T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER UZAYLARDA BAZI DARALMA ŞARTLARINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyda ÇAKAR

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK BÖLÜMÜ**

Enstitü Bilim Dalı : **FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FOKSİYONEL ANALİZ**

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK**

Mayıs 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER UZAYLARDA BAZI DARALMA ŞARTLARINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyda ÇAKAR

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**

Bu tez 30/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.	**Doç.Dr.**	**Doç.Dr.**
Mahpeyker ÖZTÜRK	**Selma ALTUNDAĞ**	**Betül USTA**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Şeyda ÇAKAR

30.04.2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini gördüğüm annem Kadriye ÇAKAR, babam Servet ÇAKAR'a, gösterdikleri sabır ve anlayıştan dolayı ve çalışmam için manevi olarak desteğini esirgemeyen can dostum Asude Sultan İLKHAN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

G	:Basit yönlü graf
$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
(S,T)	:Dönüşüm çifti
$E(G)$	:Grafın kenarları
$V(G)$	:Grafın köşeleri
φ	:Kıyaslama fonksiyonu
(X,μ)	:Modüler uzay
L^{φ}	:Orlicz fonksiyon uzayları
PO	:Picard Operatörü
$\mathbb{R}^{+}$ veya $\mathbb{R}_{+}$	:Pozitif reel sayılar kümesi
ST	:$S \circ T$
T^{n}	:T dönüşümünün n inci iterasyonu
$F(T)$	:T dönüşümünün sabit noktaları kümesi
$\mathbb{Z}$	:Tamsayılar kümesi
X_{T}	:$\{x \in X : (x,Tx) \in E(G)\}$
Tx	:x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
Δ	:$X \times X$ kümesinin köşegeni

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Daralma Dönüşümü, Metrik Uzay, Modüler Uzay, Graf Teorisi.

Altı bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, modüler olarak isimlendirilen μ-fonksiyoneli incelendi. Modüler yapısı kullanılarak tanımlanan modüler uzay çalışıldı. Bu uzaylarda bazı topolojik özellikler ile birlikte sabit nokta teorisi ile ilgili kavramlar verildi. Bu bölümün son kısmında grafla donatılmış modüler uzay kavramı incelendi.

Üçüncü bölümde kıyaslama fonksiyonlarını içeren genelleştirilmiş hemen hemen daralma şartını sağlayan zayıf uyumlu dönüşümler için bazı sabit ve ortak sabit nokta teoremleri modüler uzayda ispatlandı.

Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş hemen hemen (φ, L, G) daralma şartı tanımlanarak modüler uzaylarda bazı sabit nokta sonuçları elde edildi. Ayrıca ST-bağlantılı ve ℓ_μ-graf kavramları tanıtılarak yönlü bir grafta iki dönüşüm için ortak sabit nokta teoremleri verildi.

Beşinci bölümde modüler uzay üzerinde kıyaslama fonksiyon sınıfı ve A-sınıfı daralma dönüşümleri kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş hemen hemen A_φ daralma dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgili sabit nokta teoremleri çalışıldı. İntegral tipi daralma şartını sağlayan dönüşümler için bazı sonuçlar elde edildi.

Son bölümde, B_φ^f daralma dönüşümleri ve B_φ^f integral daralma dönüşümleri tanımlanmıştır. Bu dönüşümler kullanılarak modüler uzay üzerinde dönüşüm çiftlerinin sabit noktasının varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

FIXED POINTS OF MAPPINGS SATISFYING SOME CONTRACTIVE CONDITIONS IN MODULAR SPACES

SUMMARY

Keywords: Fixed Point, Contractive Mapping, Metric Space, Modular Space, Graph Theory

In the first part of this study which is prepared as six sections, some basic definitions and theorems which will be used in later sections were given.

In the second chapter, a functional μ which is called modular has been investigated. The modular space structure defined by the modular was studied. In these spaces, some topological properties and concepts related to fixed point theory were given. At the end of this section, modular spaces equipped with a graph were examined.

In the third chapter, some fixed and common fixed point theorems are proved in modular spaces for weakly compatible mappings that provide generalized almost contractive conditions including comparison functions.

In the fourth chapter, some fixed point results were obtained in modular spaces by defining the generalized almost (φ, L, G)-contractive condition. In addition, ST connected and ℓ_μ-graph concepts were introduced and common fixed point theorems were given for two mappings.

In the fifth chapter fixed point theorems related to the existence and uniqueness of the common fixed points of generalized almost A_φ-contraction mappings obtained by using the comparison function class and A-class contraction mappings on the modular space were studied. Also, some results have been obtained for mappings which involve the integral type contractive condition.

In the last section, B_φ^f-contraction mappings and B_φ^f integral type contraction mappings are defined. By using these mappings, the existence and uniqueness of the fixed point of pairs on the modular space have been proved and some results have been obtained.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1. X boş kümeden farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlı, reel değerli, negatif olmayan bir

$$\begin{aligned} d: X \times X &\to \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\to d(x, y) \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdakileri sağlasın:

d1. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$,

d2. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

d3. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$, (simetri özelliği)

d4. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, (üçgen eşitsizliği).

Bu durumda d fonksiyonuna X uzayında bir metrik, (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir (Şuhubi, 2001).

Metrik uzay kavramı Frechet tarafından 1906 yılında ortaya atılmıştır. Ancak metrik uzay ifadesini ilk kullanan Hausdorff olmuştur.

Örnek 1.1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe mutlak değer (alışılmış, doğal, salt değer) metriği denir (Şuhubi, 2001).

Örnek 1.1.3. $\mathbb{R}^2$ de $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ fonksiyonu bir metriktir. Bu metrik dikdörtgen bloklara ayrılmış Manhanttan adasındaki ulaşım yolunu çağrıştırması nedeniyle bazen Manhattan metriği olarak da adlandırılır. Yine $\mathbb{R}^2$ de

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

metriğine ise Euclid metriği denir (Şuhubi, 2001).

Örnek 1.1.4. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \ ise \\ 1, & x \neq y \ ise \end{cases}$$

ile tanımlı d fonksiyonu ise ayrık (diskre) metriktir. (Maddox, 1970).

