T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-FIBONACCI SAYILARI VE (2,*n*)-TOR HALKALARININ JONES POLİNOMLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gizem ÇAYLAK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Ocak 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-FIBONACCI SAYILARI VE (2,*n*)-TOR HALKALARININ JONES POLİNOMLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gizem ÇAYLAK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 26.01.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. **Yusuf ATALAY**	**Doç. Dr.** **İsmet ALTINTAŞ**	**Yrd. Doç. Dr.** **Ö.Gökmen YILDIZ**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Gizem ÇAYLAK
26.01.2016

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a ve tez yazım sürecinde yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. sayın Kemal Taşköprü'ye teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, hayatım boyunca beni devamlı destekleyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\Delta_L(t)$	: Alexander polinomu
$\nabla_L(z)$	: Alexander-Conway polinomu
I	: Birim matris
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
K	: Düğüm diyagramı
$\in$	: Elemanıdır
$\{F_n\}$	: Fibonacci sayı dizisi
L^*	: Halkanın ayna görüntüsü
$lk(L)$	:Halkalanma sayısı
$\{F_{k,n}\}$	: *k*-Fibonacci sayi dizisi
$\varepsilon(p)$	: Kavşak işareti
$C(L)$	: Kavşak sayısı
A , B, C v.s.	: Matrisler
$\|M\|$	: M matrisinin determinantı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\sum$	: Toplam sembolü

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: k-Fibonacci sayıları, Fibonacci polinomları ve türevleri, Fibonacci özdeşlikleri, düğüm polinomu, (2,*n*)-tor halkası, Alexander-Conway polinomu, Jones polinomu.

İlk bölümde düğüm polinomları ve Fibonacci dizileri ile ilgili kısa bir literatür bilgisi verilmektedir. İkinci bölümde bazı temel kavram ve özellikler verilmektedir. Üçüncü bölümde *k*-Fibonacci sayı dizileri ve özellikleri ayrıntılı olarak incelenmektedir.

Dördüncü bölümde Fibonacci poinomları, beşinci bölümde Fibonacci polinomlarının türevleriyle elde edilen polinomlar ve bu polinomlardan üretilen sayı dizileri üzerine çalışılmaktadır.

Altıncı bölümde Fibonacci polinomları ile düğüm polinomları arasında ilişki kurmaya yönelik çalışmalar yapılmaktadır. Bu bölümde başlangıç şartları Fibonacci polinom dizisinin başlangıç şartlarıyla aynı olan genelleştirilmiş bir Fibonacci dizisi tanıtılmaktadır. Bu polinomdan yararlanılarak (2,*n*)-tor halkalarının Jones polinomlar dizisinin bir tekrarlama bağıntısını sağladığı ispatlandıktan sonra (2,*n*)-tor halkalarının Jones polinomlar dizisinin, Fibonacci benzeri özellikleri, matris temsilleri ve Fibonacci benzeri özdeşlikleri ispat edilmektedir. Sonuç olarak, (2,*n*)-tor halkalarının Jones polinomları, Fibonacci polinomlarının bir genellemesi olarak elde edilmektedir.

k-FIBONACCI NUMBERS AND ON JONES POLYNOMIALS OF (2,*n*)-TORUS LINKS

SUMMARY

Keywords: *k*-Fibonacci numbers, Fibonacci polynomial and their derivatives, Fibonacci identities, knot polynomial, (2,*n*)-torus link, Alexander Conway polynomial, Jones polynomial.

It has been given a short literature information about the knot polynomials and the Fibonacci sequences in the first chapter. Some fundamental concepts and properties have been given in the second chapter. *k*-Fibonacci sequence whether to give, properties of them have been discussed in detail in the third chapter.

The Fibonacci polynomial in the fourth chapter and the polynomials obtained from derivatives of the Fibonacci polynomial and the number sequences produced from these polynomial has been examined in the fifth chapter.

Studies to establish a relationship between knot polynomials and Fibonacci polynomial have been done in the sixth chapter. A generalized Fibonacci polynomial, which its initial conditions are the same as Fibonacci polynomial has been introduced in this chapter. By using this polynomial, the Jones polynomial of (2,*n*)-torus link has been expressed as a generalized Fibonacci polynomial. Firstly, it has been proved that the sequence of the Jones polynomials of (2,*n*)-torus link satisfy a recurrence relation. Then, it has been given Fibonacci-like properties, matrix representations and links. Consequently, the Jones polynomial of (2,*n*)-torus link has been obtained as a generalized Fibonacci polynomial.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Düğüm teorisi ile ilgili çalışmaların çoğu düğümü sınıflandırma problemiyle ilgilidir. Düğüm teorisinde hesaplanması zor fakat kolayca tanımlanabilen bazı önemli invaryantlar vardır. Bunlar sayısal, grupsal ve polinom invaryantları olarak sınıflandırılır. Bir düğümün veya halkanın bileşen sayısı, minimum kavşak sayısı, halkalanma sayısı, burulma sayısı, örgü sayısı, köprü sayısı ve renklenme sayısı gibi sayısal invaryantları [1-3], düğümün homotopi grubu, homoloji grubu, kristal ve kuantle gibi grupsal invaryantları [2-4] ile Alexander polinomu [5], Alexander-Conway polinomu [6], Jones polinomu [7,8], Kauffman polinomu, genelleştirilmiş Kauffman polinomu [2,9], Homfly polinomu [10] gibi polinom invaryantları vardır. 1985 yılına kadar düğüm teorisindeki temel çalışma alanı Seifert matrislerinden türetilmiş invaryantlardır [11,12]. Örneğin; Alexander polinomu, bir düğümün işareti v.s. 1985 yılında Jones tarafından yönlendirilmiş düğüm diyagramı için tek değişkenli bir Laurent polinomu tanımlandı [7]. Bu Laurent polinomu düğüm teorisinin yeni invaryantlarından biridir ve Jones polinomu olarak adlandırılır. Bu invaryant sayesinde düğüm teorisindeki teorik çalışmalar değişik düğüm dallarına uygulandı ve bunların çözümü ile yan çalışma alanları oluşturuldu öyle ki Jones polinomu diğer bilim dallarından yöntemler kullanılarak inşa edilebilmiştir[8]. Örneğin; istatiksel mekanik, kuantum grupları, graf teorisi v.s. Böylece düğüm teorisi, matematiğin içindeki ve dışındaki diğer alanlarla ilişkilendirildi. Dolayısıyla, birbiriyle ilişkili bilimler arasında bir araştırma alanı oluştu. Buralardan elde edilen sonuçlar sayesinde Kauffman polinomları ve Homfly polinomu gibi yeni invaryantlar elde edildi.

Diğer taraftan, günümüzde Fibonacci sayı dizileri ve onların benzerleri [12,13], sayılar teorisinde büyük öneme sahip olmasının yanı sıra, matematiğin diğer dallarında, fizik, mühendislik ve hatta sanat biliminin birçok dalında sıklıkla kullanılan ve uygulama alanı bulan dizilerdir. Fibonacci sayı dizilerinin bilim dünyasında bu kadar ilgi çekmesi üç nedenle ifade edilebilir. Bunların ilki, dizinin bazı terimleri doğada beklenmedik şekillerde ve yerlerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin; papatyadaki yaprakların sayısı, ayçiçeğindeki sarmalların sayıları Fibonacci sayılarıdır. Yapılan çalışmalarda bu tür sıralanmanın güneşi en verimli kullanmayı sağladığı, polen taşıyan böceklerin bu tür bir düzeni tercih ettiği sonucuna varılmıştır. İkincisi, ardışık iki Fibonacci sayısının oranının altın oran diye bilinen, insan vücudunda da bulunan, sanat ve mimaride güzel sonuçlar veren 1,61803… sayısına yakınsamasıdır. Üçüncüsü ise, matematik ve fizikteki uygulamalarıdır. İtalyan matematikçi E. Lucas 'Fibonacci sayı sisteminde kullanılan ardışık iki terimin toplamı bir sonraki terimi verir' kuralını, başlangıç şartlarını değiştirerek uygulamış ve Lucas sayı dizileri denilen yeni bir sayı sistemi tanımlamıştır [14-17]. Bu dizilere benzer olarak tanımlanan ve bu dizilerin genellemeleri olan başka sayı dizileri de vardır.

Aynı zamanda Fibonacci sayılarının genellemesi olan Fibonacci polinomları da modern bilimlerde yüksek seviyede ilgi çekmektedir. Fibonacci polinomları ilk olarak 1883 yılında E. C. Catalan [18]. 1963 yılında P. F. Bryd tarafından Fibonacci formunda yeni bir polinom tanımlanmıştır [19]. Literatürde Catalan'ın tanımladığı polinom Fibonacci polinomu ve Bryd'in tanımladığı polinom Pell polinomu olarak adlandırılmaktadır. Son yıllarda Fibonacci polinomları ve onların genelleştirilmeleri üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. [20-23] v.d.

Bu tezde k-Fibonacci sayı dizileri [13-15], bu dizilerin özellikleri, bazı önemli özdeşlikleri ve Fibonacci polinomları, onların türevleri çalışıldı. $(2,n)$, tor düğümlerinin Jones polinomu, genelleştirilmiş Fibonacci polinomu olarak tanımlandı ve bu polinomun bütün Fibonacci benzeri özellikleri ile Cassini, Catalan ve D'Ocagne gibi önemli Fibonacci özdeşlikleri ispat edildi.

Bu tez, sonuç ve öneriler bölümü hariç altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılan düğüm teorisinin bazı temel kavramları verildi.
Üçüncü bölümde, k-Fibonacci sayı dizileri çalışıldı. Bu sayı dizilerinin üreten fonksiyonu, Binet formülü, altın oran, ilk n teriminin toplamı, kısmi toplamları ve matris temsilleri verildi [13,17]. Dördüncü bölümde, Fibonacci polinom dizisi, üreten

fonksiyonu, Binet formülü, ardışık terimlerin asimptotik davranışı, Honsberger formülü, Cassini, Catalan ve D'Ocagne özdeşlikleri [17,24] ve bu Fibonacci polinom dizilerinin toplamı gibi özellikleri verildi. Ayrıca n. dereceden kuvvet polinomu, Fibonacci polinomlarının bir fonksiyonu olarak ifade edildi. Dördüncü bölümde Fibonacci poinomları ve sonraki bölümde Fibonacci polinomlarının türevleriyle elde edilen polinomlar [14,15] ve bu polinomlardan üretilen sayı dizileri üzerine çalışıldı. Aynı zamanda Fibonacci sayı dizileri ile türev polinomlarından elde edilen sayı dizileri arasındaki ilişkiler incelendi.

Beşinci bölümde Fibonacci polinomları ile düğüm polinomları arasında ilişki kurmaya yönelik çalışmalar yapıldı. Bu bölümde Alexander-Conway polinomunun tanımı ve bazı özellikleri verildi ve birkaç az geçitli düğümün Alexander-Conway polinomları hesaplandı. $(2,n)$-tor halkalarının Alexander polinomu Fibonacci polinomu gibi başlangıç şartları bilinen birtekrarlama bağıntısı olarak yazıldı. $(2,n)$-tor halkalarının Alexander polinomu Fibonacci polinomu gibi başlangıç şartları bilinen bir tekrarlama bağıntısı olarak yazıldı. Literatürde de çok iyi bilindiği gibi bu polinomların Fibonacci polinomları oldukları görüldü. Bu bölümde başlangıç şartları Fibonacci polinom dizisinin başlangıç şartlarıyla aynı olan genelleştirilmiş bir Fibonacci dizisi tanıtıldı. Bu polinom dizisinden yararlanılarak $(2,n)$-tor düğümlerinin Jones polinomlarının bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomu olarak ifade edildi. Bunun için önce $(2,n)$-tor düğümlerinin Jones polinomlar dizisinin bir tekrarlama bağıntısını sağladığı ispatlandı. Sonra $(2,n)$-tor düğümlerinin Jones polinomlar dizisinin bütün Fibonacci benzeri özellikleri, matris temsilleri ve Cassini, Catalan ile D'Ocagne benzeri özdeşlikleri ispat edildi. Sonuç olarak, $(2,n)$-tor düğümlerinin Jones polinomları, Fibonacci polinomlarının bir genellemesi olarak elde edildi.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Düğüm ve Halka

Tanım 2.1.1. $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1;\ x, y \in R\}$ birim çember olsun. S^1 in R^3 veya $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$ içine yerleştirilmesine bir *düğüm* denir. $n \in \mathbb{N}$ için n tane düğümün ayrık birleşimine bir halka denir [25].

Tanım 2.1.2. *K* ve *L* S^3 içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun Eğer *h(K)=L* olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir *h:* $S^3 \to S^3$ homeomorfizmi varsa *K* düğümü *L* düğümüne denktir denir [25,26].

Not 2.1.1. İki düğümün denkliği tanımı, S^3 içinde ki düğümler üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı, söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına bir düğüm tipi denir. .Denk iki düğüm aynı düğüm tipindedir.

Tanım 2.1.3. Yönlendirilmiş bir çember (veya bir üçgen) ile aynı tipte olan bir düğüme düğümlenmemiş (aşikar) düğüm denir. Halkalanmamış halkaya ise aşikar halka denir [27,28].

Tanım 2.1.4. $p : S^3 \to S^3$, $p(x,y,z) = (x,y,0)$ ile tanımlanan fonksiyona izdüşüm fonksiyonu denir.

