (4.13) eşitliği $t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$ değerleri için

$$\begin{aligned} &8\sum_{i=3}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{(3,i)}^k d_{(3,i)}^k + 3\sum_{i=5}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-5)/2 \right]\!\right]} c_{(5,i)}^k d_{(5,i)}^k - 4\sum_{i=6}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-6)/2 \right]\!\right]} c_{(6,i)}^k d_{(6,i)}^k \\ &+ \sum_{i=8}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-8)/2 \right]\!\right]} c_{(8,i)}^k d_{(8,i)}^k = F_U^{11}(x) \end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklinde bulunur. (4.14) eşitliği

$$\begin{aligned} &8q_3\left(c_{(3,3)}^0 d_{(3,3)}^0\right) + 8q_4\left(c_{(3,4)}^0 d_{(3,4)}^0\right) + 8q_5\left(c_{(3,5)}^0 d_{(3,5)}^0 + c_{(3,5)}^1 d_{(3,5)}^1\right) + 8q_6\left(c_{(3,6)}^0 d_{(3,6)}^0\right. \\ &\left.+ c_{(3,6)}^1 d_{(3,6)}^1\right) + 8q_7\left(c_{(3,7)}^0 d_{(3,7)}^0 + c_{(3,7)}^1 d_{(3,7)}^1 + c_{(3,7)}^2 d_{(3,7)}^2\right) + 8q_8\left(c_{(3,8)}^0 d_{(3,8)}^0 + c_{(3,8)}^1 d_{(3,8)}^1\right. \\ &\left.+ c_{(3,8)}^2 d_{(3,8)}^2\right) + 8q_9\left(c_{(3,9)}^0 d_{(3,9)}^0 + c_{(3,9)}^1 d_{(3,9)}^1 + c_{(3,9)}^2 d_{(3,9)}^2 + c_{(3,9)}^3 d_{(3,9)}^3\right) + 8q_{10}\left(c_{(3,10)}^0 d_{(3,10)}^0\right. \\ &\left.+ c_{(3,10)}^1 d_{(3,10)}^1 + c_{(3,10)}^2 d_{(3,10)}^2 + c_{(3,10)}^3 d_{(3,10)}^3\right) + 8q_{11}\left(c_{(3,11)}^0 d_{(3,11)}^0 + c_{(3,11)}^1 d_{(3,11)}^1 + c_{(3,11)}^2 d_{(3,11)}^2\right. \\ &\left.+ c_{(3,11)}^3 d_{(3,11)}^3 + c_{(3,11)}^4 d_{(3,11)}^4\right) + 3q_5\left(c_{(5,5)}^0 d_{(5,5)}^0\right) + 3q_6\left(c_{(5,6)}^0 d_{(5,6)}^0\right) + 3q_7\left(c_{(5,7)}^0 d_{(5,7)}^0\right. \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$+c^{1}_{(5,7)}d^{1}_{(5,7)}\Big)+3q_8\left(c^{0}_{(5,8)}d^{0}_{(5,8)}+c^{1}_{(5,8)}d^{1}_{(5,8)}\right)+3q_9\left(c^{0}_{(5,9)}d^{0}_{(5,9)}+c^{1}_{(5,9)}d^{1}_{(5,9)}+c^{2}_{(5,9)}d^{2}_{(5,9)}\right)$$

$$+3q_{10}\left(c^{0}_{(5,10)}d^{0}_{(5,10)}+c^{1}_{(5,10)}d^{1}_{(5,10)}+c^{2}_{(5,10)}d^{2}_{(5,10)}\right)+3q_{11}\Big(c^{0}_{(5,11)}d^{0}_{(5,11)}+c^{1}_{(5,11)}d^{1}_{(5,11)}+c^{2}_{(5,11)}d^{2}_{(5,11)}$$

$$+c^{3}_{(5,11)}d^{3}_{(5,11)}\Big)-4q_6\left(c^{0}_{(6,6)}d^{0}_{(6,6)}\right)-4q_7\left(c^{0}_{(6,7)}d^{0}_{(6,7)}\right)-4q_8\left(c^{0}_{(6,8)}d^{0}_{(6,8)}+c^{1}_{(6,8)}d^{1}_{(6,8)}\right)$$

$$-4q_9\left(c^{0}_{(6,9)}d^{0}_{(6,9)}+c^{1}_{(6,9)}d^{1}_{(6,9)}\right)-4q_{10}\left(c^{0}_{(6,10)}d^{0}_{(6,10)}+c^{1}_{(6,10)}d^{1}_{(6,10)}+c^{2}_{(6,10)}d^{2}_{(6,10)}\right)$$

$$-4q_{11}\left(c^{0}_{(6,11)}d^{0}_{(6,11)}+c^{1}_{(6,11)}d^{1}_{(6,11)}+c^{2}_{(6,11)}d^{2}_{(6,11)}\right)+q_8\left(c^{0}_{(8,8)}d^{0}_{(8,8)}\right)+q_9\left(c^{0}_{(8,9)}d^{0}_{(8,9)}\right)$$

$$+q_{10}\left(c^{0}_{(8,10)}d^{0}_{(8,10)}+c^{1}_{(8,10)}d^{1}_{(8,10)}\right)+q_{11}\left(c^{0}_{(8,11)}d^{0}_{(8,11)}+c^{1}_{(8,11)}d^{1}_{(8,11)}\right)=-0.0005\cdot\frac{U_1(x)}{2} \qquad (4.15a)$$

olur. (3.38a) eşitliğinden

$c^{0}_{(3,3)}=48$, $c^{0}_{(3,4)}=192$, $c^{0}_{(3,5)}=480$, $c^{1}_{(3,5)}=-192$, $c^{0}_{(3,6)}=960$, $c^{1}_{(3,6)}=-960$,
$c^{0}_{(3,7)}=1680$, $c^{1}_{(3,7)}=-2880$, $c^{2}_{(3,7)}=480$, $c^{0}_{(3,8)}=2688$, $c^{1}_{(3,8)}=-6720$, $c^{2}_{(3,8)}=2880$,
$c^{0}_{(3,9)}=4032$, $c^{1}_{(3,9)}=-13440$, $c^{2}_{(3,9)}=10080$, $c^{3}_{(3,9)}=-960$, $c^{0}_{(3,10)}=5760$,
$c^{1}_{(3,10)}=-24192$, $c^{2}_{(3,10)}=26880$, $c^{3}_{(3,10)}=-6720$, $c^{0}_{(3,11)}=7920$, $c^{1}_{(3,11)}=-40320$,
$c^{2}_{(3,11)}=60480$, $c^{3}_{(3,11)}=-26880$, $c^{4}_{(3,11)}=1680$, $c^{0}_{(5,5)}=3840$, $c^{0}_{(5,6)}=23040$,
$c^{0}_{(5,7)}=80640$, $c^{1}_{(5,7)}=-23040$, $c^{0}_{(5,8)}=215040$, $c^{1}_{(5,8)}=-161280$, $c^{0}_{(5,9)}=483840$,
$c^{1}_{(5,9)}=-645120$, $c^{2}_{(5,9)}=80640$, $c^{0}_{(5,10)}=967680$, $c^{1}_{(5,10)}=-1935360$,
$c^{2}_{(5,10)}=645120$, $c^{0}_{(5,11)}=1774080$, $c^{1}_{(5,11)}=-4838400$, $c^{2}_{(5,11)}=2903040$,
$c^{3}_{(5,11)}=-215040$, $c^{0}_{(6,6)}=46080$, $c^{0}_{(6,7)}=322560$, $c^{0}_{(6,8)}=1290240$, $c^{1}_{(6,8)}=-322560$,
$c^{0}_{(6,9)}=3870720$, $c^{1}_{(6,9)}=-2580480$, $c^{0}_{(6,10)}=9676800$, $c^{1}_{(6,10)}=-11612160$,
$c^{2}_{(6,10)}=1290240$, $c^{0}_{(6,11)}=21288960$, $c^{1}_{(6,11)}=-38707200$, $c^{2}_{(6,11)}=11612160$,
$c^{0}_{(8,8)}=10321920$, $c^{0}_{(8,9)}=92897280$, $c^{0}_{(8,10)}=464486400$, $c^{1}_{(8,10)}=-92897280$,
$c^{0}_{(8,11)}=1703116800$, $c^{1}_{(8,11)}=-928972800$ (4.16)

bulunur. (3.38b) eşitliğinden,

$$d^0_{(3,3)}=d^1_{(3,5)}=d^2_{(3,7)}=d^3_{(3,9)}=d^4_{(3,11)}=d^0_{(5,5)}=d^1_{(5,7)}=d^2_{(5,9)}=d^3_{(5,11)}=d^0_{(6,6)}=U_0(x)$$

$$d^1_{(6,8)}=d^2_{(6,10)}=d^0_{(8,8)}=d^1_{(8,10)}=U_0(x)$$

$$d^0_{(3,4)}=d^1_{(3,6)}=d^2_{(3,8)}=d^3_{(3,10)}=d^0_{(5,6)}=d^1_{(5,8)}=d^2_{(5,10)}=d^0_{(6,7)}=U_1(x)$$

$$d^1_{(6,9)}=d^2_{(6,11)}=d^0_{(8,9)}=d^1_{(8,11)}=U_1(x)$$

$$d^0_{(3,5)}=d^1_{(3,7)}=d^2_{(3,9)}=d^3_{(3,11)}=d^0_{(5,7)}=d^1_{(5,9)}=d^2_{(5,11)}=d^0_{(6,8)}=2U_2(x)+U_0(x)$$

$$d^1_{(6,10)}=d^0_{(8,10)}=2U_2(x)+U_0(x)$$

$$d^0_{(3,6)}=d^1_{(3,8)}=d^2_{(3,10)}=d^0_{(5,8)}=d^1_{(5,10)}=d^0_{(6,9)}=d^1_{(6,11)}=d^0_{(8,11)}=2U_3(x)+2U_1(x)$$

$$d^0_{(3,7)}=d^1_{(3,9)}=d^2_{(3,11)}=d^0_{(5,9)}=d^1_{(5,11)}=d^0_{(6,10)}=2U_4(x)+3U_2(x)+2U_0(x)$$

$$d^0_{(3,8)}=d^1_{(3,10)}=d^0_{(5,10)}=d^0_{(6,11)}=2U_5(x)+4U_3(x)+5U_1(x)$$

$$d^0_{(3,9)}=d^1_{(3,11)}=d^0_{(5,11)}=2U_6(x)+5U_4(x)+9U_2(x)+5U_0(x)$$

$$d^0_{(3,10)}=2U_7(x)+6U_5(x)+14U_3(x)+14U_1(x)$$

$$d^0_{(3,11)}=2U_8(x)+7U_6(x)+20U_4(x)+28U_2(x)+15U_0(x) \tag{4.17}$$

bulunur. (4.16) ve (4.17) eşitlikleri (4.15)-(4.15a) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$384q_3U_0(x)+1536q_4U_1(x)+8q_5(960U_2(x)+288U_0(x))+8q_6(1920U_3(x)+960U_1(x))$$
$$+8q_7(3360U_4(x)-720U_2(x)+960U_0(x))+8q_8(5376_5(x)-2688U_3(x)+2800U_1(x))$$
$$+8q_9(8064U_6(x)-6720U_4(x)+16128U_2(x)+2400U_0(x))+8q_{10}(11520U_7(x)$$
$$-13824U_5(x)+37632U_3(x)+6720U_1(x))+8q_{11}(15840U_8(x)-25200U_6(x)$$
$$+77760U_4(x)-13440U_2(x)+28560U_0(x))++3q_5(3840U_0(x))+3q_6(23040U_1(x))$$
$$+3q_7(161280U_2(x)+57600U_0(x))+3q_8(430080U_3(x)+268800U_1(x))$$
$$+3q_9(967680U_4(x)+161280U_2(x)+403200U_0(x))+3q_{10}(1935360U_5(x)$$
$$+1612800U_1(x))+3q_{11}(3548160U_6(x)-806400U_4(x)+7257600U_2(x)+1881600U_0(x))$$
$$-4q_6(46080U_0(x))-4q_7(322560U_1(x))-4q_8(2580480U_2(x)+967680U_0(x))$$
$$-4q_9(7741440U_3(x)+5160960U_1(x))-4q_{10}(19353600U_4(x)+5806080U_2(x)$$
$$+9031680U_0(x))-4q_{11}(42577920U_5(x)+77414400U_3(x)+40642560U_1(x))$$
$$+q_8(1032192U_0(x))+q_9(92897280U_1(x))+q_{10}(928972800U_2(x)+371589120U_0(x))$$

$$+q_{11}\left(3406233600U_3\left(x\right)+2477260800U_1\left(x\right)\right)=-0.0005\cdot\frac{U_1\left(x\right)}{2}$$

bulunur. Buradan

$$U_0\left(x\right)\left(384q_3+13824q_5-184320q_6+180480q_7+6451200q_8+1228800q_9\right.$$
$$\left.+3679764489q_{10}+5873280q_{11}\right)+U_1\left(x\right)\left(1536q_4+76800q_6-1290240q_7\right.$$
$$\left.+828800q_8+72253440q_9+4892160q_{10}+2314690560q_{11}\right)+U_2\left(x\right)\left(7680q_5\right.$$
$$\left.+478080q_7-10321920q_8+612864q_9+905748480q_{10}+21665280q_{11}\right)$$
$$U_3\left(x\right)\left(15360q_6+1268736q_8-30965760q_9+301056q_{10}+3173990400q_{11}\right)$$
$$+U_4\left(x\right)\left(26880q_7+2849280q_9-77414400q_{10}-1797120q_{11}\right)+U_5\left(x\right)\left(43008q_8\right.$$
$$\left.+5695488q_{10}-170311680q_{11}\right)+U_6\left(x\right)\left(64368q_9+10442880q_{11}\right)+U_7\left(x\right)\left(92160q_{10}\right)$$
$$U_8\left(x\right)\left(126720q_{11}\right)=-0.0005\cdot\frac{U_1\left(x\right)}{2}$$

olur. Bu eşitlikten

$$384q_3+13824q_5-184320q_6+180480q_7+6451200q_8+1228800q_9$$
$$3679764489q_{10}+5873280q_{11}=0$$
$$1536q_4+76800q_6-1290240q_7+828800q_8+72253440q_9+4892160q_{10}$$
$$+2314690560q_{11}=-0.0005\cdot\frac{1}{2}$$
$$7680q_5+478080q_7-10321920q_8+612864q_9+905748480q_{10}+21665280q_{11}=0$$
$$15360q_6+1268736q_8-30965760q_9+301056q_{10}+3173990400q_{11}=0$$
$$15360q_6+1268736q_8-30965760q_9+301056q_{10}+3173990400q_{11}=0$$
$$26880q_7+2849280q_9-77414400q_{10}-1797120q_{11}$$
$$43008q_8+5695488q_{10}-170311680q_{11}=0$$
$$64368q_9+10442880q_{11}=0$$
$$92160q_{10}=0$$
$$126720q_{11}=0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $q_4 = -9.673302942829917 \times 10^{-16}$, $q_5 = 0$, $q_6 = 0$, $q_7 = 0$, $q_8 = 0$, $q_9 = 0$, $q_{10} = 0$, $q_{11} = 0$ bulunur. Bu değerler $P_U^{11}(x) = \sum_{i=0}^{11} q_i U_i(x)$ de yerine yazılırsa

$$P_U^{11}(x) = -9.673302942829917 \times 10^{-16} U_4(x)$$

(4.6) daki sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için ikinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 11. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

3. $P_V^{11}(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$m = 11$ ve $n = 8$ değerleri (3.42) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha_0 \sum_{i=0}^{11} q_i V_i(x) + \sum_{t=1}^{8} \alpha_t \sum_{i=t}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} c_{1(t,i)}^{k} d_{1(t,i)}^{k} - \sum_{t=1}^{8} \alpha_t \sum_{i=t}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2 \right]\!\right]} c_{2(t,i)}^{k} d_{2(t,i)}^{k} = F_V^{11}(x) \quad (4.18)$$

olur. (4.18) eşitliği $t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$ değerleri için

$$\begin{aligned}
&8\sum_{i=3}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{1(3,i)}^{k} d_{1(3,i)}^{k} + 3\sum_{i=5}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-5)/2 \right]\!\right]} c_{1(5,i)}^{k} d_{1(5,i)}^{k} - 4\sum_{i=6}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-6)/2 \right]\!\right]} c_{1(6,i)}^{k} d_{1(6,i)}^{k} \\
&+\sum_{i=8}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-8)/2 \right]\!\right]} c_{1(8,i)}^{k} d_{1(8,i)}^{k} - 8\sum_{i=4}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-4)/2 \right]\!\right]} c_{2(3,i)}^{k} d_{2(3,i)}^{k} - 3\sum_{i=6}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-6)/2 \right]\!\right]} c_{2(5,i)}^{k} d_{2(5,i)}^{k} \\
&+4\sum_{i=7}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-7)/2 \right]\!\right]} c_{2(6,i)}^{k} d_{2(6,i)}^{k} - \sum_{i=9}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-9)/2 \right]\!\right]} c_{2(8,i)}^{k} d_{2(8,i)}^{k} = F_V^{11}(x) \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.19) eşitliği

$$
\begin{aligned}
&8q_3\left(c^{0}_{1(3,3)}d^{0}_{1(3,3)}\right)+8q_4\left(c^{0}_{1(3,4)}d^{0}_{1(3,4)}\right)+8q_5\left(c^{0}_{1(3,5)}d^{0}_{1(3,5)}+c^{1}_{1(3,5)}d^{1}_{1(3,5)}\right)\\
&+8q_6\left(c^{0}_{1(3,6)}d^{0}_{1(3,6)}+c^{1}_{1(3,6)}d^{1}_{1(3,6)}\right)+8q_7\left(c^{0}_{1(3,7)}d^{0}_{1(3,7)}+c^{1}_{1(3,7)}d^{1}_{1(3,7)}+c^{2}_{1(3,7)}d^{2}_{1(3,7)}\right)\\
&+8q_8\left(c^{0}_{1(3,8)}d^{0}_{1(3,8)}+c^{1}_{1(3,8)}d^{1}_{1(3,8)}+c^{2}_{1(3,8)}d^{2}_{1(3,8)}\right)+8q_9\left(c^{0}_{1(3,9)}d^{0}_{1(3,9)}+c^{1}_{1(3,9)}d^{1}_{1(3,9)}+c^{2}_{1(3,9)}d^{2}_{1(3,9)}\right)\\
&+8q_{10}\left(c^{0}_{1(3,10)}d^{0}_{1(3,10)}+c^{1}_{1(3,10)}d^{1}_{1(3,10)}+c^{2}_{1(3,10)}d^{2}_{1(3,10)}+c^{3}_{1(3,10)}d^{3}_{1(3,10)}\right)\\
&+8q_{11}\left(c^{0}_{1(3,11)}d^{0}_{1(3,11)}+c^{1}_{1(3,11)}d^{1}_{1(3,11)}+c^{2}_{1(3,11)}d^{2}_{1(3,11)}+c^{3}_{1(3,11)}d^{3}_{1(3,11)}+c^{4}_{1(3,11)}d^{4}_{1(3,11)}\right)\\
&+3q_5\left(c^{0}_{1(5,5)}d^{0}_{1(5,5)}\right)+3q_6\left(c^{0}_{1(5,6)}d^{0}_{1(5,6)}\right)+3q_7\left(c^{0}_{1(5,7)}d^{0}_{1(5,7)}+c^{1}_{1(5,7)}d^{1}_{1(5,7)}\right)\\
&+3q_8\left(c^{0}_{1(5,8)}d^{0}_{1(5,8)}+c^{1}_{1(5,8)}d^{1}_{1(5,8)}\right)+3q_9\left(c^{0}_{1(5,9)}d^{0}_{1(5,9)}+c^{1}_{1(5,9)}d^{1}_{1(5,9)}+c^{2}_{1(5,9)}d^{2}_{1(5,9)}\right)\\
&+3q_{10}\left(c^{0}_{1(5,10)}d^{0}_{1(5,10)}+c^{1}_{1(5,10)}d^{1}_{1(5,10)}+c^{2}_{1(5,10)}d^{2}_{1(5,10)}\right)+3q_{11}\left(c^{0}_{1(5,11)}d^{0}_{1(5,11)}+c^{1}_{1(5,11)}d^{1}_{1(5,11)}\right.\\
&\left.+c^{2}_{1(5,11)}d^{2}_{1(5,11)}+c^{3}_{1(5,11)}d^{3}_{1(5,11)}\right)-4q_6\left(c^{0}_{1(6,6)}d^{0}_{1(6,6)}\right)-4q_7\left(c^{0}_{1(6,7)}d^{0}_{1(6,7)}\right)-4q_8\left(c^{0}_{1(6,8)}d^{0}_{1(6,8)}\right.\\
&\left.+c^{1}_{1(6,8)}d^{1}_{1(6,8)}\right)-4q_9\left(c^{0}_{1(6,9)}d^{0}_{1(6,9)}+c^{1}_{1(6,9)}d^{1}_{1(6,9)}\right)-4q_{10}\left(c^{0}_{1(6,10)}d^{0}_{1(6,10)}+c^{1}_{1(6,10)}d^{1}_{1(6,10)}\right.\\
&\left.+c^{2}_{1(6,10)}d^{2}_{1(6,10)}\right)-4q_{11}\left(c^{0}_{1(6,11)}d^{0}_{1(6,11)}+c^{1}_{1(6,11)}d^{1}_{1(6,11)}+c^{2}_{1(6,11)}d^{2}_{1(6,11)}\right)+q_8\left(c^{0}_{1(8,8)}d^{0}_{1(8,8)}\right)\\
&+q_9\left(c^{0}_{1(8,9)}d^{0}_{1(8,9)}\right)+q_{10}\left(c^{0}_{1(8,10)}d^{0}_{1(8,10)}+c^{1}_{1(8,10)}d^{1}_{1(8,10)}\right)+q_{11}\left(c^{0}_{1(8,11)}d^{0}_{1(8,11)}+c^{1}_{1(8,11)}d^{1}_{1(8,11)}\right)\\
&-8q_4\left(c^{0}_{2(3,4)}d^{0}_{2(3,4)}\right)-8q_5\left(c^{0}_{2(3,5)}d^{0}_{2(3,5)}\right)-8q_6\left(c^{0}_{2(3,6)}d^{0}_{2(3,6)}+c^{1}_{2(3,6)}d^{1}_{2(3,6)}\right)\\
&-8q_7\left(c^{0}_{2(3,7)}d^{0}_{2(3,7)}+c^{1}_{2(3,7)}d^{1}_{2(3,7)}\right)-8q_8\left(c^{0}_{2(3,8)}d^{0}_{2(3,8)}+c^{1}_{2(3,8)}d^{1}_{2(3,8)}+c^{2}_{2(3,8)}d^{2}_{2(3,8)}\right)\\
&-8q_9\left(c^{0}_{2(3,9)}d^{0}_{2(3,9)}+c^{1}_{2(3,9)}d^{1}_{2(3,9)}+c^{2}_{2(3,9)}d^{2}_{2(3,9)}\right)-8q_{10}\left(c^{0}_{2(3,10)}d^{0}_{2(3,10)}+c^{1}_{2(3,10)}d^{1}_{2(3,10)}\right.\\
&\left.+c^{2}_{2(3,10)}d^{2}_{2(3,10)}+c^{3}_{2(3,10)}d^{3}_{2(3,10)}\right)-8q_{11}\left(c^{0}_{2(3,11)}d^{0}_{2(3,11)}+c^{1}_{2(3,11)}d^{1}_{2(3,11)}+c^{2}_{2(3,11)}d^{2}_{2(3,11)}\right.\\
&\left.+c^{3}_{2(3,11)}d^{3}_{2(3,11)}+c^{4}_{2(3,11)}d^{4}_{2(3,11)}\right)-3q_6\left(c^{0}_{2(5,6)}d^{0}_{2(5,6)}\right)-3q_7\left(c^{0}_{2(5,7)}d^{0}_{2(5,7)}\right)\\
&-3q_8\left(c^{0}_{2(5,8)}d^{0}_{2(5,8)}+c^{1}_{2(5,8)}d^{1}_{2(5,8)}\right)-3q_9\left(c^{0}_{2(5,9)}d^{0}_{2(5,9)}+c^{1}_{2(5,9)}d^{1}_{2(5,9)}\right)-3q_{10}\left(c^{0}_{2(5,10)}d^{0}_{2(5,10)}\right.\\
&\left.+c^{1}_{2(5,10)}d^{1}_{2(5,10)}+c^{2}_{2(5,10)}d^{2}_{2(5,10)}\right)-3q_{11}\left(c^{0}_{2(5,11)}d^{0}_{2(5,11)}+c^{1}_{2(5,11)}d^{1}_{2(5,11)}+c^{2}_{2(5,11)}d^{2}_{2(5,11)}\right)\\
&+4q_7\left(c^{0}_{2(6,7)}d^{0}_{2(6,7)}\right)+4q_8\left(c^{0}_{2(6,8)}d^{0}_{2(6,8)}\right)+4q_9\left(c^{0}_{2(6,9)}d^{0}_{2(6,9)}+c^{1}_{2(6,9)}d^{1}_{2(6,9)}\right)\\
&+4q_{10}\left(c^{0}_{2(6,10)}d^{0}_{2(6,10)}+c^{1}_{2(6,10)}d^{1}_{2(6,10)}\right)+4q_{11}\left(c^{0}_{2(6,11)}d^{0}_{2(6,11)}+c^{1}_{2(6,11)}d^{1}_{2(6,11)}+c^{2}_{2(6,11)}d^{2}_{2(6,11)}\right)\\
&-q_9\left(c^{0}_{2(8,9)}d^{0}_{2(8,9)}\right)-q_{10}\left(c^{0}_{2(8,10)}d^{0}_{2(8,10)}\right)-q_{11}\left(c^{0}_{2(8,11)}d^{0}_{2(8,11)}+c^{1}_{2(8,11)}d^{1}_{2(8,11)}\right)=-0.0005\cdot\frac{V_0(x)+V_2(x)}{2}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