Örnek 1.1.5. $l_\infty = \left\{ x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$ sınırlı diziler uzayı olmak üzere bu uzay üzerinde tanımlı $d_\infty(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$ fonksiyonu bir metriktir (Şuhubi, 2001).

Örnek 1.1.6. $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ olsun. Bu uzay $f, g \in C[a,b]$ olmak üzere $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ metriği ile bir metrik uzaydır (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.7. (x_n), X metrik uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ için, $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var ise (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir (Maddox, 1970).

Örnek 1.1.8. $X = \mathbb{R}$ uzayı üzerinde tanımlanan alışılmış metriğe göre $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi $n \to \infty$ için $0 \in X$ noktasına yakınsar.

$X = (0,1)$ uzayında alışılmış metriğe göre bu dizinin limiti $0 \notin X$ noktasıdır. Bu durumda dizi yakınsak değildir. Dolayısıyla bir dizinin yakınsaklığı bulunduğu uzaya bağlıdır.

$C[0,1]$ uzayı üzerinde $d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$, $t \in [0,1]$ metriği tanımlansın ve $x_n = e^{-m}$, $(n \in N)$ dizisi verilsin. Bu dizi için

$$d(x,0) = \int_0^1 e^{-nt} dt = \frac{1}{n}\left(1 - e^{-n}\right) \to 0, \ (n \to \infty)$$

olur. Aynı dizi için

$$d_\infty(x_n, 0) = \max_{t \in [0,1]} \left| e^{-nt} \right| = 1, \ \ (n \to \infty)$$

dır. Buradan ise yakınsaklığın uzayda tanımlanan metriğe bağlı olduğu görülür (Jain, 2009).

Tanım 1.1.9. Bir (X, d) metrik uzayında (x_n) bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı; $m, n \geq N$ eşitsizliğini sağlayan bütün m ve n doğal sayıları için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu dizi bir Cauchy dizisi adını alır.

Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Metrik uzayda alınan bir Cauchy dizisi sınırlıdır ve bu dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa kendisi de yakınsaktır (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.1.10. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzay tam metrik uzay olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Örnek 1.1.11. $C[a,b]$ fonksiyon uzayı $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ metriğine göre tam uzaydır (Kreyszig, 1978).

Örnek 1.1.12. Q rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metriğe göre tam değildir (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.1.13. (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı için $d_1(x, x_0) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon, x) > 0$ varsa $f : X \to Y$ fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Yani, $x \in B(x_0, \delta)$ iken $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.14. (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olmak üzere bir $T : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $d_1(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d_2(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ olacak şekilde sadece ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu x_0 noktasında düzgün süreklidir denir (Maddox, 1970).

Örnek 1.1.15. $\mathbb{R}$ de $d(x, y) = |x - y|$ alışılmış metriği için

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to Tx = \sin x$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 1.1.16. $\mathbb{R}$ de $d(x, y) = |x - y|$ alışılmış metriği için

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to Tx = x^2$$

fonksiyonu süreklidir, fakat $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

Teorem 1.1.17. (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay olsun ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0),\ (n \to \infty)$$

olmasıdır. Sürekli bir fonksiyon için $f(x_n) \to f(x_0)$ iken $x_n \to x_0$ ifadesi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin; d mutlak değer metriği olmak üzere $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$, fonksiyonu $f(x) = x^2$ ve $n \in N$ için $x_n = (-1)^n$ biçiminde verilsin. Bu durumda

$$f(x_n) = 1 \to f(1), (n \to \infty)$$

fakat (x_n) dizisi 1 noktasına yakınsak değildir (Jain, 2009).

Tanım 1.1.18. X boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \to X \qquad . : \mathbb{F} \times X \to X$$

$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \to \lambda.x$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

a. $x + y = y + x$
b. $x + (y + z) = (x + y) + z$
c. $\forall x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olan bir $e \in X$ vardır.
d. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = e$ olan bir $(-x) \in X$ vardır.
e. $1.x = x$
f. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
g. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
h. $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir (Maddox, 1970).

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise X 'e reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise X uzayına kompleks vektör uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.19. X , $\mathbb{F}$ cismi ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|.\| : X \to R^+$$
$$x \to \|x\|$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için,

a. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
b. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

c. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm, $(X,\|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Maddox, 1970).

X üzerindeki bir norm, X üzerinde $x, y \in X$ olmak üzere

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Bir vektör uzayı üzerindeki her metrik bir normdan elde edilmez. s uzayı (tüm sınırlı veya sınırsız kompleks terimli diziler uzayı) bir vektör uzayıdır. $x=(\varsigma_i)$ ve $y=(\eta_i)$ olmak üzere

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\varsigma_j-\eta_j|}{1+|\varsigma_j-\eta_j|}$$

ile tanımlanan metrik, normdan elde edilemez. Bir normdan elde edilen d metriği $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

$$d(x+\alpha, y+\alpha)=d(x,y) \text{ ve } d(\alpha x, \alpha y)=|\alpha| d(x,y)$$

özelliklerini gerçekler (Kreyszig, 1978).

Tanım 1.1.20. Bir normlu lineer uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir (Maddox, 1970).

X uzayının reel veya kompleks oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.21. $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayı $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

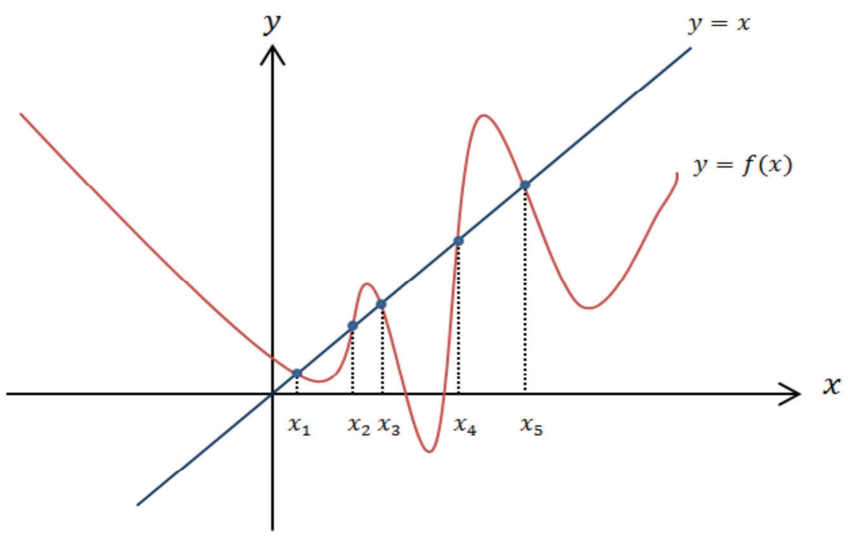
Örnek 1.1.22. $C[a,b] = \{ x \mid x : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon} \}$ uzayı: $j = [a,b]$ olmak üzere, $\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$ normu ile Banach uzayıdır. Fakat $j = [0,1]$ alındığında $C[0,1]$ uzayı $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$ ile tanımlanan norm altında tam uzay değildir, dolayısıyla bir Banach uzayı değildir (Kreyszig, 1978).