Eğer *K*, S^3 içinde bir düğüm ise, *p* izdüşüm fonksiyonu altındaki resmi, *p(K), K* düğümünün *xy*- düzlemindeki izdüşümüdür.

Tanım 2.1.5. *K*, S^3 içinde bir düğüm ve *p*, yukarıda geçen izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, *n* tane (*n*>*1*) noktadan ibaret ise, *a* noktasına *p(K)* nın bir *n*-katlı noktası denir. Eğer *n=2* ise, *a* noktasına geçit noktası (çift katlı nokta) denir [25].

Tanım 2.1.6. Bir geçit noktası, *K* düğümüne ait iki noktanın görüntüsü olup, bu iki noktadan *z* koordinatı daha büyük olan bir üst geçit noktası ve diğerine alt geçit noktası denir [25].

Tanım 2.1.7. *K* bir düğüm ve *p* izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer, *p(K)* nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda geçit noktası ise ve hiçbir geçit noktası *K* düğümüne ait bir köşe noktasının *p* altında resmi değilse, *p(K)* ya *K* düğümünün regüler izdüşümü denir. Eğer *p(K)* izdüşümü regüler ise, *K* düğümüne uzayda regüler pozisyondandır denir [27].

Bir düğümün regüler izdüşümüne, o düğümün regüler diyagramı denir. Regüler diyagram; düğümün, uzayın yeteri kadar uzak ve uygun bir noktasından çizilen resmi gibidir [27].

Tanım 2.1.8. Regüler pozisyonda bulunan bir *K* düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı verilsin. *K* düğümünün herhangi alt geçit noktasından uzaklığı ε sayısından küçük olan noktaların kümesi *A* ise $p(K-A)$ kümesine *K* düğümünün normal diyagramı veya kısaca düğüm diyagramı denir [25,27].

Tanım 2.1.9. Bir *K* düğümünün $r: S^3 \to S^3$, $r(x,y,z) = (x,y,-z)$ ile tanımlanan yansıma fonksiyonu altındaki görüntüsüne, *K* düğümünün ayna görüntüsü denir. Yansıma fonksiyonu, uzayın yönlendirmesini tersine çeviren bir homeomorfizmdir [25].

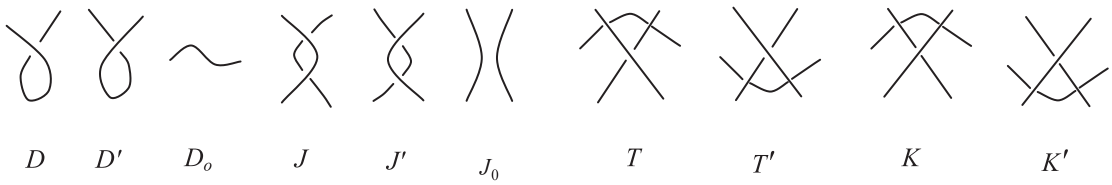
Tanım 2.1.10. Bir düğüm, ters işaretlisine denk ise tersinir düğüm denir. Bir düğüm, ayna görüntüsüne denk ise bu düğüme küresel düğüm denir [25].

2.2. Bazı Klasik Düğüm İnvaryantları

Tanım 2.2.1. İki düğümden biri, sonlu sayıda Reidemeister hareketiyle (Şekil 2.1) diğerine dönüşebiliyorsa bu düğümler aynı tiptendir denir. Yani sonlu sayıda Reidemeister hareketiyle birbirine dönüşebilen düğümler denktirler [28].
Bu tanıma göre, Reidemeister hareketleri ile değişmeyen özellikler, düğüm tipinin özellikleridir [28,29].

Tanım 2.2.2. II ve III. Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına regüler izotopi ve Reidemeister hareketlerinin üçü ile üretilen diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına kuşatan izotopi denir[28].

Böylece II. ve III. hareketler regüler izotopi invaryantı; I., II. ve III. hareketler kuşatan izotopi invaryantıdır [28].



Şekil 2.1. Reidemeister hareketleri: I. Hareket: $D \leftrightarrow D_0$ veya $D' \leftrightarrow D_0$;

II. Hareket: $J \leftrightarrow J_0$ veya $J' \leftrightarrow J_0$; III. Hareke: $T \leftrightarrow T'$ veya $K \leftrightarrow K'$.

Tanım 2.2.4. Bir K düğümünün herhangi bir diyagramındaki kavşakların minimum sayısına kavşak sayısı denir. Kavşak sayısı düğümün bir invaryantıdır [28,30].

Tanım 2.2.5. Bir düğüm diyagramı sağ el kuralına göre yönlendirilmiş ise işareti pozitif ve sol el yönlendirmesine göre yönlendirilmiş ile işareti negatiftir (Şekil 2.2).

$\varepsilon = 1$ $\quad\quad$ $\varepsilon = -1$

Şekil 2.2. Sağ-el ve sol-el yönlendirme

Tanım 2.2.6. $L = \{\alpha, \beta\}$, α ve β bileşenlerinden oluşan bir halka olsun. $lk(K) = lk(\alpha, \beta)$ halkalanma sayısı

$$lk(L) = lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\alpha \cap \beta$, α ile β (kendi kendini kesmeyen) geçitlerinin kümesini ve $\varepsilon(p)$ geçidin işaretini gösterir [28].

Tanım 2.2.7. K yönlendirilmiş bir düğüm diyagramı olsun. K düğümünün burulma sayısı $\omega(K)$,

$$\omega(K) = \sum_{p \in C(K)} \varepsilon(p)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $C(K)$, K diyagramındaki kavşakların sayısını gösterir [28].

2.3. Bazı Toplamsal Eşitlikler

Tanım 2.3.1. (a_n) bir dizi olsun.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

biçiminde bir kuvvet serisine (a_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Tanım 2.3.1. İki sayının toplamının üslü ifadesinin Binom açılımı açılımıdır. Temel binom açılımı, $n \in \mathbb{N}$ iken

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ binom katsayıları, n’nin k’lı kombinasyonudur ve

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

eşitliğini sağlar. Binomsal formüllerin değişik biçimleri vardır. Bunlardan biri genellikle tekrarlama bağıntıların sağlayan dizilerin Binet formüllerinin bulunmasında kullanılan

$$\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (xy)^k (x+y)^{n-k}$$

açık formülüdür [24].

BÖLÜM 3. *k*-FIBONACCI SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ

3.1. *k*-Fibonacci Sayıları

Tanım 3.1.1. Herhangi bir *k* pozitif reel sayısı için *k*-Fibonacci sayı dizisi $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, başlangıç şartları,

$$F_{k,0}=0, \quad F_{k,1}=1$$

olmak üzere ve $n\geq 1$ için,

$$F_{k,n+1}=kF_{k,n}+F_{k,n-1} \tag{3.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [13]. Bu sayı dizisi, klasik Fibonacci dizisi ve Pell dizisine [31] göre daha genel bir sayı dizisidir.

k-Fibonacci sayı dizisi bazı özel durumları şunlardır:

a. *k*=1 ise $F_0=0$, $F_1=1$, $n\geq 1$ için $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ve $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,1,2,3,5,...\}$ ile klasik Fibonacci dizisi elde edilir.
b. *k*=2 ise $P_0=0$, $P_1=1$, $n\geq 1$ için $P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$ ve $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,2,5,12,...\}$ ile Pell dizisi elde edilir.
c. *k*=3 ise $H_0=0$, $H_1=1$, $n\geq 1$ için $H_{n+1}=3H_n+H_{n-1}$ ve $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,3,10,33,...\}$ dizisi elde edilir.

k-Fibonacci sayı dizisinin ilk birkaç terimi Tablo 3.1.'de verildi.

Tablo 3.1. *k*-Fibonacci sayıları

$F_{k,1}=1$
$F_{k,2}=k$
$F_{k,3}=k^2+1$
$F_{k,4}=k^3+2k$
$F_{k,5}=k^4+3k^2+1$
$F_{k,6}=k^5+4k^3+3k$
$F_{k,7}=k^6+5k^4+6k^2+1$
$F_{k,8}=k^7+6k^5+10k^3+4k$
$\vdots$

3.2. *k*-Fibonacci Sayılarının Özellikleri

Tanım 3.2.1. $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *k*-Fibonacci sayı dizisinin (3.1) indirgeme bağıntısına karşılık gelen karakteristik denklemi,

$$\lambda^2=k\lambda+1 \tag{3.2}$$

ve bu karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1=\alpha$ ve $\lambda_2=\beta$ olmak üzere,

$$\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}, \qquad \beta=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olur. α pozitif kök, β ise negatif köktür, k>0 olduğundan,

$$\alpha<0<\beta\,,\ |\alpha|<|\beta|,\ \alpha.\beta=-1,\ \alpha+\beta=k \text{ ve } \alpha-\beta=\sqrt{k^2+4}$$

olur. Bazı özel durumlar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

a. $k=1$ için klasik Fibonacci dizisinin kökleri, $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak elde edilir α ile verilen kök, altın orandır [13].

b. $k=2$ için Pell dizisinin kökleri, $\alpha=1+\sqrt{2}$ ve $\beta=1-\sqrt{2}$ elde edilir. α ile verilen kök, gümüş orandır [13].

c. $k=3$ için $\left(H_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kökleri, $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ ve $\beta=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ elde edilir. α ile verilen kök bronz orandır [13].

Önerme 3.2.1. (Binet formülü) [16,24]. α ve β, (3.2) eşitliği ile verilen karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, n.inci k-Fibonacci sayısı,

$$F_{k,n}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{3.3}$$

ile verilir.

İspat. k-Fibonacci dizisinin genel terimi, C_1 ve C_2 katsayıları için,

$$F_{k,n}=C_1\alpha^n+C_2\beta^n$$

formda ifade edilebilir[14]. $n=0$ ve $n=1$ başlangıç değerleri için $C_1=\dfrac{1}{\alpha-\beta}=-C_2$ elde edilir ve (3.3) sağlanır.

Binet formülünün doğal bir sonucu olarak aşağıdaki özdeşlik verilebilir.

Önerme 3.2.3. (Catalan özdeşliği) k-Fibonacci sayı dizisine karşılık gelen karakteristik denklemin kökleri α,β ve $r,n\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

$$F_{k,n-r}F_{k,n+r}-F_{k,n}^2=(-1)^{n+1-r}F_{k,r}^2 \tag{3.4}$$

özdeşliği ile verilir.

İspat. Binet formülünü (3.4) ile verilen özdeşliğinin sol tarafına uygulayarak ve $\alpha.\beta=-1$ eşitliği göz önünde bulundurularak,

$$F_{k,n-r}F_{k,n+r}-F_{k,n}^2=\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}-\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2$$

$$=\frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n-r}\cdot\beta^{n+r}-\alpha^{n+r}\cdot\beta^{n-r}-\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\left(-(\alpha\beta)^n\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r-(\alpha\beta)^r+2(\alpha\beta)^n\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\left(\frac{\alpha^{2r}+\beta^{2r}}{(\alpha\beta)^r}-2\right)$$

$$=(-1)^{n+1-r}F_{k,r}^2$$

elde edilir. Böylece (3.4) özdeşliğinin ispatı tamamlanır.

Not 3.2.1. r=1 için (3.4) özdeşliği k-Fibonacci dizisi

$$F_{k,n-1}F_{k,n+1}-F_{k,n}{}^2=(-1)^n \tag{3.5}$$

şekilde klasik Fibonacci sayı dizisi için Catalan özdeşliğidir [13]. Benzer bir biçimde aşağıdaki özdeşlik ispatlanabilir.

Önerme 3.2.4. (d'Ocagne özdeşliği). $m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$ olmak üzere,

$$F_{k,n-1}F_{k,n+1}-F_{k,n}{}^2=(-1)^n \tag{3.6}$$

Aşağıdaki önermede k-Fibonacci dizisinin genel teriminin hesaplanması için başka bir açık ifade verilmektedir.

Önerme 3.2.5. $i,k,n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$ ve $\lfloor a \rfloor = \sup\{n \mid n \leq a\}$ olmak üzere,

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} \left(k^2+4\right)^i \tag{3.7}$$

İspat. (3.2) ifadesinden elde edilen α ve β değerleri için,

$$F_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n$$

$$\alpha^n - \beta^n = \left(\binom{n}{0}k^n + \binom{n}{1}k^{n-1}\left(\sqrt{k^2+4}\right) + \binom{n}{2}k^{n-2}\left(\sqrt{k^2+4}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\sqrt{k^2+4}\right)^n\right) -$$
$$\left(\binom{n}{0}k^n + \binom{n}{1}k^{n-1}\left(\sqrt{k^2+4}\right) + \binom{n}{2}k^{n-2}\left(\sqrt{k^2+4}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\sqrt{k^2+4}\right)^n\right)$$

Böylece

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} \left(k^2+4\right)^i$$

elde edilir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle (3.7) eşitliği elde edilir.

Bu eşitliğin bazı özel durumları şunlardır:

a. k=1 ise klasik Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} 5^i$$

biçiminde ifade edilir.

b. k=2 ise Pell dizisinin genel terimi,

$$P_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} 2^{n-1-2i} 8^i$$

ifadesi düzenlenerek

$$P_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} 2^i$$

elde edilir.

c. k=3 ise H_n dizisinin genel terimi,

$$H_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} \left(\frac{13}{9}\right)^i$$

biçiminde elde edilir.

