T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK SPINOR VE MINKOWSKI UZAYINDA DARBOUX ÇATISI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yakup BALCI

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK**

Enstitü Bilim Dalı : **GEOMETRİ**

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

Temmuz 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK SPINOR VE MINKOWSKI UZAYINDA DARBOUX ÇATISI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yakup BALCI

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 01.07.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul / ret edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR Jüri Başkanı	**Doç. Dr. Hakan YAKUT Üye**	**Yrd. Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Yakup BALCI

01.07.2016

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımlarını esirgemeyen başta değerli hocam Arş. Gör. Tülay ERİŞİR olmak üzere tavsiyelerinden yararlandığım Arş. Gör. Hidayet Hüda KÖSAL ve Zeynep KETENCİ'ye teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan, varlıklarıyla övündüğüm sevgili aileme minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu Minkowski uzayı
V	: Vektör uzayı
I	: Aralık
$\psi, \varphi, \xi, \gamma, \Gamma$	: Spinorlar
$\overline{\psi}$	: ψ spinorunun eşleniği
ψ^t	: ψ spinorunun transpozu
$\hat{\psi}$	: ψ spinorunun eşi
$\langle \, , \, \rangle$	: Lorentz iç çarpım
$\lVert \ \rVert$	: Lorentz anlamda norm
$\wedge$	: Lorentz vektörel çarpım
α	: Eğri
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$	: Frenet çatısı
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}$	: Darboux çatısı
κ_n	: Normal eğrilik
κ_g	: Geodezik eğrilik
τ_g	: Geodezik burulma
$O(n)$	: Ortogonal grup
$SO(n)$	: Özel ortogonal grup
$U(n)$	: Üniter grup

$SU(n)$	: Özel üniter grup
$SU(2,\mathbb{H})$	: Özel üniter grup
$SO(1,3)$	: $\mathbb{R}_1^3$ de özel ortogonal grup

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hiperbolik Spinor, Minkowski Uzayı, Darboux Çatısı, Frenet Çatısı.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Minkowski uzayında temel tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir. Ayrıca spacelike bir eğrinin Frenet çatısı ve Darboux çatısı arasındaki ilişkiler verilmiştir. Üçüncü bölümde hiperbolik spinorlar, Minkowski uzayındaki ortonormal taban yardımıyla tanıtılmıştır.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Tezin orijinal kısmı üç alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci alt bölümde $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısı ile hiperbolik spinor çatısı arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. İkinci alt bölümde $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}\}$ Darboux çatısı ile hiperbolik spinor çatısı arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca Darboux türev denklemleri hiperbolik spinorlar cinsinden verilmiştir. Üçüncü alt bölümde ise Frenet ve Darboux çatıları arasındaki ilişki hiperbolik spinorlar yardımıyla elde edildi. Ayrıca bulunan teoremler örnekler ile desteklenmiştir.

Beşinci bölümde bu tezin bir değerlendirilmesi yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

HYPERBOLIC SPINOR AND DARBOUX FRAME IN MINKOWSKI SPACE

SUMMARY

Keywords: Hyperbolic Spinor, Minkowski Space, Darboux Frame, Frenet Frame.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basis definitions and necessary theorems in Minkowski space are given. Moreover, the relationships between Frenet frame and Darboux frame of a spacelike curve are given. In the third chapter, the hyperbolic spinors are introduced by means of the orthonormal basis in Minkowski space.

The fourth chapter is the original part of this thesis. The original part of thesis consists of three subsections. In the first subsection, the relationship between the Frenet frame $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$ and frame of hyperbolic spinor are investigated. In the second subsection, the relationship between the Darboux frame $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}\}$ and frame of hyperbolic spinor are given. Moreover, the Darboux derivative equations are given in terms of the hyperbolic spinors. In the third subsection, the relationship between the Frenet frame and the Darboux frame is obtained by means of hyperbolic spinors. In addition, theorems are supported by examples.

In the fifth chapter, an evaluation of this thesis has been made and it has been made suggestions to researchs which will be done in future.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Spinorlar 1913 yılında Fransız matematikçi Elie Cartan tarafından keşfedilmiştir. Bu matematiksel ifadenin sadece geometrik tanımını vererek sistematik olarak spinor teorisini geliştirmeyi hedefleyen Cartan, diferensiyel geometri, grup teorisi ve matematiksel fiziğe önemli katkılarda bulunmuştur [1]. Diğer yandan, üç boyutlu Öklid uzayında katı bir cismin yer değiştirmesiyle ilgili Euler teoreminin vektör formülasyonundan türetilen bir-indeksli spinorlara ve kuaterniyonlara yeni bir yaklaşımda bulunan Vivarelli, kuaterniyonlar ve bir-indeksli spinorlar arasında lineer ve birebir bir bağıntı tanıtmıştır [2]. Spinorlar fizikte Quantum mekaniğinde de kullanılmaktadır. Spinorlar Quantum mekaniğinde, bir spinorun bileşenlerinden başka bir şey olmayan dört dalga fonksiyonları ve elektron için ünlü Dirac denklemlerini oluşturur. Bu alanda bir çok çalışma yayınlanmıştır. Bunlardan biri Brauer ve Weyl tarafından temel olarak adlandırılabilecek bir çalışmadır [3]. Fakat bu çalışmaların çoğunda spinorlar, sezgisel bir geometrik görüş olmadan tanıtıldığı için spinorlarla ilgili mevcut literatürün anlaşılması bir hayli güçtür. Fakat son yıllarda geometrik anlamda konu üzerine daha anlaşılır birkaç çalışma yapılmıştır. Bunlardan biri, Castillo ve Barrales'in karşılıklı ortogonal birim vektörlerden oluşan bir üçlüyü, spinor olarak adlandırılan iki kompleks bileşenli tek bir vektör bakımından ifade ettiği çalışmadır [4]. Ayrıca diğer bir çalışmada ise yönlendirilmiş bir yüzey üzerinde verilen Darboux çatısının spinor formülasyonunu ve Frenet ile Darboux çatılarının spinor gösterimleri arasındaki ilişki Kişi ve Tosun tarafından verilmiştir [5]. Benzer olarak $\mathbb{E}^3$, Öklid uzayında eğrilerin spinor Bishop denklemleri ve Bishop ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler [6]'daki çalışmada verilmiştir. Ek olarak Ketenci ve ark., Minkowski uzayında null olmayan regüler bir eğrinin hiperbolik spinor formülünü vermiştir [7]. Erişir ve ark., Frenet çatısına alternatif bir çatıya karşılık gelen hiperbolik spinorların geometrisini inceledi [8].

Bu çalışmanın amacı ise, [5-8] çalışmalarına ek olarak, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında (spacelike ya da timelike) bir yüzeyin Darboux çatısını 2-hiperbolik bileşenli spinorlar yardımıyla temsil etmektir. Ayrıca $\mathbb{R}_1^3$ uzayında yönlendirilmiş yüzey üzerinde alınan spacelike eğrinin Frenet çatısı ve 3-boyutlu Minkowski uzayında aynı noktada yüzeyin Darboux çatısı arasındaki ilişkinin hiperbolik spinor karşılığı elde edilmiştir. Son olarak bulunan bu teoremler bir örnek ile desteklenmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bize gerekli olan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. Bir Lie grubu, diferensiyellenebilir grup operatörlerine sahip diferensiyellenebilir bir manifolddur; yani G deki grup operatörü olan

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab$$

ve G deki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \to G, \ \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin ikisi de diferensiyellenebilirdir. G Lie grubunun bir otomorfizimi hem diffeomorfizim hem de grup izomorfizimi olan

$$\begin{aligned} \phi : G &\to G \\ a &\to \phi(a) \end{aligned}$$

dönüşümüdür. Otomorfizimler Lie grubunun üzerindeki özellikleri korur [9].

Tanım 2.2. G Lie grubunun bir elemanı a olsun. Her $g \in G$ için $l_a(g) = ag$ olarak tanımlanan $l_a : G \to G$ dönüşümüne G 'nin sol çarpımı denir. l_a bir diffeomorfizimdir. Her $g \in G$ için $r_a(g) = ga$ olarak tanımlanan $r_a : G \to G$ dönüşümüne G 'nin sağ çarpımı denir. r_a bir diffeomorfizimdir [10].

Tanım 2.3. V bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned}[\ ,\ ] \quad : \quad & V \times V \to V \\ & (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \to \quad [\ ,\ ]\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\end{aligned}$$

biçimindeki bir dönüşüm her $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$ için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa bu dönüşüme Bracket operatörü, $(V,[\ ,\ ])$ ikilisine de bir Lie cebiri denir.

i. $[\,,]$ ikilineer,

ii. $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = -[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]$ (antisimetrik),

iii. $[[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}],\boldsymbol{w}] + [[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}],\boldsymbol{u}] + [[\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}],\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{0}$

dir [10].

Tanım 2.4. Eğer her $a, g \in G$ için $dl_a(\boldsymbol{X_g}) = \boldsymbol{X_{ag}}$ ise, G Lie grubu üzerindeki $\boldsymbol{X}$ vektör alanı sol invaryanttır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}l_a :\ & G \to G \\ & g \to l_a(g) = ag\end{aligned}$$

sol çarpımının

$$\begin{aligned}dl_a : & T_G(g) \to T_G(ag) \\ & \boldsymbol{X_g} \to dl_a(\boldsymbol{X_g}) = \boldsymbol{X_{ag}}\end{aligned}$$

türev dönüşümü $\boldsymbol{X}$ in oluşturduğu tanjant vektörleri yer değiştirir. Sol invaryant vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

G ’deki sol invaryant vektör alanlarının cümlesi $X_l G$ olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skalar ile çarpma işlemleri $X_l G$ cümlesini bir vektör uzayı yapar. $X_l G$ ’de $[\,,]$ Bracket operatörü de tanımlanarak $X_l G$ bir Lie cebiri olur. $X_l G$, $n = \text{boy}G$ (sonlu) boyutuna sahiptir [11].