1.2. Banach Daralma Dönüşüm Prensibi Ve Sabit Nokta Kavramı

Tanım 1.2.1. X boş kümeden farklı bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$Tx = x$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T nin sabit noktası denir (Granas ve Dugundji, 2002).



Şekil 1.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dönüşümünün sabit noktaları x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , (Sawangsup , 2015)

Bu durumda $x \in X$ olmak üzere $Tx = x$ denkleminin çözümü, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır ve T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi

$$F(T) = \{x \in X : Tx = x\}$$

ile gösterilir (Granas ve Dugundji, 2002).

$T : X \to X$ ile tanımlanan bir T dönüşümünün herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek 1.2.2.

a. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$T(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \text{ ise} \\ 2, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan T dönüşümü için $0,1$ ve 2 noktaları birer sabit noktadır.

b. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı T dönüşümü için 1 noktası tek sabit noktadır.

c. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$Tx = x^2 + x + 3$$

ile tanımlanan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

d. $X = [0, \infty)$ ve $T : X \to X$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için

$$Tx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

ile tanımlansın. $x=0$ noktası dönüşümün tek sabit noktasıdır.

Banach sabit nokta teoremi, belirli dönüşümlerin sabit noktaları için varlık ve teklik teoremi olup, uygulamaya yönelik problemlerin çözümünde sabit noktaya en iyi yaklaşımı elde etmek için inşa esasına dayanan bir işlem yöntemidir. Bu işleme iterasyon adı verilir. İterasyon işlemleri, uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm dallarında kullanılır ve yakınsaklık ispatları ve hata tahminleri, genellikle Banach sabit nokta teoreminin uygulaması yardımıyla elde edilir.

Tanım 1.2.3. X herhangi bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için

$$T^{n+1}\left(x\right) = T\left(T^{n}\left(x\right)\right)$$

olarak $T^{n}\left(x\right)$ tanımlandığında buna, T altındaki x in $n.$ iterasyonu denir (Granas ve Dugundji, 2002).

Tanım 1.2.4. $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay olsun. Bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d\left(Tx,Ty\right) \le \alpha d\left(x,y\right) \tag{1.1}$$

olacak şekilde $\alpha \ge 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne X üzerinde Lipschitzian dönüşüm adı verilir. (1.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük α değerine Lipschitz sabiti denir (Granas ve Dugundji, 2002).

T Lipschitzian dönüşümü için, $\forall\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$ ise $\alpha d(x,y) < \varepsilon$ olduğundan $d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) < \alpha\dfrac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$ dır. Bu nedenle T Lipschitzian dönüşümü, tanımlı olduğu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 1.2.5. $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = \dfrac{3}{2}x$ olsun. Bu durumda

$$d(Tx,Ty) = \left|\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y\right| = \frac{3}{2}d(x,y) \leq kd(x,y)$$

olduğundan $k \geq \dfrac{3}{2}$ için Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 1.2.6. (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (1.1) eşitsizliği $\alpha \in [0,1)$ olması durumunda sağlanıyorsa T dönüşümüne daralma veya büzülme (contraction) dönüşümü denir (Granas, Dugundji, 2002).

Teorem 1.2.7. (Banach Sabit Nokta Teoremi) X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir (Kreyszig, 1978).

Bu teoremin ispatı için öncelikle bir (x_n) dizisi oluşturulup bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilir. Bu dizi X tam uzayında yakınsak olacaktır ve daha sonra bu dizinin limiti olan noktanın T dönüşümünün bir sabit noktası olduğu ve bu noktanın tek olduğu gösterilir. Burada (x_n) dizisi, bir $x_0 \in X$ noktası seçilip

$$x_0,\ x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots\ldots, x_n = T^n x_0, \ldots. \tag{1.2}$$

şeklinde oluşturulur. Oluşturulan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine en iyi yaklaşım dizisi ya da Picard iterasyon dizisi adı verilir.

Tanım 1.2.8. (X,d) metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahip ve (1.2) de tanımlanan en iyi yaklaşım dizisi bu noktaya yakınsarsa T dönüşümüne X üzerinde Picard operatörü denir (Berinde, 2007).

Örnek 1.2.9. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dönüşümü $f(x)=f((x_1,x_2))=\left(\frac{1}{2}\cos x_2,\frac{1}{2}\sin x_1+1\right)$ ile tanımlansın. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış metriğe göre her bir $x=(x_1,x_2)$ ve $y=(y_1,y_2)$ için $d(f(x),f(y))\leq\frac{1}{2}d(x,y)$ sağlanır. Yani $\mathbb{R}^2$ de bir daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.2.10. $X=\{x\in\mathbb{Q}:x\geq1\}$ kümesi üzerinde $f:X\to X$ fonksiyonu $f(x)=\left(2/x\right)+\left(1/x\right)$ ile verilsin. $\mathbb{R}$ deki alışılmış metriğe göre $\forall x,y\in X$ için $d(f(x),f(y))\leq\frac{1}{2}d(x,y)$ sağlanır. Yani f daralma dönüşümüdür fakat hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek 1.2.11. $Tx=x$ ile tanımlı $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$|Tx-Ty|\leq|x-y|$$

eşitsizliği sağlanır. Bütün $x\in\mathbb{R}$ noktaları için T dönüşümünün sabit noktalarıdır.

Buradan şu sonuçları çıkarılabilir.

a. Her daralma dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez.

b. Örnek 1.2.10 da olduğu gibi dönüşümün birden fazla sabit noktası olabilir (Soykan, 2008).