olur. (3.42a) ve (3.42b) eşitliklerinden

$$c^{0}_{1(3,3)}=48,\ c^{0}_{1(3,4)}=192,\ c^{0}_{1(3,5)}=480,\ c^{1}_{1(3,5)}=-192,\ c^{0}_{1(3,6)}=960,\ c^{1}_{1(3,6)}=-960,$$

$$c^{0}_{1(3,7)}=1680,\quad c^{1}_{1(3,7)}=-2880,\quad c^{2}_{1(3,7)}=480,\quad c^{0}_{1(3,8)}=2688,\quad c^{1}_{1(3,8)}=-6720,$$

$$c^{2}_{1(3,8)}=2880,\quad c^{0}_{1(3,9)}=4032,\quad c^{1}_{1(3,9)}=-13440,\quad c^{2}_{1(3,9)}=10080,\quad c^{3}_{1(3,9)}=-960,$$

$$c^{0}_{1(3,10)}=5760,\ c^{1}_{1(3,10)}=-24192,\ c^{2}_{1(3,10)}=26880,\ c^{3}_{1(3,10)}=-6720,\ c^{0}_{1(3,11)}=7920,$$

$$c^{1}_{1(3,11)}=-40320,\ c^{2}_{1(3,11)}=60480,\ c^{3}_{1(3,11)}=-26880,\ c^{4}_{1(3,11)}=1680,\ c^{0}_{1(5,5)}=3840,$$

$$c^{0}_{1(5,6)}=23040,\ c^{0}_{1(5,7)}=80640,\ c^{1}_{1(5,7)}=-23040,\ c^{0}_{1(5,8)}=215040,\ c^{1}_{1(5,8)}=-161280,$$

$$c^{0}_{1(5,9)}=483840,\quad c^{1}_{1(5,9)}=-645120,\quad c^{2}_{1(5,9)}=80640,\quad c^{0}_{1(5,10)}=967680,$$

$$c^{1}_{1(5,10)}=-1935360,\quad c^{2}_{1(5,10)}=645120,\quad c^{0}_{1(5,11)}=1774080,\quad c^{1}_{1(5,11)}=-4838400,$$

$$c^{2}_{1(5,11)}=2903040,\quad c^{3}_{1(5,11)}=-215040,\quad c^{0}_{1(6,6)}=46080,\quad c^{0}_{1(6,7)}=322560,$$

$$c^{0}_{1(6,8)}=1290240,\quad c^{1}_{1(6,8)}=-322560,\quad c^{0}_{1(6,9)}=3870720,\quad c^{1}_{1(6,9)}=-2580480,$$

$$c^{0}_{1(6,10)}=9676800,\quad c^{1}_{1(6,10)}=-11612160,\quad c^{2}_{1(6,10)}=1290240,\quad c^{0}_{1(6,11)}=21288960,$$

$$c^{1}_{1(6,11)}=-38707200,\quad c^{2}_{1(6,11)}=11612160,\quad c^{0}_{1(8,8)}=10321920,\quad c^{0}_{1(8,9)}=92897280,$$

$$c^{0}_{1(8,10)}=464486400,\quad c^{1}_{1(8,10)}=-92897280,\quad c^{0}_{1(8,11)}=1703116800,$$

$$c^{1}_{1(8,11)}=-928972800,\quad c^{0}_{2(3,4)}=48,\quad c^{0}_{2(3,5)}=192,\quad c^{0}_{2(3,6)}=480,\quad c^{0}_{1(3,6)}=960,$$

$$c^{1}_{2(3,7)}=-960,\quad c^{0}_{2(3,8)}=1680,\quad c^{1}_{2(3,8)}=-2880,\quad c^{2}_{2(3,8)}=480,\quad c^{0}_{2(3,9)}=2688,$$

$$c^{1}_{2(3,9)}=-6720,\ c^{2}_{2(3,9)}=2880,\ c^{0}_{2(3,10)}=4032,\ c^{1}_{2(3,10)}=-13440,\ c^{2}_{1(3,9)}=10080,$$

$$c^{3}_{2(3,10)}=-960,\ c^{0}_{2(3,11)}=5760,\ c^{1}_{2(3,11)}=-24192,\ c^{2}_{2(3,11)}=26880,\ c^{1}_{2(3,6)}=-192,$$

$$c^{3}_{2(3,11)}=-6720,\ c^{0}_{2(5,6)}=3840,\ c^{0}_{2(5,7)}=23040,\ c^{0}_{2(5,8)}=80640,\ c^{1}_{2(5,8)}=-23040,$$

$$c^{0}_{2(5,9)}=215040,\quad c^{1}_{2(5,9)}=-161280,\quad c^{0}_{2(5,10)}=483840,\quad c^{1}_{2(5,10)}=-645120,$$

$$c^{2}_{2(5,10)}=80640,\quad c^{0}_{2(5,11)}=967680,\quad c^{1}_{2(5,11)}=-1935360,\quad c^{2}_{2(5,11)}=645120,$$

$$c^{0}_{2(5,11)}=1774080,\quad c^{0}_{2(6,7)}=46080,\quad c^{0}_{2(6,8)}=322560,\quad c^{0}_{2(6,9)}=1290240,$$

$$c^{1}_{2(6,9)}=-322560,\quad c^{0}_{2(6,10)}=3870720,\quad c^{1}_{2(6,10)}=-2580480,\quad c^{0}_{2(6,11)}=9676800,$$

$$c^{1}_{2(6,11)}=-11612160,\quad c^{2}_{2(6,11)}=1290240,\quad c^{0}_{2(8,9)}=10321920,\quad c^{0}_{2(8,10)}=92897280,$$

$$c^{0}_{2(8,11)}=464486400,\ c^{1}_{2(8,11)}=-92897280, \tag{4.21}$$

bulunur. (3.42c) ve (3.42d) eşitliklerinden,

$$d_{1(3,3)}^{0}=d_{1(3,5)}^{1}=d_{1(3,7)}^{2}=d_{1(3,9)}^{3}=d_{1(3,11)}^{4}=d_{1(5,5)}^{0}=d_{1(5,7)}^{1}=d_{1(5,9)}^{2}=d_{1(5,11)}^{3}=V_0(x)$$
$$d_{1(6,6)}^{0}=d_{1(6,8)}^{1}=d_{1(6,10)}^{2}=d_{1(8,8)}^{0}=d_{1(8,10)}^{1}=d_{2(3,4)}^{0}=d_{2(3,6)}^{1}=d_{2(3,8)}^{2}=d_{2(3,10)}^{3}=V_0(x)$$
$$d_{2(5,6)}^{0}=d_{2(5,8)}^{1}=d_{2(5,10)}^{2}=d_{2(6,7)}^{0}=d_{2(6,9)}^{1}=d_{2(6,11)}^{2}=d_{2(8,9)}^{0}=d_{2(8,11)}^{1}=V_0(x)$$
$$d_{1(3,4)}^{0}=d_{1(3,6)}^{1}=d_{1(3,8)}^{2}=d_{1(3,10)}^{3}=d_{1(5,6)}^{0}=d_{1(5,8)}^{1}=d_{1(5,10)}^{2}=d_{1(6,7)}^{0}=V_0(x)+V_1(x)$$
$$d_{1(6,9)}^{1}=d_{1(6,11)}^{2}=d_{1(8,9)}^{0}=d_{1(8,11)}^{1}=d_{2(3,5)}^{0}=d_{2(3,7)}^{1}=d_{2(3,9)}^{2}=d_{2(3,11)}^{3}=V_0(x)+V_1(x)$$
$$d_{2(5,7)}^{0}=d_{2(5,9)}^{1}=d_{2(5,11)}^{2}=d_{2(6,8)}^{0}=d_{2(6,10)}^{1}=d_{2(8,10)}^{0}=V_0(x)+V_1(x)$$
$$d_{1(3,5)}^{0}=d_{1(3,7)}^{1}=d_{1(3,9)}^{2}=d_{1(3,11)}^{3}=d_{1(5,7)}^{0}=d_{1(5,9)}^{1}=d_{1(5,11)}^{2}=2V_0(x)+V_1(x)+V_2(x)$$
$$d_{1(6,8)}^{0}=d_{1(6,10)}^{1}=d_{1(8,10)}^{0}=d_{2(3,6)}^{0}=d_{2(3,8)}^{1}=d_{2(3,10)}^{2}=2V_0(x)+V_1(x)+V_2(x)$$
$$d_{2(5,8)}^{0}=d_{2(5,10)}^{1}=d_{2(6,9)}^{0}=d_{2(6,11)}^{1}=d_{2(8,11)}^{0}=2V_0(x)+V_1(x)+V_2(x)$$
$$d_{1(3,6)}^{0}=d_{1(3,8)}^{1}=d_{1(3,10)}^{2}=d_{1(5,8)}^{0}=d_{1(5,10)}^{1}=3V_0(x)+3V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)$$
$$d_{1(6,9)}^{0}=d_{1(6,11)}^{1}=d_{1(8,11)}^{0}=d_{2(3,7)}^{0}=d_{2(3,9)}^{1}=3V_0(x)+3V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)$$
$$d_{2(3,11)}^{2}=d_{2(5,9)}^{0}=d_{2(5,11)}^{1}=d_{2(6,10)}^{0}=3V_0(x)+3V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)$$
$$d_{1(3,7)}^{0}=d_{1(3,9)}^{1}=d_{1(3,11)}^{2}=d_{1(5,9)}^{0}=d_{1(5,11)}^{1}=6V_0(x)+4V_1(x)+4V_2(x)+V_3(x)+V_4(x)$$
$$d_{1(6,10)}^{0}=d_{2(3,8)}^{0}=d_{2(3,10)}^{1}=d_{2(5,10)}^{0}=d_{2(6,11)}^{0}=6V_0(x)+4V_1(x)+4V_2(x)+V_3(x)+V_4(x)$$
$$d_{1(3,8)}^{0}=d_{1(3,10)}^{1}=d_{1(5,10)}^{0}=10V_0(x)+10V_1(x)+5V_2(x)+5V_3(x)+V_4(x)+V_5(x)$$
$$d_{1(6,11)}^{0}=d_{2(3,9)}^{0}=d_{2(3,11)}^{1}=d_{2(5,11)}^{0}=10V_0(x)+10V_1(x)+5V_2(x)+5V_3(x)+V_4(x)+V_5(x)$$
$$d_{1(3,9)}^{0}=d_{1(3,11)}^{1}=d_{1(5,11)}^{0}=20V_0(x)+15V_1(x)+15V_2(x)+6V_3(x)+6V_4(x)+V_5(x)+V_6(x)$$
$$d_{2(3,10)}^{0}=20V_0(x)+15V_1(x)+15V_2(x)+6V_3(x)+6V_4(x)+V_5(x)+V_6(x)$$
$$d_{1(3,10)}^{0}=35V_0(x)+35V_1(x)+21V_2(x)+21V_3(x)+7V_4(x)+7V_5(x)+V_6(x)+V_7(x)$$
$$d_{2(3,11)}^{0}=35V_0(x)+35V_1(x)+21V_2(x)+21V_3(x)+7V_4(x)+7V_5(x)+V_6(x)+V_7(x)$$
$$d_{1(3,11)}^{0}=70V_0(x)+56V_1(x)+56V_2(x)+28V_3(x)+28V_4(x)+8V_5(x)+8V_6(x)+V_7(x)+V_8(x) \qquad (4.22)$$

bulunur. (4.21) ve (4.22) eşitlikleri (4.20) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&384q_3V_0(x)+1536q_4(x)(V_0(x)+V_1(x))+8q_5(768V_0(x)+480V_1(x)+480V_2(x))\\
&+8q_6(1920V_0(x)+1920V_1(x)+960V_2(x)+960V_3(x))\\
&+8q_7(4800V_0(x)+3840V_1(x)+3840V_2(x)+1680V_3(x)+1680V_4(x))\\
&+8q_8(9600V_0(x)+9600V_1(x)+6720V_2(x)+6720V_3(x)+2688V_4(x)+2688V_5(x))\\
&+8q_9(19200V_0(x)+16800V_1(x)+16800V_2(x)+10752V_3(x)+10752V_4(x)\\
&+4032V_5(x)+4032V_6(x))+8q_{10}(33600V_0(x)+33600V_1+26880V_2(x)\\
&+26880V_3(x)+16128V_4(x)+16128V_5(x)+5760V_6(x)+5760V_7(x))\\
&+8q_{11}(58800V_0(x)+53760V_1(x)+53760V_2(x)+40320V_3(x)+40320V_4(x)\\
&+23040V_5(x)+23040V_6(x)+7920V_7(x)+7920V_8(x))+30720q_5V_0(x)\\
&+69120q_6(V_0(x)+V_1(x))+3q_7(138240V_0(x)+80640V_1(x)+80640V_2(x))\\
&+3q_8(483840V_0(x)+483840V_1(x)+215040V_2(x)+215040V_3(x))\\
&+3q_9(1693440V_0(x)+1290240V_1(x)+1290240V_2(x)+483840V_3(x)+483840V_4(x))\\
&+3q_{10}(4515840V_0(x)+4515840V_1(x)+2903040V_2(x)+2903040V_3(x)\\
&+967680V_4(x)+967680V_5(x))+3q_{11}(12042240V_0(x)+10160640V_1(x)\\
&+10160640V_2(x)+5806080V_3(x)+5806080V_4(x)+1774080V_5(x)+1774080V_6(x))\\
&-184320q_6V_0(x)-1290240q_7(V_0(x)+V_1(x))-4q_8(2257920V_0(x)+1290240V_1(x)\\
&+1290240V_2(x))-4q_9(9031680V_0(x)+9031680V_1(x)+3870720V_2(x)\\
&+3870720V_3(x))-4q_{10}(36126720V_0(x)+27095040V_1(x)+27095040V_2(x)\\
&+9676800V_3(x)+9676800V_4(x))-4q_{11}(108380160V_0(x)+108380160V_1(x)\\
&+67737600V_2(x)+67737600V_3(x)+21288960V_4(x)+21288960V_5(x))\\
&+10321920q_8V_0(x)+92897280q_9(V_0(x)+V_1(x))+q_{10}(836075520V_0\\
&+464486400V_1(x)+464486400V_2(x))+q_{11}(4180377600V_0(x)\\
&+4180377600V_1(x)+1703116800V_2(x)+1703116800V_3(x))\\
&-384q_4V_0(x)-1536q_5(V_0(x)+V_1(x))-8q_6(768V_0(x)+480V_1(x)+480V_2(x))\\
&-8q_7(1920V_0(x)+1920V_1(x)+960V_2(x)+960V_3(x))-8q_8(4800V_0(x)+3840V_1(x)\\
&+3840V_2(x)+1680V_3(x)+1680V_4(x))-8q_9(9600V_0(x)+6720V_1(x)+6720V_2(x)\\
&+6720V_3(x)+2688V_4(x)+2688V_5(x))+-8q_{10}(19200V_0(x)+16800V_1(x)\\
&+16800V_2(x)+10752V_3(x)+10752V_4(x)+4032V_5(x)+4032V_6(x))
\end{aligned}
$$

$$-8q_{11}\left(33600V_0(x)+33600V_1(x)+26880V_2(x)+26880V_3(x)+16128V_4(x)\right.$$
$$\left.+16128V_5(x)+5760V_6(x)+5760V_7(x)\right)-11520q_6V_0(x)-69120q_7\left(V_0(x)+V_1(x)\right)$$
$$-3q_8\left(138240V_0(x)+80640V_1(x)+80640V_2(x)\right)-3q_9\left(483840V_0(x)+483840V_1(x)\right.$$
$$\left.+215040V_2(x)+215040V_3(x)\right)-3q_{10}\left(1693440V_0(x)+1290240V_1(x)+1290240V_2(x)\right.$$
$$\left.+483840V_3(x)+483840V_4(x)\right)-3q_{11}\left(4515840V_0(x)+4515840V_1(x)+2903040V_2(x)\right.$$
$$\left.+2903040V_3(x)+967680V_4(x)+967680V_5(x)\right)+184320q_7V_0(x)$$
$$+1290240q_8\left(V_0(x)+V_1(x)\right)+4q_9\left(2257920V_0(x)+1290240V_1(x)+1290240V_2(x)\right)$$
$$+4q_{10}\left(9031680V_0(x)+9031680V_1(x)+3870720V_2(x)+3870720V_3(x)\right)$$
$$+4q_{11}\left(36126720V_0(x)+27095040V_1(x)+27095040V_2(x)+9676800V_3(x)\right.$$
$$\left.+9676800V_4(x)\right)-10321920q_9V_0(x)-92897280q_{10}\left(V_0(x)+V_1(x)\right)$$
$$-q_{11}\left(836075520V_0(x)+464486400V_1(x)+464486400V_2(x)\right)=-0.0005\frac{V_0(x)+V_1(x)}{2}$$

bulunur. Buradan

$$V_0(x)\left(384q_3+1152q_4+35328q_5-117504q_6-737280q_7+3655680q_8\right.$$
$$\left.+54685920q_9+643380480q_{10}+3078069120q_{11}\right)+V_1(x)\left(1536q_4+2304q_5\right.$$
$$+80640q_6-1102080q_7-2615040q_8+64431360q_9+309146880q_{10}$$
$$\left.+3407846400q_{11}\right)+V_2(x)\left(3840q_5+3840q_6+264960q_7+5587200q_8\right.$$
$$\left.-7015680q_9+376508160q_{10}+1098048000q_{11}\right)+V_3(x)\left(7680q_6+5760q_7\right.$$
$$\left.+685440q_8-14644224q_9-15837696q_{10}+1479690240q_{11}\right)$$
$$+V_4(x)\left(13440q_7+8064q_8+1516032q_9-37212672q_{10}-31739904q_{11}\right)$$
$$+V_5(x)\left(21504q_8+10752q_9+2999808q_{10}-82681344q_{11}\right)$$
$$+V_6(x)\left(32256q_9+13824q_{10}+5460480q_{11}\right)+V_7(x)\left(46080q_{10}+17280q_{11}\right)$$
$$+V_8(x)\left(63360q_{11}\right)=-0.0005\cdot\frac{V_0(x)+V_1(x)}{2}$$

olur. Bu eşitlikten

$$384q_3 + 1152q_4 + 35328q_5 - 117504q_6 - 737280q_7 + 3655680q_8$$

$$54685920q_9 + 643380480q_{10} + 3078069120q_{11} = -0.0005 \cdot \frac{1}{2}$$

$$1536q_4 + 2304q_5 + 80640q_6 - 1102080q_7 - 2615040q_8 + 64431360q_9$$

$$+309146880q_{10} + 3407846400q_{11} = -0.0005 \cdot \frac{1}{2}$$

$$3840q_5 + 3840q_6 + 264960q_7 + 5587200q_8 + 7015680q_9$$

$$376508160q_{10} + 1098048000q_{11} = 0$$

$$7680q_6 + 5760q_7 + 685440q_8 - 14644224q_9 - 15837696q_{10} + 1479690240q_{11} = 0$$

$$13440q_7 + 8064q_8 + 1516032q_9 - 37212672q_{10} - 31739904q_{11} = 0$$

$$21504q_8 + 10752q_9 + 2999808q_{10} - 82681344q_{11} = 0$$

$$32256q_9 + 13824q_{10} + 5460480q_{11} = 0$$

$$46080q_{10} + 17280q_{11} = 0$$

$$63360q_{11} = 0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = -1.627604166666667 \times 10^{-7}$, $q_4 = -1.627604166666666 \times 10^{-7}$, $q_5 = 0$, $q_6 = 0$, $q_7 = 0$, $q_8 = 0$, $q_9 = 0$, $q_{10} = 0$, $q_{11} = 0$ bulunur. Bu değerler $P_V^{11}(x) = \sum_{i=0}^{11} q_i V_i(x)$ de yerine yazılırsa

$$P_V^{11}(x) = -1.627604166666667 \times 10^{-7} V_3(x) - 1.627604166666666 \times 10^{-7} V_4(x)$$

(4.6) daki sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için üçüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 11. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

4. $P_W^{11}(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$m = 11$ ve $n = 8$ değerleri (3.46) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{11} q_i V_i\left(x\right)+\sum_{t=1}^{8}\alpha_t\sum_{i=t}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]} c_{1(t,i)}^{k} d_{1(t,i)}^{k}+\sum_{t=1}^{8}\alpha_t\sum_{i=t}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t-1)/2 \right]\!\right]} c_{2(t,i)}^{k} d_{2(t,i)}^{k} = F_W^{11}\left(x\right) \quad (4.23)$$

olur. (4.23) eşitliği $t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$ değerleri için

$$8\sum_{i=3}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{1(3,i)}^{k} d_{1(3,i)}^{k} + 3\sum_{i=5}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-5)/2 \right]\!\right]} c_{1(5,i)}^{k} d_{1(5,i)}^{k} - 4\sum_{i=6}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-6)/2 \right]\!\right]} c_{1(6,i)}^{k} d_{1(6,i)}^{k}$$
$$+\sum_{i=8}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-8)/2 \right]\!\right]} c_{1(8,i)}^{k} d_{1(8,i)}^{k} + 8\sum_{i=4}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-4)/2 \right]\!\right]} c_{2(3,i)}^{k} d_{2(3,i)}^{k} + 3\sum_{i=6}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-6)/2 \right]\!\right]} c_{2(5,i)}^{k} d_{2(5,i)}^{k}$$
$$-4\sum_{i=7}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-7)/2 \right]\!\right]} c_{2(6,i)}^{k} d_{2(6,i)}^{k} + \sum_{i=9}^{11} q_i \sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-9)/2 \right]\!\right]} c_{2(8,i)}^{k} d_{2(8,i)}^{k} = F_W^{11}\left(x\right) \quad (4.24)$$

şeklinde bulunur. (4.24) eşitliği

$$8q_3\left(c_{1(3,3)}^{0}d_{1(3,3)}^{0}\right)+8q_4\left(c_{1(3,4)}^{0}d_{1(3,4)}^{0}\right)+8q_5\left(c_{1(3,5)}^{0}d_{1(3,5)}^{0}+c_{1(3,5)}^{1}d_{1(3,5)}^{1}\right)$$
$$+8q_6\left(c_{1(3,6)}^{0}d_{1(3,6)}^{0}+c_{1(3,6)}^{1}d_{1(3,6)}^{1}\right)+8q_7\left(c_{1(3,7)}^{0}d_{1(3,7)}^{0}+c_{1(3,7)}^{1}d_{1(3,7)}^{1}+c_{1(3,7)}^{2}d_{1(3,7)}^{2}\right)$$
$$+8q_8\left(c_{1(3,8)}^{0}d_{1(3,8)}^{0}+c_{1(3,8)}^{1}d_{1(3,8)}^{1}+c_{1(3,8)}^{2}d_{1(3,8)}^{2}\right)$$
$$+8q_9\left(c_{1(3,9)}^{0}d_{1(3,9)}^{0}+c_{1(3,9)}^{1}d_{1(3,9)}^{1}+c_{1(3,9)}^{2}d_{1(3,9)}^{2}+c_{1(3,9)}^{3}d_{1(3,9)}^{3}\right)$$
$$+8q_{10}\left(c_{1(3,10)}^{0}d_{1(3,10)}^{0}+c_{1(3,10)}^{1}d_{1(3,10)}^{1}+c_{1(3,10)}^{2}d_{1(3,10)}^{2}+c_{1(3,10)}^{3}d_{1(3,10)}^{3}\right)$$
$$+8q_{11}\left(c_{1(3,11)}^{0}d_{1(3,11)}^{0}+c_{1(3,11)}^{1}d_{1(3,11)}^{1}+c_{1(3,11)}^{2}d_{1(3,11)}^{2}+c_{1(3,11)}^{3}d_{1(3,11)}^{3}+c_{1(3,11)}^{4}d_{1(3,11)}^{4}\right)$$
$$+3q_5\left(c_{1(5,5)}^{0}d_{1(5,5)}^{0}\right)+3q_6\left(c_{1(5,6)}^{0}d_{1(5,6)}^{0}\right)+3q_7\left(c_{1(5,7)}^{0}d_{1(5,7)}^{0}+c_{1(5,7)}^{1}d_{1(5,7)}^{1}\right)$$
$$+3q_8\left(c_{1(5,8)}^{0}d_{1(5,8)}^{0}+c_{1(5,8)}^{1}d_{1(5,8)}^{1}\right)+3q_9\left(c_{1(5,9)}^{0}d_{1(5,9)}^{0}+c_{1(5,9)}^{1}d_{1(5,9)}^{1}+c_{1(5,9)}^{2}d_{1(5,9)}^{2}\right)$$
$$+3q_{10}\left(c_{1(5,10)}^{0}d_{1(5,10)}^{0}+c_{1(5,10)}^{1}d_{1(5,10)}^{1}+c_{1(5,10)}^{2}d_{1(5,10)}^{2}\right)$$
$$+3q_{11}\left(c_{1(5,11)}^{0}d_{1(5,11)}^{0}+c_{1(5,11)}^{1}d_{1(5,11)}^{1}+c_{1(5,11)}^{2}d_{1(5,11)}^{2}+c_{1(5,11)}^{3}d_{1(5,11)}^{3}\right)$$
$$-4q_6\left(c_{1(6,6)}^{0}d_{1(6,6)}^{0}\right)-4q_7\left(c_{1(6,7)}^{0}d_{1(6,7)}^{0}\right)-4q_8\left(c_{1(6,8)}^{0}d_{1(6,8)}^{0}+c_{1(6,8)}^{1}d_{1(6,8)}^{1}\right)$$
$$-4q_9\left(c_{1(6,9)}^{0}d_{1(6,9)}^{0}+c_{1(6,9)}^{1}d_{1(6,9)}^{1}\right)-4q_{10}\left(c_{1(6,10)}^{0}d_{1(6,10)}^{0}+c_{1(6,10)}^{1}d_{1(6,10)}^{1}+c_{1(6,10)}^{2}d_{1(6,10)}^{2}\right) \quad (4.25)$$