Önerme 3.2.6. (k-Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranının limiti) $k,n \in \mathbb{N}$ ve r_1 (3.2) ile verilen karakteristik denklemin pozitif kökü olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{k,n+1}}{F_{k,n}} = \alpha. \tag{3.8}$$

İspat. (3.3) Binet formülünden,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{k,n}}{F_{k,n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n}{\dfrac{1}{\alpha} - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n \dfrac{1}{\beta}}$$ eşitliğinde $|\beta| < |\alpha|$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

olur ve böylece (3.8) eşitliği elde edilir.

Bu önermenin bir sonucu olarak klasik Fibonacci dizisi için α altın oran Pell dizisi için gümüş oran ve $\left(H_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için bronz orandır.

Önerme 3.2.7. (*k*-Fibonacci dizisinin genel terimi için 3.formül) i, *k*,*n*,*m* ∈ ℕ olmak üzere,

$$F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i}. \tag{3.9}$$

İspat. Tümevarımla $F_{k,2}$ tanımından, $n=2$ için

$$F_{k,2} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{1-2i} = \binom{1}{0} k^1 = k$$

doğruluğu açıktır. Bu formülün $F_{k,n-1}$ ve $F_{k,n}$ için doğru olduğu kabul edilsin. $F_{k,n+1}$ tanımından,

$$F_{k,n+1} = k.F_{k,n} + F_{k,n-1}$$

eşitliğinden ve tümevarım hipotezinden,

$$F_{k,n+1} = k\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-2-i}{2i} k^{n-2-2i}$$

$$= k^n + k\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-2-i}{i} k^{n-2-2i}$$

olur. Bu eşitliğin son teriminde *i* yerine *i*-1 alınırsa, sonuçta

$$F_{k,n+1} = k^n + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-2i} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-2i}$$

elde edilir.

$$\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} = \binom{m+1}{i}$$

olduğundan,

$$F_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} k^{n-2i}$$

bulunur.

k-Fibonacci fonksiyonu için verilen (3.9) özdeşliğinin özel durumları şunlardır:

a. $n \geq 2$ olmak üzere *k*=1 için klasik Fibonacci dizisinin genel terimi,

$$F_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i}$$

b. k=2 için Pell dizisinin genel terimi,

$$P_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} 2^{n-1-2i}$$

c. k=3 için $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimi,

$$H_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} 3^{n-1-2i}$$

Önerme 3.2.8. (k-Fibonacci dizisinin kısmi toplamlar dizisi). $i,j,k,n \in \mathbb{N}$, k-Fibonacci dizisinin ilk n+1 teriminin toplamı ,

$$S_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} F_{k,i} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\left(F_{k,n+1} - F_{k,n}\right) - \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \tag{3.10}$$

İspat. Binet formülünden $S_{k,n}$ şu şekilde ifade edilebilir;

$$S_{k,n} = \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\left(\alpha^i - \beta^i\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\alpha^i - \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\beta^i$$

farkı için $j = 1,2$, $\sum_{i=0}^{n} r_j^i$ kısmi toplamı ile,

$$S_{k,n} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} - \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}\right)$$

$$= \frac{-\alpha^n - \alpha^{n+1} - \beta + 1 + \beta^n + \alpha + \beta^{n+1} - 1}{(\alpha-\beta)(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

Böylece (3.10) eşitliği elde edilir.

3.3. *k*-Fibonacci Sayılarının Matris Temsili

Önerme 3.3.1. $k,n\in\mathbb{Z},\ n\geq 1$ için

$$\left(M^{k-1}N\right)^{n}=\begin{pmatrix} F_{k,n+1}-F_{k,n} & F_{k,n} \\ F_{k,n+1}-F_{k,n-1} & F_{k,n}+F_{k,n-1}\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

İspat. Tümevarımla verilir. $n=1$ için $F_{k,0}=0$ ve $F_{k,1}=1$ ve $F_{k,2}=k$,

$$M^{k-1}N=\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{k,2}-F_{k,1} & F_{k,1} \\ F_{k,2}-F_{k,0} & F_{k,1}+F_{k,0}\end{pmatrix}.$$

(3.11) eşitliği $n-1$ için doğru olsun. Bu durumda

$$\left(M^{k-1}N\right)^{n-1}=\begin{pmatrix} F_{k,n}-F_{k,n-1} & F_{k,n-1} \\ F_{k,n}-F_{k,n-2} & F_{k,n-1}+F_{k,n-2}\end{pmatrix}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned}\left(M^{k-1}N\right)^{n}=\left(M^{k-1}N\right)^{n-1}\left(M^{k-1}N\right)&=\begin{pmatrix} F_{k,n}-F_{k,n-1} & F_{k,n-1} \\ F_{k,n}-F_{k,n-2} & F_{k,n-1}+F_{k,n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} (k-1)F_{k,n}+F_{k,n-1} & F_{k,n} \\ kF_{k,n} & F_{k,n}+F_{k,n-1}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} F_{k,n+1}-F_{k,n} & F_{k,n} \\ F_{k,n+1}-F_{k,n-1} & F_{k,n}+F_{k,n-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur.

a. $k=1$ için klasik Fibonacci dizisi elde edilir. $F_0=0$, $F_1=1$ ve $n\geq 1$ olmak üzere $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ve

$$N^n=\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

klasik Fibonacci dizisinin matris temsili olur [8]. Belirtmek gerekir ki, N^n matrisi $Q=\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$ matrisi için,

$$Q^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

ile benzerdir.

b. $k=2$ için Pell dizisi elde edilir. $P_0=0$, $P_1=1$ ve $n\geq 1$ olmak üzere $P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$ ve

$$\left(MN\right)^n=\begin{pmatrix} P_{n-1} & P_n \\ 2P_n & P_n+P_{n-1} \end{pmatrix}$$

c. $k=3$ için $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi elde edilir. $H_0=0, H_1=1$ ve $n\geq 1$ olmak üzere $H_{n+1}=3H_n+H_{n-1}$ ve

$$\left(M^2N\right)^n=\begin{pmatrix} 3H_n+H_{n-1} & H_n \\ 3H_n & H_n+H_{n-1} \end{pmatrix}$$

olur.

3.4. $\left(\mathbf{M}^{\mathbf{k-1}}\mathbf{N}\right)^{\mathbf{n}}$ Matrisinin Determinant Özellikleri

Bu bölümde $T = M^{k-1}N$ alınacak ve k-Fibonacci dizileri için $T^n = \left(M^{k-1}N\right)^n$ matrisinden ve bu matrisin determinantından elde edilen özelliklerde yararlanılacaktır.

Önerme 3.4.1. (Catalan özdeşliği)

$$F_{k,n+r+1}F_{k,n+r-1} - F^2_{\ k,n+r} = (-1)^{n+r} \tag{3.12}$$

İspat. Önerme 3.3.1 ile verilen matriste n, $n+r$ ile değiştirilirse şu matris elde edilir.

$$\left(M^{k-1}N\right)^{n+r} = \begin{pmatrix} F_{k,n+r-1} - F_{k,n+r} & F_{k,n+r} \\ F_{k,n+r-1} - F_{k,n+r-1} & F_{k,n+r} - F_{k,n+r-1} \end{pmatrix}$$

ile verilen matrisin determinantı,

$$\left|\left(M^{k-1}N\right)^{n+r}\right| = F_{k,n+r+1}F_{k,n+r-1} - F^2_{\ k,n+r}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Böylece bu matrislerin determinantları sırasıyla $|M| = 1$, $|N| = -1$ olduğundan

$$\left|\left(M^{k-1}N\right)^{n+r}\right| = (-1)^{n+r}$$

olur. Bu determinant için özel durumlar şunlardır.

a. Eğer $k=1$ ve $r=0$ ise klasik Fibonacci fonksiyonları için Cassini ifadesi veya Simson formülü verilir.

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^{\,2}=(-1)^n \tag{3.13}$$

b. Eğer $k=2$ ve $r=0$ ise Pell dizisi için şu formül verilir.

$$P_{n+1}P_{n-1}-P_n^2=(-1)^n \tag{3.14}$$

c. Eğer $k=3$ ve $r=0$ ise $\{H_n\}$ dizisi için şu formül verilir.

$$H_{n+1}H_{n-1}-H_n^2=(-1)^n \tag{3.15}$$

BÖLÜM 4. FIBONACCI POLİNOMLARI

4.1. Fibonacci Polinomları Ve Özellikleri

Tanım 4.1.1. *k*-Fibonacci sayıları tanımında verilen k bir x reel değişkeni ise $F_{k,n} = F_{x,n}$ olur ve buna karşılık gelen Fibonacci polinomları,

$$F_{n+1}(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1, n = 0 \\ x, n = 1 \\ xF_n(x) + F_{n-1}(x), n > 1 \end{array} \right\} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımla Fibonacci polinomları tablo halinde aşağıdaki biçimde verilir.

Tablo 4.1. Fibonacci polinomları

n	$F_{n+1}(x)$
0	1
1	x
2	$x^2 + 1$
3	$x^3 + 2x$
4	$x^4 + 3x^2 + 1$
5	$x^5 + 4x^3 + 3x$
6	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$
7	$x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$
$\vdots$	$\vdots$

Tanım 4.1.2. Fibonacci polinomlarına karşılık gelen karakteristik denklem *k*-Fibonacci sayılarındaki gibi

$$\lambda^2 = k\lambda + 1 \tag{4.2}$$

ve bu denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} = \alpha \ , \ \lambda_2 = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} = -\alpha^{-1} \tag{4.3}$$

olmak üzere bu kökler ile katsayılar arasındaki bağıntılar Tanım 3.1.2 deki bağıntılarla benzer biçimdedir.

Önerme 4.1.1.(Binet Formülü) α, (4,2) karakteristik denklemin pozitif kökü olmak üzere *n.* Fibonacci polinomu için

$$F_n\left(x\right) = \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\alpha + \alpha^{-1}} \tag{4.4}$$

İspat. Önerme 3.2.1 de verildi.

Önerme 4.1.2. (Ardışık terimlerinin oranının asimptotik davranışı). α, (4.2) karakteristik denklemin pozitif kökü olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}\left(x\right)}{F_n\left(x\right)} = \alpha \tag{4.5}$$

İspat.Önerme 3.2.5. te verildi.

Önerme 4.1.3. $F_n(x)$ Fibonacci polinomlar dizisinin açık biçimi $n \geq 0$ olmak üzere

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} \tag{4.6}$$

İspat. Önerme 3.2.7 de tümevarımla ispatlandı.

Dikkat edilmelidir ki $F_{2n}(0) = 0$ için $x = 0$ tek reel köktür ve $F_{2n+1}(0) = 1$ için reel kök yoktur. Aynı zamanda $x = k \in \mathbb{N}$ için k -Fibonacci dizisinin elemanları elde edilir.

Önerme 4.1.4. $r, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere

$$F_{n+1}(x) = F_r(x).F_{n-(r-2)}(x) + F_{r-1}(x).F_{n-(r-1)}(x) \tag{4.7}$$

İspat. (4.7) ile verilen özdeşliğin sol tarafına Binet formülü uygulanırsa ispat tamamlanır.

Önerme 4.1.5. (Honsberger formülü). $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{m+n} = F_{m+1}(x) F_n(x) + F_m(x) F_{n-1}(x) \tag{4.8}$$

İspat. (4.7) özdeşliğinde $n - r + 2$ yerine n ve r yerine $m+1$ alınırsa ispat tamamlanır.

Özel olarak,

a. $m = n-1$ için çift dereceli polinomların bir ifadesi

$$F_{2n-1} = F_n^2(x) + F_{n-1}{}^2(x)$$

ile verilir.

b. $m=n$ için

$$F_{2n}(x)=F_{n+1}(x).F_n(x)+F_n(x).F_{n-1}(x)=F_n(x)\left(F_{n+1}(x)+F_{n-1}(x)\right)$$

ve $F_{n+1}(x)=x.F_n(x)-F_{n-1}(x)$ ile birlikte,

$$F_{2n}(x)=\frac{F_{2n+1}{}^2(x)-F_{2n}^2}{x} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) ile verilen özdeşlik $m=2n,3n,...$ değerleri için de uygulanabilir ve bir $r.n$ dereceli Fibonacci polinomu r ve n dereceli polinomların çarpımı olarak bulunur. Böylece,

$$\text{Ebob}\left[F_m(x),F_n(x)\right]=F_{Ebob}[m,n](x) \tag{4.10}$$

olur.