Banach sabit nokta teoreminde uzayın tam olma şartı kaldırılamaz.

Örnek 1.2.12. $X=(0,1)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun. Bu uzayın tam metrik uzay olmadığı açıktır.

$$\begin{aligned} &T: X \to X \\ &\quad x \to Tx = x^2 \end{aligned}$$

dönüşümü bir daralma dönüşümüdür. Fakat sabit noktası yoktur (Jain, 2009).

Banach sabit nokta teoreminin uygulanması istenen durumlarda T dönüşümü (X,d) tam metrik uzayının tamamı üzerinde bir daralma olmayabilir; fakat sadece X uzayının bir Y alt kümesi üzerinde daralma olabilir. Eğer Y alt kümesi kapalı ise (Y,d_y) tamdır. Bu durumda T, Y den Y içine tanımlı bir dönüşüm ise Banach sabit nokta teoremini uygulayabiliriz. Bununla ilgili olarak pratik bir sonuç aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 1.2.13. (Bir Yuvar Üzerinde Daralma) T, bir X tam metrik uzayından X içine bir dönüşüm olsun. T dönüşümünün kapalı bir $Y=\{x\in X : d(x,x_0)\le r\}$ yuvarı üzerinde bir daralma ve $0<a\le 1$ olmak üzere $d(x_0,Tx_0)<(1-a)r$ olsun. Bu durumda (1.2.) ifadesinde tanımlanan iterasyon dizisi $x\in Y$ noktasına yakınsar. Bu nokta T dönüşümünün Y deki tek bir sabit noktasıdır (Agarwal, Meehan, ve O'Regan 2001).

Teorem 1.2.14. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X\to X$ bir dönüşüm olmak üzere bir $m\in\mathbb{Z}$ için

$$T^{m} = T \circ T \circ ..... \circ T \quad (m \text{ defa})$$

bir daralma dönüşümü ise, T, X uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir (Granas, Dugundji, 2002).

1.3. Daralma Dönüşüm Çeşitleri Ve Özellikleri

Tanım 1.3.1. (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

ise T dönüşümüne kesin daralma (contractive) dönüşümü denir (Granas ve Dugundji, 2002).

Örnek 1.3.2. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı $Tx = x + 1 - \dfrac{x}{1+|x|}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\left|T^{'}(x)\right| = 1 - (1+|x|)^{-2} < 1$ dir ve dolayısıyla her $x < y$ için

$$|Ty - Tx| = \left|\int_{x}^{y} T^{'}(t)\,dt\right| \leq \int_{x}^{y} \left|T^{'}(t)\right| dt < \int_{x}^{y} dt = |y - x|$$

olur. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriğine göre T kesin daralma dönüşümüdür ve sabit noktası yoktur.

Tanım 1.3.3. (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y)$$

ise T dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir (Granas ve Dugundji, 2002).

Örnek 1.3.4. $X = \mathbb{R}$ ve X mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to Tx = x + 1$$

olsun.

$$d(Tx, Ty) = |x + 1 - y - 1| = |x - y| = d(x, y)$$

sağlanmış olur. Böylece T bir genişlemeyen dönüşümdür fakat daralma ya da kesin daralma dönüşümü değildir.

Bu ifadelerden aşağıdaki genelleştirme yapılabilir:

T daralma $\Rightarrow$ T kesin daralma $\Rightarrow$ T genişlemeyen $\Rightarrow$ T Lipschitzian (Jain, 2009).

Fakat ters gerektirmeler her zaman doğru değildir.

Tanım 1.3.5. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $a > 1$ için

$$d(Tx, Ty) \geq a d(x, y)$$

ise T ye genişleyen (expansive) dönüşüm denir (Granas ve Dugundji, 2002).

Tanım 1.3.6. (X, d) metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ için

$$d(Tx,Ty) \le \delta d(x,y) + Ld(x,Ty)$$

ise T dönüşümüne hemen hemen daralma dönüşümü denir (Berinde, 2004).

Tanım 1.3.7. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $\delta \in (0,1)$ ve $L \ge 0$ için

$$d(Tx,Ty) \le \delta d(x,y) + L \min\{d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

ise T dönüşümü (B) şartını sağlar denir (Babu, 2008).

Teorem 1.3.8. (X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü (B) şartını sağlasın. T dönüşümünün X uzayında sabit noktası vardır (Babu, 2008).

Tanım 1.3.9. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $\delta \in (0,1)$, $L \ge 0$ için

$$d(Tx,Ty) \le \delta M_1(x,y) + L \min\{d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

ve

$$M_1(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\left[d(x,Ty), d(y,Tx)\right]\right\}$$

ise T dönüşümüne genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü denir (Berinde, 2009).

Teorem 1.3.10. (X,d) tam metrik uzayı ve $T:X\to X$ dönüşümü genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü olsun. T dönüşümünün X uzayında sabit noktası vardır (Berinde, 2009).

Tanım 1.3.11. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T,S:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$, $\delta\in(0,1)$, $L\geq 0$ için

$$d(Sx,Ty)\leq \delta M_1(x,y)+L\min\{d(x,Sx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Sx)\}$$

ve

$$M_1(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,Sx),d(y,Ty),\frac{1}{2}\left[d(x,Ty),d(y,Sx)\right]\right\}$$

ise (T,S) ikilisine genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşüm çifti denir (Ciric, 2011).

1.4. $\varphi-$ Daralma Dönüşümleri

$\Phi:=\{\varphi|\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)\text{ bir fonksiyon}\}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlasın:

i_φ. φ fonksiyonu monoton artan fonksiyondur yani $t_1\leq t_2\Rightarrow\varphi(t_1)\leq\varphi(t_2)$ dir.

ii_φ. $\forall t>0$ için $\varphi(t)<t$ dir.

iii_φ. $\varphi(0)=0$ dır.

iv_φ. φ sürekli fonksiyondur.

v_φ. $\forall t>0$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$ dır.

vi_φ. $\forall t>0$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)$ serisi yakınsak bir seridir.

vii_φ. $\lim_{t\to\infty}\left(t-\varphi(t)\right)=\infty$ dur.

$viii_\varphi$. φ fonksiyonu alt-toplamsaldır.