$$-4q_{11}\left(c_{1(6,11)}^{0}d_{1(6,11)}^{0}+c_{1(6,11)}^{1}d_{1(6,11)}^{1}+c_{1(6,11)}^{2}d_{1(6,11)}^{2}\right)+q_{8}\left(c_{1(8,8)}^{0}d_{1(8,8)}^{0}\right)+q_{9}\left(c_{1(8,9)}^{0}d_{1(8,9)}^{0}\right)$$
$$+q_{10}\left(c_{1(8,10)}^{0}d_{1(8,10)}^{0}+c_{1(8,10)}^{1}d_{1(8,10)}^{1}\right)+q_{11}\left(c_{1(8,11)}^{0}d_{1(8,11)}^{0}+c_{1(8,11)}^{1}d_{1(8,11)}^{1}\right)$$
$$+8q_{4}\left(c_{2(3,4)}^{0}d_{2(3,4)}^{0}\right)+8q_{5}\left(c_{2(3,5)}^{0}d_{2(3,5)}^{0}\right)+8q_{6}\left(c_{2(3,6)}^{0}d_{2(3,6)}^{0}+c_{2(3,6)}^{1}d_{2(3,6)}^{1}\right)$$
$$+8q_{7}\left(c_{2(3,7)}^{0}d_{2(3,7)}^{0}+c_{2(3,7)}^{1}d_{2(3,7)}^{1}\right)+8q_{8}\left(c_{2(3,8)}^{0}d_{2(3,8)}^{0}+c_{2(3,8)}^{1}d_{2(3,8)}^{1}+c_{2(3,8)}^{2}d_{2(3,8)}^{2}\right)$$
$$+8q_{9}\left(c_{2(3,9)}^{0}d_{2(3,9)}^{0}+c_{2(3,9)}^{1}d_{2(3,9)}^{1}+c_{2(3,9)}^{2}d_{2(3,9)}^{2}\right)$$
$$+8q_{10}\left(c_{2(3,10)}^{0}d_{2(3,10)}^{0}+c_{2(3,10)}^{1}d_{2(3,10)}^{1}+c_{2(3,10)}^{2}d_{2(3,10)}^{2}+c_{2(3,10)}^{3}d_{2(3,10)}^{3}\right)$$
$$+8q_{11}\left(c_{2(3,11)}^{0}d_{2(3,11)}^{0}+c_{2(3,11)}^{1}d_{2(3,11)}^{1}+c_{2(3,11)}^{2}d_{2(3,11)}^{2}+c_{2(3,11)}^{3}d_{2(3,11)}^{3}\right)$$
$$+3q_{6}\left(c_{2(5,6)}^{0}d_{2(5,6)}^{0}\right)+3q_{7}\left(c_{2(5,7)}^{0}d_{2(5,7)}^{0}\right)+3q_{8}\left(c_{2(5,8)}^{0}d_{2(5,8)}^{0}+c_{2(5,8)}^{1}d_{2(5,8)}^{1}\right)$$
$$+3q_{9}\left(c_{2(5,9)}^{0}d_{2(5,9)}^{0}+c_{2(5,9)}^{1}d_{2(5,9)}^{1}\right)+3q_{10}\left(c_{2(5,10)}^{0}d_{2(5,10)}^{0}+c_{2(5,10)}^{1}d_{2(5,10)}^{1}+c_{2(5,10)}^{2}d_{2(5,10)}^{2}\right)$$
$$+3q_{11}\left(c_{2(5,11)}^{0}d_{2(5,11)}^{0}+c_{2(5,11)}^{1}d_{2(5,11)}^{1}+c_{2(5,11)}^{2}d_{2(5,11)}^{2}\right)-4q_{7}\left(c_{2(6,7)}^{0}d_{2(6,7)}^{0}\right)-4q_{8}\left(c_{2(6,8)}^{0}d_{2(6,8)}^{0}\right)$$
$$-4q_{9}\left(c_{2(6,9)}^{0}d_{2(6,9)}^{0}+c_{2(6,9)}^{1}d_{2(6,9)}^{1}\right)-4q_{10}\left(c_{2(6,10)}^{0}d_{2(6,10)}^{0}+c_{2(6,10)}^{1}d_{2(6,10)}^{1}\right)$$
$$-4q_{11}\left(c_{2(6,11)}^{0}d_{2(6,11)}^{0}+c_{2(6,11)}^{1}d_{2(6,11)}^{1}+c_{2(6,11)}^{2}d_{2(6,11)}^{2}\right)+q_{9}\left(c_{2(8,9)}^{0}d_{2(8,9)}^{0}\right)+q_{9}\left(c_{2(8,10)}^{0}d_{2(8,10)}^{0}\right)$$
$$+q_{11}\left(c_{2(8,11)}^{0}d_{2(8,11)}^{0}+c_{2(8,11)}^{1}d_{2(8,11)}^{1}\right)=-0.0005\cdot\frac{-W_{0}\left(x\right)+W_{1}\left(x\right)}{2} \tag{4.25a}$$

olur. (3.46a) ve (3.46b) eşitliklerinden

$$c_{1(3,3)}^{0}=48\,,\ c_{1(3,4)}^{0}=192\,,\ c_{1(3,5)}^{0}=480\,,\ c_{1(3,5)}^{1}=-192\,,\ c_{1(3,6)}^{0}=960\,,\ c_{1(3,6)}^{1}=-960\,,$$
$$c_{1(3,7)}^{0}=1680\,,\quad c_{1(3,7)}^{1}=-2880\,,\quad c_{1(3,7)}^{2}=480\,,\quad c_{1(3,8)}^{0}=2688\,,\quad c_{1(3,8)}^{1}=-6720\,,$$
$$c_{1(3,8)}^{2}=2880\,,\quad c_{1(3,9)}^{0}=4032\,,\quad c_{1(3,9)}^{1}=-13440\,,\quad c_{1(3,9)}^{2}=10080\,,\quad c_{1(3,9)}^{3}=-960\,,$$
$$c_{1(3,10)}^{0}=5760\,,\quad c_{1(3,10)}^{1}=-24192\,,\quad c_{1(3,10)}^{2}=26880\,,\quad c_{1(3,10)}^{3}=-6720\,,\quad c_{1(3,11)}^{0}=7920\,,$$
$$c_{1(3,11)}^{1}=-40320\,,\quad c_{1(3,11)}^{2}=60480\,,\quad c_{1(3,11)}^{3}=-26880\,,\quad c_{1(3,11)}^{4}=1680\,,\quad c_{1(5,5)}^{0}=3840\,,$$
$$c_{1(5,6)}^{0}=23040\,,\ c_{1(5,7)}^{0}=80640\,,\ c_{1(5,7)}^{1}=-23040\,,\ c_{1(5,8)}^{0}=215040\,,\ c_{1(5,8)}^{1}=-161280\,,$$
$$c_{1(5,9)}^{0}=483840\,,\quad c_{1(5,9)}^{1}=-645120\,,\quad c_{1(5,9)}^{2}=80640\,,\quad c_{1(5,10)}^{0}=967680\,,$$
$$c_{1(5,10)}^{1}=-1935360\,,\quad c_{1(5,10)}^{2}=645120\,,\quad c_{1(5,11)}^{0}=1774080\,,\quad c_{1(5,11)}^{1}=-4838400\,,$$
$$c_{1(5,11)}^{2}=2903040\,,\ c_{1(5,11)}^{3}=-215040\,,\ c_{1(6,6)}^{0}=46080 \tag{4.26}$$

$c_{1(6,7)}^{0}=322560$, $c_{1(6,8)}^{0}=1290240$, $c_{1(6,8)}^{1}=-322560$, $c_{1(6,9)}^{0}=3870720$,
$c_{1(6,9)}^{1}=-2580480$, $c_{1(6,10)}^{0}=9676800$, $c_{1(6,10)}^{1}=-11612160$, $c_{1(6,10)}^{2}=1290240$,
$c_{1(6,11)}^{0}=21288960$, $c_{1(6,11)}^{1}=-38707200$, $c_{1(6,11)}^{2}=11612160$, $c_{1(8,8)}^{0}=10321920$,
$c_{1(8,9)}^{0}=92897280$, $c_{1(8,10)}^{0}=464486400$, $c_{1(8,10)}^{1}=-92897280$, $c_{1(8,11)}^{0}=1703116800$,
$c_{1(8,11)}^{1}=-928972800$, $c_{2(3,4)}^{0}=48$, $c_{2(3,5)}^{0}=192$, $c_{2(3,6)}^{0}=480$, $c_{2(3,6)}^{1}=-192$,
$c_{2(3,7)}^{0}=960$, $c_{2(3,7)}^{1}=-960$, $c_{2(3,8)}^{0}=1680$, $c_{2(3,8)}^{1}=-2880$, $c_{2(3,8)}^{2}=480$,
$c_{2(3,9)}^{0}=2688$, $c_{2(3,9)}^{1}=-6720$, $c_{2(3,9)}^{2}=2880$, $c_{2(3,10)}^{0}=4032$, $c_{2(3,10)}^{1}=-13440$,
$c_{2(3,10)}^{2}=10080$, $c_{2(3,10)}^{3}=-960$, $c_{2(3,11)}^{0}=5760$, $c_{2(3,11)}^{1}=-24192$, $c_{2(3,11)}^{2}=26880$,
$c_{2(3,11)}^{3}=-6720$, $c_{2(5,6)}^{0}=3840$, $c_{2(5,7)}^{0}=23040$, $c_{2(5,8)}^{0}=80640$, $c_{2(5,8)}^{1}=-23040$,
$c_{2(5,9)}^{0}=215040$, $c_{2(5,9)}^{1}=-161280$, $c_{2(5,10)}^{0}=483840$, $c_{2(5,10)}^{1}=-645120$,
$c_{2(5,10)}^{2}=80640$, $c_{2(5,11)}^{0}=967680$, $c_{2(5,11)}^{1}=-1935360$, $c_{2(5,11)}^{2}=645120$,
$c_{2(6,7)}^{0}=46080$, $c_{2(6,8)}^{0}=322560$, $c_{2(6,9)}^{0}=1290240$, $c_{2(6,9)}^{1}=-322560$,
$c_{2(6,10)}^{0}=3870720$, $c_{2(6,10)}^{1}=-2580480$, $c_{2(6,11)}^{0}=9676800$, $c_{2(6,11)}^{1}=-11612160$,
$c_{2(6,11)}^{2}=1290240$, $c_{2(8,9)}^{0}=10321920$, $c_{2(8,10)}^{0}=92897280$, $c_{2(8,11)}^{0}=464486400$,
$c_{2(8,11)}^{1}=-92897280$ (4.26a)

bulunur. (3.46c) ve (3.46d) eşitliklerinden,

$$d_{1(3,3)}^{0}=d_{1(3,5)}^{1}=d_{1(3,7)}^{2}=d_{1(3,9)}^{3}=d_{1(3,11)}^{4}=d_{1(5,5)}^{0}=d_{1(5,7)}^{1}=d_{1(5,9)}^{2}=d_{1(5,11)}^{3}=W_0(x)$$
$$d_{1(6,6)}^{0}=d_{1(6,8)}^{1}=d_{1(6,10)}^{2}=d_{1(8,8)}^{0}=d_{1(8,10)}^{1}=d_{2(3,4)}^{0}=d_{2(3,6)}^{1}=d_{2(3,8)}^{2}=d_{2(3,10)}^{3}=W_0(x)$$
$$d_{2(5,6)}^{0}=d_{2(5,8)}^{1}=d_{2(5,10)}^{2}=d_{2(6,7)}^{0}=d_{2(6,9)}^{1}=d_{2(6,11)}^{2}=d_{2(8,9)}^{0}=d_{2(8,11)}^{1}=W_0(x)$$
$$d_{1(3,4)}^{0}=d_{1(3,6)}^{1}=d_{1(3,8)}^{2}=d_{1(3,10)}^{3}=d_{1(5,6)}^{0}=d_{1(5,8)}^{1}=d_{1(5,10)}^{2}=d_{1(6,7)}^{0}=-W_0(x)+W_1(x)$$
$$d_{1(6,9)}^{1}=d_{1(6,11)}^{2}=d_{1(8,9)}^{0}=d_{1(8,11)}^{1}=d_{2(3,5)}^{0}=d_{2(3,7)}^{1}=d_{2(3,9)}^{2}=d_{2(3,11)}^{3}=-W_0(x)+W_1(x)$$
$$d_{2(5,7)}^{0}=d_{2(5,9)}^{1}=d_{2(5,11)}^{2}=d_{2(6,8)}^{0}=d_{2(6,10)}^{1}=d_{2(8,10)}^{0}=-W_0(x)+W_1(x)$$
$$d_{1(3,5)}^{0}=d_{1(3,7)}^{1}=d_{1(3,9)}^{2}=d_{1(3,11)}^{3}=d_{1(5,7)}^{0}=d_{1(5,9)}^{1}=d_{1(5,11)}^{2}=d_{1(5,7)}^{0}=2W_0(x)-W_1(x)+W_2(x) \quad (4.27)$$

$$d_{1(6,8)}^{\,0} = d_{1(6,10)}^{\,1} = d_{1(8,10)}^{\,0} = d_{2(3,6)}^{\,0} = d_{2(3,8)}^{\,1} = d_{2(3,10)}^{\,2} = 2W_0(x) - W_1(x) + W_2(x)$$

$$d_{2(5,8)}^{\,0} = d_{2(5,10)}^{\,1} = d_{2(6,9)}^{\,0} = d_{2(6,11)}^{\,1} = d_{2(8,11)}^{\,0} = 2W_0(x) - W_1(x) + W_2(x)$$

$$d_{1(3,6)}^{\,0} = d_{1(3,8)}^{\,1} = d_{1(3,10)}^{\,2} = d_{1(5,8)}^{\,0} = d_{1(5,10)}^{\,1} = -3W_0(x) + 3W_1(x) - W_2(x) + W_3(x)$$

$$d_{1(6,9)}^{\,0} = d_{1(6,11)}^{\,1} = d_{1(8,11)}^{\,0} = d_{2(3,7)}^{\,0} = d_{2(3,9)}^{\,1} = -3W_0(x) + 3W_1(x) - W_2(x) + W_3(x)$$

$$d_{2(3,11)}^{\,2} = d_{2(5,9)}^{\,0} = d_{2(5,11)}^{\,1} = d_{2(6,10)}^{\,0} = -3W_0(x) + 3W_1(x) - W_2(x) + W_3(x)$$

$$d_{1(3,7)}^{\,0} = d_{1(3,9)}^{\,1} = d_{1(3,11)}^{\,2} = d_{1(5,9)}^{\,0} = d_{1(5,11)}^{\,1} = 6W_0(x) - 4W_1(x) + 4W_2(x) - W_3(x) + W_4(x)$$

$$d_{1(6,10)}^{\,0} = d_{2(3,8)}^{\,0} = d_{2(3,10)}^{\,1} = d_{2(5,10)}^{\,0} = 6W_0(x) - 4W_1(x) + 4W_2(x) - W_3(x) + W_4(x)$$

$$d_{2(6,11)}^{\,0} = 6W_0(x) - 4W_1(x) + 4W_2(x) - W_3(x) + W_4(x)$$

$$d_{1(3,8)}^{\,0} = d_{1(3,10)}^{\,1} = d_{1(5,10)}^{\,0} = -10W_0(x) + 10W_1(x) - 5W_2(x) + 5W_3(x) - W_4(x) + W_5(x)$$

$$d_{1(6,11)}^{\,0} = d_{2(3,9)}^{\,0} = d_{2(3,11)}^{\,1} = -10W_0(x) + 10W_1(x) - 5W_2(x) + 5W_3(x) - W_4(x) + W_5(x)$$

$$d_{2(5,11)}^{\,0} = -10W_0(x) + 10W_1(x) - 5W_2(x) + 5W_3(x) - W_4(x) + W_5(x)$$

$$d_{1(3,9)}^{\,0} = d_{1(3,11)}^{\,0} = 20W_0(x) - 15W_1(x) + 15W_2(x) - 6W_3(x) + 6W_4(x) - W_5(x) + W_6(x)$$

$$d_{2(3,10)}^{\,0} = d_{1(5,11)}^{\,0} = 20W_0(x) - 15W_1(x) + 15W_2(x) - 6W_3(x) + 6W_4(x) - W_5(x) + W_6(x)$$

$$d_{1(3,10)}^{\,0} = -35W_0(x) + 35W_1(x) - 21W_2(x) + 21W_3(x) - 7W_4(x) + 7W_5(x) - W_6(x) + W_7(x)$$

$$d_{2(3,11)}^{\,0} = -35W_0(x) + 35W_1(x) - 21W_2(x) + 21W_3(x) - 7W_4(x) + 7W_5(x) - W_6(x) + W_7(x)$$

$$\begin{aligned} d_{1(3,11)}^{0} &= 70W_0(x) - 56W_1(x) + 56W_2(x) - 28W_3(x) + 28W_4(x) - 8W_5(x) \\ &\quad +8W_6(x) - W_7(x) + W_8(x) \end{aligned} \qquad (4.27a)$$

bulunur. (4.26)-(4.26a) ve (4.27)-(4.27a) eşitlikleri (4.25)-(4.25a) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &384q_3V_0(x) + 1536q_4(x)(-W_0(x) + W_1(x)) + 8q_5(768W_0(x) - 672W_1(x) + 288W_2(x)) \\ &+ 8q_6(-1920W_0(x) + 1920W_1(x) - 960W_2(x) + 960W_3(x)) \\ &+ 8q_7(4800W_0(x) - 3840W_1(x) + 3840W_2(x) - 1680W_3(x) + 1680W_4(x)) \\ &+ 8q_8(-9600W_0(x) + 9600W_1(x) - 6720W_2(x) + 6720W_3(x) - 2688W_4(x) + 2688W_5(x)) \\ &+ 8q_9(19200W_0(x) - 16800W_1(x) + 16800W_2(x) - 10752W_3(x) + 10752W_4(x) \\ &- 4032W_5(x) + 4032W_6(x)) + 8q_{10}(-33600W_0(x) + 33600W_1 - 26880W_2(x) \end{aligned}$$

$$+26880W_3(x)-16128W_4(x)+16128W_5(x)-5760W_6(x)+5760W_7(x))$$
$$+8q_{11}(58800W_0(x)-53760W_1(x)+53760W_2(x)-40320W_3(x)+40320W_4(x)$$
$$-23040W_5(x)+23040W_6(x)-7920W_7(x)+7920W_8(x))+30720q_5W_0(x)$$
$$+69120q_6(-W_0(x)+W_1(x))+3q_7(138240W_0(x)-80640W_1(x)+80640W_2(x))$$
$$+3q_8(-483840W_0(x)+483840W_1(x)-215040{}_2W(x)+215040W_3(x))$$
$$+3q_9(1693440W_0(x)-1290240W_1(x)+1290240W_2(x)-483840W_3(x)+483840W_4(x))$$
$$+3q_{10}(-4515840W_0(x)+4515840W_1(x)-2903040W_2(x)+2903040W_3(x)$$
$$-967680W_4(x)+967680W_5(x))+3q_{11}(12042240W_0(x)-10160640W_1(x)$$
$$+10160640W_2(x)-5806080W_3(x)+5806080W_4(x)-1774080W_5(x)+1774080W_6(x))$$
$$-184320q_6W_0(x)-1290240q_7(-W_0(x)+W_1(x))-4q_8(2257920W_0(x)-1290240W_1(x)$$
$$+1290240W_2(x))-4q_9(-9031680W_0(x)+9031680W_1(x)-3870720W_2(x)$$
$$+3870720W_3(x))-4q_{10}(36126720W_0(x)-27095040W_1(x)+27095040W_2(x)$$
$$-9676800W_3(x)+9676800W_4(x))-4q_{11}(-108380160W_0(x)+108380160W_1(x)$$
$$-67737600W_2(x)+67737600W_3(x)-21288960W_4(x)+21288960W_5(x))$$
$$+10321920q_8W_0(x)+92897280q_9(-W_0(x)+W_1(x))+q_{10}(836075520W_0$$
$$-464486400W_1(x)+464486400W_2(x))+q_{11}(-4180377600W_0(x)$$
$$+4180377600W_1(x)-1703116800W_2(x)+1703116800W_3(x))$$
$$+384q_4W_0(x)+1536q_5(-W_0(x)+W_1(x))+8q_6(768W_0(x)-480W_1(x)+480W_2(x))$$
$$+8q_7(-1920W_0(x)+1920W_1(x)-960W_2(x)+960W_3(x))+8q_8(4800W_0(x)-3840W_1(x)$$
$$+3840W_2(x)-1680W_3(x)+1680W_4(x))+8q_9(-9600W_0(x)+6720W_1(x)-6720W_2(x)$$
$$+6720W_3(x)-2688W_4(x)+2688W_5(x))+8q_{10}(19200W_0(x)-16800W_1(x)$$
$$+16800W_2(x)-10752W_3(x)+10752W_4(x)-4032W_5(x)+4032W_6(x))$$
$$+8q_{11}(-33600W_0(x)+33600W_1(x)-26880W_2(x)+26880W_3(x)-16128W_4(x)$$
$$+16128W_5(x)-5760W_6(x)+5760W_7(x))+11520q_6W_0(x)+69120q_7(-W_0(x)+W_1(x))$$
$$+3q_8(138240W_0(x)-80640W_1(x)+80640W_2(x))+3q_9(-483840W_0(x)+483840W_1(x)$$
$$+215040W_2(x)+215040W_3(x))+3q_{10}(1693440W_0(x)-1290240W_1(x)+1290240W_2(x)$$
$$-483840W_3(x)+483840W_4(x))+3q_{11}(-4515840W_0(x)+4515840W_1(x)-2903040W_2(x)$$
$$+2903040W_3(x)-967680W_4(x)+967680W_5(x))-184320q_7W_0(x)$$

$$-1290240q_8\left(-W_0(x)+W_1(x)\right)-4q_9\left(2257920W_0(x)-1290240W_1(x)+1290240W_2(x)\right)$$
$$-4q_{10}\left(-9031680W_0(x)+9031680W_1(x)-3870720W_2(x)+3870720W_3(x)\right)$$
$$-4q_{11}\left(36126720W_0(x)-27095040W_1(x)+27095040W_2(x)-9676800W_3(x)\right.$$
$$\left.+9676800W_4(x)\right)+10321920q_9W_0(x)+92897280q_{10}\left(-W_0(x)+W_1(x)\right)$$
$$q_{11}\left(836075520W_0(x)-464486400W_1(x)+464486400W_2(x)\right)=-0.0005\cdot\frac{-W_0(x)+W_1(x)}{2}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$W_0(x)\left(384q_3-1152q_4+16128q_5-251136q_6+1474560q_7+1505280q_8\right.$$
$$\left.-51774720q_9+626215680q_{10}-3032930880q_{11}\right)+W_1(x)\left(1536q_4-2304q_5\right.$$
$$+80640q_6-1478400q_7+5126400q_8+59435520q_9-289766400q_{10}$$
$$\left.+3373413120q_{11}\right)+W_2(x)\left(3840q_5-3840q_6+264960q_7-5587200q_8\right.$$
$$\left.+13628160q_9+366670080q_{10}-1054072320q_{11}\right)+W_3(x)\left(7680q_6-5760q_7\right.$$
$$\left.+685440q_8-1633153q_9+30610944q_{10}+1462056960q_{11}\right)$$
$$+W_4(x)\left(13440q_7-8064q_8+1516032q_9-40201728q_{10}+61157376q_{11}\right)$$
$$+W_5(x)\left(21504q_8-10752q_9+2999808q_{10}-87630336q_{11}\right)$$
$$+W_6(x)\left(32256q_9-13824q_{10}+5460480q_{11}\right)+W_7(x)\left(46080q_{10}-17280q_{11}\right)$$
$$+W_8(x)\left(63360q_{11}\right)=-0.0005\cdot\frac{-W_0(x)+W_1(x)}{2}$$

olur. Buradan

$$384q_3-1152q_4+16128q_5-251136q_6+1474560q_7+1505280q_8$$
$$51774720q_9+626215680q_{10}-3032930880q_{11}=-0.0005\cdot\frac{1}{2}$$
$$1536q_4-2304q_5+80640q_6-1478400q_7+5126400q_8+59435520q_9$$
$$-289766400q_{10}+3373413120q_{11}=-0.0005\cdot\frac{1}{2}$$
$$3840q_5-3840q_6+264960q_7-5587200q_8+13628160q_9+366670080q_{10}$$

$$-1054072320q_{11}=0$$

$$7680q_6-5760q_7+685440q_8-1633153q_9+30610944q_{10}+1462056960q_{11}=0$$

$$13440q_7-8064q_8+1516032q_9-40201728q_{10}+61157376q_{11}=0$$

$$21504q_8-10752q_9+2999808q_{10}-87630336q_{11}=0$$

$$32256q_9-13824q_{10}+5460480q_{11}=0$$

$$46080q_{10}-17280q_{11}=0$$

$$63360q_{11}=0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0=0$, $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=-1.1393229166666665\times10^{-6}$, $q_4=-1.627604166666666\times10^{-7}$, $q_5=0$, $q_6=0$, $q_7=0$, $q_8=0$, $q_9=0$, $q_{10}=0$, $q_{11}=0$ bulunur. Bu değerler $P_W^{11}(x)=\sum_{k=0}^{11}q_iW_i(x)$ de yerine yazılırsa

$$P_W^{11}(x)=-1.1393229166666665\times10^{-6}W_3(x)-1.627604166666666\times10^{-7}W_4(x)$$

(4.6) daki sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 11. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

Örnek 4.3. $$x^3y'''+x^2y''-2xy'-2y=2x^4 \tag{4.28}$$

Üçüncü mertebeden değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için $P_T^6(x)$, $P_U^6(x)$, $P_V^6(x)$ ve $P_W^6(x)$ yaklaşım polinomlarını bulunuz.

Çözüm 4.3.