Öneme 4.1.6. (Catalan Özdeşliği). $n>r$ tamsayıları için

$$F_{n-r}(x)F_{n+r}(x)-F_n^2(x)=(-1)^{n-r-1}F_r^2(x) \tag{4.11}$$

İspat. (4.11) özdeşliğinin sol tarafına Binet formülünü uygulanırsa,

$$F_{n-r}(x)F_{n+r}(x)-F_n^2(x)=\frac{\alpha^{n-r}-(-1)^{n-r}.\alpha^{-n+r}}{\alpha+\alpha^{-1}}.\frac{\alpha^{n+r}-(-1)^{n+r}\alpha^{-n-r}}{\alpha+\alpha^{-1}}$$

$$-\left(\frac{\alpha^n-(-1)^n\alpha^{-n}}{\alpha+\alpha^{-1}}\right)^2=\frac{\alpha^{2n}-(-1)^{n+r}\alpha^{-2r}-(-1)^{n-r}\alpha^{2r}+\alpha^{-2n}}{\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)^2}$$

$$-\frac{\alpha^{2n}-2\left(-1\right)^{n}+\alpha^{-2n}}{\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)^{2}}=\frac{\left(-1\right)^{n-r-1}\alpha^{2r}+\left(-1\right)^{n-r-1}\alpha^{2r}-2\left(-1\right)^{n-1}}{\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)^{2}}$$

$$=\left(-1\right)^{n-r-1}\left(\frac{\alpha^{r}-\alpha^{-r}}{\alpha+\alpha^{-1}}\right)^{2}=\left(-1\right)^{n-r-1}F_{k,r}^{2}$$

elde edilir.

Catalan özdeşliğinin bazı özel sonuçları şu şekilde verilir.

a. r=1 için

$$F_{n-1}\left(x\right)F_{n+1}\left(x\right)-F_{n}^{\;2}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n}$$

Cassini veya Simon özdeşliği elde edilir.

b. n yerine $4n$ ve r yerine $2n$ alınırsa

$$F_{2n}\left(x\right)F_{6n}\left(x\right)-F_{4n}^{\;2}\left(x\right)=\left(-1\right)^{2n-1}F_{2n}^{2}\left(x\right),$$

$$F_{2n}\left(x\right)F_{6n}\left(x\right)+F_{2n}^{\;2}\left(x\right)=F_{4n}^{\;2}\left(x\right)$$

veya

$$F_{2n}\left(x\right)\left(F_{6n}\left(x\right)+F_{2n}\left(x\right)\right)=F_{4n}^{2}\left(x\right)$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliğin sol tarafı tam karedir.

c. n yerine $2n+r$ alınırsa,

$$F_{2n}\left(x\right)F_{2n+2r}^{\;2}\left(x\right)+F_{r}^{2}\left(x\right)=F_{2n+r}^{2}\left(x\right)$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliğin sol tarafı da bir tam karedir.

$F_n(x)$ polinomunda $x=1$ ise $F_n(x)=F_n$ elde edilir ve böylece $F_1(1)=F_2(1)=1$ ve $\{F_{2n},F_{2n+2},F_{2n+4},4F_{2n}F_{2n+2}F_{2n+3}\}$ kümesi Diophantine dörtlüdür [8] ve bu kümenin herhangi iki elemanının çarpımının 1 fazlası bir tam karedir. Örneğin,

$$F_{2n+1}{}^2=F_{2n}F_{2n+2}+1\ ,\ F_{2n}F_{2n+4}+1=F_{2n+2}{}^2$$

olduğu açıktır.

Önerme 4.1.7. (Genel bilineer formül). $a+b=c+d$ şartını sağlayan $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ için

$$F_a(x)F_b(x)-F_c(x)F_d(x)=(-1)^r\left(F_{a-r}(x)F_{b-r}(x)-F_{c-r}(x)F_{d-r}(x)\right) \tag{4.12}$$

İspat. $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ için $a+b=c+d$ ile Q bir kare matris ise $Q^{a+b}=Q^{c+d}$ olur. $Q=\left(M^{k-1}N\right)^n$ olarak alınırsa bu matris, Fibonacci polinomları için

$$Q=\left(M^{k-1}N\right)^n=\begin{pmatrix} F_{n+1}(x)-F_n(x) & F_n(x)\\ xF_n(x) & F_n(x)-F_{n-1}(x)\end{pmatrix}$$

formunda yazılabilir. $Q^a.Q^{b-1}=Q^c.Q^{d-1}$ olduğundan (4.11) özdeşliğinde $r=1$ için,

$$F_a(x)F_b(x)-F_c(x)F_d(x)=(-1)\left[F_{a-1}(x)F_{b-1}(x)-F_{c-1}(x)F_{d-1}(x)\right]$$

ve bu işlem r defa tekrar edilirse (4.12) elde edilir.

Sonuç 4.1.1. (d'Ocagne özdeşliği). $n\le m$ koşulunu sağlayan $n,m\in\mathbb{Z}$ için

$$F_{n+1}(x)F_m(x)-F_n(x)F_{m+1}(x)=(-1)^{n-1}F_{m-n}(x) \tag{4.13}$$

İspat. (4.12) özdeşliğinde $a=n+1$, $b=m$, $c=n$, $d=m+1$ ve $r=n-1$ alınırsa ispat tamamlanır.

Binet formülü ilk n Fibonacci polinomun toplamını kolay bir yolla ifade etmek için iyi bir yöntemdir.

Önerme 4.1.8. İlk n Fibonacci polinom toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x)=\frac{F_{n+1}(x)+F_n(x)-1}{x} \tag{4.14}$$

biçimindedir.

4.2. x^n Polinomunun Fibonacci Polinomlarının Bir Fonksiyonu Olarak İfadesi

Fibonacci polinomları için bir denklem sistemi

$$F=\left(F_1(x),F_2(x),F_3(x),\ldots\right)^T,\ X=\left(1,x,x^2,x^3,\ldots\right)^T$$

olmak üzere $F=B.X$ matris formunda yazılabilir ve bu matrisin satırları ise Fibonacci polinomlarının açılımındaki x'in artan kuvvetlerinin katsayılarına göre düzenlenmiş bir alt üçgen matristir.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 5 & 0 & 1 & \\ 0 & 4 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Belirtmek gerekir ki B matrisinin sıfırdan farklı girişleri Pascal üçgeninin köşegenlerini oluşturur ve aynı satırdaki elemanların toplamı klasik Fibonacci dizisini verir. Ayrıca B matrisi tersinirdir ve tersi

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & 0 & 1 & & & & \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 5 & 0 & -4 & 0 & 1 & & \\ -5 & 0 & 9 & 0 & -5 & 0 & 1 & \\ 0 & -14 & 0 & 14 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Böylece x^n, Fibonacci polinomlarının lineer birleşimi olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} 1 &= F_1(x) \\ x &= F_2(x) \\ x^2 &= F_3(x) - F_1(x) \\ x^3 &= F_4(x) - 2F_2(x) \\ x^4 &= F_5(x) - 3F_3(x) + 2F_1(x) \\ x^5 &= F_6(x) - 4F_4(x) + 5F_2(x) \\ x^6 &= F_7(x) - 5F_5(x) + 9F_3(x) - 5F_1(x) \\ x^7 &= F_8(x) - 6F_6(x) + 14F_4(x) - 14F_2(x) \end{aligned}$$

Bu açılımlar, Fibonacci polinomları için Zeckendorf Teoreminin [14] bir versiyonu olan aşağıdaki teoremde kapalı formda verildi. Zeckendorf Teoremi, “her tamsayı ardışık tamsayıların toplamı biçiminde tek türlü yazılabileceğini” ifade eder. O halde, $i, r \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}$, $e_i = 0, e_i = 1$ ve $e_i.e_{i+1} = 0$ olmak üzere, Fibonacci sayıları,

$$n = \sum_{i=1}^{r} e_i F(i)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 4.2.1. $n \in \mathbb{Z}$ $n \geq 1$ için x^{n-1}, Fibonacci polinomunun lineer birleşimi olarak

$$\binom{n}{-1} = 0 \text{ ile } x^{n-1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^i \left[\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1} \right] F_{n-2i}(x) \tag{4.15}$$

biçiminde yazılır.

İspat. Tümevarımla ispatlayalım. $n = 1$ için (4.15) sağlanır. Kabul edelim ki (4.15) eşitliği $n-1$ den küçük veya eşit olan her tamsayı için doğru olsun. Bu durumda,

$$x^{n-2} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} \right] F^{n-2i}(x)$$

olur. Bu eşitlik x ile çarpılırsa ve $x.F_{n-2i-1}(x) = F_{n-2i}(x) - F_{n-2-2i}(x)$ olduğundan eşitliğin 2.terimden itibaren tüm terimler sıfır olur ve her n için ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1. Her $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinomu Fibonacci polinomlarının bir lineer birleşimi olarak tek şekilde yazılır.

BÖLÜM 5. FIBONACCI POLİNOMLARININ TÜREVLERİ

Bu bölümde Fibonacci polinomlarının türevlerinden elde edilen diziler çalışılacaktır. $x = 1, 2, 3, ...$ tamsayıları için tamsayı dizileri üretilecektir. Bu dizilerin birkaç özelliği ve Fibonacci polinomlarıyla onların türevleri arasındaki ilişkiler ispatlanacaktır.

5.1. Fibonacci Polinomlarının Türevleriyle Elde Edilen Polinomlar

Fibonacci polinomlarının türevleri aşağıda verildi.

$$F_1'(x) = 0$$
$$F_2'(x) = 1$$
$$F_3'(x) = 2x$$
$$F_4'(x) = 3x^2 + 2$$
$$F_5'(x) = 4x^3 + 6x$$
$$F_6'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 3$$
$$F_7'(x) = 6x^5 + 20x^3 + 12x$$
$$F_8'(x) = 7x^6 + 30x^4 + 30x^2 + 4$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

Türev polinomlarının yalnızca katsayılarını düşünerek ikili üçgen oluşturulabilir (bkz.Tablo 5.1).

Bu üçgenin önemli bir özelliği şudur. İki alterne satırın (örneğin 5.satır ve 7.satır birbirine alternedir. Çünkü 5.satırdan 7.satıra geçilerek aradaki 6.satır atlanmıştır) elemanlarının toplanması bulunan sonucun ikinci alterne satırın satır numarasına bölünmesiyle elde edilen sayı o sıradaki Fibonacci sayısına karşılık gelir. Örneğin; 5.satır ve 7.satır elemanlarını toplayarak 7'ye bölersek $F_7(1) = 13$ elde edilir.

Türev Pascal 2-üçgeninin terimlerinin tekrar düzenlenmesiyle yarı-köşegen kısımda bulunan elamanlarının satır olarak belirlenerek yeni bir üçgen oluşur (Tablo 5.2).

Tablo 5.2.'de yarı-köşegen üçgenin i. satırı yine i ile bölünürse klasik Pascal üçgeni elde edilir.

Tablo 5.1. Türev Pascal 2-üçgeni

1					1				
2					2				
3				3		2			
4				4		6			
5			5		12		3		
6			6		20		12		
7		7		30		30		4	
8		8		42		60		20	
9	9		56		105		60		5
10	10		72		168		140		30

Tablo 5.2 Yarı-köşegen üçgen ve Pascal üçgeni

1					1										1				
2				2		2								1		1			
3			3		6		3			$\rightarrow$			1		2		1		
4		4		12		12		4				1		3		3		1	
5	5		20		30		20		5		1		4		6		4		1

Ayrıca Tablo 5.1'deki i.ci anti-köşegenin her bir elemanını i ye bölünürse aşağıdaki Tablo 5.3 elde edilir. Bu tablodaki üçgen, ilk anti-köşegeni hariç Pascal üçgeniyle aynıdır.

Tablo 5.3 Anti-köşegen Pascal 2-üçgenleriyle elde edilen türevler

1					1		
2					2		
3				3		1	
4				4		3	
5			5		6		1
6			6		10		4
7		7		15		10	
8		8		21		20	
9	9		28		35		15
10	10		36		56		35

Tekrar türev alınırsa, Fibonacci polinomlarının ikinci türevleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F_1''(x) = 0$$

$$F_2''(x) = 0$$

$$F_3''(x) = 2$$

$$F_4''(x) = 6x$$

$$F_5''(x) = 12x^2 + 6x$$

$$F_6''(x) = 20x^3 + 24x$$

$$F_7''(x) = 30x^4 + 60x^2 + 12''$$

$$F_8''(x) = 42x^5 + 120x^3 + 60x$$

... ...

Bu türevlerdeki katsayılar tekrar üçgensel biçimde yazılabilir (bkz.Tablo 4.4. sol kısım). Bu üçgende *i*.anti-köşegenin her bir elemanını *i* ye bölünürse Tablo 4.4. ün sağ kısmındaki üçgen elde edilir. Bu üçgen, ilk iki anti-köşegeni hariç Pascal 2-üçgenidir.

Tablo 5.4. İkinci türev Pascal 2-üçgeni

1			2						1		
2			6						3		
3		12		6		$\rightarrow$		6		1	
4		20		24				10		4	
5	30		60		12		15		10		1
6	42		120		60		21		20		5

İkinci türev Pascal-2-üçgeninin terimlerini, yukarıda birinci türevde olduğu gibi yeniden düzenlenirse yine bir klasik Pascal üçgeni elde edilir.(bkz.Tablo 5.5). Bu düşünce, Fibonacci polinomunun her mertebeden türevi için geçerlidir.