Yukarıda verilen özellikler doğrultusunda φ fonksiyonu için aşağıdaki lemma verilebilir (Berinde, 2002).

Lemma 1.4.1.

a. (i_φ) ve (ii_φ) özellikleri (iii_φ) özelliğini sağlar.
b. (ii_φ) ve (iv_φ) özellikleri (iii_φ) özelliğini sağlar.
c. (i_φ) ve (v_φ) özellikleri (ii_φ) özelliğini sağlar (Berinde, 2002).

Tanım 1.4.2. $\Phi:=\left\{\varphi \middle| \varphi:[0,\infty)\to[0,\infty) \text{ bir fonksiyon}\right\}$ ailesi verilsin.

a. (i_φ) ve (v_φ) özelliklerini sağlayan φ fonksiyonuna kıyaslama (comparison) fonksiyonu denir.
b. (i_φ) ve (vi_φ) özelliklerini sağlayan φ fonksiyonuna (c)-kıyaslama (comparison) fonksiyonu denir (Berinde, 2002).

Lemma 1.4.3. Kıyaslama ve (c)-kıyaslama fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Herhangi (c)-kıyaslama fonksiyonu aynı zamanda kıyaslama fonksiyonudur.
2. Herhangi bir kıyaslama fonksiyonu (iii_φ) özelliğini sağlar.
3. Alt-toplamsal bir kıyaslama fonksiyonu süreklidir.
4. φ kıyaslama fonksiyonu ise $k\in\mathbb{N}$ için φ^k bileşke fonksiyonu da kıyaslama fonksiyonudur.

5. $\varphi, (c)$-kıyaslama fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ t &\to s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t) \end{aligned}$$

fonksiyonu monoton artan bir fonksiyondur ve $s(0) = 0$ özelliğini sağlar (Berinde, 2002).

Örnek 1.4.4.

1. $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $\varphi(t) = \lambda t,\ t \in [0,\infty)$ fonksiyonu $(i_\varphi - viii_\varphi)$ özelliklerini sağlar.
2. $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$

   $t \to \varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ fonksiyonu kıyaslama fonksiyonudur fakat (c)-kıyaslama fonksiyonu değildir.
3. $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$

   $$t \to \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{3}, & 0 \le t \le \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{18}, & t > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$ fonksiyonu (c)-kıyaslama fonksiyonudur.
4. $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$

   $$t \to \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1+t}, & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{2t}{3}, & t > 1 \end{cases}$$ fonksiyonu (c)-kıyaslama fonksiyonudur.
5. $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$t \quad \to \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1+t}, & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{1}{2t}, & t > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu kıyaslama fonksiyonudur fakat (c)-kıyaslama fonksiyonu değildir (Berinde, 2002).

Tanım 1.4.5. (X,d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le \varphi(d(x,y))$$

olan $\varphi: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu varsa T dönüşümüne $\varphi-$daralma dönüşümü adı verilir (Berinde, 2002).

Teorem 1.4.6. (X,d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir $\varphi-$daralma dönüşümü olsun. T bir Picard dönüşümüdür yani,

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad \mathrm{n} = 1,2,...,$$

ile tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyon dizisi T dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Berinde, 2002).

Tanım 1.4.7. (X,d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le \varphi(d(x,y)) + Ld(y,Tx)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ sayısı ve φ kıyaslama fonksiyonu varsa T dönüşümüne hemen-hemen $\varphi-$daralma dönüşümü veya $(\varphi, L)-$hemen hemen daralma dönüşümü adı verilir (Berinde, 2002).

Teorem 1.4.8. (X,d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir zayıf φ daralma dönüşümü olsun. T bir Picard dönüşümüdür (Berinde, 2002).

Tanım 1.4.9. $A_\varphi = \{\alpha : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+ \text{ bir fonksiyon}\}$ ailesi aşağıdaki şartları sağlasın.

a. α fonksiyoneli $\mathbb{R}_+^3$ kümesi üzerinde sürekli; ($\mathbb{R}^3$ de Euclid metriğine göre)

b. $\forall u, v \in \mathbb{R}_+$ ve φ, (c) kıyaslama fonksiyonu için

$u \leq \alpha(u,v,v)$ veya $u \leq \alpha(v,u,v)$ veya $u \leq \alpha(v,v,u)$ iken $u \leq \varphi(v)$.

Tanım 1.4.10. X metrik uzayında $T: X \to X$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in A_\varphi$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha\big(d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\big)$$

ifadesini sağladığında bir A_φ-daralma dönüşümü adını alır (Öztürk, Girgin, 2015).

2015 yılında Büyükkaya, Tran Van An ve arkadaşlarının 2014 yılında tanımladıkları B sınıfı dönüşümlerden esinlenerek A_φ-sınıfının daha genel hali olan aşağıdaki aileyi tanımlamış ve sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Tanım 1.4.11. $B_\varphi = \{\beta^* : \mathbb{R}_+^9 \to \mathbb{R}_+ \text{ bir fonksiyon}\}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlasın.

a. β^* fonksiyoneli $\mathbb{R}_+^9$ kümesi üzerinde süreklidir ($\mathbb{R}^9$ de Euclid metriğine göre).

b. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$ ve φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu için

1. $x\le\beta^*(0,0,x,x,0,0,0,0,x)$ veya $x\le\beta^*(x,0,0,x,x,0,0,x,x)$ iken $x\le\varphi(x)$ sağlanır.
2. $z\le x+y$ iken $y\le\beta^*(x,x,y,z,0,z,y,y,x)$ veya $y\le\beta^*(x,y,x,z,0,z,y,y,0)$ veya $y\le\beta^*(y,x,x,z,0,z,y,y,0)$ ise $y\le\varphi(x)$ dir (Büyükkaya, 2015).

1.5. f-Daralma Dönüşümleri

2009 yılında A. Beiranvand ve ark. metrik uzaylarda ikinci bir fonksiyona bağlı olan genel bir daralma şartını tanımlayıp bu şartı sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir.

Tanım 1.5.1. (X,d) bir metrik uzay ve $f,T:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall x,y\in X$ için $0\le k<1$ olmak üzere $d(fTx,fTy)\le kd(fx,fy)$ eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne bir f-daralma dönüşümü adı verilir (Beiranvand ve ark., 2009).