(4.28) denkleminde $\alpha_0(x)=-2$, $\alpha_1(x)=-2x$, $\alpha_2(x)=x^2$, $\alpha_3(x)=x^3$ ve $\beta_0^{(0)}=-2$, $\beta_0^{(1)}=0$, $\beta_0^{(2)}=0$, $\beta_0^{(3)}=0$, $\beta_1^{(0)}=0$, $\beta_1^{(1)}=-2$, $\beta_1^{(2)}=0$, $\beta_1^{(3)}=0$, $\beta_2^{(0)}=0$, $\beta_2^{(1)}=0$, $\beta_2^{(2)}=1$, $\beta_2^{(3)}=0$, $\beta_3^{(0)}=0$, $\beta_3^{(1)}=0$, $\beta_3^{(2)}=0$, $\beta_3^{(3)}=0$ olmaktadır.

$f(x)=2x^4$ ün Chebyshev Polinomları cinsinden yaklaşım fonksiyonları

$F_T^6(x)=-\dfrac{3T_0(x)+4T_2(x)+T_4(x)}{4}$, $F_U^6(x)=-\dfrac{2U_0(x)+3U_2(x)+U_4(x)}{8}$,

$F_V^6(x)=-\dfrac{6V_0(x)+4V_1(x)+4V_2(x)+V_2(x)+V_4(x)}{8}$ ve

$F_W^6(x)=-\dfrac{6W_0(x)-4W_1(x)+4W_2(x)-W_2(x)+W_4(x)}{8}$ dir.

1. $P_T^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$d=3$, $m=6$ ve $n=3$ değerleri (3.52) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{3}\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_s^{(0)}c_{(i,k)}^{s}d_{(i,k)}^{(s,0)}+\sum_{s=0}^{3}\sum_{t=1}^{4}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket (i-t)/2\rrbracket}e_s^{(t)}c_{(i,k)}^{t}d_{(i,k)}^{(s,t)}=F_T^6 \tag{4.29}$$

olur. (4.29) eşitliği $s=0,1,2,3$ değerleri için

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_0^{(0)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(0,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_1^{(0)}c_{(i,k)}^{1}d_{(i,k)}^{(1,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_2^{(0)}c_{(i,k)}^{2}d_{(i,k)}^{(2,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_3^{(0)}c_{(i,k)}^{3}d_{(i,k)}^{(3,0)}\\&+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_0^{(t)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(0,t)}+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_1^{(t)}c_{(i,k)}^{1}d_{(i,k)}^{(1,0)}+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_2^{(t)}c_{(i,k)}^{2}d_{(i,k)}^{(2,t)}\\&+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_3^{(t)}c_{(i,k)}^{3}d_{(i,k)}^{(3,t)}=F_T^6(x)\end{aligned} \tag{4.30}$$

olur. $t=1,2,3$ değerleri için (4.30) eşitliği

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_0^{(0)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(0,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_1^{(0)}c_{(i,k)}^{1}d_{(i,k)}^{(1,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_2^{(0)}c_{(i,k)}^{2}d_{(i,k)}^{(2,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket i/2\rrbracket}e_3^{(0)}c_{(i,k)}^{3}d_{(i,k)}^{(3,0)}\\&+\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket (i-1)/2\rrbracket}e_0^{(1)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(0,1)}+\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket (i-2)/2\rrbracket}e_0^{(2)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(0,2)}+\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\llbracket (i-3)/2\rrbracket}e_0^{(3)}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(0,3)}\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$+\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]}e_1^{(1)}c_{(i,k)}^{1}d_{(i,k)}^{(1,1)}+\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]}e_1^{(2)}c_{(i,k)}^{1}d_{(i,k)}^{(1,2)}+\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]}e_1^{(3)}c_{(i,k)}^{1}d_{(i,k)}^{(1,3)}$$

$$+\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]}e_2^{(1)}c_{(i,k)}^{2}d_{(i,k)}^{(2,1)}+\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]}e_2^{(2)}c_{(i,k)}^{2}d_{(i,k)}^{(2,2)}+\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]}e_2^{(3)}c_{(i,k)}^{2}d_{(i,k)}^{(2,3)}$$

$$+\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]}e_3^{(1)}c_{(i,k)}^{3}d_{(i,k)}^{(3,1)}+\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]}e_3^{(2)}c_{(i,k)}^{3}d_{(i,k)}^{(3,2)}+\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]}e_3^{(3)}c_{(i,k)}^{3}d_{(i,k)}^{(3,3)}=F_T^6\left(x\right) \quad (4.31a)$$

olur. (3.52a) eşitliği yardımıyla bulunan $e_0^{(0)}=-1$, $e_0^{(1)}=0$, $e_0^{(2)}=0$, $e_0^{(3)}=0$, $e_1^{(0)}=0$, $e_1^{(1)}=-1$, $e_1^{(2)}=0$, $e_1^{(3)}=0$, $e_2^{(0)}=0$, $e_2^{(1)}=0$, $e_2^{(2)}=\frac{1}{2}$, $e_2^{(3)}=0$, $e_3^{(0)}=0$, $e_3^{(1)}=0$, $e_3^{(2)}=0$, $e_3^{(3)}=\frac{1}{2}$ ler (4.31)-(4.31a) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]}c_{(i,k)}^{0}d_{(i,k)}^{(0,0)}-\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]}c_{(i,k)}^{1}d_{(i,k)}^{(1,1)}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]}c_{(i,k)}^{2}d_{(i,k)}^{(2,2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]}c_{(i,k)}^{3}d_{(i,k)}^{(3,3)}=F_T^6\left(x\right) \quad (4.32)$$

eşitliği elde edilir. (4.32) eşitliği

$$-q_0c_{(0,0)}^{0}d_{(0,0)}^{(0,0)}-q_1c_{(1,0)}^{0}d_{(1,0)}^{(0,0)}-q_2\left(c_{(2,0)}^{0}d_{(2,0)}^{(0,0)}+c_{(2,1)}^{0}d_{(2,1)}^{(0,0)}\right)-q_3\left(c_{(3,0)}^{0}d_{(3,0)}^{(0,0)}+c_{(3,1)}^{0}d_{(3,1)}^{(0,0)}\right)$$

$$c_{(5,2)}^{0}d_{(5,2)}^{(0,0)}-q_4\left(c_{(4,0)}^{0}d_{(4,0)}^{(0,0)}+c_{(4,1)}^{0}d_{(4,1)}^{(0,0)}+c_{(4,2)}^{0}d_{(4,2)}^{(0,0)}\right)-q_5\left(c_{(5,0)}^{0}d_{(5,0)}^{(0,0)}+c_{(5,1)}^{0}d_{(5,1)}^{(0,0)}\right.$$

$$\left.+c_{(5,2)}^{0}d_{(5,2)}^{(0,0)}\right)-q_6\left(c_{(6,0)}^{0}d_{(6,0)}^{(0,0)}+c_{(6,1)}^{0}d_{(6,1)}^{(0,0)}+c_{(6,2)}^{0}d_{(6,2)}^{(0,0)}+c_{(6,3)}^{0}d_{(6,3)}^{(0,0)}\right)-q_1c_{(1,0)}^{1}d_{(1,0)}^{(1,1)}$$

$$-q_2c_{(2,0)}^{1}d_{(2,0)}^{(1,1)}-q_3\left(c_{(3,0)}^{1}d_{(3,0)}^{(1,1)}+c_{(3,1)}^{1}d_{(3,1)}^{(1,1)}\right)-q_4\left(c_{(4,0)}^{1}d_{(4,0)}^{(1,1)}+c_{(4,1)}^{1}d_{(4,1)}^{(1,1)}\right)-q_5\left(c_{(5,0)}^{1}d_{(5,0)}^{(1,1)}\right.$$

$$\left.+c_{(5,1)}^{1}d_{(5,1)}^{(1,1)}+c_{(5,2)}^{1}d_{(5,2)}^{(1,1)}\right)-q_6\left(c_{(6,0)}^{1}d_{(6,0)}^{(1,1)}+c_{(6,1)}^{1}d_{(6,1)}^{(1,1)}+c_{(6,2)}^{1}d_{(6,2)}^{(1,)}\right)+\frac{1}{2}\left(q_2\left(c_{(2,0)}^{2}d_{(2,0)}^{(2,2)}\right)\right.$$

$$+q_3\left(c_{(3,0)}^{2}d_{(3,0)}^{(2,2)}\right)+q_4\left(c_{(4,0)}^{2}d_{(4,0)}^{(2,2)}+c_{(4,1)}^{2}d_{(4,1)}^{(2,2)}\right)+q_5\left(c_{(5,0)}^{2}d_{(5,0)}^{(2,2)}+c_{(5,1)}^{2}d_{(5,1)}^{(2,2)}\right)+q_6\left(c_{(6,0)}^{2}d_{(6,0)}^{(2,2)}\right.$$

$$\left.\left.+c_{(6,1)}^{2}d_{(6,1)}^{(2,2)}+c_{(6,2)}^{2}d_{(6,2)}^{(2,2)}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(q_3\left(c_{(3,0)}^{3}d_{(3,0)}^{(3,3)}\right)+q_4\left(c_{(4,0)}^{3}d_{(4,0)}^{(3,3)}\right)+q_5\left(c_{(5,0)}^{3}d_{(5,0)}^{(3,3)}+c_{(5,1)}^{3}d_{(5,1)}^{(3,3)}\right)\right.$$

$$\left.+q_6\left(c_{(6,0)}^{3}d_{(6,0)}^{(3,3)}+c_{(6,1)}^{3}d_{(6,1)}^{(3,3)}\right)\right)=F_T^6\left(x\right) \quad (4.33)$$

eşitliği bulunur. (3.52b) eşitliğinden $c_{(i,k)}^{s}$ ler

$$c_{(0,0)}^{0}=1,\ c_{(1,0)}^{0}=1,\ c_{(2,0)}^{0}=1,\ c_{(2,1)}^{0}=-2,\ c_{(3,0)}^{0}=1,\ c_{(3,1)}^{0}=-3\ ,\ c_{(4,0)}^{0}=1,\ c_{(4,1)}^{0}=-4,$$
$$c_{(4,2)}^{0}=2,\ c_{(5,0)}^{0}=1,\ c_{(5,1)}^{0}=-5,\ c_{(5,2)}^{0}=5,\ c_{(6,0)}^{0}=1,\ c_{(6,1)}^{0}=-6,\ c_{(6,2)}^{0}=9,\ c_{(6,3)}^{0}-2,$$
$$c_{(1,0)}^{1}=1,\quad c_{(2,0)}^{1}=2,\quad c_{(3,0)}^{1}=3,\quad c_{(3,1)}^{1}=-3,\quad c_{(4,0)}^{1}=4,\quad c_{(4,1)}^{1}=-8,\quad c_{(5,0)}^{1}=5,$$
$$c_{(5,1)}^{1}=-15,\quad c_{(5,2)}^{1}=5,\quad c_{(6,0)}^{1}=6,\quad c_{(6,1)}^{1}=-24,\quad c_{(6,2)}^{1}=18,\quad c_{(2,0)}^{2}=2,\quad c_{(3,0)}^{2}=6,$$
$$c_{(4,0)}^{2}=12,\ c_{(4,1)}^{2}=-8,\ c_{(5,0)}^{2}=20,\ c_{(5,1)}^{2}=-30,\ c_{(6,0)}^{2}=30,\ c_{(6,1)}^{2}=-72,\ c_{(6,2)}^{2}=-18,$$
$$c_{(3,0)}^{3}=6,\ c_{(4,0)}^{3}=24,\ c_{(5,0)}^{3}=60,\ c_{(5,1)}^{3}=-30,\ c_{(6,0)}^{3}=120,\ c_{(6,1)}^{3}=-144 \qquad (4.34)$$

bulunur. (3.52c) ve (3.52d) deki eşitlikler kullanılarak $d_{(i,k)}^{(s,t)}$ ler

$(i-2k+s-t)$ çift ise,

$$d_{(0,0)}^{(0,0)}=d_{(2,1)}^{(0,0)}=d_{(4,2)}^{(0,0)}=d_{(6,3)}^{(0,0)}=\frac{T_0(x)}{2}$$
$$d_{(2,0)}^{(0,0)}=d_{(4,1)}^{(0,0)}=d_{(6,2)}^{(0,0)}=d_{(2,0)}^{(1,1)}=d_{(4,1)}^{(1,1)}=d_{(6,2)}^{(1,1)}=d_{(2,0)}^{(2,2)}=d_{(4,1)}^{(2,2)}=d_{(6,2)}^{(2,2)}=T_2(x)+T_0(x)$$
$$d_{(4,0)}^{(0,0)}=d_{(6,1)}^{(0,0)}=d_{(4,0)}^{(1,1)}=d_{(6,1)}^{(1,1)}=d_{(4,0)}^{(2,2)}=d_{(6,1)}^{(2,2)}=d_{(4,0)}^{(3,3)}=d_{(6,1)}^{(3,3)}=T_4(x)+4T_2(x)+3T_0(x)$$
$$d_{(6,0)}^{(0,0)}=d_{(6,0)}^{(1,1)}=d_{(6,0)}^{(2,2)}=d_{(6,0)}^{(3,3)}=T_6(x)+6T_4(x)+15T_2(x)+10T_0(x) \qquad (4.35)$$

($(i-2k+s-t)$ tek ise),

$$d_{(1,0)}^{(0,0)}=d_{(3,1)}^{(0,0)}=d_{(5,2)}^{(0,0)}=d_{(1,0)}^{(1,1)}=d_{(3,1)}^{(1,1)}=d_{(5,2)}^{(1,1)}=T_1(x)$$
$$d_{(3,0)}^{(0,0)}=d_{(5,1)}^{(0,0)}=d_{(3,0)}^{(1,1)}=d_{(5,1)}^{(1,1)}=d_{(3,0)}^{(2,2)}=d_{(5,1)}^{(2,2)}=d_{(3,0)}^{(3,3)}=d_{(5,1)}^{(3,3)}=T_3(x)+3T_1(x)$$
$$d_{(5,0)}^{(0,0)}=d_{(5,0)}^{(1,1)}=d_{(5,0)}^{(2,2)}=d_{(5,0)}^{(3,3)}=T_5(x)+5T_3(x)+10T_1(x) \qquad (4.36)$$

bulunur. (4.34), (4.35) ve (4.36) daki eşitlikler (4.33) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-q_0\frac{T_0(x)}{2}-2q_1T_1(x)-4q_2T_2(x)-q_3T_3(x)+9q_4T_4(x)+29q_5T_5(x)+62q_6T_6(x)$$
$$-3q_2T_0(x)+6q_3T_1(x)+52q_4T_2(x)+37q_4T_0(x)+150q_5T_3(x)+290q_5T_1(x)+318q_6T_4(x)$$
$$678q_6T_2(x)+423q_6T_0(x)=F_T^6(x)$$

bulunur. Bu eşitlik

$$T_0(x)(-0.5q_0-3q_2+37q_4+423q_6)+T_1(x)(-2q_1+6q_3+290q_5)+T_2(x)(-4q_2$$
$$+52q_4+678q_6)+T_3(x)(-q_3+150q_5)+T_4(x)(9q_4+318q_6)+T_5(x)(29q_5)$$
$$T_6(x)(62q_6)=F_T^6(x)$$

şeklinde olur. Buradan

$$-0.5q_0-3q_2+37q_4+423q_6=-\frac{3}{4}$$
$$-2q_1+6q_3+290q_5=0$$
$$-4q_2+52q_4+678q_6=-1$$
$$-q_3+150q_5=0$$
$$9q_4+318q_6=-\frac{1}{4}$$
$$29q_5=0$$
$$62q_6=0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0=0.11111111111111116$ $q_1=0$, $q_2=-0.1111111111111111$, $q_3=0$, $q_4=-0.027777777777777776$, $q_5=0$, $q_6=0$ bulunur. Bu değerler $P_T^6(x)=\sum_{i=0}^{6}q_iT_i(x)$ de yerine yazılırsa

$$P_T^6(x)=0.11111111111111116T_0(x)-0.1111111111111111T_2(x)$$
$$-0.027777777777777776T_4(x)$$

(4.28) deki değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için birinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

2. $P_U^6\left(x\right)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$d=3$, $m=6$ ve $n=3$ değerleri (3.56) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{3}\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_s^0 c_{(i,k)}^s d_{(i,k)}^{(s,0)}+\sum_{s=0}^{3}\sum_{t=1}^{4}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-t)/2 \right]\!\right]}e_s^t c_{(i,k)}^t d_{(i,k)}^{(s,t)}=F_U^6\left(x\right) \tag{4.37}$$

olur. (4.37) eşitliği $s=0,1,2,3$ değerleri için

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_0^{(0)}c_{(i,k)}^0 d_{(i,k)}^{(0,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_1^{(0)}c_{(i,k)}^1 d_{(i,k)}^{(1,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_2^{(0)}c_{(i,k)}^2 d_{(i,k)}^{(2,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_3^{(0)}c_{(i,k)}^3 d_{(i,k)}^{(3,0)}\\&+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_0^{(t)}c_{(i,k)}^0 d_{(i,k)}^{(0,t)}+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_1^{(t)}c_{(i,k)}^1 d_{(i,k)}^{(1,0)}+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_2^{(t)}c_{(i,k)}^2 d_{(i,k)}^{(2,t)}\\&+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_3^{(t)}c_{(i,k)}^3 d_{(i,k)}^{(3,t)}=F_U^6\left(x\right)\end{aligned} \tag{4.38}$$

olur. $t=1,2,3$ değerleri için (4.38) eşitliği

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_0^{(0)}c_{(i,k)}^0 d_{(i,k)}^{(0,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_1^{(0)}c_{(i,k)}^1 d_{(i,k)}^{(1,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_2^{(0)}c_{(i,k)}^2 d_{(i,k)}^{(2,0)}+\sum_{i=0}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]}e_3^{(0)}c_{(i,k)}^3 d_{(i,k)}^{(3,0)}\\&+\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-1)/2 \right]\!\right]}e_0^{(1)}c_{(i,k)}^0 d_{(i,k)}^{(0,1)}+\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]}e_0^{(2)}c_{(i,k)}^0 d_{(i,k)}^{(0,2)}+\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]}e_0^{(3)}c_{(i,k)}^0 d_{(i,k)}^{(0,3)}\\&+\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-1)/2 \right]\!\right]}e_1^{(1)}c_{(i,k)}^1 d_{(i,k)}^{(1,1)}+\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]}e_1^{(2)}c_{(i,k)}^1 d_{(i,k)}^{(1,2)}+\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]}e_1^{(3)}c_{(i,k)}^1 d_{(i,k)}^{(1,3)}\\&+\sum_{i=1}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-1)/2 \right]\!\right]}e_2^{(1)}c_{(i,k)}^2 d_{(i,k)}^{(2,1)}+\sum_{i=2}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]}e_2^{(2)}c_{(i,k)}^2 d_{(i,k)}^{(2,2)}+\sum_{i=3}^{6}q_i\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]}e_2^{(3)}c_{(i,k)}^2 d_{(i,k)}^{(2,3)}\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$+\sum_{i=1}^{6} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[\left(i-1\right)/2\right]\right]} e_3^{(1)} c_{(i,k)}^{3} d_{(i,k)}^{(3,1)} + \sum_{i=2}^{6} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[\left(i-2\right)/2\right]\right]} e_3^{(2)} c_{(i,k)}^{3} d_{(i,k)}^{(3,2)} + \sum_{i=3}^{6} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[\left(i-3\right)/2\right]\right]} e_3^{(3)} c_{(i,k)}^{3} d_{(i,k)}^{(3,3)} = F_U^6\left(x\right) \quad (4.39a)$$

şeklinde bulunur. (3.56a) eşitliği yardımıyla bulunan $e_0^{(0)} = -2$, $e_0^{(1)} = 0$, $e_0^{(2)} = 0$, $e_0^{(3)} = 0$, $e_1^{(0)} = 0$, $e_1^{(1)} = -2$, $e_1^{(2)} = 0$, $e_1^{(3)} = 0$, $e_2^{(0)} = 0$, $e_2^{(1)} = 0$, $e_2^{(2)} = 1$, $e_2^{(3)} = 0$, $e_3^{(0)} = 0$, $e_3^{(1)} = 0$, $e_3^{(2)} = 0$, $e_3^{(3)} = 1$ ler (4.39)-(4.39a) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-2\sum_{i=0}^{6} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[i/2\right]\right]} c_{(i,k)}^{0} d_{(i,k)}^{(0,0)} - 2\sum_{i=1}^{6} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[\left(i-1\right)/2\right]\right]} c_{(i,k)}^{1} d_{(i,k)}^{(1,1)} + \sum_{i=2}^{6} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[\left(i-2\right)/2\right]\right]} c_{(i,k)}^{2} d_{(i,k)}^{(2,2)}$$

$$+\sum_{i=3}^{6} q_i \sum_{k=0}^{\left[\left[\left(i-3\right)/2\right]\right]} c_{(i,k)}^{3} d_{(i,k)}^{(3,3)} = F_U^6\left(x\right) \quad (4.40)$$

eşitliği elde edilir. (4.40) eşitliği aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
&-2q_0 c_{(0,0)}^{0} d_{(0,0)}^{(0,0)} - 2q_1 c_{(1,0)}^{0} d_{(1,0)}^{(0,0)} - 2q_2\left(c_{(2,0)}^{0} d_{(2,0)}^{(0,0)} + c_{(2,1)}^{0} d_{(2,1)}^{(0,0)}\right) - 2q_3\left(c_{(3,0)}^{0} d_{(3,0)}^{(0,0)} + c_{(3,1)}^{0} d_{(3,1)}^{(0,0)}\right)\\
&-2q_4\left(c_{(4,0)}^{0} d_{(4,0)}^{(0,0)} + c_{(4,1)}^{0} d_{(4,1)}^{(0,0)} + c_{(4,2)}^{0} d_{(4,2)}^{(0,0)}\right) - 2q_5\left(c_{(5,0)}^{0} d_{(5,0)}^{(0,0)} + c_{(5,1)}^{0} d_{(5,1)}^{(0,0)} + c_{(5,2)}^{0} d_{(5,2)}^{(0,0)}\right)\\
&-2q_6\left(c_{(6,0)}^{0} d_{(6,0)}^{(0,0)} + c_{(6,1)}^{0} d_{(6,1)}^{(0,0)} + c_{(6,2)}^{0} d_{(6,2)}^{(0,0)} + c_{(6,3)}^{0} d_{(6,3)}^{(0,0)}\right) - 2q_1 c_{(1,0)}^{1} d_{(1,0)}^{(1,1)}\\
&-2q_2 c_{(2,0)}^{1} d_{(2,0)}^{(1,1)} - 2q_3\left(c_{(3,0)}^{1} d_{(3,0)}^{(1,1)} + c_{(3,1)}^{1} d_{(3,1)}^{(1,1)}\right) - 2q_4\left(c_{(4,0)}^{1} d_{(4,0)}^{(1,1)} + c_{(4,1)}^{1} d_{(4,1)}^{(1,1)}\right) - 2q_5\left(c_{(5,0)}^{1} d_{(5,0)}^{(1,1)}\right.\\
&\left.+c_{(5,1)}^{1} d_{(5,1)}^{(1,1)} + c_{(5,2)}^{1} d_{(5,2)}^{(1,1)}\right) - 2q_6\left(c_{(6,0)}^{1} d_{(6,0)}^{(1,1)} + c_{(6,1)}^{1} d_{(6,1)}^{(1,1)} + c_{(6,2)}^{1} d_{(6,2)}^{(1,)}\right) + q_2\left(c_{(2,0)}^{2} d_{(2,0)}^{(2,2)}\right)\\
&+q_3\left(c_{(3,0)}^{2} d_{(3,0)}^{(2,2)}\right) + q_4\left(c_{(4,0)}^{2} d_{(4,0)}^{(2,2)} + c_{(4,1)}^{2} d_{(4,1)}^{(2,2)}\right) + q_5\left(c_{(5,0)}^{2} d_{(5,0)}^{(2,2)} + c_{(5,1)}^{2} d_{(5,1)}^{(2,2)}\right) + q_6\left(c_{(6,0)}^{2} d_{(6,0)}^{(2,2)}\right.\\
&\left.+c_{(6,1)}^{2} d_{(6,1)}^{(2,2)} + c_{(6,2)}^{2} d_{(6,2)}^{(2,2)}\right) + q_3\left(c_{(3,0)}^{3} d_{(3,0)}^{(3,3)}\right) + q_4\left(c_{(4,0)}^{3} d_{(4,0)}^{(3,3)}\right) + q_5\left(c_{(5,0)}^{3} d_{(5,0)}^{(3,3)} + c_{(5,1)}^{3} d_{(5,1)}^{(3,3)}\right)\\
&q_6\left(c_{(6,0)}^{3} d_{(6,0)}^{(3,3)} + c_{(6,1)}^{3} d_{(6,1)}^{(3,3)}\right) = F_U^6\left(x\right) \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

olmaktadır. (3.56b) eşitliğinden (4.41) deki $c_{(i,k)}^{s}$ ler

$c^0_{(0,0)}=1$, $c^0_{(1,0)}=1$, $c^0_{(2,0)}=1$, $c^0_{(2,1)}=-1$, $c^0_{(3,0)}=1$, $c^0_{(3,1)}=-2$, $c^0_{(4,0)}=1$, $c^0_{(4,1)}=-3$,

$c^0_{(4,2)}=1$, $c^0_{(5,0)}=1$, $c^0_{(5,1)}=-4$, $c^0_{(5,2)}=3$, $c^0_{(6,0)}=1$, $c^0_{(6,1)}=-5$, $c^0_{(6,2)}=6$, $c^0_{(6,3)}-1$,

$c^1_{(1,0)}=1$, $c^1_{(2,0)}=2$, $c^1_{(3,0)}=3$, $c^1_{(3,1)}=-2$, $c^1_{(4,0)}=4$, $c^1_{(4,1)}=-6$, $c^1_{(5,0)}=5$,

$c^1_{(5,1)}=-12$, $c^1_{(5,2)}=3$, $c^1_{(6,0)}=6$, $c^1_{(6,1)}=-20$, $c^1_{(6,2)}=12$, $c^2_{(2,0)}=2$, $c^2_{(3,0)}=6$,