Lemma 2.5. $\boldsymbol{X} \in X_l G$ elemanını $\boldsymbol{X}_e \in T_G(e)$ elemanına dönüştüren $f : X_l G \to T_G(e)$ fonksiyonu bir lineer izomorfizimdir. Burada e, G'nin grup işlemine göre birim elemanıdır.

$\phi : G \to G$ bir otomorfizim olsun. $\boldsymbol{X} \in X_l G$ ise $d\phi(\boldsymbol{X}) \in X_l G$ dir ve $d\phi : X_l G \to X_l G$ Lie cebiri izomorfizimine ϕ'nin diferensiyeli denir. $d\phi$ diferensiyeli $d\phi_e : T_G(e) \to T_G(e)$ dönüşümü ile ifade edilir [11].

Tanım 2.6. $a \in G$ olmak üzere g elemanını aga^{-1} elemanına dönüştüren

$$\begin{aligned} C_a &: G \to G \\ g &\to C_a(g) = aga^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda C_a bir diffeomorfizim olup onun diferensiyeli Ad_a ile gösterilir. O halde $dC_a = Ad_a$ dir. $a, b \in G$ olduğunda $C_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a\left(bgb^{-1}\right)a^{-1}$ dir. Böylece $C_{ab} = C_a \circ C_b$ olur. Diferensiyel alındığında ise

$$Ad_{ab} = Ad_a \circ Ad_b$$

elde edilir. $a \to Ad_a$ grup homomorfizmine G'nin adjoint gösterimi denir [11].

Tanım 2.7. V bir reel vektör uzayı üstünde, $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikilineer form, eğer bu ikilineer form simetrik ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna simetrik ikilineer form denir [10].

Tanım 2.8. $\langle\ ,\ \rangle$, V üstünde ikilineer form olsun.

i. $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{v} \neq 0 \Rightarrow \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ önermesi doğru ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna pozitif tanımlı,

ii. $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{v} \neq 0 \Rightarrow \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ önermesi doğru ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna negatif tanımlı,

iii. $\forall \boldsymbol{v} \in V$, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna yarı pozitif tanımlı,

iv. $\forall \boldsymbol{v} \in V$, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna yarı negatif tanımlı,

v. $\forall \boldsymbol{w} \in V$, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ oluyor ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna non-dejenere bir form

denir. $\langle\ ,\ \rangle$, V vektör uzayının alt uzayına indirgenebilir. Bu indirgenen simetrik ikilineer form dejenere veya non-dejeneredir [11].

Tanım 2.9. V vektör uzayı olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
q : V &\rightarrow \mathbb{R} \\
\boldsymbol{v} &\rightarrow q(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle
\end{aligned}
$$

fonksiyonuna $\langle\ ,\ \rangle$ formundan elde edilen kuadratik form denir. q kuadratik formu verildiğinde, $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik ikilineer formu verilmiş demektir. Gerçekten,

$$
\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \frac{1}{2}\left[q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) - q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{w}) \right]
$$

dir. V nin bir bazı $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ olmak üzere, $g_{ij} = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle$ diyelim. $[g_{ij}]$ matrisine, g nin $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ bazına göre bileşenlerinin matrisi denir. g simetrik olduğundan $[g_{ij}]$ matrisi de simetriktir [11].

Teorem 2.10. $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik ikilineer formu non-dejeneredir gerek ve yeter şart V vektör uzayının bir bazına göre $\langle\ ,\ \rangle$ formuna karşılık gelen matrisin determinantı sıfırdan farklıdır [11].

Tanım 2.11. V vektör uzayı üstünde simetrik, non-dejenere bir $\langle\ ,\ \rangle$ ikilineer formuna V üstünde bir skalar çarpım denir. $\langle\ ,\ \rangle$, V üstünde bir pozitif tanımlı skalar çarpım ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna V üstünde bir iç çarpım denir [10].

Tanım 2.12. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere V üstünde bir skalar çarpım varsa V vektör uzayına skalar çarpımlı vektör uzayı denir [10].

Tanım 2.13. V skalar çarpımlı bir vektör uzay ve $\boldsymbol{v} \in V$ olsun.

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle|}$$

eşitliğiyle belirli $\|\boldsymbol{v}\|$ sayısına $\boldsymbol{v}$ vektörünün normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör adı verilir [11].

Teorem 2.14. $V \neq \{\mathbf{0}\}$ olmak üzere, V skalar çarpımlı bir vektör uzayı ise V vektör uzayının ortonormal bazı vardır [11].

V skalar çarpımlı vektör uzayının ortonormal bir $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ bazına göre $[g_{ij}]$ matrisi köşegensel bir matristir. Çünkü $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}\varepsilon_j$ dir. Burada $\varepsilon_j = \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \rangle$, -1 veya 1 dir. V vektör uzayının ortonormal bir bazı sıralı olarak göz önüne alındığında, ε_j sayıları negatif olan vektörlerin ilk sırada yazıldığını varsayacağız.

Teorem 2.15. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, V nin ortonormal bir bazı olsun. V nin her $\boldsymbol{v}$ elemanı

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i \rangle\, \boldsymbol{e}_i$$

biçiminde bir ve yalnız bir türlü yazılabilir [11].

Teorem 2.16. V nin ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ bazı için $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}$ cümlesindeki negatif sayıların sayısı, $\langle\ ,\ \rangle$ formunun indeksine eşittir. $\langle\ ,\ \rangle$ formunun indeksine v indeksi denir [11].

Teorem 2.17. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üstündeki non-dejenere, sabit indeksli ve $(0,2)$ tipindeki $\langle\ ,\ \rangle$ tensör alanına bir metrik tensör denir. $\langle\ ,\ \rangle$, M üstünde bir metrik tensör ise M nin her bir p noktasına, $T_M(p)$ üstünde bir $\langle\ ,\ \rangle_p$ skalar çarpımı karşılık gelir. $\langle\ ,\ \rangle_p$ nin indeksi her p noktasında aynıdır [11].

Teorem 2.18. M diferensiyellenebilir manifoldu üstünde bir $\langle\ ,\ \rangle$ metrik tensörü varsa M manifolduna bir yarı-Riemann manifoldu denir. $\langle\ ,\ \rangle$ metrik tensörünün v indeksine $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. M manifoldunun boyutu n olmak üzere, M yarı-Riemann manifoldu M_v^n ile gösterilir [11].

Tanım 2.19. $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $v = 1$ ise M_v^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir [11].

Tanım 2.20. M yarı-Riemann manifoldu ve $\langle\ ,\ \rangle$ formu da M üstünde bir metrik tensör olsun. Bu durumda M de bir $\boldsymbol{v}$ tanjant vektörü için,

i. $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle > 0$ veya $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ise vektörüne spacelike vektör,

ii. $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle < 0$ ise $\boldsymbol{v}$ vektörüne timelike vektör,

iii. $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0$ ve $\boldsymbol{v} \neq 0$ ise $\boldsymbol{v}$ vektörüne null vektör

denir [11].

Tanım 2.21. İndeksi 1 ve $boyV \geq 2$ olan V skalar çarpım uzayına Lorentz vektör uzayı denir. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı ve $\langle\ ,\ \rangle$, V üstündeki skalar çarpım olsun. Bu durumda,

i. $\langle\ ,\ \rangle\big|_W$ pozitif tanımlı (yani W iç çarpım uzayı) ise W alt vektör uzayına spacelike alt uzayı,

ii. $\langle\ ,\ \rangle\big|_W$ 1 indeksine sahip non-dejenere ise W alt vektör uzayına timelike alt uzayı,

iii. $\langle\ ,\ \rangle\big|_W$ dejenere ise W alt vektör uzayına null alt uzayı

denir [11].

Lemma 2.22. $\boldsymbol{v}$, V Lorentz vektör uzayında spacelike bir vektör ise $Sp\{\boldsymbol{v}\}^{\perp}$ alt uzayı timelike ve $V = Sp\{\boldsymbol{v}\} \oplus Sp\{\boldsymbol{v}\}^{\perp}$ dir.

W alt uzayının timelike olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ in spacelike olmasıdır. W nin lightlike olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ lightlike olmasıdır.

W spacelike alt uzayının her alt uzayı da spacelike ve Schwarz eşitsizliği $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle| \leq \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$ olarak elde edilir. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır [11].

Tanım 2.23. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i. W spacelike'tır. Böylece W nın kendisi de Lorentz vektör uzayıdır,

ii. W lineer bağımsız iki null vektör içerir,

iii. W timelike vektör içerir

[11].

Lemma 2.24. W , V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i. W lightlike'tır. Yani dejenere olur,

ii. W null vektör içerir fakat timelike vektör içermez,

iii. $W \cap \Lambda = L - \{\mathbf{0}\}$ dir. Burada L bir boyutlu alt uzaydır ve Λ, V Lorentz uzayının null konisidir

[11].

Tanım 2.25. F, V Lorentz vektör uzayındaki spacelike vektörlerin cümlesi olsun. $\boldsymbol{u} \in F$ için

$$C(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} \in F \,|\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle < 0 \}$$

cümlesi $\boldsymbol{u}$ vektörünü içeren V Lorentz uzayının timekonisidir. Karşıt timekonisi

$$C(-\boldsymbol{u}) = -C(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} \in F \,|\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle > 0\}$$

dir. $\{\boldsymbol{u}\}^{\perp}$ spacelike olduğundan, F bu iki timekonisinin bileşimidir [11].