$f=I$ $(I\text{ birim dönüşüm})$ alınırsa ve f-daralma dönüşümleri daralma dönüşümlerine denk olur. f-daralma dönüşümünün daralma dönüşümü olması gerekmez.

Örnek 1.5.2. $X=[0,\infty)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$T:X\to X \qquad\qquad f:X\to X$$
$$x\to Tx=2x+1 \qquad\qquad x\to fx=e^{-x}$$

ile tanımlansın.

$$d\left(fTx, fTy\right) = \left|e^{-2x-1} - e^{-2y-1}\right| = \frac{1}{e}\left|e^{-x} + e^{-y}\right|\left|e^{-x} - e^{-y}\right|$$

$$\leq \frac{2}{e}\left|e^{-x} - e^{-y}\right| = \frac{2}{e}\left|fx - fy\right|$$

olduğundan T dönüşümü f-daralma dönüşümüdür (Beiranvand ve ark., 2009).

Tanım 1.5.3. (X,d) bir metrik uzay ve $f,T : X \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $d\left(fTx, fTy\right) < d\left(fx, fy\right)$ eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne bir f- kesin daralma dönüşümü adı verilir (Beiranvand ve ark., 2009).

Her f-daralma dönüşümü bir f-kesin daralma dönüşümüdür fakat tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 1.5.4. $X = [1, \infty)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$\begin{array}{ll} T : X \to X & \qquad f : X \to X \\ \quad x \to Tx = \sqrt{x} & \qquad \quad x \to fx = x \end{array}$$

ile tanımlansın.

$$d\left(fTx, fTy\right) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \left|x - y\right| = \left|fx - fy\right|$$

olduğundan T dönüşümü f- kesin daralma dönüşümüdür (Beiranvand ve ark., 2009).

Tanım 1.5.5. (X,d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her (y_n) dizisi için (fy_n) yakınsak iken (y_n) yakınsak bir alt diziye sahipse, f– dönüşümüne alt dizisel yakınsaktır denir (Beiranvand ve ark., 2009).

Teorem 1.5.6. (X,d) bir metrik uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm birebir, sürekli ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $T:X\to X$ sürekli ve $f-$ daralma dönüşümü, X içinde tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f dizisel yakınsak ise her bir $x_0\in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Beiranvand ve ark., 2009).

Tanım 1.5.7. X bir normlu uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x\in X$ ve bazı $k\geq 0$ değeri için

$$\left\|f^2x-fx\right\|\leq k\left\|fx-x\right\|$$

oluyorsa f-dönüşümüne k tipinden bir Banach operatörü denir (Sumitra ve ark., 2010).

Tanım 1.5.8. X bir normlu uzay ve $\varnothing\neq M\subset X$ olsun. $T,f:X\to X$ dönüşümleri verilsin. Aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanıyorsa (f,T) ikilisine Banach operator çifti denir (Sumitra ve ark., 2010).

a. $f\left[F(T)\right]\subseteq F(T)$ (değişmeli dönüşüm),
b. Her bir $x\in F(T)$ için $Tfx=fx$ dir.
c. Her bir $x\in F(T)$ için $Tfx=fTx$ dir.
d. Bazı $k\geq 0$ değerleri için $\left\|fTx-Tx\right\|\leq k\left\|Tx-x\right\|$ dir.

(f,T) sıralı ikilisi X uzayında değişmeli dönüşümler ise (T,f) bir Banach operatör çiftidir. Fakat tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 1.5.9. $X=\mathbb{R}^2$ olsun. $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \to f(u,v) = \left(u^2+v^2+u-1, u^2+v^2+v-1\right)$$

ve

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \to T(u,v) = \left((u+v)^2+2u-v, (u-v)^2+u\right)$$

dönüşümleri tanımlansın.

$$F(f):\left\{(u,v)\in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2=1\right\} \text{ ve } F(T)=\left\{(u,v)\in \mathbb{R}^2 : u-v=0 \text{ ya da } u-v=-1\right\}$$

dir.

$$f\left(F(T)\right) = f\left(\left\{(u,v)\in \mathbb{R}^2 : u-v=0 \text{ ya da } u-v=-1\right\}\right) \subseteq F(T)$$

kapsaması sağlandığından (f,T), $\mathbb{R}^2$ kümesinde Banach operatör çiftidir. Fakat $(1,0)\in F(f)$ iken $T(1,0)=(3,2)\notin F(f)$ olduğundan (T,f) Banach operatör çifti değildir (Chen, Li, 2007).

Önerme 1.5.10. f ve T, X metrik uzayı üzerinde sürekli iki dönüşüm olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = u \in X$ olan X uzayındaki her bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(Tfx_n, fx_n\right)=0$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(Tfx_n, fTx_n\right)=0$ olması için gerek ve yeter şart (f,T) sıralı ikilisinin bir Banach operatör çifti olmasıdır (Chen, Li, 2007).

1.6. Dönüşüm Çiftlerinin Özellikleri

Tanım 1.6.1. (X,d) bir metrik uzay ve $T,S:X\to X$ tanımlı iki dönüşüm olsun. $Sx=Tx=w$ olacak şekilde $x,w\in X$ noktaları varsa x noktasına S ve T dönüşümlerinin çakışma (coincidence) noktası $w\in X$ noktasına ise çakışılan nokta denir (Jungck ve Rhoades, 1998).

Tanım 1.6.2. $T,S:X\to X$ dönüşümleri X metrik uzayından kendi üzerine tanımlı dönüşümler olsun. Her $x\in X$ için $d(TSx,STx)=0$ şartı sağlanıyorsa S ve T dönüşümlerine değişmeli dönüşüm (commuting) denir (Jungck, 1976).

Tanım 1.6.3. (X,d) metrik uzayında $T,S:X\to X$ şeklinde tanımlanan dönüşümler her $x\in X$ için

$$d(TSx,STx)\le d(Sx,Tx)$$

şartını sağlasın. Bu durumda S ve T dönüşümlerine zayıf değişmeli (weakly commuting) dönüşümler denir (Sessa, 1982).

Tanım 1.6.4. X metrik uzayında $T,S:X\to X$ dönüşümleri tanımlanmış olsun. (x_n), X uzayında bazı $t\in X$ noktaları için $\lim_{n\to\infty}Sx_n=\lim_{n\to\infty}Tx_n=t$ şartını sağlayan bir dizi olmak üzere $\lim_{n\to\infty}d(TSx_n,STx_n)=0$ şartı sağlanıyorsa S ve T dönüşümlerine uyumlu (compatible) dönüşümler denir (Jungck ve Rhoades, 1998).