$c^2_{(4,0)}=12$, $c^2_{(4,1)}=-6$, $c^2_{(5,0)}=20$, $c^2_{(5,1)}=-24$, $c^2_{(6,0)}=30$, $c^2_{(6,1)}=-60$, $c^2_{(6,2)}=-12$,

$c^3_{(3,0)}=6$, $c^3_{(4,0)}=24$, $c^3_{(5,0)}=60$, $c^3_{(5,1)}=-24$, $c^3_{(6,0)}=120$, $c^3_{(6,1)}=-120$ (4.42)

bulunur. (3.56c) deki eşitlik kullanılarak (4.41) eşitliğindeki $d^{(s,t)}_{(i,k)}$ ler

$$
\begin{aligned}
&d^{(0,0)}_{(0,0)}=d^{(0,0)}_{(2,1)}=d^{(0,0)}_{(4,2)}=d^{(0,0)}_{(6,3)}=U_0(x)\\
&d^{(0,0)}_{(1,0)}=d^{(0,0)}_{(3,1)}=d^{(0,0)}_{(5,2)}=d^{(1,1)}_{(1,0)}=d^{(1,1)}_{(3,1)}=d^{(1,1)}_{(5,2)}=U_1(x)\\
&d^{(0,0)}_{(2,0)}=d^{(0,0)}_{(4,1)}=d^{(0,0)}_{(6,2)}=d^{(1,1)}_{(2,0)}=d^{(1,1)}_{(4,1)}=d^{(1,1)}_{(6,2)}=d^{(2,2)}_{(2,0)}=d^{(2,2)}_{(4,1)}=d^{(2,2)}_{(6,2)}=2U_2(x)+U_0(x)\\
&d^{(0,0)}_{(3,0)}=d^{(0,0)}_{(5,1)}=d^{(1,1)}_{(3,0)}=d^{(1,1)}_{(5,1)}=d^{(2,2)}_{(3,0)}=d^{(2,2)}_{(5,1)}=d^{(3,3)}_{(3,0)}=d^{(3,3)}_{(5,1)}=2U_3(x)+2U_1(x)\\
&d^{(0,0)}_{(4,0)}=d^{(0,0)}_{(6,1)}=d^{(1,1)}_{(4,0)}=d^{(1,1)}_{(6,1)}=d^{(2,2)}_{(4,0)}=d^{(2,2)}_{(6,1)}=d^{(3,3)}_{(4,0)}=d^{(3,3)}_{(6,1)}=2U_4(x)+3U_2(x)+2U_0(x)\\
&d^{(0,0)}_{(5,0)}=d^{(1,1)}_{(5,0)}=d^{(2,2)}_{(5,0)}=d^{(3,3)}_{(5,0)}=2U_5(x)+4U_3(x)+5U_1(x)\\
&d^{(0,0)}_{(6,0)}=d^{(1,1)}_{(6,0)}=d^{(2,2)}_{(6,0)}=d^{(3,3)}_{(6,0)}=2U_6(x)+5U_4(x)+9U_2(x)+5U_0(x) \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.41), (4.42) ve (4.43) deki eşitlikler (4.40) eşitliğnde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&-2q_0U_0(x)-4q_1U_1(x)-8q_2U_2(x)+8q_3U_3(x)+52q_4U_4(x)+102q_4U_2(x)\\
&+272q_6U_6(x)+420q_6U_4(x)+786q_6U_2(x)+136q_5U_5(x)+240q_5U_3(x)\\
&-2q_2U_0(x)+16q_3U_1(x)+26q_4U_0(x)+320q_5U_1(x)+398q_6U_0(x)=F^6_U(x) \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.44) eşitliğini düzenlersek

$$
\begin{aligned}
&U_0(x)(-2q_0-2q_2+26q_4+398q_6)+U_1(x)(-4q_1+16q_3+320q_5)+U_2(x)(-8q_2\\
&+102q_4+786q_6)+U_3(x)(8q_3+240q_5)+U_4(x)(52q_4+420q_6)+U_5(x)(136q_5)\\
&+U_6(x)(272q_6)=F^6_U(x)
\end{aligned}
$$

olur. Bu eşitlikten

$$-2q_0 - 2q_2 + 26q_4 + 398q_6 = -\frac{1}{4}$$

$$-4q_1 + 16q_3 + 320q_5 = 0$$

$$-8q_2 + 102q_4 + 786q_6 = -\frac{3}{8}$$

$$8q_3 + 240q_5 = 0$$

$$52q_4 + 420q_6 = -\frac{1}{8}$$

$$136q_5 = 0$$

$$272q_6 = 0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0 = 0.07752403846153846$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0.0162259615384615 36$, $q_3 = 0$, $q_4 = -0.002403846153846154$, $q_5 = 0$, $q_6 = 0$ bulunur. Bu değerler $P_U^6(x) = \sum_{i=0}^{6} q_i U_i(x)$ de yerine yazılırsa

$$P_U^6(x) = 0.07752403846153846 U_0(x) + 0.01622596153846153 6 U_2(x)$$
$$-0.002403846153846154 U_4(x)$$

(4.28) deki değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklem ikinci çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

3. $P_V^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$d = 3$, $m = 6$ ve $n = 3$ değerleri (3.60) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{3}\sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} e_s^{(0)} c_{1(i,k)}^{(s,0)} d_{1(i,k)}^{(s,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} e_s^{(0)} c_{2(i,k)}^{(s,0)} d_{2(i,k)}^{(s,0)} \right) + \sum_{s=0}^{3}\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} e_s^{(t)} c_{1(i,k)}^{(s,t)} d_{1(i,k)}^{(s,t)} \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} e_s^{(t)} c_{2(i,k)}^{(s,t)} d_{2(i,k)}^{(s,t)} \right) = F_V^6(x) \tag{4.45}$$

eşitliği elde edilir. (4.45) eşitliği $s = 0,1,2,3$ değerleri için

$$e_0^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,0)} d_{1(i,k)}^{(0,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,0)} d_{2(i,k)}^{(0,0)} \right) + e_1^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,0)} d_{1(i,k)}^{(1,0)} \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,0)} d_{2(i,k)}^{(1,0)} \right) + e_2^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,0)} d_{1(i,k)}^{(2,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,0)} d_{2(i,k)}^{(2,0)} \right)$$

$$+ e_3^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,0)} d_{1(i,k)}^{(3,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(3,0)} d_{2(i,k)}^{(3,0)} \right) + \sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} e_0^{(t)} c_{1(i,k)}^{(0,t)} d_{1(i,k)}^{(0,t)} \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} e_0^{(t)} c_{2(i,k)}^{(0,t)} d_{2(i,k)}^{(0,t)} \right) + \sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} e_1^{(t)} c_{1(i,k)}^{(1,t)} d_{1(i,k)}^{(1,t)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} e_1^{(t)} c_{2(i,k)}^{(1,t)} d_{2(i,k)}^{(1,t)} \right)$$

$$+ \sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} e_2^{(t)} c_{1(i,k)}^{(2,t)} d_{1(i,k)}^{(2,t)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} e_2^{(t)} c_{2(i,k)}^{(2,t)} d_{2(i,k)}^{(2,t)} \right) + \sum_{t=1}^{3}\sum_{i=t}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} e_3^{(t)} c_{1(i,k)}^{(3,t)} d_{1(i,k)}^{(3,t)} \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i\,\geq\,t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} e_3^{(t)} c_{2(i,k)}^{(3,t)} d_{2(i,k)}^{(3,t)} \right) = F_V^6(x) \tag{4.46}$$

eşitliği elde edilir. (4.46) eşitliği $t = 1,2,3$ değerleri için

$$
\begin{aligned}
& e_0^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,0)} d_{1(i,k)}^{(0,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,0)} d_{2(i,k)}^{(0,0)} \right) + e_1^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,0)} d_{1(i,k)}^{(1,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,0)} d_{2(i,k)}^{(1,0)} \right) \\
& e_2^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,0)} d_{1(i,k)}^{(2,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,0)} d_{2(i,k)}^{(2,0)} \right) + e_3^{(0)} \sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,0)} d_{1(i,k)}^{(3,0)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(3,0)} d_{2(i,k)}^{(3,0)} \right) \\
& + e_0^{(1)} \sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,1)} d_{1(i,k)}^{(0,1)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 2}}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,1)} d_{2(i,k)}^{(0,1)} \right) + e_0^{(2)} \sum_{i=2}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,2)} d_{1(i,k)}^{(0,2)} \right. \\
& \left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 3}}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,2)} d_{2(i,k)}^{(0,2)} \right) + e_0^{(3)} \sum_{i=3}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,3)} d_{1(i,k)}^{(0,3)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 4}}^{[\![(i-4)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,3)} d_{2(i,k)}^{(0,3)} \right) \\
& + e_1^{(1)} \sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,1)} d_{1(i,k)}^{(1,1)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 2}}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,1)} d_{2(i,k)}^{(1,1)} \right) + e_1^{(2)} \sum_{i=2}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,2)} d_{1(i,k)}^{(1,2)} \right. \\
& \left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 3}}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,2)} d_{2(i,k)}^{(1,2)} \right) + e_1^{(3)} \sum_{i=3}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,3)} d_{1(i,k)}^{(1,3)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 4}}^{[\![(i-4)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,3)} d_{2(i,k)}^{(1,3)} \right) \\
& + e_2^{(1)} \sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,1)} d_{1(i,k)}^{(2,1)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 2}}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,1)} d_{2(i,k)}^{(2,1)} \right) + e_2^{(2)} \sum_{i=2}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,2)} d_{1(i,k)}^{(2,2)} \right. \\
& \left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 3}}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,2)} d_{2(i,k)}^{(2,2)} \right) + e_2^{(3)} \sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,3)} d_{1(i,k)}^{(2,3)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 4}}^{[\![(i-4)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,3)} d_{2(i,k)}^{(2,3)} \right) \\
& + e_3^{(1)} \sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,1)} d_{1(i,k)}^{(3,1)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 2}}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(3,1)} d_{2(i,k)}^{(3,1)} \right) + e_3^{(2)} \sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,2)} d_{1(i,k)}^{(3,2)} \right. \\
& \left. - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 3}}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(3,2)} d_{2(i,k)}^{(3,2)} \right) + e_3^{(3)} \sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,3)} d_{1(i,k)}^{(3,3)} - \sum_{\substack{k=0 \\ i \ge 4}}^{[\![(i-4)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(3,3)} d_{2(i,k)}^{(3,3)} \right) = F_V^{6}(x) \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.60a) eşitliği yardımıyla bulunan $e_0^{(0)}=-2$, $e_0^{(1)}=0$, $e_0^{(2)}=0$, $e_0^{(3)}=0$, $e_1^{(0)}=0$, $e_1^{(1)}=-2$, $e_1^{(2)}=0$, $e_1^{(3)}=0$, $e_2^{(0)}=0$, $e_2^{(1)}=0$, $e_2^{(2)}=1$, $e_2^{(3)}=0$, $e_3^{(0)}=0$, $e_3^{(1)}=0$, $e_3^{(2)}=0$, $e_3^{(3)}=1$ değerleri (4.47) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{\llbracket i/2 \rrbracket} c_{1(i,k)}^{(0,0)} d_{1(i,k)}^{(0,0)} - \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{\llbracket (i-1)/2 \rrbracket} c_{2(i,k)}^{(0,0)} d_{2(i,k)}^{(0,0)}\right) - 2\sum_{i=1}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{\llbracket (i-1)/2 \rrbracket} c_{1(i,k)}^{(1,1)} d_{1(i,k)}^{(1,1)} - \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 2}}^{\llbracket (i-2)/2 \rrbracket} c_{2(i,k)}^{(1,1)} d_{2(i,k)}^{(1,1)}\right) \\
&+\sum_{i=2}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{\llbracket (i-2)/2 \rrbracket} c_{1(i,k)}^{(2,2)} d_{1(i,k)}^{(2,2)} - \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 3}}^{\llbracket (i-3)/2 \rrbracket} c_{2(i,k)}^{(2,2)} d_{2(i,k)}^{(2,2)}\right) + \sum_{i=1}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{\llbracket (i-3)/2 \rrbracket} c_{1(i,k)}^{(3,3)} d_{1(i,k)}^{(3,3)}\right. \\
&\left. - \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 4}}^{\llbracket (i-4)/2 \rrbracket} c_{2(i,k)}^{(3,3)} d_{2(i,k)}^{(3,3)}\right) = F_V^{6}(x) \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. (4.48) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
&-2\Big(q_0\big(c_{1(0,0)}^{(0,0)} d_{1(0,0)}^{(0,0)}\big) + q_1\big(c_{1(1,0)}^{(0,0)} d_{1(1,0)}^{(0,0)} - c_{2(1,0)}^{(0,0)} d_{2(1,0)}^{(0,0)}\big) + q_2\big(c_{1(2,0)}^{(0,0)} d_{1(2,0)}^{(0,0)} + c_{1(2,1)}^{(0,0)} d_{1(2,1)}^{(0,0)} - c_{2(2,0)}^{(0,0)} d_{2(2,0)}^{(0,0)}\big) \\
&+ q_3\big(c_{1(3,0)}^{(0,0)} d_{1(3,0)}^{(0,0)} + c_{1(3,1)}^{(0,0)} d_{1(3,1)}^{(0,0)} - c_{2(3,0)}^{(0,0)} d_{2(3,0)}^{(0,0)} - c_{2(3,1)}^{(0,0)} d_{2(3,1)}^{(0,0)}\big) + q_4\big(c_{1(4,0)}^{(0,0)} d_{1(4,0)}^{(0,0)} + c_{1(4,1)}^{(0,0)} d_{1(4,1)}^{(0,0)} \\
&+ c_{1(4,2)}^{(0,0)} d_{1(4,2)}^{(0,0)} - c_{2(4,0)}^{(0,0)} d_{2(4,0)}^{(0,0)} - c_{2(4,1)}^{(0,0)} d_{2(4,1)}^{(0,0)}\big) + q_5\big(c_{1(5,0)}^{(0,0)} d_{1(5,0)}^{(0,0)} + c_{1(5,1)}^{(0,0)} d_{1(5,1)}^{(0,0)} + c_{1(5,2)}^{(0,0)} d_{1(5,2)}^{(0,0)} \\
&- c_{2(5,0)}^{(0,0)} d_{2(5,0)}^{(0,0)} - c_{2(5,1)}^{(0,0)} d_{2(5,1)}^{(0,0)} - c_{2(5,2)}^{(0,0)} d_{2(5,2)}^{(0,0)}\big) + q_6\big(c_{1(6,0)}^{(0,0)} d_{1(6,0)}^{(0,0)} + c_{1(6,1)}^{(0,0)} d_{1(6,1)}^{(0,0)} + c_{1(6,2)}^{(0,0)} d_{1(6,2)}^{(0,0)} \\
&+ c_{1(6,3)}^{(0,0)} d_{1(6,3)}^{(0,0)} - c_{2(6,0)}^{(0,0)} d_{2(6,0)}^{(0,0)} - c_{2(6,1)}^{(0,0)} d_{2(6,1)}^{(0,0)} - c_{2(6,2)}^{(0,0)} d_{2(6,2)}^{(0,0)}\big)\Big) - 2\Big(q_1\big(c_{1(1,0)}^{(1,1)} d_{1(1,0)}^{(1,1)}\big) \\
&+ q_1\big(c_{1(1,0)}^{(1,1)} d_{1(1,0)}^{(1,1)}\big) + q_2\big(c_{1(2,0)}^{(1,1)} d_{1(2,0)}^{(1,1)} - c_{2(2,0)}^{(1,1)} d_{2(2,0)}^{(1,1)}\big) + q_3\big(c_{1(3,0)}^{(1,1)} d_{1(3,0)}^{(1,1)} + c_{1(3,1)}^{(1,1)} d_{1(3,1)}^{(1,1)} - c_{2(3,0)}^{(1,1)} d_{2(3,0)}^{(1,1)}\big) \\
&+ q_4\big(c_{1(4,0)}^{(1,1)} d_{1(4,0)}^{(1,1)} + c_{1(4,1)}^{(1,1)} d_{1(4,1)}^{(1,1)} - c_{2(4,0)}^{(1,1)} d_{2(4,0)}^{(1,1)} - c_{2(4,1)}^{(1,1)} d_{2(4,1)}^{(1,1)}\big) + q_5\big(c_{1(5,0)}^{(1,1)} d_{1(5,0)}^{(1,1)} + c_{1(5,1)}^{(1,1)} d_{1(5,1)}^{(1,1)} \\
&+ c_{1(5,2)}^{(1,1)} d_{1(5,2)}^{(1,1)} - c_{2(5,0)}^{(1,1)} d_{2(5,0)}^{(1,1)} - c_{2(5,1)}^{(1,1)} d_{2(5,1)}^{(1,1)}\big) + q_6\big(c_{1(6,0)}^{(1,1)} d_{1(6,0)}^{(1,1)} + c_{1(6,1)}^{(1,1)} d_{1(6,1)}^{(1,1)} + c_{1(6,2)}^{(1,1)} d_{1(6,2)}^{(1,1)} \\
&- c_{2(6,0)}^{(1,1)} d_{2(6,0)}^{(1,1)} - c_{2(6,1)}^{(1,1)} d_{2(6,1)}^{(1,1)} - c_{2(6,2)}^{(1,1)} d_{2(6,2)}^{(1,1)}\big)\Big) + q_2\big(c_{1(2,0)}^{(2,2)} d_{1(2,0)}^{(2,2)}\big) + q_3\big(c_{1(3,0)}^{(2,2)} d_{1(3,0)}^{(2,2)} - c_{2(3,0)}^{(2,2)} d_{2(3,0)}^{(2,2)}\big) \\
&+ q_4\big(c_{1(4,0)}^{(2,2)} d_{1(4,0)}^{(2,2)} + c_{1(4,1)}^{(2,2)} d_{1(4,1)}^{(2,2)} - c_{2(4,0)}^{(2,2)} d_{2(4,0)}^{(2,2)}\big) + q_5\big(c_{1(5,0)}^{(2,2)} d_{1(5,0)}^{(2,2)} + c_{1(5,1)}^{(2,2)} d_{1(5,1)}^{(2,2)} - c_{2(5,0)}^{(2,2)} d_{2(5,0)}^{(2,2)} \\
&- c_{2(5,1)}^{(2,2)} d_{2(5,1)}^{(2,2)}\big) + q_6\big(c_{1(6,0)}^{(2,2)} d_{1(6,0)}^{(2,2)} + c_{1(6,1)}^{(2,2)} d_{1(6,1)}^{(2,2)} + c_{1(6,2)}^{(2,2)} d_{1(6,2)}^{(2,2)} - c_{2(6,0)}^{(2,2)} d_{2(6,0)}^{(2,2)} - c_{2(6,1)}^{(2,2)} d_{2(6,1)}^{(2,2)}\big) \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

$$+q_3\left(c_{1(3,0)}^{(3,3)}d_{1(3,0)}^{(3,3)}\right)+q_4\left(c_{1(4,0)}^{(3,3)}d_{1(4,0)}^{(3,3)}-c_{2(4,0)}^{(3,3)}d_{2(4,0)}^{(3,3)}\right)+q_5\left(c_{1(5,0)}^{(3,3)}d_{1(5,0)}^{(3,3)}+c_{1(5,1)}^{(3,3)}d_{1(5,1)}^{(3,3)}\right.$$

$$\left.-c_{2(5,0)}^{(3,3)}d_{2(5,0)}^{(3,3)}\right)+q_6\left(c_{1(6,0)}^{(3,3)}d_{1(6,0)}^{(3,3)}+c_{1(6,1)}^{(3,3)}d_{1(6,1)}^{(3,3)}-c_{2(6,0)}^{(3,3)}d_{2(6,0)}^{(3,3)}-c_{2(6,1)}^{(3,3)}d_{2(6,1)}^{(3,3)}\right)=F_V^6(x) \qquad (4.49a)$$

olur. $c_{1(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.60b) ve $c_{2(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.60c) eşitliğinden

$$c_{1(0,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(1,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{2(1,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(2,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(2,1)}^{(0,0)}=-1,\ c_{2(2,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(3,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(3,1)}^{(0,0)}=-2,$$
$$c_{2(3,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{2(3,1)}^{(0,0)}=-1,\ c_{1(4,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(4,1)}^{(0,0)}=-3,\ c_{1(4,2)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(4,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(4,1)}^{(0,0)}=-2,$$
$$c_{1(5,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{1(5,1)}^{(0,0)}=-4,\quad c_{1(5,2)}^{(0,0)}=3,\quad c_{2(5,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(5,1)}^{(0,0)}=-3,\quad c_{2(5,2)}^{(0,0)}=1,\quad c_{1(6,0)}^{(0,0)}=1,$$
$$c_{1(6,1)}^{(0,0)}=-5,\quad c_{1(6,2)}^{(0,0)}=6,\quad c_{1(6,3)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(6,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(6,1)}^{(0,0)}=-4,\quad c_{2(6,2)}^{(0,0)}=3,\quad c_{1(1,0)}^{(1,1)}=1,$$
$$c_{1(2,0)}^{(1,1)}=2,\quad c_{2(2,0)}^{(1,1)}=1,\quad c_{1(3,0)}^{(1,1)}=3,\quad c_{1(3,1)}^{(1,1)}=-2,\quad c_{2(3,0)}^{(1,1)}=2,\quad c_{1(4,0)}^{(1,1)}=4,\quad c_{1(4,1)}^{(1,1)}=-6,$$
$$c_{2(4,0)}^{(1,1)}=3,\quad c_{2(4,1)}^{(1,1)}=-2,\quad c_{1(5,0)}^{(1,1)}=5,\quad c_{1(5,1)}^{(1,1)}=-12,\quad c_{1(5,2)}^{(1,1)}=3,\quad c_{2(5,0)}^{(1,1)}=4,\quad c_{2(5,1)}^{(1,1)}=-6,$$
$$c_{1(6,0)}^{(1,1)}=6,\quad c_{1(6,1)}^{(1,1)}=-20,\quad c_{1(6,2)}^{(1,1)}=12,\quad c_{2(6,0)}^{(1,1)}=5,\quad c_{2(6,1)}^{(1,1)}=-12,\quad c_{2(6,2)}^{(1,1)}=3,\quad c_{1(2,0)}^{(2,2)}=2,$$
$$c_{1(3,0)}^{(2,2)}=6,\quad c_{2(3,0)}^{(2,2)}=2,\quad c_{1(4,0)}^{(2,2)}=12,\quad c_{1(4,1)}^{(2,2)}=-6,\quad c_{2(4,0)}^{(2,2)}=6,\quad c_{1(5,0)}^{(2,2)}=20,\quad c_{1(5,1)}^{(2,2)}=-8,$$
$$c_{2(5,0)}^{(2,2)}=12,\quad c_{2(5,1)}^{(2,2)}=-6,\quad c_{1(6,0)}^{(2,2)}=30,\quad c_{1(6,1)}^{(2,2)}=-60,\quad c_{1(6,2)}^{(2,2)}=12,\quad c_{2(6,0)}^{(2,2)}=20,$$
$$c_{2(6,1)}^{(2,2)}=-24,\ c_{1(3,0)}^{(3,3)}=6,\ c_{1(4,0)}^{(3,3)}=24,\ c_{2(4,0)}^{(3,3)}=6,\ c_{1(5,0)}^{(3,3)}=60,\ c_{1(5,1)}^{(3,3)}=-24,\ c_{2(5,0)}^{(3,3)}=24,$$
$$c_{1(6,0)}^{(3,3)}=120,\ c_{1(6,1)}^{(3,3)}=-120,\ c_{2(6,0)}^{(3,3)}=60,\ c_{2(6,1)}^{(3,3)}=-24 \qquad (4.50)$$

bulunur. $d_{1(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.60d) ve $d_{2(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.60e) eşitliklerinden

$$d_{1(0,0)}^{(0,0)}=d_{2(1,0)}^{(0,0)}=d_{1(2,1)}^{(0,0)}=d_{2(3,1)}^{(0,0)}=d_{1(4,2)}^{(0,0)}=d_{2(5,2)}^{(0,0)}=d_{1(6,3)}^{(0,0)}=V_0(x)$$
$$d_{1(1,0)}^{(0,0)}=d_{2(2,0)}^{(0,0)}=d_{1(3,1)}^{(0,0)}=d_{2(4,1)}^{(0,0)}=d_{1(5,2)}^{(0,0)}=d_{2(6,2)}^{(0,0)}=d_{1(1,0)}^{(1,1)}=d_{2(2,0)}^{(1,1)}=V_0(x)+V_1(x)$$
$$d_{1(3,1)}^{(1,1)}=d_{2(4,1)}^{(1,1)}=d_{1(5,2)}^{(1,1)}=d_{2(6,2)}^{(1,1)}=V_0(x)+V_1(x)$$
$$d_{1(2,0)}^{(0,0)}=d_{2(3,0)}^{(0,0)}=d_{1(4,1)}^{(0,0)}=d_{2(5,1)}^{(0,0)}=d_{1(6,2)}^{(0,0)}=d_{1(2,0)}^{(1,1)}=d_{2(3,0)}^{(1,1)}=2V_0(x)+V_1(x)+V_2(x)$$
$$d_{1(4,1)}^{(1,1)}=d_{2(5,1)}^{(1,1)}=d_{1(6,2)}^{(1,1)}=d_{1(2,0)}^{(2,2)}=d_{2(3,0)}^{(2,2)}=d_{1(4,1)}^{(2,2)}=2V_0(x)+V_1(x)+V_2(x) \qquad (4.51)$$

$$d_{2(5,1)}^{(2,2)}=d_{1(6,2)}^{(2,2)}=2V_0(x)+V_1(x)+V_2(x)$$

$$d_{1(3,0)}^{(0,0)}=d_{2(4,0)}^{(0,0)}=d_{1(5,1)}^{(0,0)}=d_{2(6,1)}^{(0,0)}=d_{1(3,0)}^{(1,1)}=d_{2(4,0)}^{(1,1)}=3V_0(x)+3V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)$$