Lemma 2.26. Lorentz vektör uzayında $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ timelike vektörlerinin aynı time konide olmaları için gerek ve yeter koşul $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle < 0$ olmasıdır [11].

Tanım 2.27. $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

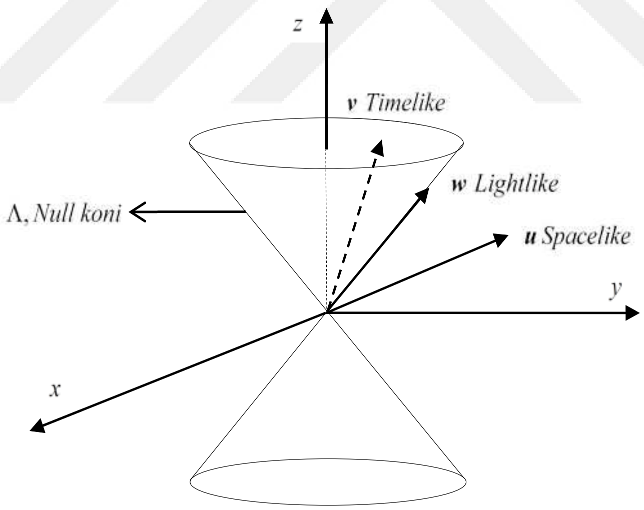
biçiminde tanımlanır ise bu iç çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^3$ Afin uzayı, Minkowski 3-uzayı adını alır ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir. Lorentz metriği olarak isimlendirilen bu iç çarpım ikilineer, simetrik ve non-dejeneredir [11].

Tanım 2.28. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında

$$\Lambda = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_1^3 : \left\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \right\rangle = 0, \boldsymbol{u} \neq 0 \right\}$$

ile verilen cümleye null koni adı verilir [11]. (Şekil 2.1.)

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki timelike vektörler Λ konisinin içinde, lightlike (null) vektörler Λ konisinin üzerinde ve spacelike vektörlerde Λ konisinin dışında bulunurlar. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1. Minkowski uzayında vektörler [11]

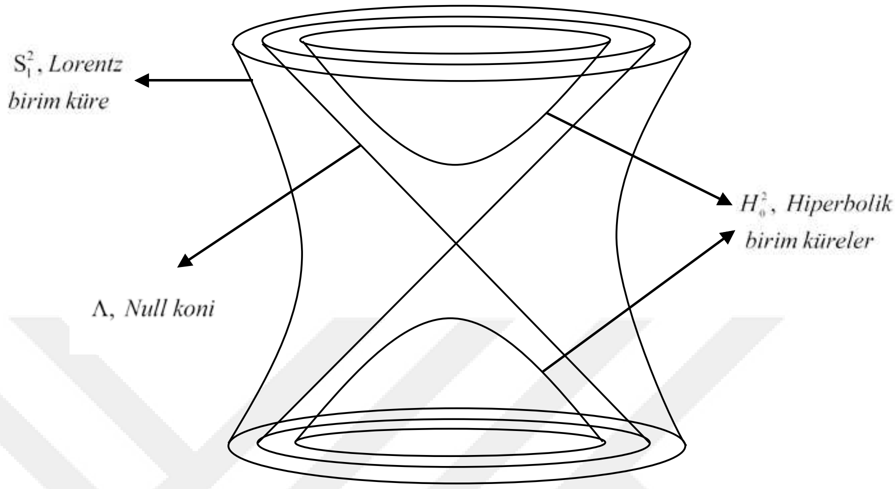
Tanım 2.29. $\mathbb{R}_1^3$ de Lorentz ve Hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_1^3 \middle| \left\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \right\rangle = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_1^3 \,\middle|\, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = -1 \right\}$$

ile verilir [11]. (Şekil 2.2.)



Şekil 2.2. Minkowski uzayında birim küreler [11]

Tanım 2.30. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki vektör $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ olsun. $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{-e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \left(-u_3 v_2 + u_2 v_3, -u_1 v_3 + u_3 v_1, -u_1 v_2 + u_2 v_1 \right)$$

vektörüne $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ nin vektörel çarpımı denir. Burada

$$\boldsymbol{e}_i = \left(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3} \right) \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \;\; ise \\ 0 & i \neq j \;\; \text{ise} \end{cases} \right)$$

dir [11].

Teorem 2.31. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}_1^3$ olsun. Bu takdirde

i. $\langle \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$,

ii. $(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{w}=-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle\boldsymbol{w}+\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle\boldsymbol{u}$,

iii. $\boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle\boldsymbol{v}+\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle\boldsymbol{w}$,

iv. $\langle\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle=0$ ve $\langle\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=0$,

v. $\langle\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\rangle=-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle^2$

dir [11].

Tanım 2.32. $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike vektör ve $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ olsun. Eğer

i. $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_3\rangle<0$ ise $\boldsymbol{u}$ vektörüne future-pointing timelike vektör,

ii. $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_3\rangle>0$ ise $\boldsymbol{u}$ vektörüne past-pointing timelike vektör

denir [12].

Tanım 2.33. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımı aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

i. $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ future-pointing (past-pointing) timelike vektörler olsun. Bu durumda,

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=-\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cosh\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi\geq0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir [12].

ii. $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ spacelike vektörler olsun. Bu vektörlerin gerdiği alt vektör uzayının timelike olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cosh\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir [12].

iii. $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ spacelike vektörler olsun. Bu vektörlerin gerdiği alt vektör uzayının spacelike olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \cos \varphi$$

olacak şekilde bir tek φ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ reel sayısı vardır. Bu sayıya $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir [12].

iv. $\boldsymbol{u}$ bir spacelike vektör ve $\boldsymbol{v}$ bir timelike vektör olsun. Bu durumda,

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sinh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu φ sayısına $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı denir [12].

Tanım 2.34. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{R}_1^3 \\ s &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında eğri adı verilir. Eğer $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ hız vektör alanı için

i. $\langle \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}' \rangle = 1$ ise α ya birim hızlı spacelike eğri,

ii. $\langle \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}' \rangle = -1$ ise α ya birim hızlı timelike eğri,

iii. $\langle \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}' \rangle = 0$ ise α ya null (lightlike) eğri

adı verilir [11].

Tanım 2.35. $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayı ve $\alpha \subset \mathbb{R}_1^3$ ise (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{U}$ da sabit birim vektör olmak üzere $\forall s \in I$ için $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{U}$ arasındaki açı sabit ise $\alpha \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisine bir eğilim çizgisi (helis) denir [13].

Tanım 2.39. $\mathbb{R}^2$, 2-boyutlu Öklid uzayındaki

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dönme matrisine karşılık, $\mathbb{R}_1^2$ uzayındaki dönme matrisi,

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

biçiminde olup iki timelike vektör arasındaki açı hiperbolik açı, iki spacelike vektör arasındaki açı merkez açıdır [12].

Lemma 2.40. $A(\theta)$ matrisi altında, timelike vektörler timelike vektörlere, spacelike vektörler spacelike vektörlere ve lightlike vektörler lightlike vektörlere dönüşür [14].

Tanım 2.41. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$, birim hızlı regüler spacelike eğrisi, bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ, Frenet çatısı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ ve $\varepsilon_B = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle = \mp 1$ olmak üzere $\boldsymbol{T}$ spacelike vektör iken Frenet türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \varepsilon_B \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Ayrıca ε_B, α spacelike eğrisinin çeşidini belirler. Eğer $\varepsilon_B = 1$ ise α spacelike eğrisi, $\boldsymbol{N}$ timelike asli normalli ve $\boldsymbol{B}$ spacelike binormalli bir eğridir. Eğer $\varepsilon_B = -1$ ise α spacelike eğrisi, $\boldsymbol{N}$ spacelike asli normalli ve $\boldsymbol{B}$ timelike binormallidir. Burada $s \in I$ olmak üzere birim hızlı α spacelike eğrisi için

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha'(s), \quad \boldsymbol{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad \boldsymbol{B}(s) = \varepsilon_B \left(\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s)\right)$$

dir [15].

Tanım 2.42. M, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik bir Lorentz metriği ise bu yüzey timelike yüzey, eğer indirgenmiş metrik pozitif tanımlı Riemann metriği ise bu yüzey spacelike yüzey olarak adlandırılır. Yani yüzeyin normal vektör alanı spacelike (timelike) ise yüzey timelike (spacelike) bir yüzeydir [16].

Tanım 2.43. M, $\mathbb{R}_1^3$, 3 boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir bir yüzey (spacelike veya timelike) olmak üzere M de yatan birim hızlı regüler spacelike bir eğri α olsun. α eğrisi aynı zamanda uzayda bir eğri olduğundan eğrinin her bir noktasında $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısı vardır. Ayrıca α eğrisi M yüzeyi üzerinde yattığından dolayı eğrinin Darboux çatısı olarak adlandırılan bir diğer çatı vardır ve bu çatı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}\}$ ile gösterilir. $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}\}$ Darboux çatısında $\boldsymbol{T}$, eğrinin birim tanjant vektörü, $\boldsymbol{n}$, M yüzeyinin birim normal vektörü ve $\boldsymbol{g}$ ise $\boldsymbol{g} = \varepsilon_g \left(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{T}\right)$ şeklinde birim vektördür. Burada $\varepsilon_g = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \rangle$ dir. Ayrıca $\boldsymbol{T}$ birim tanjant vektörü Darboux ve Frenet çatılarının ortak vektörü olduğundan dolayı $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{g}$ ve $\boldsymbol{n}$ vektörleri aynı düzlemdedirler.