Tanım 1.6.5. (X,d) metrik uzayında $T,S:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer bu dönüşümler çakışma noktalarında değişmeli ise bu dönüşümlere zayıf uyumlu (weakly compatible) dönüşümler denir. Yani, bazı $u\in X$ noktaları için $Tu=Su$ iken $TSu=STu$ ifadesi sağlanır (Jungck ve Rhoades, 1998).

Tanım 1.6.6. (X,d) metrik uzayında $T,S:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Bazı $t\in X$ noktaları için $\lim_{n\to\infty}Tx_n=\lim_{n\to\infty}Sx_n=t$ olacak şekilde X de en az bir (x_n) dizisi var fakat $\lim_{n\to\infty}d(TSx_n,STx_n)$ limiti sıfırdan farklı ya da bu limit yoksa S ve T dönüşümlerine uyumlu olmayan (noncompatible) dönüşümler denir (Aamir ve El Moutawakil, 2002).

Tanım 1.6.7. X metrik uzayında $T,S:X\to X$ dönüşümleri tanımlanmış olsun. Eğer bazı $t\in X$ noktaları için $\lim_{n\to\infty}Tx_n=\lim_{n\to\infty}Sx_n=t$ sağlanıyorsa S ve T dönüşümleri $(E.A)$ özelliğine sahip dönüşümler olarak adlandırılır (Aamir ve El Moutawakil, 2002).

Uyumlu olmayan iki dönüşümün $(E.A)$ özelliğine sahip olduğu açıktır. Ayrıca verilen tanımlardan, verilen iki dönüşüm için aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir:

Değişmeli dönüşüm $\Rightarrow$ Zayıf değişmeli dönüşüm $\Rightarrow$ Uyumlu dönüşüm.

Örnek 1.6.8. $X=[0,1]$ kümesi mutlak değer metriği ile donatılmış olsun. Her $x\in X$ için

$$T:X\to X \qquad\qquad S:X\to X$$

$$x\to Tx=\frac{x}{2} \qquad\qquad x\to Sx=\frac{x}{2+x}$$

dönüşümleri verilsin. Buradan $S(X)=[0,1/3]$ ve $T(X)=[0,1/2]$ dir. Her $x\in X$ için

$$d\left(STx,TSx\right)=\left|\frac{x}{x+4}-\frac{x}{4+2x}\right|=\frac{x^2}{\left(x+4\right)\left(4+2x\right)}$$

$$\leq\frac{x^2}{4+2x}=\frac{x}{2}-\frac{x}{2+x}=d\left(Tx,Sx\right)$$

dir. Buradan T ve S zayıf değişmeli dönüşümlerdir. Fakat

$$STx=\frac{x}{4+x}>\frac{x}{4+2x}=TSx$$

olduğundan değişmeli dönüşüm değildir (Sessa, 1982).

Örnek 1.6.9. $X=\left[0,3\right]$ ve $d\left(x,y\right)=\left|x-y\right|$ ve

$$T:X\to X \qquad\qquad S:X\to X$$

$$x\to Tx=\begin{cases} x, x\in\left[0,1\right) \\ 3, x\in\left[1,3\right] \end{cases} \qquad\qquad x\to Sx=\begin{cases} 3-x, x\in\left[0,1\right) \\ 3, \quad x\in\left[1,3\right] \end{cases}$$

olsun. $x=3\in\left[1,3\right]$ ve bu aralıkta $TSx=STx$ olduğundan T ve S dönüşümleri $X=\left[0,3\right]$ kümesi üzerinde zayıf uyumlu dönüşümlerdir (Chugh ve Kumar, 2001).

Örnek 1.6.10. $X=\mathbb{R}$ üzerinde

$$T:X\to X \qquad\qquad S:X\to X$$

$$x\to Tx=\frac{x}{3} \qquad\qquad x\to Sx=x^2$$

olsun. $x=0$ ve $x=\frac{1}{3}$ noktaları birer çakışma noktasıdır.

$$TS\left(0\right)=ST\left(0\right)=0$$

olduğundan 0 noktasında değişmelidir dolayısıyla bu noktada zayıf uyumludur.

$$TS\left(1/3\right)=T\left(1/9\right)=1/27 \text{ ve } ST\left(1/3\right)=S\left(1/9\right)=1/81$$

dır. Buradan $x=\frac{1}{3}$ noktasında değişmeli olmadığı ve sonuçta da zayıf uyumlu dönüşümler olmadığı görülür (Chugh ve Kumar, 2001).

1.7. İntegral Tipi Dönüşümlerin Özellikleri

2002 yılında Branciari, tam metrik uzay üzerinde integral tipi dönüşümün sabit noktasının varlığını ve tekliğini ispatlayarak Banach daralma dönüşümünü genelleştirmiştir.

Tanım 1.7.1. $\Phi_1=\{\phi:[0,\infty)\to[0,\infty),\ \text{Lebesgue-integrallenebilir bir fonksiyon}\}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir aile olsun.

a. ϕ, $[0,\infty)$ kümesinin her kompakt alt kümesi üzerinde toplanabilirdir.
b. Non-negatiftir.
c. $\forall\varepsilon>0$ için $\int_0^{\varepsilon}\phi(s)ds>0$ dır.

Örnek 1.7.2. Aşağıdakiler ϕ fonksiyonuna örnek olarak verilebilir.

a. $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$$t\to\varphi(t)=2t$$

b. $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$$t\to\varphi(t)=e^t$$. (Liu, Li, Kang ve Cho 2011).

Teorem 1.7.3. (X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $\phi\in\Phi_1$ olmak üzere $\eta\in[0,1)$ ve $\forall x,y\in X$ için

$$\int_0^{d(Tx,Ty)}\phi(s)ds\le\eta\int_0^{d(x,y)}\phi(s)ds,$$

ifadesi sağlansın. Bu durumda $\forall x\in X$ için $\lim_{n\to\infty}T^n x=z$ dir ve $z\in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır (Branciari, 2002).