$$d_{1(5,1)}^{(1,1)}=d_{2(6,1)}^{(1,1)}=d_{1(3,0)}^{(2,2)}=d_{2(4,0)}^{(2,2)}=d_{1(5,1)}^{(2,2)}=d_{2(6,1)}^{(2,2)}=3V_0(x)+3V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)$$

$$d_{1(3,0)}^{(3,3)}=d_{1(4,1)}^{(3,3)}=d_{2(4,0)}^{(3,3)}=d_{1(5,1)}^{(3,3)}=d_{2(6,1)}^{(3,3)}==3V_0(x)+3V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)$$

$$d_{1(4,0)}^{(0,0)}=d_{2(5,0)}^{(0,0)}=d_{1(6,1)}^{(0,0)}=d_{1(4,0)}^{(1,1)}=d_{2(5,0)}^{(1,1)}=6V_0(x)+4V_1(x)+4V_2(x)+V_3(x)+V_4(x)$$

$$d_{1(6,1)}^{(1,1)}=d_{1(4,0)}^{(2,2)}=d_{2(5,0)}^{(2,2)}=d_{1(6,1)}^{(2,2)}=d_{1(4,0)}^{(3,3)}=6V_0(x)+4V_1(x)+4V_2(x)+V_3(x)+V_4(x)$$

$$d_{2(5,0)}^{(3,3)}=d_{1(6,1)}^{(3,3)}=6V_0(x)+4V_1(x)+4V_2(x)+V_3(x)+V_4(x)$$

$$d_{1(5,0)}^{(0,0)}=d_{2(6,0)}^{(0,0)}=d_{1(5,0)}^{(1,1)}=d_{2(6,0)}^{(1,1)}=10V_0(x)+10V_1(x)+5V_2(x)+5V_3(x)+V_4(x)+V_5(x)$$

$$d_{1(5,0)}^{(2,2)}=d_{2(6,0)}^{(2,2)}=d_{1(5,0)}^{(3,3)}=d_{2(6,0)}^{(3,3)}=10V_0(x)+10V_1(x)+5V_2(x)+5V_3(x)+V_4(x)+V_5(x)$$

$$d_{1(6,0)}^{(0,0)}=d_{1(6,0)}^{(1,1)}=d_{1(6,0)}^{(2,2)}=20V_0(x)+15V_1(x)+15V_2(x)+6V_3(x)+6V_4(x)+V_5(x)+V_6(x)$$

$$d_{1(6,0)}^{(3,3)}=20V_0(x)+15V_1(x)+15V_2(x)+6V_3(x)+6V_4(x)+V_5(x)+V_6(x) \qquad (4.51a)$$

bulunur.(4.49)-(4.49a), (4.50) ve (4.51)-(4.51a) eşitlikleri (4.48) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-2(q_0V_0(x)+q_1V_1(x)+q_2V_2(x)+q_3V_3(x)+q_4V_4(x)+q_5V_5(x)+q_6V_6(x))$$
$$-2(q_1(V_0(x)+V_1(x))+q_2(3V_0(x)+V_1(x)+2V_2(x))+q_3(3V_0(x)+5V_1(x)$$
$$+V_2(x)+3V_3(x))+q_4(5V_0(x)+3V_1(x)+7V_2(x)+V_3(x)+4V_4(x))$$
$$+q_5(5V_0(x)+7V_1(x)+4V_2(x)+9V_3(x)+V_4(x)+5V_5(x))$$
$$+q_6(7V_0(x)+5V_1(x)+9V_2(x)-3V_3(x)+11V_4(x)+V_5(x)+6V_6(x)))$$
$$+q_2(4V_0(x)+2V_1(x)+2V_2(x))+q_3(14V_0(x)+16V_1(x)+4V_2(x)+6V_3(x))$$
$$+q_4(42V_0(x)+24V_1(x)+36V_2(x)+6V_3(x)+12V_4(x))+q_5(116V_0(x)+134V_1(x)$$
$$+50V_2(x)+80V_3(x)+8V_4(x)+20V_5(x))+q_6(136V_0(x)+94V_1(x)+146V_2(x)$$
$$+44V_3(x)+100V_4(x)+10V_5(x)+30V_6(x))+q_3(18V_0(x)+18V_1(x)+6V_2(x)+6V_3(x))$$
$$+q_4(126V_0(x)+78V_1(x)+90V_2(x)+18V_3(x)+24V_4(x))+q_5(384V_0(x)+432V_1(x)$$
$$+180V_2(x)+252V_3(x)+36V_4(x)+60V_5(x))+q_6(1008V_0(x)+648V_1(x)+996V_2(x)$$
$$+276V_3(x)+540V_4(x)+60V_5(x)+120V_6(x))=F_V^6(x) \qquad (4.52)$$

bulunur. (4.52) eşitliğini düzenlersek

$$V_0(x)(-2q_0-2q_1-2q_2+26q_3+158q_4+490q_5+1058q_6)+V_1(x)(-4q_1$$
$$+24q_3+96q_4+552q_5+696q_6)+V_2(x)(-4q_2+8q_3+112q_4+222q_5+1088q_6)$$
$$+V_3(x)(4q_3+22q_4+314q_5+326q_6)+V_4(x)(26q_4+42q_5+618q_6)$$
$$V_5(x)(68q_5+68q_6)+V_6(x)(136q_6)=F_V^6(x) \tag{4.53}$$

olur. (4.53) eşitliğinden

$$-2q_0-2q_1-2q_2+26q_3+158q_4+490q_5+1058q_6=-\frac{3}{4}$$
$$-4q_1+24q_3+96q_4+552q_5+696q_6=-\frac{1}{2}$$
$$-4q_2+8q_3+112q_4+222q_5+1088q_6=-\frac{1}{2}$$
$$4q_3+22q_4+314q_5+326q_6=-\frac{1}{8}$$
$$26q_4+42q_5+618q_6=-\frac{1}{8}$$
$$68q_5+68q_6=0$$
$$136q_6=0$$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0=-0.028846153846153855$, $q_1=-0.019230769230769218$, $q_2=-0.019230769230769246$, $q_3=-0.0048076923076923045$, $q_4=-0.004807692307692308$, $q_5=0$, $q_6=0$ bulunur. Bu değerler $P_V^6(x)=\sum_{r=0}^{6}q_rV_r(x)$ de yerine yazılırsa

$$P_V^6(x)=-0.028846153846153855V_0(x)-0.019230769230769218V_1(x)$$
$$-0.019230769230769246V_2(x)-0.0048076923076923045V_3(x)$$
$$-0.004807692307692308V_4(x)$$

(4.28) deki değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için üçüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

4. $P_W^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

$d=3$, $m=6$ ve $n=3$ değerleri (3.64) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{s=0}^{3}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} e_s^0 c_{1(i,k)}^{(s,0)} d_{1(i,k)}^{(s,0)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} e_s^0 c_{2(i,k)}^{(s,0)} d_{2(i,k)}^{(s,0)}\right) + \sum_{t=1}^{3}\sum_{s=0}^{3}\sum_{i=t}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} e_s^t c_{1(i,k)}^{(s,t)} d_{1(i,k)}^{(s,t)}\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} e_s^t c_{2(i,k)}^{(s,t)} d_{2(i,k)}^{(s,t)}\right) = F_W^6(x) \tag{4.54}$$

olur. (4.54) eşitliğinde $s=0,1,2,3$ değerleri yerine yazılırsa

$$e_0^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,0)} d_{1(i,k)}^{(0,0)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,0)} d_{2(i,k)}^{(0,0)}\right) + e_1^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,0)} d_{1(i,k)}^{(1,0)}\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,0)} d_{2(i,k)}^{(1,0)}\right) + e_2^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,0)} d_{1(i,k)}^{(2,0)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-t)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,0)} d_{2(i,k)}^{(2,0)}\right)$$

$$+e_3^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,0)} d_{1(i,k)}^{(3,0)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,0)} d_{2(i,k)}^{(1,0)}\right) + \sum_{t=1}^{3} e_0^{(t)}\sum_{i=t}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,t)} d_{1(i,k)}^{(0,t)}\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,t)} d_{2(i,k)}^{(0,t)}\right) + \sum_{t=1}^{3} e_1^{(t)}\sum_{i=t}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,t)} d_{1(i,k)}^{(1,t)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,t)} d_{2(i,k)}^{(1,t)}\right)$$

$$+\sum_{t=1}^{3} e_2^{(t)}\sum_{i=t}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,t)} d_{1(i,k)}^{(2,t)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,t)} d_{2(i,k)}^{(2,t)}\right) + \sum_{t=1}^{3} e_3^{(t)}\sum_{i=t}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-t)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,t)} d_{1(i,k)}^{(1,t)}\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq t+1}}^{[\![(i-t-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(3,t)} d_{2(i,k)}^{(3,t)}\right) = F_W^6(x) \tag{4.55}$$

eşitliği elde edilir. (4.55) eşitliğinde $t=1,2,3$ değerleri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
& e_0^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/1]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,0)} d_{1(i,k)}^{(0,0)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,0)} d_{2(i,k)}^{(0,0)}\right)+e_1^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,0)} d_{1(i,k)}^{(1,0)}\right.\\
& \left.+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,0)} d_{2(i,k)}^{(1,0)}\right)+e_2^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,0)} d_{1(i,k)}^{(2,0)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,0)} d_{2(i,k)}^{(2,0)}\right)\\
& +e_3^{(0)}\sum_{i=0}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![i/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,0)} d_{1(i,k)}^{(3,0)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,0)} d_{2(i,k)}^{(1,0)}\right)+e_0^{(1)}\sum_{i=1}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,1)} d_{1(i,k)}^{(0,1)}\right.\\
& \left.+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 2}}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,1)} d_{2(i,k)}^{(0,1)}\right)+e_0^{(2)}\sum_{i=2}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,2)} d_{1(i,k)}^{(0,2)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 3}}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,2)} d_{2(i,k)}^{(0,2)}\right)\\
& +e_0^{(3)}\sum_{i=3}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(0,3)} d_{1(i,k)}^{(0,3)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 4}}^{[\![(i-4)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(0,3)} d_{2(i,k)}^{(0,3)}\right)+e_1^{(1)}\sum_{i=1}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,1)} d_{1(i,k)}^{(1,1)}\right.\\
& \left.+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 2}}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,1)} d_{2(i,k)}^{(1,1)}\right)+e_1^{(2)}\sum_{i=2}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,2)} d_{1(i,k)}^{(1,2)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 3}}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,2)} d_{2(i,k)}^{(1,2)}\right)\\
& +e_1^{(3)}\sum_{i=1}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(1,3)} d_{1(i,k)}^{(1,3)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 4}}^{[\![(i-4)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(1,3)} d_{2(i,k)}^{(1,3)}\right)+e_2^{(1)}\sum_{i=1}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,1)} d_{1(i,k)}^{(2,1)}\right.\\
& \left.+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 2}}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,1)} d_{2(i,k)}^{(2,1)}\right)+e_2^{(2)}\sum_{i=2}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-2)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,2)} d_{1(i,k)}^{(2,2)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 3}}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,2)} d_{2(i,k)}^{(2,2)}\right)\\
& +e_2^{(3)}\sum_{i=3}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-3)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(2,3)} d_{1(i,k)}^{(2,3)}+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 4}}^{[\![(i-4)/2]\!]} c_{2(i,k)}^{(2,3)} d_{2(i,k)}^{(2,3)}\right)+e_3^{(1)}\sum_{i=1}^{6} q_i\left(\sum_{k=0}^{[\![(i-1)/2]\!]} c_{1(i,k)}^{(3,1)} d_{1(i,k)}^{(3,1)}\right. \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{\substack{k=0\\ i\geq 2}}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]} c_{2(i,k)}^{(3,1)} d_{2(i,k)}^{(3,1)} \Bigg) + e_3^{(2)} \sum_{i=2}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]} c_{1(i,k)}^{(3,2)} d_{1(i,k)}^{(3,2)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 3}}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{2(i,k)}^{(3,2)} d_{2(i,k)}^{(3,2)} \right)$$

$$+e_3^{(3)} \sum_{i=3}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{1(i,k)}^{(3,3)} d_{1(i,k)}^{(3,3)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 4}}^{\left[\!\left[(i-4)/2 \right]\!\right]} c_{2(i,k)}^{(3,3)} d_{2(i,k)}^{(3,3)} \right) = F_W^6(x) \qquad (4.56a)$$

bulunur. (3.64a) eşitliği yardımıyla bulunan $e_0^{(0)} = -2$, $e_0^{(1)} = 0$, $e_0^{(2)} = 0$, $e_0^{(3)} = 0$, $e_1^{(0)} = 0$, $e_1^{(1)} = -2$, $e_1^{(2)} = 0$, $e_1^{(3)} = 0$, $e_2^{(0)} = 0$, $e_2^{(1)} = 0$, $e_2^{(2)} = 1$, $e_2^{(3)} = 0$, $e_3^{(0)} = 0$, $e_3^{(1)} = 0$, $e_3^{(2)} = 0$, $e_3^{(3)} = 1$ değerleri (4.56)-(4.56a) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-2\sum_{i=0}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[i/2 \right]\!\right]} c_{1(i,k)}^{(0,0)} d_{1(i,k)}^{(0,0)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 1}}^{\left[\!\left[(i-1)/2 \right]\!\right]} c_{2(i,k)}^{(0,0)} d_{2(i,k)}^{(0,0)} \right) - 2\sum_{i=1}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-1)/2 \right]\!\right]} c_{1(i,k)}^{(1,1)} d_{1(i,k)}^{(1,1)} \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 2}}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]} c_{2(i,k)}^{(1,1)} d_{2(i,k)}^{(1,1)} \right) + \sum_{i=2}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-2)/2 \right]\!\right]} c_{1(i,k)}^{(2,2)} d_{1(i,k)}^{(2,2)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 3}}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{2(i,k)}^{(2,2)} d_{2(i,k)}^{(2,2)} \right)$$

$$+\sum_{i=3}^{6} q_i \left(\sum_{k=0}^{\left[\!\left[(i-3)/2 \right]\!\right]} c_{1(i,k)}^{(3,3)} d_{1(i,k)}^{(3,3)} + \sum_{\substack{k=0\\ i\geq 4}}^{\left[\!\left[(i-4)/2 \right]\!\right]} c_{2(i,k)}^{(3,3)} d_{2(i,k)}^{(3,3)} \right) = F_W^6(x) \qquad (4.57)$$

eşitliği bulunur. (4.57) eşitliğinden

$$-2\Big(q_0 \left(c_{1(0,0)}^{(0,0)} d_{1(0,0)}^{(0,0)} \right) + q_1 \left(c_{1(1,0)}^{(0,0)} d_{1(1,0)}^{(0,0)} + c_{2(1,0)}^{(0,0)} d_{2(1,0)}^{(0,0)} \right) + q_2 \left(c_{1(2,0)}^{(0,0)} d_{1(2,0)}^{(0,0)} + c_{1(2,1)}^{(0,0)} d_{1(2,1)}^{(0,0)} + c_{2(2,0)}^{(0,0)} d_{2(2,0)}^{(0,0)} \right)$$

$$+q_3 \left(c_{1(3,0)}^{(0,0)} d_{1(3,0)}^{(0,0)} + c_{1(3,1)}^{(0,0)} d_{1(3,1)}^{(0,0)} + c_{2(3,0)}^{(0,0)} d_{2(3,0)}^{(0,0)} + c_{2(3,1)}^{(0,0)} d_{2(3,1)}^{(0,0)} \right) + q_4 \left(c_{1(4,0)}^{(0,0)} d_{1(4,0)}^{(0,0)} + c_{1(4,1)}^{(0,0)} d_{1(4,1)}^{(0,0)} \right.$$

$$\left. + c_{1(4,2)}^{(0,0)} d_{1(4,2)}^{(0,0)} + c_{2(4,0)}^{(0,0)} d_{2(4,0)}^{(0,0)} + c_{2(4,1)}^{(0,0)} d_{2(4,1)}^{(0,0)} \right) + q_5 \left(c_{1(5,0)}^{(0,0)} d_{1(5,0)}^{(0,0)} + c_{1(5,1)}^{(0,0)} d_{1(5,1)}^{(0,0)} + c_{1(5,2)}^{(0,0)} d_{1(5,2)}^{(0,0)} \right.$$

$$\left. + c_{2(5,0)}^{(0,0)} d_{2(5,0)}^{(0,0)} + c_{2(5,1)}^{(0,0)} d_{2(5,1)}^{(0,0)} + c_{2(5,2)}^{(0,0)} d_{2(5,2)}^{(0,0)} \right) + q_6 \left(c_{1(6,0)}^{(0,0)} d_{1(6,0)}^{(0,0)} + c_{1(6,1)}^{(0,0)} d_{1(6,1)}^{(0,0)} + c_{1(6,2)}^{(0,0)} d_{1(6,2)}^{(0,0)} \right.$$

$$\left. + c_{1(6,3)}^{(0,0)} d_{1(6,3)}^{(0,0)} + c_{2(6,0)}^{(0,0)} d_{2(6,0)}^{(0,0)} + c_{2(6,1)}^{(0,0)} d_{2(6,1)}^{(0,0)} + c_{2(6,2)}^{(0,0)} d_{2(6,2)}^{(0,0)} \right)\Big) - 2\Big(q_1 \left(c_{1(1,0)}^{(1,1)} d_{1(1,0)}^{(1,1)} \right) \qquad (4.58)$$

$$+q_2\left(c_{1(2,0)}^{(1,1)}d_{1(2,0)}^{(1,1)}+c_{2(2,0)}^{(1,1)}d_{2(2,0)}^{(1,1)}\right)+q_3\left(c_{1(3,0)}^{(1,1)}d_{1(3,0)}^{(1,1)}+c_{1(3,1)}^{(1,1)}d_{1(3,1)}^{(1,1)}+c_{2(3,0)}^{(1,1)}d_{2(3,0)}^{(1,1)}\right)$$

$$+q_4\left(c_{1(4,0)}^{(1,1)}d_{1(4,0)}^{(1,1)}+c_{1(4,1)}^{(1,1)}d_{1(4,1)}^{(1,1)}+c_{2(4,0)}^{(1,1)}d_{2(4,0)}^{(1,1)}+c_{2(4,1)}^{(1,1)}d_{2(4,1)}^{(1,1)}\right)+q_5\left(c_{1(5,0)}^{(1,1)}d_{1(5,0)}^{(1,1)}+c_{1(5,1)}^{(1,1)}d_{1(5,1)}^{(1,1)}\right.$$

$$\left.+c_{1(5,2)}^{(1,1)}d_{1(5,2)}^{(1,1)}+c_{2(5,0)}^{(1,1)}d_{2(5,0)}^{(1,1)}+c_{2(5,1)}^{(1,1)}d_{2(5,1)}^{(1,1)}\right)+q_6\left(c_{1(6,0)}^{(1,1)}d_{1(6,0)}^{(1,1)}+c_{1(6,1)}^{(1,1)}d_{1(6,1)}^{(1,1)}+c_{1(6,2)}^{(1,1)}d_{1(6,2)}^{(1,1)}\right.$$

$$\left.\left.+c_{2(6,0)}^{(1,1)}d_{2(6,0)}^{(1,1)}+c_{2(6,1)}^{(1,1)}d_{2(6,1)}^{(1,1)}+c_{2(6,2)}^{(1,1)}d_{2(6,2)}^{(1,1)}\right)\right)+q_2\left(c_{1(2,0)}^{(2,2)}d_{1(2,0)}^{(2,2)}\right)+q_3\left(c_{1(3,0)}^{(2,2)}d_{1(3,0)}^{(2,2)}+c_{2(3,0)}^{(2,2)}d_{2(3,0)}^{(2,2)}\right)$$

$$+q_4\left(c_{1(4,0)}^{(2,2)}d_{1(4,0)}^{(2,2)}+c_{1(4,1)}^{(2,2)}d_{1(4,1)}^{(2,2)}+c_{2(4,0)}^{(2,2)}d_{2(4,0)}^{(2,2)}\right)+q_5\left(c_{1(5,0)}^{(2,2)}d_{1(5,0)}^{(2,2)}+c_{1(5,1)}^{(2,2)}d_{1(5,1)}^{(2,2)}+c_{2(5,0)}^{(2,2)}d_{2(5,0)}^{(2,2)}\right.$$

$$\left.+c_{2(5,1)}^{(2,2)}d_{2(5,1)}^{(2,2)}\right)+q_6\left(c_{1(6,0)}^{(2,2)}d_{1(6,0)}^{(2,2)}+c_{1(6,1)}^{(2,2)}d_{1(6,1)}^{(2,2)}+c_{1(6,2)}^{(2,2)}d_{1(6,2)}^{(2,2)}+c_{2(6,0)}^{(2,2)}d_{2(6,0)}^{(2,2)}+c_{2(6,1)}^{(2,2)}d_{2(6,1)}^{(2,2)}\right)$$

$$+q_3\left(c_{1(3,0)}^{(3,3)}d_{1(3,0)}^{(3,3)}\right)+q_4\left(c_{1(4,0)}^{(3,3)}d_{1(4,0)}^{(3,3)}+c_{2(4,0)}^{(3,3)}d_{2(4,0)}^{(3,3)}\right)+q_5\left(c_{1(5,0)}^{(3,3)}d_{1(5,0)}^{(3,3)}+c_{1(5,1)}^{(3,3)}d_{1(5,1)}^{(3,3)}\right.$$

$$\left.+c_{2(5,0)}^{(3,3)}d_{2(5,0)}^{(3,3)}\right)+q_6\left(c_{1(6,0)}^{(3,3)}d_{1(6,0)}^{(3,3)}+c_{1(6,1)}^{(3,3)}d_{1(6,1)}^{(3,3)}+c_{2(6,0)}^{(3,3)}d_{2(6,0)}^{(3,3)}+c_{2(6,1)}^{(3,3)}d_{2(6,1)}^{(3,3)}\right)=F_W^6(x) \qquad (4.58a)$$

olur. $c_{1(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.64b) ve $c_{2(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.64c) eşitliklerinden

$$c_{1(0,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(1,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{2(1,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(2,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(2,1)}^{(0,0)}=-1,\ c_{2(2,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(3,0)}^{(0,0)}=1,\ c_{1(3,1)}^{(0,0)}=-2,$$

$$c_{2(3,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(3,1)}^{(0,0)}=-1,\quad c_{1(4,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{1(4,1)}^{(0,0)}=-3,\quad c_{1(4,2)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(4,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(4,1)}^{(0,0)}=-2,$$

$$c_{1(5,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{1(5,1)}^{(0,0)}=-4,\quad c_{1(5,2)}^{(0,0)}=3,\quad c_{2(5,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(5,1)}^{(0,0)}=-3,\quad c_{2(5,2)}^{(0,0)}=1,\quad c_{1(6,0)}^{(0,0)}=1,$$

$$c_{1(6,1)}^{(0,0)}=-5,\quad c_{1(6,2)}^{(0,0)}=6,\quad c_{1(6,3)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(6,0)}^{(0,0)}=1,\quad c_{2(6,1)}^{(0,0)}=-4,\quad c_{2(6,2)}^{(0,0)}=3,\quad c_{1(1,0)}^{(1,1)}=1,$$

$$c_{1(2,0)}^{(1,1)}=2,\quad c_{2(2,0)}^{(1,1)}=1,\quad c_{1(3,0)}^{(1,1)}=3,\quad c_{1(3,1)}^{(1,1)}=-2,\quad c_{2(3,0)}^{(1,1)}=2,\quad c_{1(4,0)}^{(1,1)}=4,\quad c_{1(4,1)}^{(1,1)}=-6,$$

$$c_{2(4,0)}^{(1,1)}=3,\quad c_{2(4,1)}^{(1,1)}=-2,\quad c_{1(5,0)}^{(1,1)}=5,\quad c_{1(5,1)}^{(1,1)}=-12,\quad c_{1(5,2)}^{(1,1)}=3,\quad c_{2(5,0)}^{(1,1)}=4,\quad c_{2(5,1)}^{(1,1)}=-6,$$

$$c_{1(6,0)}^{(1,1)}=6,\quad c_{1(6,1)}^{(1,1)}=-20,\quad c_{1(6,2)}^{(1,1)}=12,\quad c_{2(6,0)}^{(1,1)}=5,\quad c_{2(6,1)}^{(1,1)}=-12,\quad c_{2(6,2)}^{(1,1)}=3,\quad c_{1(2,0)}^{(2,2)}=2,$$

$$c_{1(3,0)}^{(2,2)}=6,\quad c_{2(3,0)}^{(2,2)}=2,\quad c_{1(4,0)}^{(2,2)}=12,\quad c_{1(4,1)}^{(2,2)}=-6,\quad c_{2(4,0)}^{(2,2)}=6,\quad c_{1(5,0)}^{(2,2)}=20,\quad c_{1(5,1)}^{(2,2)}=-8,$$

$$c_{2(5,0)}^{(2,2)}=12,\quad c_{2(5,1)}^{(2,2)}=-6,\quad c_{1(6,0)}^{(2,2)}=30,\quad c_{1(6,1)}^{(2,2)}=-60,\quad c_{1(6,2)}^{(2,2)}=12,\quad c_{2(6,0)}^{(2,2)}=20,$$

$$c_{2(6,1)}^{(2,2)}=-24,\ c_{1(3,0)}^{(3,3)}=6,\ c_{1(4,0)}^{(3,3)}=24,\ c_{2(4,0)}^{(3,3)}=6,\ c_{1(5,0)}^{(3,3)}=60,\ c_{1(5,1)}^{(3,3)}=-24,\ c_{2(5,0)}^{(3,3)}=24,$$

$$c_{1(6,0)}^{(3,3)}=120,\ c_{1(6,1)}^{(3,3)}=-120,\ c_{2(6,0)}^{(3,3)}=60,\ c_{2(6,1)}^{(3,3)}=-24 \qquad (4.59)$$

bulunur. $d_{1(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.64d) ve $d_{2(i,k)}^{(s,t)}$ için (3.64e) eşitliklerinden

$$d_{1(0,0)}^{(0,0)}=d_{2(1,0)}^{(0,0)}=d_{1(2,1)}^{(0,0)}=d_{2(3,1)}^{(0,0)}=d_{1(4,2)}^{(0,0)}=d_{2(5,2)}^{(0,0)}=d_{1(6,3)}^{(0,0)}=W_0(x)$$