Tablo 5.5. İkinci türevden elde edilen üçgen ve Pascal üçgeni

1					2										1				
2				6		6								1		1			
3			12		24		12			$\rightarrow$			1		2		1		
4		20		60		60		20				1		3		3		1	
5	30		120		180		120		30		1		4		6		4		1

5.2. Fibonacci Polinomlarının Türevlerinden Elde Edilen Sayı Dizileri

Bir önceki kesimde x tamsayısının değerleri değiştirilip, Fibonacci polinomlarının türevlerinde kullanılarak farklı sayısal diziler elde edilebilir. Örneğin, birinci türev için,

$$\left\{F_n'(1)\right\} = \{0,1,2,5,20,38,71,130,235,\ldots\}$$

$$\left\{F_n'(2)\right\} = \{0,1,4,14,44,131,376,1052,2888,7813,\ldots\}$$

$$\left\{F_n'(3)\right\} = \{0,1,6,29,126,516,2034,7807,29832,\ldots\}$$

$$\left\{F_n'(4)\right\} = \{0,1,8,50,280,1475,7472,38636,17800,\ldots\}$$

dizileri elde edilir. $\left\{F_n'(x)\right\}$ polinomları için verilen şema daha yüksek mertebeden türev dizilerinin oluşturulması için kullanılabilir. Örneğin 2.türev için,

$$\left\{F_n''(1)\right\} = \{0,0,2,6,18,44,102,222,466,948,\ldots\}$$
$$\left\{F_n''(2)\right\} = \{0,0,2,12,54,208,732,2424,7684,23568,\ldots\}$$
$$\left\{F_n''(3)\right\} = \{0,0,2,18,114,612,2982,13626,59474,\ldots\}$$
$$\left\{F_n''(4)\right\} = \{0,0,2,24,198,1376,8652,50928,286036,\ldots\}$$

dizileri elde edilir. Ayrıca 3.türev için,

$$\left\{F_n'''(1)\right\} = \{0,0,0,6,24,84,240,360,1536,3564,\ldots\}$$
$$\left\{F_n'''(2)\right\} = \{0,0,0,6,48,264,1200,4860,18192,\ldots\}$$
$$\left\{F_n'''(3)\right\} = \{0,0,0,6,72,564,3600,20310,105408,\ldots\}$$
$$\left\{F_n'''(4)\right\} = \{0,0,0,6,96,984,8160,59580,399264,\ldots\}$$

dizileri elde edilir.

Önerme 5.2.1. (Ardışık terimlerin oranının asimptotik davranışı).

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}(x)}{F_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{F'_{n+1}(x)}{F'_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{F''_{n+1}(x)}{F''_n(x)} = \ldots = \alpha$$

olur. Fakat, α (metalik orana) yakınsama derecesi türevin mertebesi arttıkça azalır. Örneğin, $k=3$ ve $n=9$ için ilk sıfır değerli terimler hariç düşünülürse,

$$\sigma_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3,3027$$

bronz oran olmak üzere,

$$\frac{F_{10}(3)}{F_9(3)} = \frac{42837}{12970} = 3,3027\,,\quad \frac{F_{10}'(3)}{F_9'(3)} = \frac{108923}{29382} = 3,7071\,,\quad \frac{F_{10}'''(3)}{F_9'''(3)} = \frac{514956}{105408} = 4,8853$$

türevin mertebesi arttıkça metalik orana yakınsama oranı azalmaktadır.

5.3. Fibonacci Dizisi İle Türev Dizisi Arasındaki Bağıntılar

Fibonacci dizisi ile türev dizisi arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

Önerme 5.3.1.

$$F_n'(x) = \frac{n.F_{n+1}(x) - xF_n(x) + nF_{n-1}(x)}{x^2+4} \tag{5.1}$$

İspat. $F_n(x) = \dfrac{\alpha^n + \alpha^{-n}}{\alpha + \alpha^{-1}}$ Binet formülünde türev alınırsa,

$$F_n'(x) = n\frac{\alpha^{n-1} - (-\alpha)^{-n-1}}{\alpha + \alpha^{-1}}\alpha' - \frac{\alpha^n - (-\alpha)^n}{(\alpha+\alpha^{-1})^2}\left(1-\alpha^{-2}\right)\alpha'$$

elde edilir. $\alpha = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$,

$$\alpha' = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{\alpha}{\alpha+\alpha^{-1}}$$

ve

$$1-\alpha^{-2} = 1-\left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)^2 = \frac{x}{\alpha}$$

olduğundan,

$$F_n'(x) = n\frac{\alpha^n+\alpha^{-n}}{\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)^2} - \frac{\alpha^n-(-\alpha)^{-n}}{\alpha+\alpha^{-1}} \frac{x}{\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)^2}$$

$$= n\frac{\alpha^n+(-\alpha)^{-n}}{\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)^2} - \frac{xF_n(x)}{\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)^2}$$

olur. Diğer yandan,

$$F_{n+1}(x)+F_{n-1}(x) = \frac{\alpha^{n+1}-(-\alpha)^{-n-1}}{\alpha+\alpha^{-1}} + \frac{\alpha^{n-1}-(-\alpha)^{-n+1}}{\alpha+\alpha^{-1}}$$

$$= \left[\alpha^{n-1}\left(\alpha^2+1\right)-(-\alpha)^{-n-1}\left(1+\alpha^2\right)\right]$$

$$= \alpha^n+(-\alpha)^{-n}$$

elde edilir ve birkaç cebirsel işlemden sonra ispat tamamlanır.

$F_{n+1}(x) = xF_n(x)+F_{n-1}(x)$ olduğundan (4.1) bağıntısı

$$F_n'(x) = \frac{x(n-1)F_n(x)+2F_{n-1}(x)}{x^2+4} \tag{5.2}$$

Özel olarak (5.2) bağıntısı x =1 için,

$$F_n'(1) = \frac{(n-1)F_n+2nF_{n-1}}{5}$$

elde edilir.

Önerme 5.3.2. $F_1'(x)=0$ iken $n\geq 1$ için,

$$F_{n+1}'(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(n-2i)\binom{n-i}{i}x^{n-1-2i} \tag{5.3}$$

ile verilir.

İspat. (4.6) eşitliğinin türevi alınırsa (5.2) eşitliği elde edilir.

Önerme 5.3.3. $n=1,2$ için $F_n''(x)=0$, $n\geq 2$ için,

$$F_{n+1}''(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(n-2i)(n-1-2i)\binom{n-i}{i}x^{n-2-2i} \tag{5.4}$$

İspat. (5.2) eşitliğinde türev alınırsa (5.3) eşitliği elde edilir.

Daha yüksek mertebeden türevler için de benzer eşitlikler elde edilebilir.

Önerme 5.3.4 $F_1'(x)=0$ ve $n>1$ için,

$$F_n'(x)=\sum_{i=1}^{n-1}F_i(x)F_{n-i}(x) \tag{5.5}$$

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $F_2'(x)=F_1(x)F_1(x)=1$ olduğundan ispat $n=2$ için açıktır. $k\leq n$ olmak üzere (5.5) eşitliği doğru olsun. Bu durumda,

$$F_{n-1}'(x)=\sum_{i=1}^{n-2}F_i(x)F_{n-1-i}(x) \quad \text{ve} \quad F_n'(x)=\sum_{i=1}^{n-1}F_i(x)F_{n-i}(x)$$

yazılır. $F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$ eşitliğinde türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
F'_{n+1}(x) &= F_n(x) + xF_n'(x) + F_{n-1}'(x) \\
&= F_n(x) + x\sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)F_{n-i}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} F_i(x)F_{n-1-i}(x) \\
&= F_n(x) + xF_{n-1}(x)F_1(x) + x\sum_{i=1}^{n-2} F_i(x)F_{n-1-i}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} F_i(x)F_{n-1-i}(x) \\
&= F_n(x) + xF_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} F_i(x)\left[xF_{n-i}(x) + F_{n-1-i}(x)\right] \\
&= F_n(x)F_1(x) + F_{n-1}(x)F_2(x) + \sum_{i=1}^{n-2} F_i(x)F_{n+1-i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i(x)F_{n+1-i}(x)
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca (5.1) ve (5.5) eşitlikleri ile birlikte, $n > 1$ için,

$$F_n'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)F_{n-i}(x)$$

$$= \frac{nF_{n+1}(x) - xF_n(x) + nF_{n-1}(x)}{x^2+4}$$

$$= \frac{n.\left(xF_n(x) + F_{n-1}(x)\right) - xF_n(x) + nF_{n-1}(x)}{x^2+4}$$

$$= \frac{x(n-1)F_n(x) + 2nF_{n-1}(x)}{x^2+4}$$

olur. Bu, $x = 1$ için Fibonacci sayılarına karşılık gelen formüldür.

5.3.5. *k*-Fibonacci dizileri için üreten fonksiyonlar

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx-x^2}$$

biçimindedir.

İspat. *k*-Fibonacci dizileri üreten fonksiyonların kuvvet seri açılımının katsayılarıdır. *k*-Fibonacci sayıları $f_k(x)$ analitik fonksiyonlarının Taylor seri açılımının katsayıları olsunlar. Bu durumda *k*-Fibonacci sayıları için $f_k(x)$ fonksiyonları üreten fonksiyonlardır. Böylece,

$$f_k(x) = F_{k,0} + F_{k,1}x + F_{k,2}x^2 + \ldots + F_{k,n}x^n + \ldots$$

ve

$$kxf_k(x) = kF_{k,0}x + kF_{k,1}x^2 + kF_{k,2}x^3 + \ldots + kF_{k,n}x^{n+1} + \ldots$$

$$x^2 f_k(x) = F_{k,0}x^2 + F_{k,1}x^3 + F_{k,2}x^4 + \ldots + F_{k,n}x^{n+2} + \ldots$$

Buradan, $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ ve $F_{k,i} = kF_{k,i-1} + F_{k,i-2}$ ile,

$$(1-kx-x^2)f_k(x) = x$$

elde edilir.

Böylece $\left\{F_{k,n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri için üreten fonksiyon,

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx-x^2}$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 6. DÜĞÜM POLİNOMLARINA UYGULAMA

Bir düğüm polinomu, düğüm tipini belirleyen bir invaryanttır [28]. İlk düğüm polinomu Alexander polinomudur. L yönlendirilmiş bir düğüm (veya halka) olsun. Alexander polinomu $\Delta_L(t)$, tek değişkenli bir polinomdur. Alexander polinomunu tanımlamanın değişik yolları vardır. Burada Conway versiyonu kullanılacaktır. En son keşfedilen tek değişkenli önemli bir düğüm polinomu da Jones polinomudur. Bu bölümde özellikle Jones polinomunun Fibonacci özellikleri verilecektir.

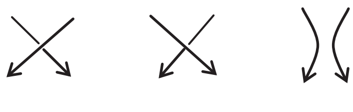
6.1. Alexander-Conway Polinomu

Tanım 6.1.1. L bir yönlendirilmiş halka (veya düğüm) diyagramı olsun. Alexander-Conway polinomu, $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}\left[z, z^{-1}\right]$, tek değişkenli bir Laurent polinomudur [6]. Halkanın bir kuşatan izotopi invaryantıdır [28] ve aşağıdaki aksiyomları sağlar.

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_O}(z) \tag{6.1}$$

$$\nabla_O(z) = 1$$

burada L_+, L_- ve L_O Şekil 6.1 de verilen skein diyagramlarıdır ve O, düğümlenmemiş düğümün herhangi bir diyagramıdır.



L_+ $\quad L_-$ $\quad L_O$

Şekil 6.1. Skein diyagramları

Alexander-Conway polinomu ile Alexander polinomu [5] arasında

$\nabla(t) = \nabla(t^{1/2} - t^{-1/2})$

ilişkisi vardır [6]. Alexander-Conway polinomunun bazı özellikleri şunlardır [27].

a. $O^n = \left(O, O, O, \ldots, O\right)$ n-bileşenli aşikar düğümün ayrık birleşimi olmak üzere,

$\nabla_{O^n}(z) = \text{O}$

b. L^*, L halka diyagramının ayna görüntüsü ise,

$\nabla_{L^*}\left(z\right) = \nabla_L\left(z\right)$

c. $L = L_1 \# L_2$ L_1 ve L_2 halkalarının bağlantılı toplamı ise,

$\nabla_L(z) = \nabla_{L_1}(z)\nabla_{L_2}(z)$

Alexander-Conway polinomunu bulurken kolaylık açısından (6.1) bağıntısını,

$$\nabla_{L_+}\left(z\right) = z\nabla_{L_o}\left(z\right) + \nabla_{L_-}\left(z\right) \tag{6.2}$$

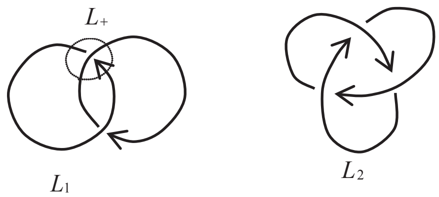
$$\nabla_{L_-}\left(z\right) = -z\nabla_{L_o}\left(z\right) + \nabla_{L_+}(z) \tag{6.3}$$

ağaç diyagramı şeklinde yazabiliriz.

Örnek 6.1.1. L_1 ve L_2, Şekil 6.2'de çizilen iki bileşenli halka ve yonca yaprağı düğümünün yönlendirilmiş diyagramları olsun. Bu diyagramların Alexander-Conway polinomları (6.2) bağıntısından sırasıyla

$\nabla_{L_1}(z) = z$ ve $\nabla_{L_2}(z) = z^2 + 1$

olarak bulunur.