M yüzeyi üzerinde yatan spacelike α eğrisinin Darboux ve Frenet çatıları arasındaki ilişki,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\beta & -\sinh\beta \\ 0 & -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

ile verilir. Burada $\boldsymbol{T}$ spacelike vektör olup $\boldsymbol{N}$ vektörü timelike (spacelike) ise $\boldsymbol{g}$ vektörü de timelike (spacelike) vektördür. Ayrıca β hiperbolik açısı $\boldsymbol{g}$ ile $\boldsymbol{N}$ vektörleri arasındaki açıdır. M yönlendirilebilir bir (timelike veya spacelike) yüzey olmak üzere M üzerinde yatan spacelike eğrinin Darboux çatısının türev formülleri (2.2) eşitliğine karşılık olarak

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{g}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\varepsilon_B\kappa_g & 0 & \tau_g \\ \varepsilon_B\kappa_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{g} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

ile verilir.

Ek olarak (2.2) eşitliğinin bir benzeri

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\beta & -\sinh\beta \\ 0 & -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\boldsymbol{T}$ spacelike vektör olup $\boldsymbol{N}$ vektörü timelike (spacelike) ise $\boldsymbol{n}$ vektörü de timelike (spacelike) vektördür. Ayrıca β hiperbolik açısı $\boldsymbol{n}$ ile $\boldsymbol{N}$ vektörleri arasındaki açıdır. Bu durumda (2.3) eşitliği yerine,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{g}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_n & \kappa_g \\ \varepsilon_B\kappa_n & 0 & \tau_g \\ -\varepsilon_B\kappa_g & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{g} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

eşitliği geçerlidir. Burada sırasıyla normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulma $\kappa_n = \kappa \cosh \beta$, $\kappa_g = \kappa \sinh \beta$ ve $\tau_g = \tau - \frac{d\beta}{ds}$ şeklindedir [17].

Lemma 2.44. M yönlendirilebilir yüzeyi (timelike veya spacelike) üzerinde yatan α eğrisi verilsin,

i. $\alpha(s)$ bir geodezik eğridir $\Leftrightarrow$ $\kappa_g = 0$,

ii. $\alpha(s)$ bir asimptotik çizgidir $\Leftrightarrow$ $\kappa_n = 0$,

iii. $\alpha(s)$ bir eğrilik çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\tau_g = 0$

dir [11].

$\mathbb{R}_v^n$ uzayının bütün lineer izometrilerine $\mathbb{R}_v^n$ nin doğal bazına göre karşılık gelen matrislerin cümlesi $O_v(n)$ ile gösterilsin. $O_v(n)$ cümlesi $GL(n,\mathbb{R})$ cümlesinin kapalı bir alt grubudur ve bundan dolayı $O_v(n)$ bir Lie grubudur. $O_v(n)$ cümlesine yarı ortogonal grup denir.

Teorem 2.45. $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için aşağıdaki önermeler denktir.

i. $A \in O_v(n)$,

ii. $A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$ eşitliğini sağlayan matrise Lorentz anlamda ortogonal matris denir,

iii. A nın sütunlarının cümlesi (satırlarının cümlesi) $\mathbb{R}_v^n$ uzayı için ortonormal bir bazdır,

iv. A, $\mathbb{R}_v^n$ nin ortonormal bir bazını yine ortonormal bir baza dönüştürür

[11,18].

Teorem 2.46. $O_v(n)$ in Lie cebiri, $C^T = -\varepsilon C \varepsilon$ eşitliğini sağlayan C matrislerinin cümlesidir. Böyle C matrisleri

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada $A^T = -A$, $D^T = -D$, $A_{v \times v}$, $D_{(n-v)\times(n \times v)}$ ve $B_{v \times (n-v)}$ biçiminde matrislerdir. $O_v(n)$ 'nin Lie cebiri $O_v(n)$ ile gösterilir. $boy\, O_v(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ dir [11].

BÖLÜM 3. HİPERBOLİK SPINOR

Bu bölümde, öncelikle hiperbolik sayı sistemi, daha sonra bu sayı sistemi kullanılarak hiperbolik spinorlar tanıtılmıştır.

3.1. Hiperbolik Sayı Sistemi

İngiliz geometrici Clifford, $j^2 = 1$ kullanarak split karmaşık sayılar veya double karmaşık sayılar olarak da adlandırılan hiperbolik sayıları tanıttı [19]. Clifford'un yaptığı hiperbolik sayıların mekaniğe uygulamaları, non-Öklid geometriye uygulamalar tarafından desteklenmektedir.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. O halde $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Z = (x, y)$ ikilisine sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{H}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{H} = \left\{ (x, y) : x + jy,\ x, y \in \mathbb{R},\ j^2 = 1,\ \mathrm{j} \neq \mp 1 \right\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır [20].

Tanım 3.1.2. $Z = (x, y) \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayı olmak üzere x reel sayısına Z sayısının reel kısmı y reel sayısına da Z sayısının hiperbolik kısmı denir [20].

Tanım 3.1.3. $Z_1 = (x_1, y_1)$, $Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{H}$ olmak üzere Z_1 ile Z_2 eşittir denir ve $Z_1 = Z_2$ şeklinde gösterilir [20].

Tanım 3.1.4. $Z_1 = (x_1, y_1)$, $Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

iç işlemi

$$Z_1 \oplus Z_2 = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{H}$ deki toplama olarak adlandırılır [20].

Tanım 3.1.5. $Z = (x, y) \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z \oplus X = Z$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanan X hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$ de $\oplus$ işleminin birim elemanı (etkisiz elemanı) denir ve $0 = (0,0)$ ile gösterilir [20].

Tanım 3.1.6. $Z = (x, y) \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z \oplus W = 0$$

denkleminde W ile gösterilen hiperbolik sayıya $\mathbb{H}$ de $\oplus$ işleminin ters elemanı denir ve $W = (-x, -y)$ ile gösterilir [20].

Önerme 3.1.7. $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı sisteminde toplama işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $Z_1 \oplus Z_2 = Z_2 \oplus Z_1$ (Değişme özelliği),

ii. $Z_1 \oplus (Z_2 \oplus Z_3) = (Z_1 \oplus Z_2) \oplus Z_3$ (Birleşme Özelliği)

[20].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.8. $(\mathbb{H}, \oplus)$ ikilisi bir abel grubudur [20].

Tanım 3.1.9. $Z_1 = (x_1, y_1)$, $Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\odot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

iç işlemi

$$Z_1 \odot Z_2 = (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{H}$'de çarpma olarak adlandırılır [20].

Tanım 3.1.10. $Z = (x, y) \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z \odot Y = Z$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanan Y hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$'de $\odot$ işleminin birim elemanı (etkisiz elemanı) denir ve $1 = (1, 0)$ ile gösterilir [20].

Tanım 3.1.11. $Z = (x, y) \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z \odot Z^{-1} = 1$$

denkleminde Z^{-1} ile gösterilen hiperbolik sayıya $\mathbb{H}$'de $\odot$ işleminin ters elemanı denir [20].

Tanım 3.1.12. $(0,1)$ hiperbolik sayısı j ile gösterilecektir yani $(0,1)=j$ alınacak ve hiperbolik birim olarak adlandırılacaktır [20].

Sonuç 3.1.13. $j^2=1$ dir [20].

Önerme 3.1.14. $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı sisteminde çarpma işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $Z_1 \odot Z_2 = Z_2 \odot Z_1$ (Değişme Özelliği),

ii. $Z_1 \odot (Z_2 \odot Z_3) = (Z_1 \odot Z_2) \odot Z_3$ (Birleşme Özelliği),

iii. $Z_1 \odot (Z_2 \oplus Z_3) = (Z_1 \odot Z_2) \oplus (Z_1 \odot Z_3)$ (Dağılma Özelliği)

[20].

O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1.15. $(\mathbb{H},\oplus,\odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır [20].

Teorem 3.1.16. $(\mathbb{H},\oplus,\odot)$ üçlüsü bir cisim değildir [20].

Tanım 3.1.17. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{H}$ cümlesine hiperbolik sayı sistemi ve $\forall (x,y) \in \mathbb{H}$ elemanına da bir hiperbolik sayı denir [20].

Tanım 3.1.18. x ve y reel sayı olmak üzere $Z = x + jy \in \mathbb{H}$ olsun. Bu takdirde $x - jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısına Z hiperbolik sayısının eşleniği denir ve $\overline{Z}$ ile gösterilir [20].

Teorem 3.1.19. Z_1 ve Z_2 iki hiperbolik sayı olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\overline{Z_1 \oplus Z_2} = \overline{Z_1} \oplus \overline{Z_2}$,

ii. $\overline{\overline{Z_1}} = Z_1$,

iii. $\overline{Z_1 \odot Z_2} = \overline{Z_1} \odot \overline{Z_2}$,

iv. $Z_2 \neq 0$ olmak üzere $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \left(\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}\right)$,

v. $Z_1 \oplus \overline{Z_1} = 2\,\mathrm{Re}(Z_1)$, $Z_1 - \overline{Z_1} = 2j\,\mathrm{Im}(Z_1)$

[20].

Teorem 3.1.20. $Z = (x, y)$ hiperbolik sayıların bütününe hiperbolik düzlem denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir. Her bir (x, y) ikilisine de hiperbolik düzlemin bir noktası denir [20].

Tanım 3.1.21. $Z = x + jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayı olmak üzere

$$|Z| = \sqrt{\left|Z \odot \overline{Z}\right|} = \sqrt{\left|x^2 - y^2\right|}$$

reel sayısına $Z \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının modülü denir [20].