$$d_{1(1,0)}^{(0,0)}=d_{2(2,0)}^{(0,0)}=d_{1(3,1)}^{(0,0)}=d_{2(4,1)}^{(0,0)}=d_{1(5,2)}^{(0,0)}=d_{2(6,2)}^{(0,0)}=d_{1(1,0)}^{(1,1)}=d_{2(2,0)}^{(1,1)}=-W_0(x)+W_1(x)$$

$$d_{1(3,1)}^{(1,1)}=d_{2(4,1)}^{(1,1)}=d_{1(5,2)}^{(1,1)}=d_{2(6,2)}^{(1,1)}=-W_0(x)+W_1(x)$$

$$d_{1(2,0)}^{(0,0)}=d_{2(3,0)}^{(0,0)}=d_{1(4,1)}^{(0,0)}=d_{2(5,1)}^{(0,0)}=d_{1(6,2)}^{(0,0)}=d_{1(2,0)}^{(1,1)}=d_{2(3,0)}^{(1,1)}=2W_0(x)-W_1(x)+W_2(x)$$

$$d_{1(4,1)}^{(1,1)}=d_{2(5,1)}^{(1,1)}=d_{1(6,2)}^{(1,1)}=d_{1(2,0)}^{(2,2)}=d_{2(3,0)}^{(2,2)}=d_{1(4,1)}^{(2,2)}=2W_0(x)-W_1(x)+W_2(x)$$

$$d_{2(5,1)}^{(2,2)}=d_{1(6,2)}^{(2,2)}=2W_0(x)-W_1(x)+W_2(x)$$

$$d_{1(3,0)}^{(0,0)}=d_{2(4,0)}^{(0,0)}=d_{1(5,1)}^{(0,0)}=d_{2(6,1)}^{(0,0)}=d_{1(3,0)}^{(1,1)}=d_{2(4,0)}^{(1,1)}=-3W_0(x)+3W_1(x)-W_2(x)+W_3(x)$$

$$d_{1(5,1)}^{(1,1)}=d_{2(6,1)}^{(1,1)}=d_{1(3,0)}^{(2,2)}=d_{2(4,0)}^{(2,2)}=d_{1(5,1)}^{(2,2)}=d_{2(6,1)}^{(2,2)}=-3W_0(x)+3W_1(x)-W_2(x)+W_3(x)$$

$$d_{1(3,0)}^{(3,3)}=d_{1(4,1)}^{(3,3)}=d_{2(4,0)}^{(3,3)}=d_{1(5,1)}^{(3,3)}=d_{2(6,1)}^{(3,3)}=-3W_0(x)+3W_1(x)-W_2(x)+W_3(x)$$

$$d_{1(4,0)}^{(0,0)}=d_{2(5,0)}^{(0,0)}=d_{1(6,1)}^{(0,0)}=d_{1(4,0)}^{(1,1)}=d_{2(5,0)}^{(1,1)}=6W_0(x)-4W_1(x)+4W_2(x)-W_3(x)+W_4(x)$$

$$d_{1(6,1)}^{(1,1)}=d_{1(4,0)}^{(2,2)}=d_{2(5,0)}^{(2,2)}=d_{1(6,1)}^{(2,2)}=d_{1(4,0)}^{(3,3)}=6W_0(x)-4W_1(x)+4W_2(x)-W_3(x)+W_4(x)$$

$$d_{2(5,0)}^{(3,3)}=d_{1(6,1)}^{(3,3)}=6W_0(x)-4W_1(x)+4W_2(x)-W_3(x)+W_4(x)$$

$$d_{1(5,0)}^{(0,0)}=d_{2(6,0)}^{(0,0)}=d_{1(5,0)}^{(1,1)}=d_{2(6,0)}^{(1,1)}=-10W_0(x)+10W_1(x)-5W_2(x)+5W_3(x)-W_4(x)+W_5(x)$$

$$d_{1(5,0)}^{(2,2)}=d_{2(6,0)}^{(2,2)}=d_{1(5,0)}^{(3,3)}=d_{2(6,0)}^{(3,3)}=-10W_0(x)+10W_1(x)-5W_2(x)+5W_3(x)-W_4(x)+W_5(x)$$

$$d_{1(6,0)}^{(0,0)}=d_{1(6,0)}^{(1,1)}=d_{1(6,0)}^{(2,2)}=20W_0(x)-15W_1(x)+15W_2(x)-6W_3(x)+6W_4(x)-W_5(x)+W_6(x)$$

$$d_{1(6,0)}^{(3,3)}=20W_0(x)-15W_1(x)+15W_2(x)-6W_3(x)+6W_4(x)-W_5(x)+W_6(x) \qquad (4.60)$$

bulunur. (4.59) ve (4.60) eşitlikleri (4.58)-(4.58a) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-2\big(q_0W_0(x)+q_1W_1(x)+q_2W_2(x)+q_3W_3(x)+q_4W_4(x)+q_5W_5(x)+q_6W_6(x)\big)$$

$$-2\big(q_1(W_0(x)+W_1(x))+q_2(3W_0(x)-W_1(x)+2W_2(x))+q_3(-3W_0(x)+5W_1(x)$$

$$-W_2(x)+3W_3(x))+q_4(5W_0(x)-3W_1(x)+7W_2(x)-W_3(x)+4W_4(x))$$

$$+q_5(-5W_0(x)+7W_1(x)-3W_2(x)+9W_3(x)-W_4(x)+5W_5(x)) \qquad (4.61)$$

$$+q_6\left(7W_0(x)-5W_1(x)+9W_2(x)-3W_3(x)+11W_4(x)-W_5(x)+6W_6(x)\right)\Big)$$

$$+q_2\left(4W_0(x)-2W_1(x)+2W_2(x)\right)+q_3\left(-14W_0(x)+16W_1(x)-4W_2(x)+6W_3(x)\right)$$

$$+q_4\left(42W_0(x)-24W_1(x)+36W_2(x)-6W_3(x)+12W_4(x)\right)+q_5\left(-116W_0(x)\right.$$

$$\left.+134W_1(x)-50W_2(x)+80W_3(x)-8W_4(x)+20W_5(x)\right)$$

$$+q_6\left(136W_0(x)-94W_1(x)+146W_2(x)-44W_3(x)+100W_4(x)-10W_5(x)+30W_6(x)\right)$$

$$+q_3\left(-18W_0(x)+18W_1(x)-6W_2(x)+6W_3(x)\right)+q_4\left(126W_0(x)-78W_1(x)+90W_2(x)\right.$$

$$\left.-18W_3(x)+24W_4(x)\right)+q_5\left(-384W_0(x)+432W_1(x)-180W_2(x)+252W_3(x)\right.$$

$$\left.-36W_4(x)+60W_5(x)\right)+q_6\left(1152W_0(x)-792W_1(x)+1044W_2(x)-324W_3(x)\right.$$

$$\left.+540W_4(x)-60W_5(x)+120W_6(x)\right)=F_W^6(x) \tag{4.61a}$$

bulunur. (4.61)-(4.61a) eşitliğini düzenlersek

$$W_0(x)\left(-2q_0-2q_1-2q_2-26q_3+158q_4-490q_5+1274q_6\right)+W_1(x)\left(-4q_1\right.$$

$$\left.+24q_3-96q_4+552q_5-876q_6\right)+W_2(x)\left(-4q_2-8q_3+112q_4-224q_5+1272q_6\right)$$

$$+W_3(x)\left(4q_3-22q_4+314q_5-362q_6\right)+W_4(x)\left(26q_4-42q_5+618q_6\right)$$

$$W_5(x)\left(68q_5-68q_6\right)+W_6(x)\left(136q_6\right)=F_W^6(x) \tag{4.62}$$

olur. (4.62) eşitliğinden

$$-2q_0-2q_1-2q_2-26q_3+158q_4-490q_5+1274q_6=-\frac{3}{4}$$

$$-4q_1+24q_3-96q_4+552q_5-876q_6=\frac{1}{2}$$

$$-4q_2-8q_3+112q_4-224q_5+1272q_6=-\frac{1}{2}$$

$$4q_3-22q_4+314q_5-362q_6=\frac{1}{8}$$

$$26q_4-42q_5+618q_6=-\frac{1}{8}$$

$68q_5 - 68q_6 = 0$

$136q_6 = 0$

lineer denklem sistemi bulunur. Yukarıdaki lineer denklem sisteminden $q_0 = -0.06730769230769229$, $q_1 = 0.01923076923076921 8$, $q_2 = -0.019230769230769246$, $q_3 = 0.0048076923076923045$, $q_4 = -0.004807692307692308$, $q_5 = 0$, $q_6 = 0$ bulunur. Bu değerler $P_W^6(x) = \sum_{i=0}^{6} q_i W_i(x)$ de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_W^6(x) = &-0.06730769230769229 W_0(x) + 0.019230769230769218 W_1(x) \\ &-0.019230769230769246 W_2(x) + 0.0048076923076923045 W_3(x) \\ &-0.004807692307692308 W_4(x) \end{aligned}$$

(4.28) deki değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için dördüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilir.

Örnek 4.4. $y' + 4y = xe^{-4x}$ (4.63)

Birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için $P_T^6(x)$, $P_U^6(x)$, $P_V^6(x)$ ve $P_W^6(x)$ yaklaşım polinomlarını bulunuz.

Çözüm 4.4.

1.) $P_T^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(4.63) eşitliğinin sağ tarafındaki fonksiyonun yaklaşım polinomunu bulmak için önce (3.8) deki eşitlikten $\frac{C_0}{2} = -9.759463375607003$, $C_1 = 17.724099240080182$, $C_2 = -13.096667845339839$, $C_3 = 7.8380496962606845$,

$C_4 = -3.839838579806206$, $C_5 = 1.560526790895246$ ve $C_6 = -0.5026341100733807$ bulunmaktadır. Bu değerler (3.2) eşitliğnde yerine yazıldığında $f(x) = xe^{-4x}$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned} F_T^6(x) = &-9.759463375607003T_0(x) + 17.724099240080182T_1(x) \\ &-13.096667845339839T_2(x) + 7.838049696260684 5T_3(x) \\ &-3.839838579806206T_4(x) + 1.560526790895246T_5(x) \\ &-0.5026341100733807T_6(x) \end{aligned} \quad (4.64)$$

bulunmuş olur. $y(x) = \sum_{i=0}^{6} q_i T_i(x)$ yi (4.63) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\sum_{i=1}^{6} q_i T_i'(x) + 4\sum_{i=0}^{6} q_i T_i(x) = F_T^6(x)$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.71) ve (3.72) deki eşitliklerden

$$\begin{aligned} &\frac{C_0}{2} = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 \sum_{k=0}^{2} (2k+1) q_{2k+1}, \; C_1 = \alpha_0 q_1 + \alpha_1 \sum_{k=1}^{3} 4k q_{2k}, \\ &C_2 = \alpha_0 q_2 + \alpha_1 \sum_{k=1}^{2} (4k+2) q_{2k+1}, \; C_3 = \alpha_0 q_3 + \alpha_1 \sum_{k=2}^{3} 4k q_{2k}, \\ &C_4 = \alpha_0 q_4 + \alpha_1 \sum_{k=2}^{2} (4k+2) q_{2k+1}, \; C_5 = \alpha_0 q_5 + \alpha_1 \sum_{k=3}^{3} 4k q_{2k}, \\ &C_6 = \alpha_0 q_6 \end{aligned} \quad (4.65)$$

eşitlikleri elde edilmektedir. $\alpha_0 = 4$ ve $\alpha_1 = 1$ değerleri ve (4.65) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &-9.759463375607003 = 4q_0 + q_1 + 3q_3 + 5q_5 \\ &17.724099240080182 = 4q_1 + 4q_2 + 8q_4 + 12q_6 \\ &-13.096667845339839 = 4q_2 + 6q_3 + 10q_5 \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$7.8380496962606845 = 4q_3 + 8q_4 + 12q_6$$

$$-3.839838579806206 = 4q_4 + 10q_5$$

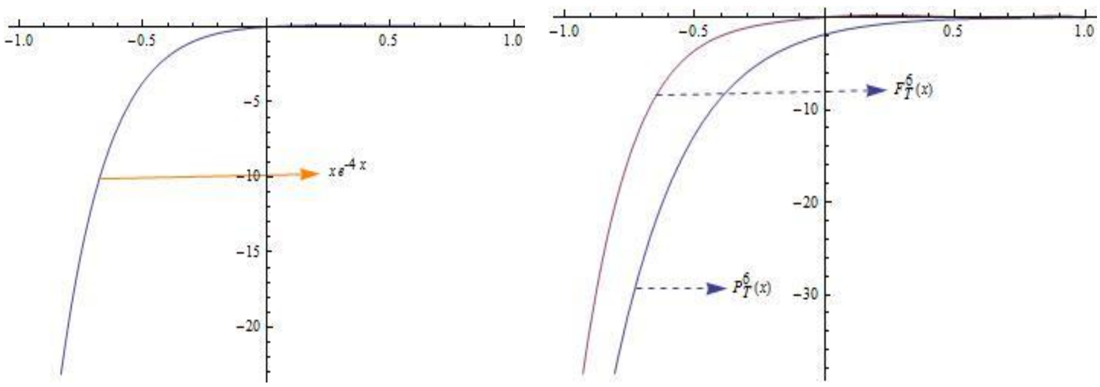
$$1.560526790895246 = 4q_5 + 12q_6$$

$$-0.5026341100733807 = 4q_6 \tag{4.66a}$$

lineer denklem sistemi elde edilmektedir. Buradan $q_0 = -16.44103441588367$, $q_1 = 27.893306792780812$, $q_2 = -17.329850708908396$, $q_3 = 8.091943697917545$, $q_4 = -2.877727845648669$, $q_5 = 0.767107280278847$ ve $q_6 = -0.12565852751834516$ bulunmaktadır. Bu değerler $P_T^6(x) = \sum_{i=0}^{6} q_i T_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_T^6(x) = &-16.441034415883367 T_0(x) + 27.893306792780812 T_1(x) \\ &-17.329850708908396 T_2(x) + 8.091943697917545 T_3(x) \\ &-2.877727845648669 T_4(x) + 0.767107280278847 T_5(x) \\ &-0.12565852751834516 T_6(x) \end{aligned}$$

(4.63) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu bulunmaktadır.



Şekil 4.5. $f(x) = xe^{-4x}$, $F_T^6(x)$ ve $P_T^6(x)$ in grafiği

4.) $P_U^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(3.14) eşitliğinden $C_0 = -6.918538251350727$, $C_1 = 11.32453941488386$, $C_2 = -12.038024842419336$, $C_3 = 10.10653551363643$, $C_4 = -7.220961147563353$, $C_5 = 4.464417950573699$ ve $C_6 = -2.101474556494743$ olarak bulunmaktadır. Bu değerler (3.9) eşitliğinde yerine yazıldığında $f(x) = xe^{-4x}$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned} F_U^6(x) = &-6.918538251350727U_0(x) + 11.32453941488386U_1(x) \\ &-12.038024842419336U_2(x) + 10.10653551363643U_3(x) \\ &-7.220961147563353U_4(x) + 4.464417950573699U_5(x) \\ &-2.101474556494743U_6(x) \end{aligned} \tag{4.67}$$

şeklinde bulunur. $y(x) = \sum_{i=0}^{6} q_i U_i(x)$ eşitliği (4.63) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^{6} q_i U_i'(x) + 4\sum_{i=0}^{6} q_i U_i(x) = F_U^6(x)$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.78) ve (3.79) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} &C_0 = \alpha_0 q_0 + 2\alpha_1 \sum_{k=0}^{2} q_{2k+1}, \quad C_1 = \alpha_0 q_1 + 4\alpha_1 \sum_{k=1}^{3} q_{2k}, \quad C_2 = \alpha_0 q_2 + 6\alpha_1 \sum_{k=1}^{2} q_{2k+1}, \\ &C_3 = \alpha_0 q_3 + 8\alpha_1 \sum_{k=2}^{3} q_{2k}, \; C_4 = \alpha_0 q_4 + 10\alpha_1 \sum_{k=2}^{2} q_{2k+1}, \; C_5 = \alpha_0 q_5 + 12\alpha_1 \sum_{k=3}^{3} q_{2k}, \\ &C_6 = \alpha_0 q_6 \end{aligned} \tag{4.68}$$

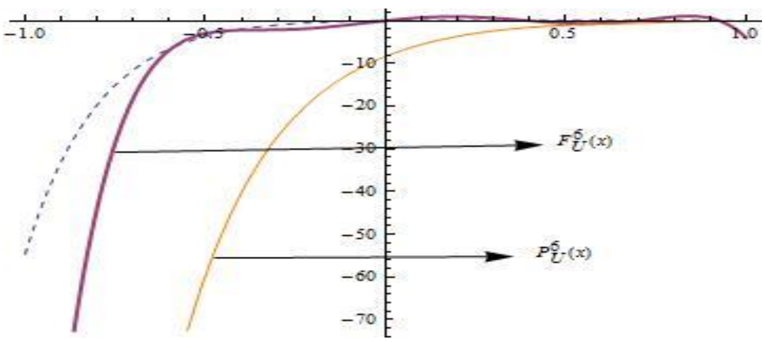
eşitlikleri elde edilir. $\alpha_0 = 4$ ve $\alpha_1 = 1$ değerleri ve (4.68) eşitlikleri kullanılarak

$$-6.918538251350727 = 4q_0 + 2q_1 + 2q_3 + 2q_5$$
$$11.32453941488386 = 4q_1 + 4q_2 + 4q_4 + 4q_6$$
$$-12.038024842419336 = 4q_2 + 6q_3 + 6q_5$$
$$10.10653551363643 = 4q_3 + 8q_4 + 8q_6$$
$$-7.220961147563353 = 4q_4 + 10q_5$$
$$4.464417950573699 = 4q_5 + 12q_6$$
$$-2.101474556494743 = 4q_6 \tag{4.69}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan $q_0 = -38.356915264932255$, $q_1 = 49.91344724366411$, $q_2 = -38.02117745139241$, $q_3 = 20.648903755510563$, $q_4 = -8.535766299427044$, $q_5 = 2.692210405014482$ ve $q_6 = -0.5253686391236857$ bulunmaktadır. Bu değerler $P_U^6(x) = \sum_{i=0}^{6} q_i U_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_U^6(x) = & -38.356915264932255U_0(x) + 49.91344724366411U_1(x) \\ & -38.02117745139241U_2(x) + 20.648903755510563U_3(x) \\ & -8.535766299427044U_4(x) + 2.692210405014482U_5(x) \\ & -0.5253686391236857U_6(x) \end{aligned}$$

(4.63) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için ikinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden 6. Mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.



Şekil 4.6. $f(x) = xe^{-4x}$, $F_U^6(x)$ ve $P_U^6(x)$ in grafiği

3. $P_V^6\left(x\right)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(3.20) eşitliğinden $C_0=-2.217456841572529$, $C_1=5.846199912829542$, $C_2=-7.371008884028345$, $C_3=6.802924486087844$, $C_4=-5.125071800934946$, $C_5=3.2441678966259513$ ve $C_6=-1.539545054973135$ olarak bulunmaktadır. Bulunan bu değerler (3.15) eşitliğinde yerine yazıldığında $f\left(x\right)=xe^{-4x}$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned}F_V^6\left(x\right)=&-2.217456841572529V_0\left(x\right)+5.846199912829542V_1\left(x\right)\\&-7.371008884028345V_2\left(x\right)+6.802924486087844V_3\left(x\right)\\&-5.125071800934946V_4\left(x\right)+3.2441678966259513V_5\left(x\right)\\&-1.539545054973135V_6\left(x\right)\end{aligned}\tag{4.70}$$

şeklinde bulunur. $y\left(x\right)=\sum_{i=0}^{6}q_iV_i\left(x\right)$ eşitliğini (4.63) denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{i=0}^{6}q_iV_i'\left(x\right)+4\sum_{i=0}^{6}q_iV_i\left(x\right)=F_V^6\left(x\right)$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.85) ve (3.86) daki eşitlikler yardımıyla

$$C_0=\alpha_0q_0+\alpha_1\sum_{k=0}^{2}2kq_{2k-1}+\alpha_1\sum_{k=0}^{3}2kq_{2k},\quad C_1=\alpha_0q_1+\alpha_1\sum_{k=1}^{3}\left(2k+2\right)q_{2k}+\alpha_1\sum_{k=1}^{2}2kq_{2k-1},$$

$$C_2=\alpha_0q_2+\alpha_1\sum_{k=1}^{2}\left(2k+4\right)q_{2k+1}+\alpha_1\sum_{k=0}^{2}2kq_{2k+2},$$

$$C_3=\alpha_0q_3+\alpha_1\sum_{k=2}^{3}\left(2k+4\right)q_{2k}+\alpha_1\sum_{k=1}^{1}2kq_{2k+3},\qquad C_4=\alpha_0q_4+\alpha_1\sum_{k=0}^{1}2kq_{2k+4},$$

$$C_5=\alpha_0q_5+\alpha_1\sum_{k=3}^{3}\left(2k+6\right)q_{2k},\ C_6=\alpha_0q_6\tag{4.71}$$

elde edilir. $\alpha_0=4$, $\alpha_1=1$ ve (4.71) deki eşitlikler yardımıyla

$$-2.217456841572529 = 4q_0 + 2q_1 + 2q_2 + 4q_3 + 4q_4 + 6q_5 + 6q_6$$

$$15.846199912829542 = 4q_1 + 4q_2 + 2q_3 + 6q_4 + 4q_5 + 8q_6$$

$$-7.371008884028345 = 4q_2 + 6q_3 + 2q_4 + 8q_5 + 4q_6$$

$$6.802924486087844 = 4q_3 + 8q_4 + 2q_5 + 10q_6$$

$$-5.125071800934946 = 4q_4 + 10q_5 + 2q_6$$

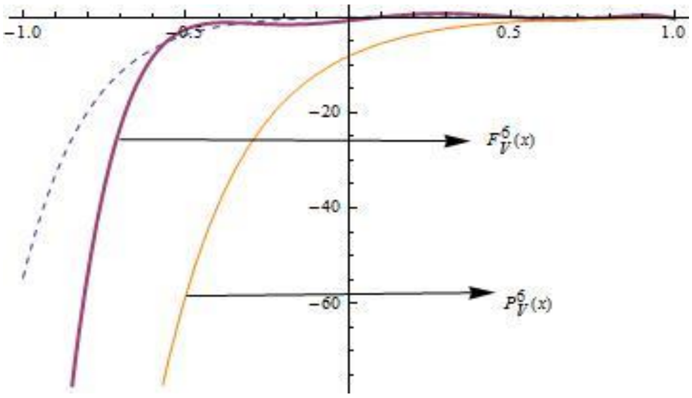
$$3.2441678966259513 = 4q_5 + 12q_6$$

$$-1.539545054973135 = 4q_6$$

lineer denklem sistemi bulunur. Bu lineer denklem sisteminden $q_0 = -11.822315046436701$, $q_1 = 25.344215822014924$, $q_2 = -22.917103914886837$, $q_3 = 13.686249861842885$, $q_4 = -6.003076731827942$, $q_5 = 1.9657007653863392$ ve $q_6 = -0.3848862637432838$ bulunmaktadır. Bu değerler $P_V^6(x) = \sum_{i=0}^{6} q_i V_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_V^6(x) = &-11.822315046436701 V_0(x) + 25.344215822014924 V_1(x) \\ &-22.917103914886837 V_2(x) + 13.686249861842885 V_3(x) \\ &-6.003076731827942 V_4(x) + 1.9657007653863392 V_5(x) \\ &-0.3848862637432838 V_6(x) \end{aligned}$$

(4.63) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için üçüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.