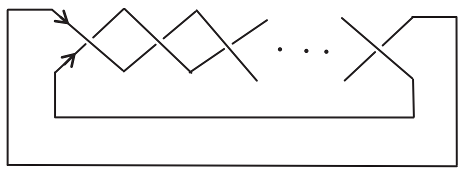
Şekil 6.2. Bazı az geçitli düğüm diyagramları

Teorem 6.1.1. L_n, $(2,n)$-tor halkasının yönlendirilmiş diyagramı olsun. (Burada 2, ip sayısını ve *n,* kavşak sayısını verir ve yönlendirme sağ ele göre verilmiştir.) Bu durumda, $\nabla_{L_n} = \nabla_n$ gösterimi ile

$$\nabla_n(z) = z\nabla_{n-1}(z) + \nabla_{n-2}(z) \tag{6.4}$$

olur.

İspat. Şekil 6.3'te çizilen $(2,n)$-tor halkalarının belirlenen bir kavşağı ayrılırsa $n-1$ kavşaklı bir diyagram elde edilir. Benzer şekilde kavşağın işareti değiştirilirse II.Reidemaister hareketine göre $n-2$ kavşaklı bir diyagram elde edilir. Böylece teoremde verilen bağıntı, (6.2) bağıntısından elde edilir.



Şekil 6.3. (2,*n*)-tor halkası

Teorem 6.1.1 aşağıdaki şekilde bir tanım olarak verilebilir.

Tanım 6.1.2. $(2,n)$-tor halkalarının Alexander-Conway polinomlar dizisi, $\{\nabla_n\}_{n=0}^{\infty}$, başlangıç şartı $\nabla_1(z) = 1$ olan bir

$$\nabla_n(z) = z\nabla_{n-1}(z) + \nabla_{n-2}(z) \tag{6.5}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır.

(6.5) bağıntısı Fibonacci polinomları için verilen (4.1) bağıntısıyla aynıdır ($z = x$ ile). Böylece $(2,n)$-tor halkalarının Alexander-Conway polinomu bir Fibonacci polinomudur [30]. Bu tanıma göre $(2,n)$-tor halkalarının Alexander-Conway polinomları Tablo 4.1 ile verilen Fibonacci polinomlarıdır.

6.2. Jones Polinomu

Tanım 6.2.1. L bir yönlendirilmiş halka (veya düğüm) diyagramı olsun. Jones polinomu, $V_{L_n}(t)$, $\sqrt{t}$ değişkenli bir Laurent polinomudur [7]. Halkanın bir kuşatan izotopi invaryantıdır ve aşağıdaki aksiyomları sağlar.

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_O}(t) \tag{6.6}$$

$$V_O(t) = 1$$

burada L_+, L_- ve L_O Şekil 6.1 de verilen skein diyagramlarıdır ve O, düğümlenmemiş düğümün herhangi bir diyagramıdır.

Jones polinomunu bulurken kolaylık açısından (6.6) bağıntısı,

$$V_{L_+}(t) = (t^{3/2} - t^{1/2})V_{L_o}(t) + t^2 V_{L_-}(t) \tag{6.7}$$

veya

$$V_{L_-}(t) = (t^{-3/2} - t^{-1/2})V_{L_o}(t) + t^{-2} V_{L_+}(t)$$

ağaç diyagramı şeklinde yazılabilir.

Örnek 6.2.1. İki bileşenli aşikar halkanın ve Şekil 6.2'de çizilen L_1 ile L_2 halkalarının Jones polinomları (6.7) bağıntısından sırasıyla,

$$\delta = -t^{1/2} - t^{-1/2}, \quad V_{L_1}(t) = -t^{1/2} - t^{5/2} \quad \text{ve} \quad V_{L_2}(t) = t + t^3 - t^4$$

olarak bulunur.

Jones polinomunun bazı özellikleri şunlardır [7,8].

a. $O^n = (OOO...O)$ n-bileşenli aşikar düğümün ayrık birleşimi olmak üzere,

$$V_{O^n}(t) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})^{n-1} = \delta^{n-1}.$$

b. L^*, L halka diyagramının ayna görüntüsü ise

$$V_{L^*}(t) = V_L(t^{-1}).$$

c. $L = L_1 \# L_2$, L_1 ve L_2 halkalarının bağlantılı toplamı ise,

$$V_L(t) = V_{L_1}(t)V_{L_2}(t).$$

Teorem 6.2.1. L_n, $(2,n)$-tor halkasının yönlendirilmiş diyagramı olsun. Bu durumda, $V_{L_n} = V_n$ gösterimi ile,

$$V_n(t) = (t^{3/2} - t^{1/2})V_{n-1}(t) + t^2 V_{n-2}(t)$$

veya

$$V_n(t) = t(t^{1/2} - t^{-1/2})V_{n-1}(t) + t^2 V_{n-2}(t)$$

tekrarlama bağıntısını sağlar.

İspat. Şekil 6.3'te çizilen (2,n)-tor halkalarının belirlenen bir kavşağı ayrılırsa $n-1$ kavşaklı bir diyagram elde edilir. Benzer şekilde kavşağın işareti değiştirilirse II. Reidemaister hareketine göre $n-2$ kavşaklı bir diyagram elde edilir. Böylece teoremde verilen bağıntı, (6.7) bağıntısından elde edilir.

6.3. Fibonacci Polinomlarının Bir Genelleştirilmesi

Bu bölümde (2,n)-tor halkalarının Jones Polinomlarını ve onların özelliklerini çalışmak için bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomu tanıtılacaktır.

Tanım 6.3.1. İki değişkenli genelleştirilmiş Fibonacci polinomlar dizisi $\{P_n(a,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$P_0(a,x)=0\,,\ P_1(a,x)=1 \tag{6.8}$$

başlangıç şartları $n\geq 2$ olmak üzere,

$$P_n(a,x)=axP_{n-1}(a,x)+a^2P_{n-2}(a,x) \tag{6.9}$$

tekrarlama bağıntısıyla verilir.

(6.9) bağıntısı $a=1$ için klasik Fibonacci polinomu olduğu aşikardır. Aynı zamanda

$$P_n(a,x)=a^{n-1}F_n(x) \tag{6.10}$$

olduğunu görmek zor değildir. Burada F_n klasik Fibonacci polinomudur.

(6.9) bağıntısına karşılık gelen karakteristik polinom,

$$\lambda^2-ax\lambda-a^2=0 \tag{6.11}$$

ve bu denklemin kökleri, $\alpha=t^{3/2}$, $\beta=-t^{1/2}$ olmak üzere kökler arasındaki bağıntılar ise,

$$\alpha+\beta=ax\ \ ,\alpha\beta=-a^2\ \ ,|\alpha-\beta|=a\sqrt{x^2+4} \tag{6.12}$$

ile verilir.

Önerme 6.3.1. $\{P_n(a,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ serisinin

$$g_P(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(a,x)\lambda^n$$

üreten fonksiyonu,

$$g_P(\lambda)=\frac{\lambda}{1-ax\lambda-a^2\lambda^2} \tag{6.13}$$

eşitliğiyle verilir.

İspat. $\{P_n(a,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ serisinin

$$g_P(\lambda)=P_0(a,x)+P_1(a,x)\lambda+P_2(a,x)\lambda^2+...$$

üreten fonksiyonunda $ax\lambda g_P(\lambda)$ ve $a^2\lambda^2 g_P(\lambda)$ çarpımları yapıldıktan sonra,

$$(1-ax\lambda-a^2\lambda^2)g_P(\lambda)=P_0(a,x)+(P_1(a,x)-axP_2(a,x))\lambda$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(P_n(a,x)-axP_{n-1}(a,x)-a^2P_{n-2}(a,x))\lambda^n=\lambda$$

elde edilir. Buradan (6.13) eşitliği bulunur.

$P_n(a,x)$ polinomları için Binet formülü rasyonel genişleme teoremi kullanılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 6.3.2. $n\geq 0$ için $P_n(a,x)$ polinomunun Binet formülü,

$$P_n(a,x)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{6.14}$$

olur.

Önerme 6.3.3 $n \geq 1$ için $P_n(a,x)$ polinomunun açık biçimi,

$$P_n(a,x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-1}{k} a^{n-1} x^{n-2k-1} \tag{6.15}$$

ile verilir.

İspat. Önerme 4.2.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır

6.4. Genelleştirmiş Fibonacci Polinomları Olarak (2,*n*)-Tor Halkalarının Jones Polinomları

Bu bölümde (2,*n*)-tor halkalarının Jones polinomu bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomu gibi tanımlanacak ve bütün Fibonacci özellikleri ispatlanacaktır. Bunun için, Teorem 6.2.1 aşağıdaki şekilde bir tanım olarak verilebilir.

Tanım 6.4.1. $n \geq 2$ olmak üzere $(2,n)$-tor halkalarının Jones polinomlar dizisi, $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, başlangıç şartları

$V_0(t) = \delta = -t^{1/2} - t^{-1/2}$ ve $V_1(t) = 1$

olan bir

$$V_n(t) = t(t^{1/2} - t^{-1/2})V_{n-1}(t) + t^2 V_{n-2}(t), \tag{6.16}$$

tekrarlama bağıntısıdır.

(6.16) bağıntısı ile verilen polinom $a = t$ ve $x = t^{1/2} - t^{-1/2}$ ile $P(a,x)$ polinomunun bir özel durumudur ve aynı zamanda bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomudur.

Bu tanımla $(2,n)$-tor halkalarının Jones polinomları tablo halinde aşağıdaki biçimde verilir.

Tablo 6.1. $(2,n)$ -tor halkalarının Jones polinomları

n	$V_n(t)$
0	$\delta=-t^{1/2}-t^{-1/2}$
1	1
2	$-t^{1/2}-t^{5/2}$
3	$t+t^3-t^4$
4	$-t^{3/2}-t^{5/2}+t^{7/2}-t^{11/2}$
5	$t^2+t^3-2t^4+2t^5-t^7$
$\vdots$	$\vdots$

(6.16) tekrarlama bağıntısının karakteristik denklemi,

$$\lambda^2-t\left(t^{1/2}-t^{-1/2}\right)\lambda-t^2=0 \tag{6.17}$$

ve bu denklemin kökleri $\alpha=t^{3/2}$, $\beta=-t^{1/2}$ olmak üzere kökler arasındaki bağıntılar ise

$$\alpha+\beta=t^{3/2}-t^{-1/2}, \alpha.\beta=-t^2 \ , \ |\alpha-\beta|=t^{3/2}+t^{1/2}$$

ile verilir.

Şimdi $V_n(t)$ polinomunun bazı özelliklerini verelim.

Önerme 6.4.1. $\{V_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ serisinin

$$g_V(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)\lambda^n$$

üreten fonksiyonu,

$$g_{V_n}(t)=\frac{\left(t^{7/2}-t^{5/2}\right)\lambda-t^2+1}{\left(t^{5/2}-t^{7/2}\right)\lambda^2+\left(t^{3/2}-t^{5/2}\right)\lambda+t^{3/2}-t^{1/2}}$$

eşitliğiyle verilir.

İspat. $\left\{V_n\left(t\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ serisinin

$$g_v(\lambda) = V_0(t) + V_1(t)\lambda + V_2(t)\lambda^2 + \ldots$$

üreten fonksiyonunda $t(t^{1/2} - t^{-1/2})\lambda g_V(\lambda)$ ve $t^2\lambda^2 g_V(\lambda)$ çarpımları yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned}(1 - t(t^{1/2} - t^{-1/2})\lambda - t^2\lambda^2)g_V(\lambda) &= V_0(t) + (V_1(t) - t(t^{1/2} - t^{-1/2})V_2(t))\lambda \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}(V_n(t) - t(t^{1/2} - t^{-1/2})V_{n-1}(t) - t^2 V_{n-2}(t))\lambda^n \\ &= V_0(t) + (V_1(t) - t(t^{1/2} - t^{-1/2})V_2(t))\lambda\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $V_n(t)$ polinomunun üreten fonksiyonu

$$g_{V_n}(\lambda) = \frac{V_0(t) + (V_1(t) - t(t^{1/2} - t^{-1/2})V_2(t))\lambda}{(1 - t(t^{1/2} - t^{-1/2})\lambda - t^2\lambda^2)} \tag{6.18}$$

veya

$$g_{V_n}(t) = \frac{\left(t^{7/2} - t^{5/2}\right)\lambda - t^2 + 1}{\left(t^{5/2} - t^{7/2}\right)\lambda^2 + \left(t^{3/2} - t^{5/2}\right)\lambda + t^{3/2} - t^{1/2}}$$

olarak bulunur.

Önerme 6.4.2. $\{V_n(t)\}$ Jones polinomlar serisi için Binet formülü,

$$A = -\frac{t}{t^{1/2}(t+1)} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{t^2 + t + 1}{t^{1/2}(t+1)}$$

olmak üzere

$$V_n(t) = A\alpha^n + B\beta^n$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $n=0$ için $V_0(t)=\delta=-t^{1/2}-t^{-1/2}$ ve böylece

$$A+B=-t^{1/2}-t^{-1/2} \tag{6.19}$$

olur.

$n=1$ için $V_1(t)$ =1 ile

$$A\alpha+B\beta=1 \tag{6.20}$$

olur. (6.19) ve (6.20) denklemleri ortak çözülürse A ve B bulunur.