Tanım 3.1.22. $Z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{H}$ ve $Z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{H}$ iki hiperbolik sayı olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\left|Z_1\right|^2 = Z_1 \odot \overline{Z_1}$, $\left|Z_1\right| = \sqrt{Z_1 \odot \overline{Z_1}}$,

ii. $\left|Z_1 \odot Z_2\right| = \left|Z_1\right|\left|Z_2\right|$,

iii. $Z_2 \neq 0$ olmak üzere $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}$

[20].

Tanım 3.1.23. $Z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{H}$ ve $Z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{H}$ iki hiperbolik sayı olmak üzere hiperbolik düzlemde bu iki hiperbolik sayı arasındaki uzaklık $\left|Z_1 - Z_2\right|$ ile gösterilir ve

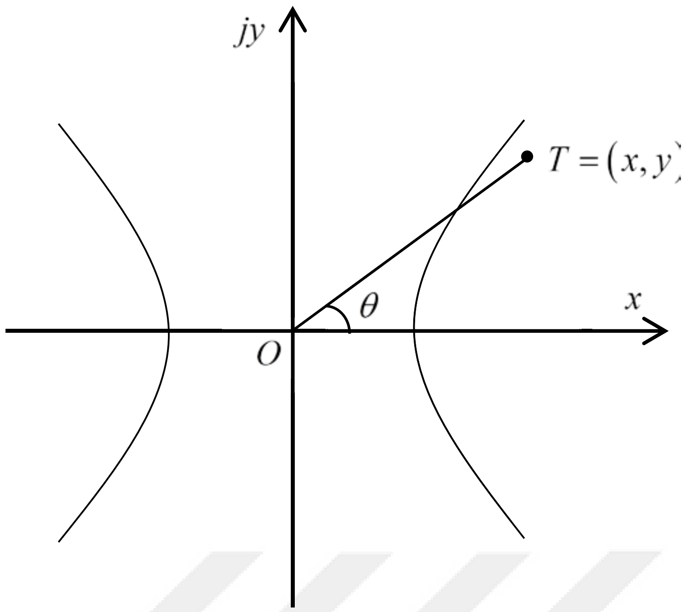
$$\left|Z_1 - Z_2\right| = \sqrt{\left|\left(x_1 - x_2\right)^2 - \left(y_1 - y_2\right)^2\right|}$$

olarak hesaplanır [20].

Tanım 3.1.24. $\mathbb{H}$ hiperbolik düzlemde açı

$$\theta = \operatorname{arctanh} \frac{y}{x}$$

şeklinde tanımlanır [20]. (Şekil 3.1.)



Şekil 3.1. Bir hiperbolik sayının hiperbolik düzlemde gösterilmesi [20]

Tanım 3.1.25. $\mathbb{H}$ hiperbolik düzlemde Maclaurin serisi yardımıyla Euler formülü

$$e^{j\theta}=\cosh\theta+j\sinh\theta$$

şeklindedir [20].

Tanım 3.1.26. $Z\in\mathbb{H}$ hiperbolik sayısının kutupsal ve üstel formu

$$Z=r\left(\cosh\theta+j\sinh\theta\right)=re^{j\theta}$$

şeklinde elde edilir. Burada $r=|Z|$ ve θ ifadeleri, sırasıyla, Z hiperbolik sayısının büyüklüğü ve argümenti denir [20].

Tanım 3.1.27. $\mathbb{H}$ hiperbolik düzlemde $e^{j\theta}$ tarafından tanımlanan dönme matrisi

$$\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix}$$

şeklindedir [20].

3.2. Hiperbolik Spinor

Bu alt bölümde ortonormal taban yardımıyla hiperbolik spinorlar tanıtılmıştır. Bu alt bölümdeki referansımız Ketenci ve ark. [7] olacaktır.

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında orijin etrafındaki dönmelerin grubu olan $SO(1,3)$ cümlesi ile 2×2 tipinde üniter matrisler grubu olan $SU(2,\mathbb{H})$ cümlesi arasında bir homomorfizm vardır. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $SO(1,3)$ cümlesinin elemanları 3 reel bileşenli vektörleri harekete geçirirken, $SU(2,\mathbb{H})$ cümlesinin elemanları ise hiperbolik spinorları harekete geçirir.

Bu homomorfizm spinorlar aracılığıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilir. $\psi_1,\psi_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere bir hiperbolik spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ψ spinoru, $\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}$ izotropik vektör olmak üzere

$$\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}=\psi^t\sigma\psi \qquad \boldsymbol{c}=-\hat{\psi}^t\sigma\psi \tag{3.2}$$

eşitlikleri yardımıyla $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}_1^3$ spacelike (veya timelike) vektörlerini tanımlar. Burada $j^2=1$, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, bileşenleri hiperbolik, simetrik, 2×2 tipinde matrisler olan bir vektör ve t de transpozdur. Öyle ki, $\mathrm{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli matrisleri, sırasıyla, soldan $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisiyle çarpılırsa, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ vektörünün bileşenlerinin

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}j & 0\\ 0 & j\end{pmatrix} \qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

şeklindeki 2×2 tipinde, hiperbolik, simetrik matrisler olduğu görülür. Ek olarak,

$$\hat{\psi}=-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\overline{\psi}=-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\psi_1}\\ \overline{\psi_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\overline{\psi_2}\\ \overline{\psi_1}\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

elde edilir. Burada $\hat{\psi}$, ψ nin eşini ve $\overline{\psi}$, ψ nin hiperbolik eşleniğini gösteren hiperbolik spinorlardır [7].

Böylece (3.1), (3.2), (3.3) ve (3.4) denklemleri yardımıyla $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}_1^3$ spacelike (veya timelike) vektörleri

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\mathrm{j}\boldsymbol{b}&=(\psi_1^2-\psi_2^2,\, j(\psi_1^2+\psi_2^2),-2\psi_1\psi_2)\\ \boldsymbol{c}&=(\psi_1\overline{\psi}_2+\overline{\psi}_1\psi_2,\, j(\psi_1\overline{\psi}_2-\overline{\psi}_1\psi_2),|\psi_1|^2-|\psi_2|^2)\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde verilir. Burada $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}_1^3$ spacelike (veya timelike) vektörleri ikişer ikişer Lorentz anlamda ortogonal ve boyları da birbirine eşittir. Yani $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=0$ ve $\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{c}\|=\overline{\psi}^t\psi$ dir. O halde $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}_1^3$ spacelike (veya timelike) vektörleri ikişer ikişer Lorentz anlamda ortogonal ve bununla birlikte $\langle\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$ olduğundan $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ sıralı üçlüsü ise bir sağ sistem oluşturur. Tersine; boyları eşit, ikişer ikişer Lorentz anlamda ortogonal ve $\langle\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle>0$ olan $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}_1^3$ spacelike (veya timelike) vektörlerine, $\boldsymbol{a}+j\boldsymbol{b}=\psi^t\sigma\psi$, $\boldsymbol{c}=-\overline{\psi}^t\sigma\psi$ denklemleriyle verilen bir ψ hiperbolik spinoru karşılık gelir [7].

Ayrıca ψ hiperbolik spinoru $SU(2,\mathbb{H})$ dönüşümü altında yeni bir hiperbolik spinora dönüşür. Böylece herhangi bir $U\in SU(2,\mathbb{H})$ matrisi için, $\psi'=U\psi$ olmak üzere,

$\overline{\psi'}^t \psi' = \overline{\psi}^t \psi$ eşitliği bulunur. O halde ψ' hiperbolik spinoruna karşılık gelen $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ spacelike (veya timelike) vektörlerinin büyüklüğü, ψ hiperbolik spinoruna karşılık gelen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ spacelike (veya timelike) vektörlerinin büyüklüğüne eşittir. Bu yüzden $SU(2,\mathbb{H})$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayının $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ ortogonal tabanını, $\{\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'\}$ ortogonal tabanına dönüştüren bir dönüşüm oluşturur. Bu dönüşüm ikiye-birdir. Yani $SU(2,\mathbb{H})$ cümlesinin U ve $-U$ şeklinde iki elemanı $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında aynı sıralı üçlüyü oluşturur. $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ üçlüsü ψ hiperbolik spinoruna karşılık gelirken $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\}$ ve $\{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ üçlüleri farklı hiperbolik spinorlara karşılık gelir. Ek olarak ψ ve $-\psi$ hiperbolik spinorları aynı üçlüye karşılık geldiği için (3.5) denkleminde ψ hiperbolik spinoru yerine $-\psi$ hiperbolik spinorunu aldığımız takdirde sonuç değişmemektedir. Böylece homomorfizm ikiye-bir tipindedir [7].

(3.2), (3.3) ve (3.5) denklemleri yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.2.1. Herhangi φ ve ψ iki hiperbolik spinor için,

i. $\overline{\varphi^t \sigma \psi} = -\hat{\varphi}^t \sigma \hat{\psi}$

ii. $\left(\widehat{\lambda\varphi + \mu\psi}\right) = \overline{\lambda}\hat{\varphi} + \overline{\mu}\hat{\psi}$

iii. $\hat{\hat{\psi}} = -\psi$

eşitlikleri geçerlidir. Burada λ ve μ herhangi iki hiperbolik sayıdır [7].

Önerme 3.2.2. Herhangi φ ve ψ hiperbolik spinor çiftleri için

$$\varphi^t \sigma \psi = \psi^t \sigma \varphi$$

dir [7].

Örnek 3.2.3. Özel olarak $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ seçilirse $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olur. Bu seçim (3.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b} = (1,0,0) + j(0,1,0) \text{ ve } \boldsymbol{c} = (0,0,1)$$

olduğundan $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ üçlüsü $\mathbb{R}_1^3$ uzayının $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ kanonik bazını oluşturur [7].