Şekil 4.7. $F_V^6(x)$ ve $P_V^6(x)$ in grafiği

4. $P_W^6(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(3.26) eşitliğinden $C_0=-13.477887900767627$, $C_1=11.065593386480915$, $C_2=-7.350451477655174$, $C_3=3.9756883331539115$, $C_4=-1.7729769154852422$, $C_5=0.6648179337778508$ ve $C_6=-0.20000349679362484$ olarak bulunmaktadır. Bulunan bu değerler (3.21) eşitliğinde yerine yazıldığında $f(x)=xe^{-4x}$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$
\begin{aligned}
F_W^6(x)=&-13.477887900767627W_0(x)+11.065593386480915W_1(x)\\
&-7.350451477655174W_2(x)+3.9756883331539115W_3(x)\\
&-1.7729769154852422W_4(x)+0.6648179337778508W_5(x)\\
&-0.20000349679362484W_6(x)
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

şeklindedir. $y=\sum_{i=0}^{6} q_i W_i(x)$ eşitliğini (4.63) denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{i=1}^{6} q_i W_i'(x)+4\sum_{i=0}^{6} q_i W_i(x)=F_W^6(x)$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.92) ve (3.93) deki eşitlikler yardımıyla

$$C_0=\alpha_0 q_0+\alpha_1\sum_{k=0}^{3}2kq_{2k-1}-\alpha_1\sum_{k=0}^{3}2kq_{2k}\,,\qquad C_1=\alpha_0 q_1+\alpha_1\sum_{k=1}^{3}\left(2k+2\right)q_{2k}-\alpha_1\sum_{k=0}^{2}2kq_{2k+1}\,,$$

$$C_2=\alpha_0 q_2+\alpha_1\sum_{k=1}^{2}\left(2k+4\right)q_{2k+1}-\alpha_1\sum_{k=0}^{2}2kq_{2k+2}\,,$$

$$C_3=\alpha_0 q_3+\alpha_1\sum_{k=2}^{3}\left(2k+4\right)q_{2k}-\alpha_1\sum_{k=0}^{1}2kq_{2k+3}\,,$$

$$C_4=\alpha_0 q_4+\alpha_1\sum_{k=1}^{1}\left(2k+8\right)q_{2k+3}-\alpha_1\sum_{k=0}^{1}2kq_{2k+4}\,,\qquad C_5=\alpha_0 q_5+\alpha_1\sum_{k=3}^{3}\left(2k+6\right)q_{2k}\quad \text{ve}$$

$$C_6=\alpha_0 q_6 \tag{4.73}$$

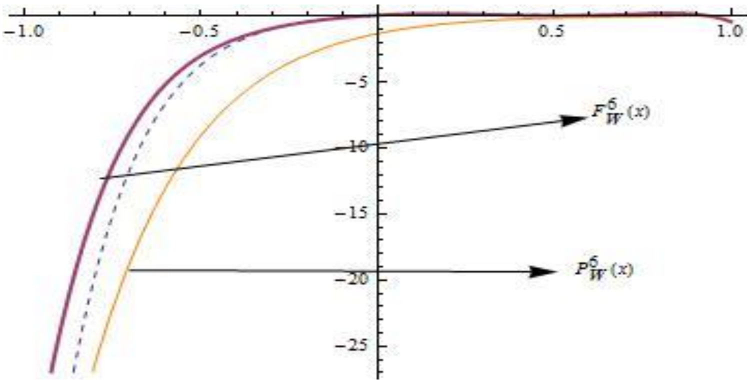
eşitlikleri elde edilir. $\alpha_0=4$, $\alpha_1=1$ değerleri ve (4.73) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
-13.477887900767627&=4q_0+2q_1-2q_2+4q_3-4q_4+6q_5-6q_6\\
11.065593386480915&=4q_1+4q_2-2q_3+6q_4-4q_5+8q_6\\
-7.350451477655174&=4q_2+6q_3-2q_4+8q_5-4q_6\\
3.9756883331539115&=4q_3+8q_4-2q_5+10q_6\\
-1.7729769154852422&=4q_4+10q_5-2q_6\\
0.6648179337778508&=4q_5+12q_6\\
-0.20000349679362484&=4q_6
\end{aligned}\tag{4.74}$$

lineer denklem sistemi elde edilmektedir. Bu lineer denklem sisteminden $q_0=-21.29735085252119$, $q_1=15.809265386775252$, $q_2=8.841238197142076$, $q_3=3.794552683943772$, $q_4=-1.2587624310697176$, $q_5=0.3162071060396814$ ve $q_6=-0.05000087419840621$ bulunmaktadır. Bulunan bu değerler $P_W^6\left(x\right)=\sum_{i=0}^{6}q_iW_i\left(x\right)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$P_W^6(x) = -21.29735085252119W_0(x) + 15.809265386775252W_1(x)$$
$$+8.841238197142076W_2(x) + 3.794552683943772W_3(x)$$
$$-1.2587624310697176W_4(x) + 0.3162071060396814W_5(x)$$
$$-0.05000087419840621W_6(x)$$

(4.63) deki birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklem için dördüncü çeşit Chebyshev polinomu cinsinden 6. mertebeden yaklaşım polinomu elde edilmektedir.



Şekil 4.8. $F_W^6(x)$ ve $P_W^6(x)$ in grafiği

Örnek 4.5. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos(2x)$ (4.75)

İkinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemi için $P_T^5(x)$, $P_U^5(x)$, $P_V^5(x)$ ve $P_W^5(x)$ yaklaşım polinomlarını bulunuz.

Çözüm 4.5.

1. $P_T^5(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(3.8) eşitliğinden $C_0 = 0.7514148702823917$, $C_1 = 0.6394621646762007$, $C_2 = -3.01376312836898$, $C_3 = 1.402782771754293$, $C_4 = -0.03491052403044281$

ve $C_5 = -0.08624948710946104$ olarak bulunmaktadır. $f(x) = 4e^{-x}\cos(2x)$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$
\begin{aligned}
F_T^5(x) = {} & 0.7514148702823917T_0(x) + 0.6394621646762007T_1(x) \\
& -3.013763128368898T_2(x) + 1.402782771754293T_3(x) \\
& -0.03491052403044281T_4(x) - 0.08624948710946104T_5(x)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. $y = \sum_{i=0}^{5} q_i T_i(x)$ seri açılımı (4.75) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\sum_{i=2}^{5} q_i T_i''(x) + 2\sum_{i=1}^{5} q_i T_i'(x) + 5\sum_{i=0}^{5} q_i T_i(x) = F_T^5(x)
$$

olmaktadır. (3.100) ve (3.101) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_0}{2} = 5q_0 + 2\sum_{k=0}^{2}(2k+1)q_{2k+1} + \sum_{k=0}^{2} 4k^3 q_{2k}\,, \\
&C_1 = 5q_1 + 2\sum_{k=0}^{2} 4kq_{2k} + \sum_{k=0}^{2} 4k(2k+1)(k+1)q_{2k+1}\,, \\
&C_2 = 5q_2 + 2\sum_{k=1}^{2}(4k+2)q_{2k+1} + \sum_{k=0}^{1} 4k(2k+2)(k+2)q_{2k+2}\,, \\
&C_3 = 5q_1 + 2\sum_{k=2}^{2} 4kq_{2k} + \sum_{k=0}^{1} 4k(2k+3)(k+3)q_{2k+3}\,, \\
&C_4 = 5q_4 + 2\sum_{k=2}^{2}(4k+2)q_{2k+1}\,, \\
&C_5 = 5q_5
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

elde edilir. (4.76) eşitliklerden

$$
\begin{aligned}
&5q_0 + 2q_1 + 4q_2 + 6q_3 + 32q_4 + 10q_5 = 0.7514148702823917 \\
&5q_1 + 8q_2 + 24q_3 + 16q_4 + 120q_5 = 0.6394621646762007
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

$$5q_2 + 12q_3 + 48q_4 + 20q_5 = -3.01376312836898$$

$$5q_3 + 16q_4 + 80q_5 = 1.402782771754293$$

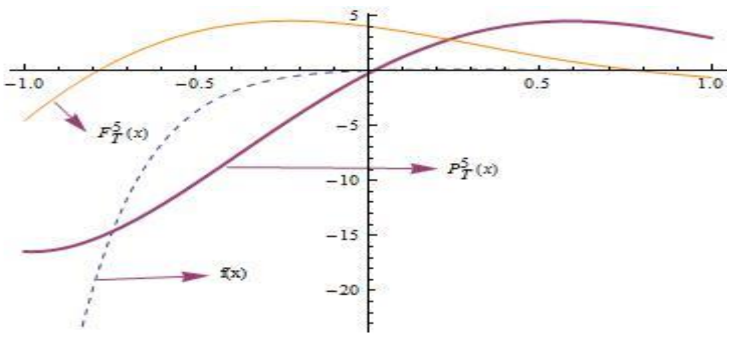
$$5q_4 + 200q_5 = -0.03491052403044281$$

$$5q_5 = -0.08624948710946104 \tag{4.77a}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (4.77)-(4.77a) deki lineer denklem sisteminden $q_0 = -4.183805043200431$, $q_1 = 11.357304411893626$, $q_2 = -3.23839394509632446$, $q_3 = -1.629089221521518$, $q_4 = 0.6830137920695998$ ve $q_5 = -0.01724989742189221$ bulunur. Bu değerler $P_T^5(x) = \sum_{i=0}^{5} q_i T_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_T^5(x) = &-4.183805043200431T_0(x) + 11.357304411893626T_1(x) \\ &-3.23839394509632446T_2(x) - 1.629089221521518T_3(x) \\ &+0.6830137920695998T_4(x) - 0.01724989742189221T_5(x) \end{aligned}$$

yaklaşım polinomu elde edilir.



Şekil 4.9. $f(x) = 4e^{-x}\cos(2x)$, $F_T^5(x)$ ve $P_T^5(x)$ in grafiği

2. $P_U^5(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(3.14) eşitliğinden $C_0 = 2.821340881270812$, $C_1 = -0.29319271619799625$, $C_2 = -2.340646941734552$, $C_3 = 1.2791125376140553$, $C_4 = -0.6079582595063046$ ve $C_5 = 0.1869139579135437$ olarak bulunmaktadır. $f(x) = 4e^{-x}\cos(2x)$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned}F_U^5(x) = {} & 2.821340881270812T_0(x) - 0.29319271619799625T_1(x) \\ & -2.340646941734552T_2(x) + 1.2791125376140553T_3(x) \\ & -0.6079582595063046T_4(x) + 0.1869139579135437T_5(x)\end{aligned}$$

şeklindedir. $y(x) = \sum_{i=0}^{5} q_i U_i(x)$ seri açılımı (4.75) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{5} q_i U_i''(x) + 2\sum_{i=0}^{5} q_i U_i'(x) + 5\sum_{i=0}^{5} q_i U_i(x) = F_U^5(x)$$

olmaktadır. (3.106) ve (3.107) eşitliklerinden

$$C_0 = 5q_0 + 4\sum_{k=0}^{2} q_{2k+1} + \sum_{k=0}^{2} 4k(k+1)q_{2k}\,, \qquad C_1 = 5q_1 + 8\sum_{k=1}^{2} q_{2k} + \sum_{k=0}^{2} 8k(k+2)q_{2k+1}\,,$$

$$C_2 = 5q_2 + 12\sum_{k=1}^{2} q_{2k+1} + \sum_{k=0}^{1} 12k(k+3)q_{2k+2}\,, \quad C_3 = 5q_3 + 16\sum_{k=2}^{2} q_{2k} + \sum_{k=0}^{1} 16k(k+4)q_{2k+3}\,,$$

$$C_4 = 5q_4 + 20\sum_{k=2}^{2} q_{2k+1} \text{ ve } C_5 = 5q_5 \tag{4.78}$$

elde edilir. (4.78) eşitliklerinden

$$5q_0 + 4q_1 + 8q_2 + 4q_3 + 24q_4 + 4q_5 = 2.821340881270812$$

$$5q_1 + 8q_2 + 24q_3 + 8q_4 + 64q_5 = -0.29319271619799625 \tag{4.79}$$

$$5q_2 + 12q_3 + 48q_4 + 12q_5 = -2.340646941734552$$

$$5q_3 + 16q_4 + 80q_5 = 1.2791125376140553$$

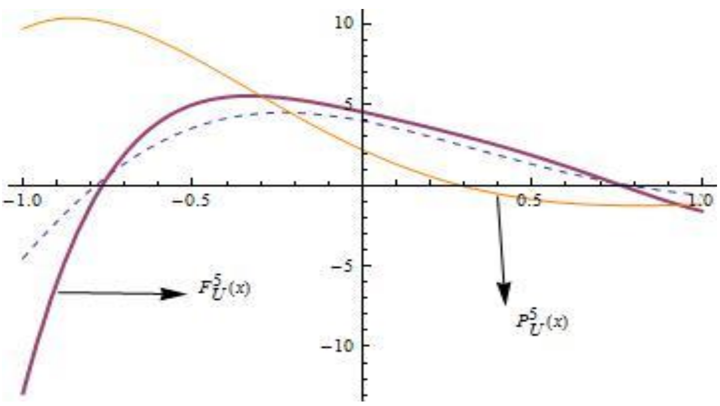
$$5q_4 + 20q_5 = -0.6079582595063046$$

$$5q_5 = 0.1869139579135437 \qquad (4.79a)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (4.79)-(4.79a) deki lineer denklem sisteminden $q_0 = 3.2643545711057373$, $q_1 = -3.879510539459742$, $q_2 = 0.78423290158148$, $q_3 = 0.5252908605421781$, $q_4 = -0.27112281823209605$ ve $q_5 = 0.037382791582708796$ bulunur. Bu değerler $P_U^5(x) = \sum_{i=0}^{5} q_i U_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_U^5(x) &= 3.2643545711057373 U_0(x) - 3.879510539459742 U_1(x) \\ &+ 0.78423290158148 U_2(x) + 0.5252908605421781 U_3(x) \\ &- 0.27112281823209605 U_4(x) + 0.037382791582708796 U_5(x) \end{aligned}$$

yaklaşım polinomu elde edilir.



Şekil 4.10. $f(x) = 4e^{-x}\cos(2x)$, $F_U^5(x)$ ve $P_U^5(x)$ in grafiği

3. $P_V^5(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(3.20) eşitliğinden $C_0 = 0.6506361502071977$, $C_1 = -1.7168112354776666$, $C_2 = -1.9300811952841572$, $C_3 = -0.28071376028345335$, $C_4 = 0.02887958423752293$ ve $C_5 = 0.051386974938202976$ olarak bulunmaktadır. $f(x) = 4e^{-x}\cos(2x)$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned} F_V^5(x) = {} & 0.6506361502071977V_0(x) - 1.7168112354776666V_1(x) \\ & -1.9300811952841572V_2(x) - 0.28071376028345335V_3(x) \\ & +0.02887958423752293V_4(x) + 0.051386974938202976V_5(x) \end{aligned}$$

şeklindedir. $y = \sum_{i=0}^{5} q_i V_i(x)$ seri açılımı (4.75) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{5} q_i V_i''(x) + 2\sum_{i=0}^{5} q_i V_i'(x) + 5\sum_{i=0}^{5} q_i V_i(x) = F_V^5(x)$$

olmaktadır. (3.112) ve (3.113) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} C_0 &= 5q_0 + 2\sum_{k=1}^{3} 2kq_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{2} 2kq_{2k} + \sum_{k=0}^{2} 4k(k+1)^2 q_{2k+1} + \sum_{k=0}^{2} 4k(k+1)q_{2k} \\ C_1 &= 5q_1 + 2\sum_{k=1}^{2}(2k+2)q_{2k} + 2\sum_{k=0}^{2} 2kq_{2k+1} + \sum_{k=0}^{1} 4k(k+2)(k+1)q_{2k+2} + \sum_{k=0}^{2} 4k(k+2)(k+1)q_{2k+1} \\ C_2 &= 5q_2 + 2\sum_{k=1}^{2}(2k+4)q_{2k+1} + 2\sum_{k=0}^{1} 2kq_{2k+2} + \sum_{k=0}^{1} 4k(k+3)(k+2)q_{2k+2} + \sum_{k=0}^{1} 4k(k+1)(k+3)q_{2k+3} \\ C_3 &= 5q_3 + 2\sum_{k=2}^{2}(2k+4)q_{2k} + 2\sum_{k=0}^{1} 2kq_{2k+3} + \sum_{k=0}^{1} 4k(k+4)(k+3)q_{2k+3} \\ C_4 &= 5q_4 + 2\sum_{k=1}^{1}(2k+8)q_{2k+3} \\ C_5 &= 5q_5 \end{aligned} \tag{4.80}$$

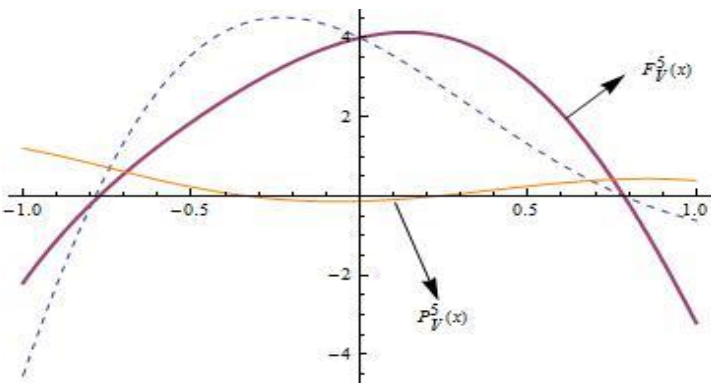
elde edilir. (4.80) eşitliklerinden

$$5q_0+4q_1+12q_2+24q_3+32q_4+84q_5=0.6506361502071977$$
$$5q_1+8q_2+28q_3+36q_4+104q_5=-1.7168112354776666$$
$$5q_2+12q_3+52q_4+48q_5=-1.9300811952841572$$
$$5q_3+16q_4+84q_5=-0.28071376028345335$$
$$5q_4+20q_5=0.02887958423752293$$
$$5q_5=0.051386974938202976 \tag{4.81}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (4.81) lineer denklem sisteminden $q_0=0.2829993100353205$, $q_1=0.08849899498767777$, $q_2=0.1605555035398624$, $q_3=-0.11573526591926771$, $q_4=-0.03533366310305779$ ve $q_5=0.010277394987640595$ bulunur. Bu değerler $P_V^5(x)=\sum_{i=0}^{5}q_iV_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}P_V^5(x)=&\,0.2829993100353205V_0(x)+0.08849899498767777V_1(x)\\&+0.1605555035398624V_2(x)-0.11573526591926771V_3(x)\\&-0.03533366310305779V_4(x)+0.010277394987640595V_5(x)\end{aligned}$$

yaklaşım polinomu elde edilir.



Şekil 4.11. $f(x)=4e^{-x}\cos(2x)$, $F_V^5(x)$ ve $P_V^5(x)$ in grafiği

4. $P_W^5(x)$ Yaklaşım Polinomunu Bulma

(3.26) eşitliğinden $C_0 = 0.6506361502071976$, $C_1 = 1.716811235477667$, $C_2 = -1.930081195284157$, $C_3 = 0.28071376028345296$, $C_4 = 0.02887958423752307$ ve $C_5 = -0.05138697493820213$ olarak bulunmaktadır. $f(x) = 4e^{-x}\cos(2x)$ fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned}F_W^5(x) = {} & 0.6506361502071976W_0(x) + 1.716811235477667W_1(x) \\ & -1.930081195284157W_2(x) + 0.28071376028345296W_3(x) \\ & +0.02887958423752307W_4(x) - 0.05138697493820213W_5(x)\end{aligned}$$

şeklindedir. $y = \sum_{i=0}^{5} q_i W_i(x)$ seri açılımı (4.75) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{5} q_i W_i''(x) + 2\sum_{i=0}^{5} q_i W_i'(x) + 5\sum_{i=0}^{5} q_i W_i(x) = F_W^5(x)$$

olmaktadır. (3.118) ve (3.119) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
C_0 &= 5q_0 + 2\sum_{k=1}^{3} 2kq_{2k-1} - 2\sum_{k=1}^{2} 2kq_{2k} - 2\sum_{k=0}^{3} 4k(k+1)^2 q_{2k+1} + \sum_{k=0}^{2} 4k(k+1)q_{2k} \\
C_1 &= 5q_1 + 2\sum_{k=1}^{2}(2k+2)q_{2k} - 2\sum_{k=0}^{2} 2kq_{2k+1} + \sum_{k=0}^{1} 4k(k+3)(k+2)q_{2k+2} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{2} 4k(k+2)(k+1)q_{2k+1} \\
C_2 &= 5q_2 + 2\sum_{k=1}^{2}(2k+4)q_{2k} - 2\sum_{k=0}^{1} 2kq_{2k+2} + \sum_{k=0}^{1} 4k(k+3)(k+2)q_{2k+2} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{1} 4k(k+1)(k+3)q_{2k+3} \\
C_3 &= 5q_3 + 2\sum_{k=2}^{2}(2k+4)q_{2k} - 2\sum_{k=0}^{1} 2kq_{2k+3} - \sum_{k=0}^{1} 4k(k+4)(k+3)q_{2k+3} \\
C_4 &= 5q_4 + 2\sum_{k=1}^{1}(2k+8)q_{2k+3} \\
C_5 &= 5q_5
\end{aligned} \tag{4.82}$$

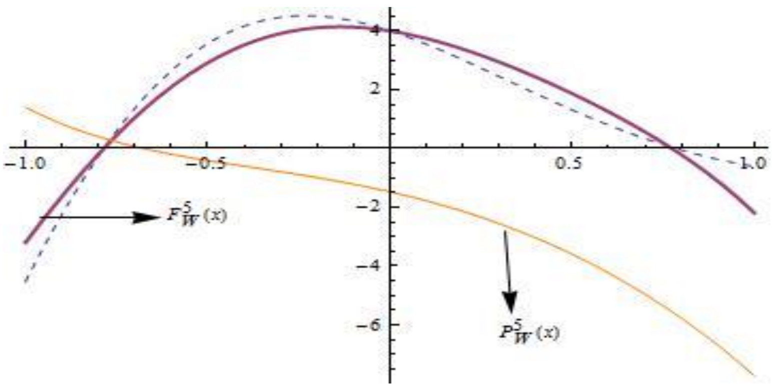
elde edilir. (4.82) eşitliğinden

$$5q_0+4q_1+4q_2-24q_3+40q_4-132q_5=0.6506361502071976$$
$$5q_1+8q_2-28q_3+60q_4-104q_5=1.716811235477667$$
$$5q_2+12q_3+44q_4-16q_5=-1.930081195284157$$
$$5q_3+16q_4-84q_5=0.28071376028345296$$
$$5q_4+20q_5=0.02887958423752307$$
$$5q_5=-0.05138697493820213 \tag{4.83}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (4.83) deki lineer denklem sisteminden $q_0=-0.3472008666175304$, $q_1=-1.618881624220455$, $q_2=-0.19177369846551162$, $q_3=-0.2665510734894809$, $q_4=0.04688549679806624$ ve $q_5=-0.010277394987640406$ bulunur. Bu değerler $P_W^5(x)=\sum_{r=0}^{5} q_i W_i(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$P_W^5(x)=-0.3472008666175304W_0(x)-1.618881624220455W_1(x)$$
$$-0.19177369846551162W_2(x)-0.2665510734894809W_3(x)$$
$$+0.04688549679806624W_4(x)-0.010277394987640406W_5(x)$$

yaklaşım polinomu elde edilir.



Şekil 4.12. $f(x)=4e^{-x}\cos(2x)$, $F_W^5(x)$ ve $P_W^5(x)$ in grafiği

BÖLÜM 5. SONUÇ

1. Üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomlarının türevleri ve x in kuvvetlerinin üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları cinsinden gösterimlerini veren eşitlikler tanımlanmıştır.

2. Üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları için rekürans bağıntılarına alternatif eşitlikler tanımlanmıştır.

3. Chebyshev seri açılımları, Chebyshev polinomlarının türev eşitlikleri ve x' in kuvvetlerinin Chebyshev polinomları cinsinden gösterimlerini veren eşitlikleri (3.27) de tanımlanan yüksek mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerde kullanılarak yüksek mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metotları sırasıyla (3.34)-(3.34a)-(3.34b)-(3.34c), (3.38)-(3.38a)-(3.38b), (3.42)-(3.42a)-(3.42b)-(3.42c)-(3.42d) ve (3.46)-(3.46a)-(3.46b)-(3.46c)-(3.46d) deki eşitlikler şeklinde elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitliklerin Örnek 4.2 de uygulaması yapılmıştır.

4. Chebyshev seri açılımları, Chebyshev polinomlarının türev eşitlikleri, Chebyshev polinomlarının rekürans bağıntılarına alternatif eşitlikleri ve x' in kuvvetlerinin Chebyshev polinomları cinsinden gösterimlerini veren eşitlikleri (3.47) de tanımlanan yüksek mertebeden değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerde kullanılarak yüksek mertebeden değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım metotları sırasıyla (3.52)-(3.52a)-(3.52b)-(3.52c)-(3.52d), (3.56)-(3.56a)-(3.56b)-(3.56c), (3.60)-(3.60a)-(3.60b)-(3.60c)-(3.60d)-(3.60e) ve (3.64)-(3.64a)-(3.64b)-(3.64c)-(3.64d)-(3.64e) deki eşitlikler şeklinde elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitliklerin Örnek 4.3 de uygulaması yapılmıştır.

5. Chebyshev seri açılımı ve Chebyshev polinomlarının birinci mertebeden türevleri (3.65) de tanımlanan birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerde kullanılarak birinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım polinomlarındaki katsayıları bulmak için sırasıyla (3.71)-(3.72), (3.78)-(3.79), (3.85)-(3.86) ve (3.92)-(3.93) deki eşitlikler elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitliklerin Örnek 4.4 de uygulaması yapılmıştır.

6. Chebyshev seri açılımı ve Chebyshev polinomlarının ikinci mertebeden türevleri (3.94) de tanımlanan ikinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerde kullanılarak ikinci mertebeden sabit katsayılı adi lineer diferansiyel denklemlerin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev yaklaşım polinomlarındaki katsayıları bulmak için sırasıyla (3.100)–(3.101), (3.106)-(3.107), (3.112)-(3.113) ve (3.3.118)-(3.119) deki eşitlikler elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitliklerin Örnek 4.5 de uygulaması yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Türker, Eyüp Sabri ve Can, Engin, Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Değişim Yayınları, 1997.

[2] Chebyshev, P. L., Théorie des Mécanismes Connus Sous le Nom de Parallélogrammes, Mémories Presentes Academie Imperiale des Science de St-Pétersbourg VII, (539-568), 1854.

[3] Lanczos, Cornelius, Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions, Journal of Mathematics and Physics Volume 17 Issue 1 (123-199), 1938.

[4] Clenshaw, C. W., The Numerical Solution of Linear Differantial Equations in Chebyshev Series, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.53 ,(134-149), 1957.

[5] Mason, J. C. ve Handscomb, D. C., Chebyshev Polynomials, Chapman&Hall/Crc Press LLC, 2003.

[6] Gautschi, Walter, On Mean Convergence of Extend Lagrange Interpolation, Journal of Computational and Applied Mathematics 43 (19-35), 1992.

[7] Fox, L. ve Parker, I. B., Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, 1968.

[8] Synder, Martin Avery, Chebyshev Methods in Numerical Approximation, N. J. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, 1966.

[9] Rivlin, Theodore J., The Chebyshev Polynomials, John Wiley & Sons Inc., 1974.

[10] http://www.mhtl.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap6.pdf, Erişim Tarihi: 11.02.2016.

[11] http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevDifferentialEquation.html, Erişim Tarihi: 24.04.2016.

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials, Erişim Tarihi: 24.04.2016.

[13] Benjamin, Arthur T. ve Walton, Daniel, Counting on Chebyshev Polynomials, Draft vol. 82 no. 2, April 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Ramazan Duran, 10.05.1986'da İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. İlk ve orta eğitimini Halit Ziya Uşaklıgil İlköğretim Okulu'nda 2000 yılında mezunolarak tamamladı. Lise eğitimini Yenibosna Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde 2004 yılında mezun olarak tamamladı. 2006 yılında başladığı Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2012 yılında bitirdi. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'de yüksek lisans programına kaydoldu.