Önerme 6.4.3. $n\geq 2$ için $V_n(t)$ polinomunun açık biçimi,

$$V_n(t)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k-1}{k}t^{n-1}(t^{1/2}-t^{-1/2})^{n-2k-1}$$
$$+(1-t^2)\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k-2}{k}t^{n-1}(t^{1/2}-t^{-1/2})^{n-2k-3} \tag{6.21}$$

İspat. Önerme 5.2.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Önerme 6.4.4. (*2,n*)-tor düğümlerinin Jones polinomu $V_n(t)$ ile genelleştirilmiş Fibonacci polinomu $P_n(a,x)$ arasında, $n\geq 2$ olmak üzere

$$V_n(t)=P_n(t,t^{1/2}-t^{-1/2})+(-t^{3/2}-t^{5/2})P_{n-1}(t,t^{1/2}-t^{-1/2}) \tag{6.22}$$

ilişkisi vardır.

İspat. $V_n(t)$ polinomunun Önerme 6.4.3 deki açık biçimi $P_n(a,x)$ polinomunun Önerme 6.3.3 deki açık biçimiyle uyumlu yazılırsa

$$V_n(t) = P_n + (1-t^2)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-k-2}{k} t^{n-2} t (t^{1/2} - t^{-1/2})^{n-2k-2} (t^{1/2} - t^{-1/2})(t^{1/2} - t^{-1/2})^{-1}$$

$$= P_n + \frac{(t-t^3)}{(t^{1/2} - t^{-1/2})} \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-k-2}{k} t^{n-2} (t^{1/2} - t^{-1/2})^{n-2k-2}$$

bulunur. Bu son eşitlik düzenlenirse ispat tamamlanır.

6.5. Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomu İçin Matris Temsilleri

Bu bölümde $P_n(a,x)$ polinomuna ve $V_n(t)$ Jones polinomuna karşılık gelen matrisler ve bu matrisilerin determinantları bulunarak bu polinomlara ait özdeşlikler verilecektir.

Teorem 6.5.1 $P_n = P_n(a,x)$ polinomuna ilişkin matris,

$$A = \begin{pmatrix} ax & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$A^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ a^2 P_n & a^2 P_{n-1} \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

ile verilir.

İspat. Tümevarımla verilir. Teorem $n=1$ için açıktır. $k \geq 1$ olmak üzere, ($n = k$) için doğru olsun. Böylece $n = k+1$ için

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ a^2 P_k & a^2 P_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k+2} & P_{k+1} \\ a^2 P_{k+1} & a^2 P_k \end{pmatrix}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 6.5.1. (Cassini özdeşliği) $n \geq 1$,

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n a^{2n-2} \tag{6.25}$$

İspat. (6.23) ile verilen A matrisinin n. kuvvetinin determinantı $\left|A^n\right| = (-1)^n a^{2n}$ bulunur. Diğer yandan (6.24) matrisinin determinantı $\left|A^n\right| = a^2(P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2)$ olur. Bu iki determinant değeri birlikte düşünülürse ispat tamamlanır.

Teorem 6.5.2. $n, m \geq 0$ için,

$$P_{n+m+1} = P_{n+1}P_{m+1} + a^2 P_n P_m$$

ve özel olarak $n = m$ için,

$$P_{2n+1} = P_{n+1}^2 + a^2 P_n^2 .$$

İspat. $A^{n+m} = A^n A^m$ eşitliğinden kolaylıkla görülebilir.

Teorem 6.5.3. (d'Ocagne özdeşliği) $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 1$,

$$P_{n+1}P_m - P_n P_{m+1} = (-1)^n a^{2n} P_{m-n} \tag{6.26}$$

İspat. B_0 matrisi,

$$B_0 = \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+2} \\ a^2 P_{n+1} & a^2 P_{n+1} \end{pmatrix}$$

B_1 matrisi, ilk sütunu, A^n matrisinin ilk sütununun a^2, B_0 matrisinin ilk sütununun ax ile çarpılıp toplanmasıyla elde edilen ve 2. sütunu B_0 matrisiyle aynı olan matris olsun. Yani

$$B_1 = \begin{pmatrix} P_{n+3} & P_{n+2} \\ a^2 P_{n+2} & a^2 P_{n+1} \end{pmatrix}$$

olsun. $r \geq 2$ olmak üzere, benzer bir yolla, B_r matrisi, ilk sütunu B_{r-1} matrisinin ilk sütununu a^2 ve B_{r-2} matrisinin ilk sütununun ax ile çarpılıp ve bu matrislerin sütun elemanlarının toplanmasıyla elde edilen ve 2. sütunu B_0 matrisiyle aynı olan matris olsun.

Böylece

$$B_2 = \begin{pmatrix} P_{n+4} & P_{n+2} \\ a^2 P_{n+3} & a^2 P_{n+1} \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} P_{n+5} & P_{n+2} \\ a^2 P_{n+4} & a^2 P_{n+1} \end{pmatrix}$$

ile verilir. Tümevarım ile

$$B_r = \begin{pmatrix} P_{n+r+2} & P_{n+2} \\ a^2 P_{n+r+1} & a^2 P_{n+1} \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

olduğu kolayca görülür. Determinantının toplamsal özelliğinden (6.27) matrisin determinantı,

$$|B_r| = ax|B_{r-1}| + a^2 |B_{r-2}| \tag{6.28}$$

(6.28) özdeşliği $\{|B_r|\}$ dizisinin genelleştirlimiş Fibonacci dizisi olduğunu gösterir. $|B_0| = 0$ olduğu Sonuç 6.5.1'den kolaylıkla görülebilir. (6.28) eşitliği ve Tanım 6.3.1 ile

$$\left|B_1\right| = (-1)^{n+2}\,a^{2n+4}$$

ve

$$\left|B_r\right| = \left(-1\right)^{n+2}\,a^{2n+4}P_r \tag{6.29}$$

yazılır. Diğer yandan (6.27) matrisinin determinantı

$$\left|B_r\right| = a^2\,(P_{n+r+2}P_{n+1} - P_{n+r+1}P_{n+2}) \tag{6.30}$$

olur. (6.30) eşitliğinde $m = n + r$ alınır ve (6.29) eşitliği kullanılırsa,

$$P_{m+2}P_{n+1} - P_{m+1}P_{n+2} = \left(-1\right)^{n+2}\,a^{2n+2}P_{m-n} \tag{6.31}$$

ve bu eşitsizlikte *m* yerine *m-1*, *n* yerine *n-1* alınırsa,

$$P_{m+1}P_n - P_mP_{n+1} = \left(-1\right)^{n+2}\,a^{2n+2}P_{m-n}$$

özdeşliği bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 6.5.4. (Genelleştirilmiş Catalan özdeşliği). $m,n \in \mathbb{Z}$, $m,n \geq 1$ için

$$P_nP_m - P_{n-r}P_{m+r} = \left(-1\right)^{n-r}\,a^{2n-2r}P_{m-n+r}P_r \tag{6.32}$$

İspat. C_0 matrisi,

$$C_0 = \begin{pmatrix} P_n & P_{n-r} \\ a^2P_{n+1} & a^2P_{n+1} \end{pmatrix}$$

ve

$$C_1 = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_{n-r+1} \\ a^2P_n & a^2P_{n-r} \end{pmatrix}$$

matrisi, B_r matrisinde n yerine *n-r-1* alındığında elde edilen matris olsun. $s \geq 2$ olmak üzere, C_s matrisi, ilk satırı C_{s-2} matrisinin ilk satırının a^2 ve C_{s-1} matrisinin ilk satırının ax ile çarpılmasıyla elde edilen ve 2. satırı B_r matrisiyle aynı olan matris olsun. Tümevarımla gösterilebilir ki

$$C_s = \begin{pmatrix} P_{n+s} & P_{n-r+s} \\ a^2 P_n & a^2 P_{n-r} \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

olur Determinantın toplamsallığından,

$$|C_s| = ax|C_{s-1}| + a^2 |C_{s-2}| \tag{6.34}$$

elde edilir. (6.34) göstermektedir ki $\{|C_s|\}$ bir Jones polinomlar dizisidir ve bu dizinin ilk terimi $|C_0| = 0$ ve (6.29) ile $|C_1| = (-1)^{n-r+1} a^{2n-2r+2} P_r$ elde edilir. Tümevarımla ve (6.34) özdeşliği ile Tanım 5.3.1 kullanılarak

$$|C_s| = (-1)^{n-r+1} a^{2n-2r+2} P_r P_s \tag{6.35}$$

(6.33) matrisinin determinantı ise

$$|C_s| = a^2 (P_{n-r} P_{n+s} - P_{n-r+s} P_n) \tag{6.36}$$

olur. $s = m - n + r$ alınırsa (6.35) ve (6.36) eşitlikleriyle

$$P_{n-r} P_{m+r} - P_m P_n = (-1)^{n-r+1} a^{2n-2r} P_{m-n+r} P_r \tag{6.37}$$

özdeşliği düzenlenirse ispat tamamlanır.

Not 6.5.1. $m = n$ olmak üzere (6.32) özdeşliği $P_n(a,x)$ için aşağıdaki Catalan özdeşliğidir.

$$P_n^{\,2} - P_{n-r} P_{n+r} = \left(-1\right)^{n-r} a^{2n-2r} P_r^{\,2}$$

Sonuç 6.5.1 ile verilen Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliğinin $r = 1$ ile özel halidir.

6.6. Jones Polinomu İçin Matris Temsilleri

Tanım 6.6.1. $V_n = V_n(t)$, (2,n)-tor halkalarının Jones polinomu olmak üzere bu polinoma karşılık gelen 2×2 boyutlu D matrisi,

$$D = \begin{pmatrix} -t^{1/2} - t^{5/2} & 1 \\ t^2 & -t^{3/2} - t^{5/2} \end{pmatrix} \tag{6.38}$$

olarak tanımlanır. A, (6.24) ile verilen matris ve I birim matris olmak üzere $a = t$ ve $x = t^{1/2} - t^{-1/2}$ ile
D=A+$(-t^{3/2} - t^{5/2})\,I$ olduğu açıkça görülebilir.

Teorem 6.6.1. $n \geq 2$,

$$DA^{n-1} = \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ t^2 V_n & t^2 V_{n-1} \end{pmatrix} \tag{6.39}$$

İspat. Matris çarpımı ve (6.18) özdeşliği ile

$$DA^{n-1} = \begin{pmatrix} -t^{1/2} - t^{5/2} & 1 \\ t^2 & -t^{3/2} - t^{5/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ t^2 P_{n-1} & t^2 P_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{n+1} + (-t^{3/2} - t^{5/2}) P_n & P_n + (-t^{3/2} - t^{5/2}) P_{n-1} \\ t^2 (P_n + (-t^{3/2} - t^{5/2}) P_{n-1}) & t^2 (P_{n-1} + (-t^{3/2} - t^{5/2}) P_{n-2}) \end{pmatrix}$$

$V_n(t) = P_n(t) + (-t^{3/2} - t^{5/2})\; P_{n-1}(t)$ ile ifade düzenlenirse ispat tamamlanır.

Sonuç 6.6.1. (Cassini özdeşliği). $n \geq 2$ için

$$V_{n+1}V_{n-1} - V_n^{\,2} = (-1)^{n-1}(t^3 + t^2 + t + 1)\,t^{2n-2} \tag{6.40}$$

İspat. $\left|DA^{n-1}\right| = \left|D\right|\left|A^{n-1}\right|$ ile

$$t^2(V_{n+1}V_{n-1} - V_n^2) = (t^3 + t^2 + t + 1)\;(P_nP_{n-2} - P_{n-1}^{\;2}) \tag{6.41}$$

bulunur. (6.26) özdeşliği (6.41) eşitliğinde kullanılır ve ifade düzenlenirse ispat tamamlanır.

Sonuç .6.6.2. $n, m \geq 0$ için

$$V_{n+m+1} + (-t^{3/2} - t^{5/2})\,V_{n+m} = V_{n+1}V_{m+1} + t^2V_nV_m \tag{6.42}$$

ve özel olarak $n = m$ için

$$V_{2n+1} + (-t^{3/2} - t^{5/2})\,V_{2n} = V_{n+1}^{\;2} + t^2V_n^{\;2} \tag{6.43}$$

olur.

İspat. $DA^n = A^nD$ ile, bu sonuçlar $D(DA^{n+m}) = (DA^n)(DA^m)$ eşitliğinden elde edilir.