Önerme 3.2.4. Eğer ψ sıfırdan farklı bir hiperbolik spinor ise $\{\psi, \hat{\psi}\}$ lineer bağımsızdır [7].

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında alınan bir spacelike eğrinin Frenet çatısı $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ olsun. Bu Frenet çatısına φ spinoru karşılık getirilirse (3.2) denkleminin benzeri olarak aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B} = \varphi^t \sigma \varphi \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\varphi}^t \sigma \varphi \tag{3.6}$$

Teorem 3.2.5. İki bileşenli φ hiperbolik spinoru, yay parametresi ile parametrelendirilen bir α eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil etsin. Bu takdirde, Frenet türev formülleri

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2}\left(j\tau\varphi - \varepsilon_B \kappa \hat{\varphi} \right)$$

olacak şekilde tek bir hiperbolik spinor denklemine eşdeğerdir. Burada τ ve κ, sırasıyla, eğrinin torsiyon ve eğriliğidir [7].

BÖLÜM 4. MINKOWSKI UZAYINDA SPACELIKE EĞRİLER VE HİPERBOLİK SPINORLAR

Bu bölüm tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Öncelikle, Ketenci ve ark. [7] tarafından oluşturulan $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında eğrilere karşılık gelen hiperbolik spinorlar kullanılarak $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki (spacelike veya timelike) yüzeylerin Darboux çatısına karşılık gelen hiperbolik spinorlar incelenmiştir. Daha sonra $\mathbb{R}_1^3$ uzayında alınan bir spacelike eğrinin Frenet çatısı ile Darboux çatısı arasındaki ilişki hiperbolik spinorlar vasıtasıyla elde edilmiştir. Tezimizi destekleyen örnekler verilmiştir.

4.1. Frenet Türev Formüllerinin Hiperbolik Spinor Gösterimi

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$ eğrisi spacelike bir eğri olsun. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ ve bu üçlüye karşılık gelen hiperbolik spinor φ olmak üzere (3.2) denkleminin benzeri olarak

$$\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B} = \varphi^t \sigma \varphi \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\varphi}^t \sigma \varphi \tag{4.1}$$

denklemleri yazılabilir. Bu takdirde, Frenet türev formülleri

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2}\left(j\tau\varphi - \varepsilon_B \kappa \hat{\varphi} \right)$$

olacak şekilde tek bir hiperbolik spinor denklemine eşdeğerdir. Burada τ ve κ, sırasıyla, spacelike eğrinin torsiyon ve eğriliğidir [7].

Şimdi $\alpha \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisinin Frenet çatısı $\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}\}$ üçlüsü olarak alınsın. Frenet çatısının her bir sıralı üçlüsüne farklı spinor karşılık geldiğinden $\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}\}$ üçlüsüne γ hiperbolik spinoru karşılık gelsin. Bu durumda $\boldsymbol{T}$ spacelike vektör olmak üzere (3.2) denkleminin benzeri olarak

$$\boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N} = \gamma^t \sigma \gamma, \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\gamma}^t \sigma \gamma \tag{4.2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada γ hiperbolik spinoru $\overline{\gamma}^t \gamma = 1$ olacak şekilde seçilmiştir. $\{\gamma, \hat{\gamma}\}$ ikilisinin hiperbolik spinorlar için bir baz oluşturduğu bilindiğine göre

$$\frac{d\gamma}{ds} = f\gamma + g\hat{\gamma} \tag{4.3}$$

ifadesi yazılabilir. Burada f ve g hiperbolik değerli fonksiyonlardır. O halde (4.2) denklemlerinin ilkinin s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} + j\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \frac{d\gamma^t}{ds}\sigma\gamma + \gamma^t \sigma \frac{d\gamma}{ds} \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (2.1), (4.2) ve (4.3) denklemleri yardımıyla (4.4) denkleminden

$$\begin{aligned}
(\tau \boldsymbol{N}) + j(\varepsilon_B \kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}) &= (f\gamma + g\hat{\gamma})^t \sigma\gamma + \gamma^t \sigma (f\gamma + g\hat{\gamma}) \\
&= f\left(\gamma^t \sigma \gamma + \gamma^t \sigma \gamma\right) + g\left(\hat{\gamma}^t \sigma \gamma + \gamma^t \sigma \hat{\gamma}\right) \\
&= 2f\left(\gamma^t \sigma \gamma\right) - 2g\left(-\hat{\gamma}^t \sigma \gamma\right) \\
&= 2f\left(\boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N}\right) - 2g\left(\boldsymbol{T}\right)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada σ matrisleri simetrik olduğundan $\hat{\gamma}^t \sigma \gamma = \gamma^t \sigma \hat{\gamma}$ dir. Böylece

$$j\varepsilon_B \kappa \boldsymbol{T} + j\tau\left(\boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N}\right) = 2f\left(\boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N}\right) - 2g\left(\boldsymbol{T}\right)$$

elde edilir. Bu son denklemden spacelike eğriler için

$$f=\frac{j\tau}{2},\quad g=\frac{-j\varepsilon_B\kappa}{2} \tag{4.5}$$

olduğu görülür. O halde (4.3) denklemi ve (4.5) denklemleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{ds}&=\frac{j\tau}{2}\gamma-\frac{j\varepsilon_B\kappa}{2}\hat{\gamma}\\&=\frac{1}{2}\left(j\tau\gamma-j\varepsilon_B\kappa\hat{\gamma}\right)\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. α, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı spacelike bir eğri olmak üzere eğrinin $\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{N},\boldsymbol{T}\}$ Frenet üçlüsü göz önüne alınsın. γ hiperbolik spinoru $\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{N},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsüne karşılık gelsin. Bu durumda Frenet türev formülleri hiperbolik spinorlar vasıtasıyla

$$\frac{d\gamma}{ds}=\frac{1}{2}\left(j\tau\gamma-j\varepsilon_B\kappa\hat{\gamma}\right)$$

olacak şekilde tek bir hiperbolik spinor denklemi şeklinde yazılabilir. Burada κ ve τ sırasıyla birim hızlı spacelike eğrinin eğriliği ve burulmasıdır.

Örnek 4.2. $\alpha : I\to\mathbb{R}_1^3$ olmak üzere $\alpha(s)=\left(\sinh(s),1,\cosh(s)\right)$ olsun. Bu eğri birim hızlı ve timelike normalli spacelike bir eğridir. Frenet çatısı

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=\left(\cosh(s),0,\sinh(s)\right)\\\boldsymbol{N}&=\left(\sinh(s),0,\cosh(s)\right)\\\boldsymbol{B}&=\left(0,-1,0\right)\end{aligned}$$

dir. Buradan $\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{N}\rangle = -1$ ve $\langle \boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\rangle = 1$ dir. Teorem 4.1. için $\varepsilon_B = +1$, $\kappa = 1$ ve $\tau = 0$ olduğundan

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{j}{2}\hat{\gamma}, \quad \frac{d\hat{\gamma}}{ds} = \frac{j}{2}\gamma$$

dir. $c_1, c_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\gamma = c_1 \cos\left(\frac{js}{2}\right) - c_2 \sin\left(\frac{js}{2}\right), \quad \hat{\gamma} = c_1 \sin\left(\frac{js}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{js}{2}\right)$$

olduğundan

$$\gamma = c_1 \cosh\left(\frac{s}{2}\right) - c_2 \sinh\left(\frac{s}{2}\right), \quad \hat{\gamma} = c_1 \sinh\left(\frac{s}{2}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{s}{2}\right)$$

elde edilir.

Örnek 4.3. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere $\alpha(s) = \left(\sqrt{2}\sin(s), \sqrt{2}\cos(s), s\right)$ olsun. Bu eğri birim hızlı ve timelike binormalli spacelike bir eğridir. Frenet çatısı

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \left(\sqrt{2}\cos(s), -\sqrt{2}\sin(s), 0\right) \\ \boldsymbol{N} &= \left(-\sin(s), -\cos(s), 0\right) \\ \boldsymbol{B} &= \left(-\cos(s), \sin(s), -\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

dir. Buradan $\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{N}\rangle = 1$ ve $\langle \boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\rangle = -1$ dir. Teorem 4.1. için $\varepsilon_B = -1$, $\kappa = \sqrt{2}$ ve $\tau = -1$ olduğundan

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{j}{2}\gamma + \frac{j\sqrt{2}}{2}\hat{\gamma}, \quad \frac{d\hat{\gamma}}{ds} = \frac{j\sqrt{2}}{2}\gamma + \frac{j}{2}\hat{\gamma}$$

dir. $c_1, c_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\gamma = c_1\left(\frac{e^{\frac{j\sqrt{3}}{2}s} - e^{\frac{-j\sqrt{3}}{2}s}}{\sqrt{6}}\right) + c_2\left(\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{j\sqrt{3}}{2}s} + \left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{-j\sqrt{3}}{2}s}}{2\sqrt{3}}\right),$$

$$\hat{\gamma} = c_1\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{j\sqrt{3}}{2}s} + \left(-1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{-j\sqrt{3}}{2}s}}{2\sqrt{3}}\right) + c_2\left(\frac{e^{\frac{j\sqrt{3}}{2}s} - e^{\frac{-j\sqrt{3}}{2}s}}{\sqrt{6}}\right)$$

elde edilir.

4.2. Darboux Türev Formüllerinin Hiperbolik Spinor Gösterimi

M , $\mathbb{R}_1^3$ de yönlendirilmiş bir (spacelike veya timelike) yüzey ve α , M yüzeyinde birim hızlı spacelike bir eğri olmak üzere M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ olsun. $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ Darboux çatısına Γ hiperbolik spinoru karşılık gelirse (3.2) denklemlerine benzer olarak

$$\boldsymbol{n} + j\boldsymbol{g} = \Gamma^t \sigma \Gamma, \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\Gamma}^t \sigma \Gamma \tag{4.6}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $\overline{\Gamma}^t \Gamma = 1$ şekildedir. Ayrıca Γ hiperbolik spinoru $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eder ve $\frac{d\Gamma}{ds}$ ise spacelike bir α eğrisi boyunca $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünün değişimine karşılık gelir.

$\{\Gamma, \hat{\Gamma}\}$ iki bileşenli hiperbolik spinorlar için bir taban oluşturduğundan

$$\frac{d\Gamma}{ds} = h\Gamma + k\hat{\Gamma} \tag{4.7}$$

denklemi yazılabilir. Burada h ve k hiperbolik değerli fonksiyonlardır. Böylece (4.6) denklemindeki $\boldsymbol{n}+j\boldsymbol{g}=\Gamma^{t}\sigma\Gamma$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}+j\frac{d\boldsymbol{g}}{ds}=\frac{d\Gamma^{t}}{ds}\sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\frac{d\Gamma}{ds} \tag{4.8}$$

elde edilir. Böylece (2.3), (4.6) ve (4.7) denklemleri yardımıyla (4.8) denklemi

$$\begin{aligned}
\left(-\varepsilon_{B}\kappa_{g}\boldsymbol{T}+\tau_{g}\boldsymbol{g}\right)+j\left(\varepsilon_{B}\kappa_{n}\boldsymbol{T}+\tau_{g}\boldsymbol{n}\right) &= \left(h\Gamma+k\hat{\Gamma}\right)^{t}\sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\left(h\Gamma+k\hat{\Gamma}\right)\\
&= h\left(\Gamma^{t}\sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\Gamma\right)+k\left(\hat{\Gamma}^{t}\sigma\Gamma+\Gamma^{t}\sigma\hat{\Gamma}\right)\\
&= 2h\left(\Gamma^{t}\sigma\Gamma\right)-2k\left(-\hat{\Gamma}^{t}\sigma\Gamma\right)\\
&= 2h\left(\boldsymbol{n}+j\boldsymbol{g}\right)-2k\left(\boldsymbol{T}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada σ matrisleri simetriktir. Dolayısıyla $\hat{\Gamma}^{t}\sigma\Gamma=\Gamma^{t}\sigma\hat{\Gamma}$ eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\varepsilon_{B}\left(-\kappa_{g}+j\kappa_{n}\right)\boldsymbol{T}+j\tau_{g}\left(\boldsymbol{n}+j\boldsymbol{g}\right)=2h\left(\boldsymbol{n}+j\boldsymbol{g}\right)-2k\left(\boldsymbol{T}\right)$$

ve

$$h=\frac{j\tau_{g}}{2},\quad k=\frac{\varepsilon_{B}\left(\kappa_{g}-j\kappa_{n}\right)}{2} \tag{4.9}$$

olduğu görülür. O halde (4.7) ve (4.9) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\frac{d\Gamma}{ds}=\left(\frac{j\tau_{g}}{2}\right)\Gamma+\varepsilon_{B}\left(\frac{\kappa_{g}-j\kappa_{n}}{2}\right)\hat{\Gamma}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4. M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir (spacelike ya da timelike) yüzey olsun. M yüzeyi üzerinde spacelike bir α eğrisi alınsın. M yüzeyinin $\alpha(s)$ noktasında Darboux çatısı $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ olmak üzere Darboux türev formülleri

$$\frac{d\Gamma}{ds}=\left(\frac{j\tau_g}{2}\right)\Gamma+\varepsilon_B\left(\frac{\kappa_g-j\kappa_n}{2}\right)\hat{\Gamma}$$

şeklinde bir tek hiperbolik spinor denklemine sahiptir. Burada τ_g, κ_g ve κ_n sırasıyla M yüzeyinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulma, geodezik eğrilik ve normal eğriliğidir.

Şimdi M, $\mathbb{R}_1^3$ de yönlendirilmiş bir (spacelike veya timelike) yüzey ve α, M yüzeyinde birim hızlı spacelike bir eğri olmak üzere $\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{n},\boldsymbol{T}\}$ Darboux çatısı göz önüne alınsın. Bu durumda $\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{n},\boldsymbol{T}\}$ Darboux üçlüsüne karşılık gelen hiperbolik spinor ξ olmak üzere

$$\boldsymbol{g}+j\boldsymbol{n}=\xi^t\sigma\xi,\quad \boldsymbol{T}=-\hat{\xi}^t\sigma\xi \tag{4.10}$$

denklemleri verilebilir. Ayrıca burada $\bar{\xi}^t\xi=1$ eşitliği mevcuttur. Burada ξ hiperbolik spinoru $\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{n},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eder ve $\frac{d\xi}{ds}$, Darboux denklemleriyle verilen spacelike bir α eğrisi boyunca $\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{n},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünün değişimine karşılık gelir.

$\{\xi,\hat{\xi}\}$ iki bileşenli hiperbolik spinorlar için taban olduğundan

$$\frac{d\xi}{ds}=h\xi+k\hat{\xi} \tag{4.11}$$

yazılışı tek türlüdür. Burada h ve k hiperbolik değerli fonksiyonlardır. Böylece (4.10) denklemindeki $\boldsymbol{g}+j\boldsymbol{n}=\xi^t\sigma\xi$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\frac{d\boldsymbol{g}}{ds}+j\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{d\xi^t}{ds}\sigma\xi+\xi^t\sigma\frac{d\xi}{ds} \tag{4.12}$$

elde edilir. Böylece (2.3), (4.10) ve (4.11) denklemleri kullanılarak (4.12) denklemi

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_B\kappa_n\boldsymbol{T}+\tau_g\boldsymbol{n}\right)+j\left(-\varepsilon_B\kappa_g\boldsymbol{T}+\tau_g\boldsymbol{g}\right)&=\left(h\xi+k\hat{\xi}\right)^t\sigma\xi+\xi^t\sigma\left(h\xi+k\hat{\xi}\right)\\&=h\left(\xi^t\sigma\xi+\xi^t\sigma\xi\right)+k\left(\hat{\xi}^t\sigma\xi+\xi^t\sigma\hat{\xi}\right)\\&=2h\left(\xi^t\sigma\xi\right)-2k\left(-\hat{\xi}^t\sigma\xi\right)\\&=2h\left(\boldsymbol{g}+j\boldsymbol{n}\right)-2k\left(\boldsymbol{T}\right)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada σ matrisleri simetrik olduğundan $\hat{\xi}^t\sigma\xi=\xi^t\sigma\hat{\xi}$ eşitliği mevcuttur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\varepsilon_B\left(\kappa_n-j\kappa_g\right)\boldsymbol{T}+j\tau_g\left(\boldsymbol{g}+j\boldsymbol{n}\right)=2h\left(\boldsymbol{g}+j\boldsymbol{n}\right)-2k\left(\boldsymbol{T}\right)$$

ve

$$h=\frac{j\tau_g}{2},\quad k=\frac{\varepsilon_B\left(-\kappa_n+j\kappa_g\right)}{2} \tag{4.13}$$

olduğu görülür. O halde (4.11) ve (4.13) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\frac{d\xi}{ds}=\left(\frac{j\tau_g}{2}\right)\xi+\varepsilon_B\left(\frac{-\kappa_n+j\kappa_g}{2}\right)\hat{\xi}$$

denklemi elde edilir. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.5. M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir (spacelike ya da timelike) yüzey olsun. M yüzeyi üzerinde spacelike bir α eğrisi verilsin. M yüzeyinin $\alpha(s)$ noktasında Darboux çatısı $\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{n},\boldsymbol{T}\}$ olmak üzere Darboux türev formülleri

$$\frac{d\xi}{ds}=\left(\frac{j\tau_g}{2}\right)\xi+\varepsilon_B\left(\frac{-\kappa_n+j\kappa_g}{2}\right)\hat{\xi}$$

şeklinde bir tek hiperbolik spinor denklemine sahiptir. Burada τ_g, κ_g ve κ_n sırasıyla M yüzeyinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulma, geodezik eğrilik ve normal eğriliğidir.