Teorem 6.6.2. (d'Ocagne benzeri özdeşlik). $m \geq n \geq 2$ için

$$V_{n+1}V_m - V_nV_{m+1} = (-1)^{n+1}t^{2n}(t^3 + t^2 + t + 1)\,P_{m-n} \tag{6.44}$$

İspat. E_0 matrisi,

$$E_0 = \begin{pmatrix} V_{n+2} & V_{n+2} \\ t^2V_{n+1} & t^2V_{n+1} \end{pmatrix} \tag{6.45}$$

E_1 matrisi A^{n-1} matrisinin ilk sütununun t^2 ve E_0 matrisinin ilk sütununun $t(t^{1/2}-t^{-1/2})$ çarpılmasıyla elde edilen, 2.sütunu E_0 matrisiyle aynı olan matris olsun.

$$E_1 = \begin{pmatrix} V_{n+3} & V_{n+2} \\ t^2 V_{n+2} & t^2 V_{n+1} \end{pmatrix}$$

$r \geq 2$ için E_r matrisi E_{r-2} matrisinin ilk sütununun t^2 ve E_{r-1} matrisinin ilk sütununun $t(t^{1/2}-t^{-1/2})$ çarpılmasıyla elde edilen, 2.sütunu E_0 matrisiyle aynı olan matris olsun.

$$E_r = \begin{pmatrix} V_{n+r+2} & V_{n+2} \\ t^2 V_{n+r+1} & t^2 V_{n+1} \end{pmatrix} \tag{6.46}$$

Determinantın toplamsallığından,

$$\left|E_s\right| = t(t^{1/2}-t^{-1/2})\left|E_{s-1}\right| + t^2\left|E_{s-2}\right| \tag{6.47}$$

elde edilir. (6.47) bağıntısı ile ilk terimi $\left|E_0\right| = \delta$ olan $\{\left|E_s\right|\}$ dizisi Jones polinomlar dizisidir. Sonuç 6.6.1 ile

$$\left|E_1\right| = (-1)^{n+1}(t^3+t^2+t+1)\,t^{2n+2} \tag{6.48}$$

(6.47) eşitliği ve (6.18) ile

$$\left|E_r\right| = \left(-1\right)^{n+1} t^{2n+2}(t^3+t^2+t+1)\,P_r \tag{6.49}$$

Diğer yandan (6.46) matrisinin determinantı

$$\left|E_r\right| = t^2(V_{n+r+2}V_{n+1} - V_{n+r+1}V_{n+2}) \tag{6.50}$$

(6.49) özdeşliğinde *m*=*n*+*r* alınır ve (6.50) eşitliği birlikte düşünülürse,

$$V_{n+r+2}V_{n+1} - V_{n+r+1}V_{n+2} = (-1)^{n+1}(t^3 + t^2 + t + 1)\, t^{2n+2} P_{m-n} \tag{6.51}$$

ve (6.51) özdeşliğinde *m, m-1* ve *n*, *n-1* ile değiştirilse ispat tamamlanır.

Teorem 6.6.3. (Genelleştirlmiş Catalan benzeri özdeşlik). $m \geq n \geq 1$ için

$$V_n V_m - V_{n-r} V_{m+r} = (-1)^{n-r+1}\, t^{2n-2r} (t^3 + t^2 + t + 1)\, P_{m-n+r} P_r \tag{6.52}$$

İspat. F_0 matrisi

$$F_0 = \begin{pmatrix} V_n & V_{n-r} \\ t^2 V_{n+1} & t^2 V_{n+1} \end{pmatrix} \tag{6.53}$$

olsun.

$$F_1 = \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_{n-r+1} \\ t^2 V_n & t^2 V_{n-r} \end{pmatrix} \tag{6.54}$$

Matrisi, E_r matrisinde *n* değişkenin *n*-*r*-2 değişkeni ile değiştirilmesiyle elde edilen matristir. $s \geq 2$ için F_s matrisi F_{s-2} matrisinin ilk satırının t^2 ve F_{s-1} matrisinin ilk satırının $t(t^{1/2} - t^{-1/2})$ çarpılmasıyla elde edilen matris olsun. Tümevarımla,

$$F_s = \begin{pmatrix} V_{n+s} & V_{n-r+s} \\ t^2 V_n & t^2 V_{n-r} \end{pmatrix} \tag{6.55}$$

Determinantın toplamsallığından,

$$|F_s| = t(t^{1/2} - t^{-1/2})|F_{s-1}| + t^2\, |F_{s-2}| \tag{6.56}$$

olur. (6.55) tekrarlama bağıntısı ile ilk terimi $|F_0| = 0$ olan $\{|F_s|\}$ bir Jones polinomlar dizisidir. (6.48) ile

$$|F_1| = (-1)^{n-r+1} t^{2n-2r+2} (t^3 + t^2 + t + 1) P_r \tag{6.57}$$

(6.55) eşitliğinde *s* üzerinde tümevarım yapılarak ve Tanım 6.2.1 ile

$$|F_s| = (-1)^{n-r+1} t^{2n-2r+2} (t^3 + t^2 + t + 1) P_r P_s \tag{6.58}$$

(6.54) matrisinin determinantı

$$|F_s| = t^2 (V_{n-r} V_{n+s} - V_{n-r+s} V_n) P_r P_s \tag{6.59}$$

(6.58) eşitliğinde *s*=*m*-*n*+*r* alınarak ve (6.57) eşitliği kullanılarak

$$V_{n-r} V_{m+r} - V_m V_n = (-1)^{n+1} t^{2n-2r} (t^3 + t^2 + t + 1) P_{m-n+r} P_r$$

ifadesi düzenlenirse ispat tamamlanır.

Not 6.6.2. (6.52) eşitliğinde *m*=*n* ile

$$V_n^2 - V_{n-r} V_{n+r} = (-1)^{n-r+1} t^{2n-2r} (t^3 + t^2 + t + 1) P_r^2$$

özdeşliği Catalan-benzeri bir özdeşliktir. (6.40) Cassini eşitliği *r=1* için Catalan-benzeri özdeşliğin özel bir halidir.

BÖLÜM 7. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Birinci bölümde, düğüm teorisinin ve Fibonacci sayı dizilerinin tarihsel gelişiminden ve uygulama alanlarından biraz söz edildi. Ayrıca çalışmada ele alınan düğüm polinomlar ile Fibınacci sayı dizileri ve Fibonacci polinomlar hakkında da kısa bir literatür bilgisi verildi.

İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılan bazı temel tanım ve özellikler ispatsız verildi. Sonraki bölümde, S. Falcon ve A. Plaza'nın çalışmaları [13-15] takip edilerek, *k*-Fibonacci sayı dizileri ve özellikleri ayrıntılı olarak incelendi.

Dördüncü bölümde, çalışmadaki esas sonuçların elde edilmesine yol gösteren, Fibonacci polinomları ve özellikleri detaylı olarak incelendi. Bu bölümde kuvvet polinomunun, Fibonacci polinomumunun bir fonksiyonu olarak nasıl ifade edilebileceği de verildi.

Beşinci bölümde, Fibonacci polinomlarının türevleri üzerine çalışıldı. Fibonacci polinomlarından elde edilen türev polinomları ve bu türev polinomlarından elde edilen sayı dizileri incelendi. Fibonacci sayı dizisi ile türevlerden elde edilen sayı dizileri arasındaki bağıntılar verildi.

Altıncı bölüm, Fibonacci polinomların düğüm teorisine uygulaması niteliğindedir. Bu bölümde, Alexander-Conway polinomları tanıtıldı ve birkaç örnek verilidi. $(2,n)$-tor halkalarının Alexander-Conway poinomlarının klasik Fibonacci polinomu olduğu bilinmektedir [29]. Bu bölümde esas olarak Jones polinomları üzerine çalışıldı. Jones polinomunun tanımı ve bazı özellikleri verildikten sonra, $n \geq 2$ olmak üzere $(2,n)$-tor halkalarının $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ Jones polinomlar dizisinin, başlangıç şartları

$$V_0(t) = \delta = -t^{1/2} - t^{-1/2} \text{ ve } V_1(t) = 1$$

olan bir

$$V_n(t) = t(t^{1/2} - t^{-1/2})V_{n-1}(t) + t^2 V_{n-2}(t)$$

tekrarlama bağıntısını sağladığı ispatlandı. Bu polinomlar dizisinin Fibonacci özellikleri detaylı olarak incelendi. Öncelikle başlangıç şartları, Fibonacci polinomunun başlangıç şartları ile ve tekrarlama bağıntısı, Jones Polinomlar dizisinin tekrarlama bağıntısı ile aynı olan bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomu tanıtıldı. Bu genelleştirilmiş polinomumun Fibonacci özellikleri ispatlandı. Daha sonra $(2,n)$-tor halkalarının Jones polinomlarının sağladığı Fibonacci benzeri özellikleri ispatlandı. Hem genelleştirilmiş Fibonacci polinomu hem de $(2,n)$-tor halkalarının Jones polinomlarının matris temsilleri verildi. Bu matris temsillerinden faydalanarak Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliği gibi önemli Fibonacci özdeşliklerine benzer özdeşlikler ispat edildi. Sonuç olarak, genelleştirilmiş Fibonaci polinomu dolayısıyla Fibonacci polinomu ile ele alınan düğüm sınıfının Jones polinomu arasında ilişki kuruldu. Böylece birbirinden farklı düğüm polinomları olan Alexander polinomu ile Jones polinomu arasında bir ilişki kurulmuş oldu.

Bu çalışmada takip edilen yönteme benzer yöntemlerle, $(2,n)$-tor halkalarının Kaufmann polinomlarının da Fibonacci benzeri özellikleri sağladığı ispatlanabilir. Ayrıca başka düğüm sınıflarının (örneğin burulmalı düğümler, rasyonel düğümler gibi) Jones polinomlarının da Fibonacci benzeri tekrarlama bağıntılarını sağlayabileceği düşünülmektedir. Böylece bu düğüm sınıfları ile Fibonacci polinomları arasında ilişki kurulabilecek ve Fibonacci benzeri özdeşliklerin sağladıkları ispatlanabilecektir.

KAYNAKLAR

[1] Conway, J.H., Fox, R.H. Introduction to Knot Theory, Graduate Tezt in Mathematics, 57, New York: Springer Verlag, 1977.

[2] Kaufmann L.H. State models and the Jones polynomial, Topology, 26 (3), 395-407, 1987.

[3] Kawauchi, A. A Survey of Knot Theory, Basel:Birkhuser, 1996.

[4] Murasugi, K. Knot Theory and Its Applications, Basel:Birkhuser, 1996.

[5] Alexander, J.W. Topological invariants of knots and links, Transactions of the American Society, 30, 275-306, 1928.

[6] Conway, J.H. An Emuration Of Knots and Links and Some of Their Algebraic Proporties, Computational Problems In Abstarct Algebra, Proc. Conf., Oxford 329-358, 1967.

[7] Jones, V.F.R. A polynomial invariant for knots via non Neumann algebras, Bulletin of the American Mathematical Society, 12, 103-111, 1985.

[8] Jones, V.F.R. Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link polynomials, Annals of Mathematics Second Series, 126 (2), 335-388, 1987.

[9] Kaufmann L. H. An invariant of regular isotopy, Transactions of the American Mathematical Society, 318, 417-471, 1990.

[10] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lıckorısh, W.B.R., Mıllett, K., Ocneau, A. A new polynomial invariant of knots and links,. Bulletin of American Mathematical Society, 12, 239-246, 1985.

[11] Fox, R.H. Knots and periodic transformations, Topology of 3-manifolds and related topics, Proc.The Univ.of Georgia Institute, N.J.:Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 177-182, ,1961.

[12] Seifert, H. Über das Geschlect von Knoten, Mathematische Annalen, 110 (1),571-592, 1935.

[13] Falcon, S., Plaza, A. On the Fibonacci *k*-numbers, Chaos, Solitons&Fractals, 32 (5), 1615-1624, 2007.

[14] Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications,Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts,Monographs and Tracts, New York: John Wiley & Sons, 2011.

[15] Falcon, S., Plaza, A. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, 39,(2009), 1005-1019, 2007.

[16] Falcon, S., Plaza, A. The *k*-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle Chaos, Solitons & Fractals 33 (1), 38-49, 2007.

[17] Spivey, M.Z. Fibonacci identities via the determiant sum property, The College Mathematics Journal, 37 (4), 286-289, 2006.

[18] Stakhov, A. , Rozın, B. , Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers Chaos, Solitons & Fractals, 27 (5), 1162-1177, 2006.

[19] Sikhwal, O. Generalization of Fibonacci polynomials, CreateSpace Indepedent Publishing Platform, 2014.

[20] Byrd, P.F. Expansion of analytic functions in polynomials associated with Fibonacci numbers, Fibonacci Quarterly, 1 (1), 16-29, 1963.

[21] Amdeberhan. T., Moll, V.H. ,Chen X., Sagan, B.E. Generalized Fibonacci polynomials and Fibonomial coefficents, Annals of Combinatorics, 18 (4), 1615-1624, 2007.

[22] Benjamin, A.T., Cameron, N.T., Quinn, J.J. Fibonacci determinants-a combinatorial approach, Fibonacci Quarterly, 45 (1), 36-55, 2007.

[23] Catalani, M. Generalized bivariate Fibonacci polynomials, Preprint, arXiv:math/0211366v2, 2004.

[24] Feng, J. Fibonacci identities via the determinant of tridiagonal matrix. Applied Math and Comp., 217, 5978-5981.

[25] Nallı, A., Haukkenen, P. On generalized Fibonacci and Lucas polynomials, Chaos, Solitons & Fractals, 42 (15), 2009.

[26] Gould, H.W. Combinatorial Identities. Morgantown, W Va, 1972.

[27] Rolfsen, D. Knots and Links Mathematics Lecture Series, Berkeley, Calif.: Publish or Perish, Inc., 7, 1976.

[28] Kaufmann L.H. Knots and Physics, Series on Knots and Everything, River Edge, NJ:World Scientific Publishing Co. Inc., 1, 1991.

[29] Kaufmann L.H. On knots, Annals of Mathematics Study, New Jersey:Princeton University Press, 115, 1987.

[30] Kaufmann L.H. New invariants in the theory of knots American Mathematical Monthly, 95 (3), 195-242, 1990.

ÖZGEÇMİŞ

Gizem ÇAYLAK, 21.09.1987 tarihinde İzmit'te doğdu. Lise eğitimini 2005 yılında Cahit Elginkan Anadolu Lisesinde tamamladı. 2006 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimine başladı ve 2010 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD' da yüksek lisans programına kaydoldu.