4.3. Frenet-Darboux Çatıları Arasındaki İlişkinin Hiperbolik Spinor Gösterimi

İlk olarak $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden φ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden Γ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki araştırılsın. O halde (4.1) ve (4.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}+j\boldsymbol{B}&=\varphi^t\sigma\varphi, \quad \boldsymbol{T}=-\hat{\varphi}^t\sigma\varphi\\ \boldsymbol{n}+j\boldsymbol{g}&=\Gamma^t\sigma\Gamma, \quad \boldsymbol{T}=-\hat{\Gamma}^t\sigma\Gamma\end{aligned} \tag{4.14}$$

olduğu biliniyor. Ayrıca n ile N vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere (2.4) denkleminden $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ Frenet çatısı ile $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ Darboux çatısı arasında

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\\ &\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n}\cosh\theta+\boldsymbol{g}\sinh\theta\\ &\boldsymbol{B}=\boldsymbol{n}\sinh\theta+\boldsymbol{g}\cosh\theta\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\varphi^t \sigma \varphi = \boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{n}\cosh\theta + \boldsymbol{g}\sinh\theta + j\boldsymbol{n}\sinh\theta + j\boldsymbol{g}\cosh\theta \\
&= \boldsymbol{n}\left(\cosh\theta + j\sinh\theta\right) + j\boldsymbol{g}\left(\cosh\theta + j\sinh\theta\right) \\
&= \left(\cosh\theta + j\sinh\theta\right)\left(\boldsymbol{n} + j\boldsymbol{g}\right) \\
&= e^{j\theta}\left(\boldsymbol{n} + j\boldsymbol{g}\right) \\
&= e^{j\theta}\left(\Gamma^t \sigma \Gamma\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6. M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir (spacelike ya da timelike) yüzey olmak üzere, α, M de birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden φ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden Γ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
\varphi^t \sigma \varphi &= e^{j\theta} \Gamma^t \sigma \Gamma \\
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{T}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İkinci olarak $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden φ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{n},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden ξ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki bulunsun. Bunun için (4.1) ve (4.10) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B} = \varphi^t \sigma \varphi, &\quad \boldsymbol{T} = -\hat{\varphi}^t \sigma \varphi \\
\boldsymbol{g} + j\boldsymbol{n} = \xi^t \sigma \xi, &\quad \boldsymbol{T} = -\hat{\xi}^t \sigma \xi
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

olduğu biliniyor. g ile N vektörleri arasındaki açı β olmak üzere (4.15) ve (2.2) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi^t\sigma\varphi = \boldsymbol{N} + j\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{n}\sinh\beta + \boldsymbol{g}\cosh\beta + j\boldsymbol{n}\cosh\beta + j\boldsymbol{g}\sinh\beta \\ &= \boldsymbol{g}\left(\cosh\beta + j\sinh\beta\right) + j\boldsymbol{n}\left(\cosh\beta + j\sinh\beta\right) \\ &= \left(\cosh\beta + j\sinh\beta\right)\left(\boldsymbol{g} + j\boldsymbol{n}\right) \\ &= e^{j\beta}\left(\boldsymbol{g} + j\boldsymbol{n}\right) \\ &= e^{j\beta}\left(\xi^t\sigma\xi\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.7. M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir (spacelike ya da timelike) yüzey olmak üzere, α, M de birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden φ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{n},\boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden ξ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}\varphi^t\sigma\varphi &= e^{j\beta}\xi^t\sigma\xi \\ \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{T}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Üçüncü olarak da $\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{N},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden γ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden Γ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki verilsin. Bunun için (4.2) ve (4.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N} &= \gamma^t\sigma\gamma, \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\gamma}^t\sigma\gamma \\ \boldsymbol{n} + j\boldsymbol{g} &= \Gamma^t\sigma\Gamma, \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\Gamma}^t\sigma\Gamma\end{aligned} \tag{4.16}$$

yazılabilir. ω, g ile N vektörleri arasındaki açı olmak üzere (2.2) ve (4.16) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\gamma^t\sigma\gamma = \boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{n}\cosh\omega + \boldsymbol{g}\sinh\omega + j\boldsymbol{n}\sinh\omega + j\boldsymbol{g}\cosh\omega \\ &= \boldsymbol{n}\left(\cosh\omega + j\sinh\omega\right) + j\boldsymbol{g}\left(\cosh\omega + j\sinh\omega\right) \\ &= \left(\cosh\omega + j\sinh\omega\right)\left(\boldsymbol{n} + j\boldsymbol{g}\right) \\ &= e^{j\omega}\left(\boldsymbol{n} + j\boldsymbol{g}\right) \\ &= e^{j\omega}\left(\Gamma^t\sigma\Gamma\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.8. M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir (spacelike ya da timelike) yüzey olmak üzere, α, M de birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden γ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden Γ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned}\gamma^t\sigma\gamma &= e^{j\omega}\Gamma^t\sigma\Gamma \\ \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{T}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Son olarak, dördüncü durumda ise $\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden γ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{g}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{T}\}$ üçlüsünü temsil eden ξ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki için (4.2) ve (4.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N} &= \gamma^t\sigma\gamma, \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\gamma}^t\sigma\gamma \\ \boldsymbol{g} + j\boldsymbol{n} &= \xi^t\sigma\xi, \quad \boldsymbol{T} = -\hat{\xi}^t\sigma\xi\end{aligned} \tag{4.17}$$

yazılabilir. δ, n ile N vektörleri arasındaki açı olsun. Böylece (2.4) denklemleri ile (4.17) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\gamma^t \sigma \gamma = \boldsymbol{B} + j\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n}\sinh\delta + \boldsymbol{g}\cosh\delta + j\boldsymbol{n}\cosh\delta + j\boldsymbol{g}\sinh\delta \\
&= \boldsymbol{g}\left(\cosh\delta + j\sinh\delta\right) + j\boldsymbol{n}\left(\cosh\delta + j\sinh\delta\right) \\
&= \left(\cosh\delta + j\sinh\delta\right)\left(\boldsymbol{g} + j\boldsymbol{n}\right) \\
&= e^{j\delta}\left(\boldsymbol{g} + j\boldsymbol{n}\right) \\
&= e^{j\delta}\left(\xi^t \sigma \xi\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.9. M, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş bir (spacelike ya da timelike) yüzey olmak üzere, α, M de birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden γ hiperbolik spinoru ile $\{\boldsymbol{g}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{T}\}$ sıralı üçlüsünü temsil eden ξ hiperbolik spinoru arasındaki ilişki,

$$
\begin{gathered}
\gamma^t \sigma \gamma = e^{j\delta} \xi^t \sigma \xi \\
\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}
\end{gathered}
$$

şeklindedir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Diferensiyel Geometride Darboux çatısı ve Frenet çatısı eğri dizaynında önemlidir. Bu çalışmada Minkowski uzayında orijin etrafındaki dönmelerin grubu olan $SO(1,3)$ ile 2×2 tipinde üniter matrisler grubu olan $SU(2,\mathbb{H})$ arasındaki homomorfizm kullanılarak, hiperbolik spinorlar ile spacelike eğrinin Frenet çatısı arasındaki bağıntı ve hiperbolik spinorlar ile (spacelike veya timelike) M yüzeyinin Darboux çatısı arasındaki bağıntılar verildi. Ayrıca $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında M yüzeyinin Darboux çatısı ile α eğrisinin Frenet çatısı arasındaki ilişki hiperbolik spinorlar yardımıyla verildi. Yani bu çalışmada, Minkowski uzayında yüzeylerin hiperbolik spinorlar cinsinden nasıl ifade edileceği gösterildi.

Bu tezin hiperbolik spinorların yanı sıra bileşenleri dual sayılardan oluşan dual spinorlar için yapılacak olan çalışmalara yardımcı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu çalışma matematik, fizik, mühendislik ve astronomi gibi bilimlere önemli katkı yapacağına hiç şüphe yoktur.

KAYNAKLAR

[1] Cartan, E., The Theory of Spinors, Dover Publications, New York, 1-157, 1966.

[2] Vivarelli, M. D., Development of spinor descriptions of rotational mechanics from Euler's rigid body displacement theorem. Celestial Mech., 32(3): 193-207, 1984.

[3] Brauer, R., Weyl, H., Spinors in n dimensions. Am. J. Math., 57(2): 425-449, 1935.

[4] Del Castillo, G. F. T., Barrales, G. S., Spinor formulation of the differential geometry of curves. Rev. Colombiana Mat., 38: 27-34, 2004.

[5] Kişi, İ., Tosun, M., Spinor Darboux equations of curves in Euclidean 3-space. Math. Morav., 19(1): 87-93, 2015.

[6] Ünal, D., Kişi, İ., Tosun, M., Spinor bishop equations of curves in Euclidean 3-space. Adv. Appl. Clifford Al., 23(3): 757-765, 2013.

[7] Ketenci, Z., Erişir, T., Güngör, M. A., A construction of hyperbolic spinors according to Frenet frame in Minkowski space. J. Dyn. Syst. Geom. Theor., 13(2): 179-193, 2015.

[8] Erişir, T., Güngör, M. A., Tosun, M., Geometry of the hyperbolic spinors corresponding to alternative frame. Adv. Appl. Clifford Al., 25(4): 299-810, 2015.

[9] Boothby, W. M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, Kaliforniya, 1-400, 1975.

[10] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Milli Eğitim Basımevi, 1983.

[11] O'neill, B., Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, Academic Press, Kaliforniya, 1-468, 1983.

[12] Birman, G. S., Nomizu K., Trigonometry in Lorentzian geometry. Am. Math. Mon., 91(9): 543-549, 1984.

[13] Ekmekçi, N., Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 1991.

[14] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, 1-164, 2012.

[15] Ikawa, T., On curves and submanifolds in an indefinite-Riemannian manifold. Tsukuba J. Math., 9(2): 353-371, 1985.

[16] Beem, J. K., Ehrlich, P. E., Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, New York, 1-635, 1981.

[17] Özdemir, M., Ergin, A. A., Spacelike Darboux curves in Minkowski 3-space. Differ. Geom. Dyn. Syst., 9: 131-137, 2007.

[18] Ratcliffe, J. G., Foundation of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag, New York, 1-747, 1994.

[19] Clifford, W. K., Mathematical papers. İçinde: Further Notes on Biquaternions, 385-394, 1882.

[20] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P., Geometry of Minkowski Space-Time, SpringerBriefs in Physics, 1-99, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Yakup BALCI, 17.07.1988 tarihinde Gerede'de doğdu. İlköğrenimini Bolu'nun Gerede İlçesinde 100. Yıl İlkokulunda, ortaöğrenimini Gerede Lisesi'nde tamamladı. 2007 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2012 yılında tamamladı (İngilizce hazırlık + 4 yıl). Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Matematik anabilim dalı Geometri bilim dalında yüksek lisansa başladı. Ayrıca Şubat 2015'te Van'da matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Şu anda Van'da Canik Çok Programlı Anadolu Lisesi'nde görevine devam etmektedir.