Sonuç 1.7.4. Teorem 1.7.2. de $\forall t\ge 0$ için $\phi(t)=1$ alınırsa

$$\int_0^{d(Tx,Ty)}1ds\le\eta\int_0^{d(x,y)}1ds$$

$$d(Tx,Ty)\le\eta d(x,y)$$

yani, Banach daralma dönüşüm prensibi elde edilir.

Lemma 1.7.5. $\phi\in\Phi_1$ ve $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ şartını sağlayan pozitif değerli bir dizi olsun. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{x_n}\phi(s)ds=\int_0^{x}\phi(s)ds$$

dır (Liu, Li, Kang ve Cho, 2011).

Lemma 1.7.6. $\phi\in\Phi_1$ ve $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif değerli bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^{x_n} \phi(s)ds = 0$$

dır (Liu, Li, Kang ve Cho, 2011).

1.8. Grafla Donatılmış Metrik Uzaylar

2008 yılında Jachymski grafla donatılmış metrik uzay kavramını kullanarak bazı genel yapıdaki sabit nokta teoremlerini vermiştir. S. Suantai, çok değerli dönüşümler için graf kavramını ve metrik uzay üzerinde yönlü grafa sahip çok değerli zayıf G-dönüşümlerinin yeni çeşitlerini ortaya çıkarmıştır. Sonrasında birçok yazar soyut uzaylarda graf yapısını kullanarak sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır.

(X,d) metrik uzay ve $X\times X$ kartezyen çarpımının köşegeni Δ olsun. $V(G)$ ve $E(G)$ ile sırasıyla noktaları X uzayının elemanları olmak üzere grafın köşeleri ve kenarları gösterilsin.

$G=(V(G),E(G))$ basit yönlü graftır. Basit yönlü bir grafta kenarlar tüm düğüm noktalarını içerir, yani, $\Delta\subset E(G)$ dir. G grafının kenarlarının yönü değiştirilerek elde edilen grafa G grafının tersi denir, G^{-1} ile ifade edilir ve

$$E(G^{-1})=\{(y,x)\in X\times X:(x,y)\in E(G)\}$$

dir. G grafındaki kenarların yönü dikkate alınmadan elde edilen $\widetilde{G}$ grafı yönsüz graftır ve bu grafta

$$E(\widetilde{G})=E(G)\cup E(G^{-1})$$

dir.

G grafında $x, y \in V(G)$ köşe noktalar olsun. x ile y arasındaki $N \in \mathbb{N}$ uzunluğundaki bir yol $i = 1,2,...,N,\ x_0 = x,\ x_N = y$ ve $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ olacak şekilde G grafının $N+1$ tane köşe noktasının $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ dizisidir. Herhangi iki köşe noktası arasında en az bir yol varsa G grafına bağlantılı graf denir. Eğer $\widetilde{G}$ grafı bağlantılı graf ise G grafına zayıf bağlantılı graf denir. $x, y \in V'$, $(x, y) \in E'$ olmak üzere $E' \subseteq E(G), V' \subseteq V(G)$ ise (V', E') grafı G grafının alt grafı olarak adlandırılır. (Johnsonbaugh, 2005).

Örnek 1.8.1. "$\leq$" ile X üzerinde kısmi sıralama bağıntısı verilsin.

a. G_1 grafı

$$E(G_1) = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y\}$$

dir.

b. G_2 grafı

$$E(G_2) = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y \vee y \leq x\}$$

dir (Jachymski, 2008).

Tanım 1.8.2. $T : (X, d) \to (X, d)$ bir dönüşüm olsun.

a. T dönüşümü G grafının kenarlarını koruyorsa yani $\forall x, y \in X$ için

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G) \tag{1.3}$$

ve

b. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \tag{1.4}$$

ise T dönüşümüne Banach $G-$daralma dönüşümü ya da kısaca $G-$daralma dönüşümü denir (Jachymski, 2008).

Örnek 1.8.3. $T : X \to X$ herhangi bir sabit fonksiyon, $E(G)$ tüm düğüm noktalarını içerdiğinden Banach $G-$daralma dönüşümüdür (Jachymski, 2008).

Tanım 1.8.4. (X, d) metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

a. $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tamsayıların herhangi bir dizisi ve $\forall x, y \in X$ için

$$n \to \infty \text{ iken } T^{k_n} \to y \Rightarrow T\left(T^{k_n}\right) \to Ty$$

sağlanırsa T dönüşümüne yörüngesel sürekli dönüşüm denir.

b. $x \in X$ ve $(x_n) n \in \mathbb{N}$ dizisi için

$$x_n \to x \text{ ve } (x_n, x_{n+1}) \in E(G) \text{ iken } Tx_n \to Tx$$

ise T dönüşümüne $G-$sürekli dönüşüm denir.

c. $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tamsayıların herhangi bir dizisi ve $\forall x, y \in X$ için

$$T^{k_n} \to y \text{ ve } n \in \mathbb{N} \text{ için } \left(T^{k_n} x, T^{k_{n+1}} x\right) \in E(G) \Rightarrow T\left(T^{k_n} x\right) \to Ty$$

ise T dönüşümüne yörüngesel $G-$sürekli dönüşüm denir.

Verilen süreklilik kavramları arasında

sürekli $\Rightarrow$ yörüngesel sürekli $\Rightarrow$ yörüngesel $G-$sürekli,
sürekli $\Rightarrow G-$sürekli $\Rightarrow$ yörüngesel $G-$sürekli
ilişkileri vardır (Jachymski, 2008).

$E(G)$ simetrik ve x noktası G grafının tepe noktası olsun. x ile başlayan bazı yolları içeren kenar ve köşeleri bulunduran alt grafa x noktasını içeren G grafının bileşeni adı verilir ve G_x ile gösterilir.

"G grafında y noktasından z noktasına bir yol varsa yRz" dir,
kuralı ile $V(G)$ üzerinde tanımlanan R bağıntısının denklik sınıfları $[x]_G$ olmak üzere $V(G_x)=[x]_G$ dir. G_x grafı bağlantılı bir graftır. (Jachymski, 2008).

Teorem 1.8.5. (X,d) tam metrik uzay ve (X,d,G) üçlüsü "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X$ dizisi için $x_n\to x$ ve $(x_n,x_{n+1})\in E(G)$ iken $(x_{k_n},x)\in E(G)$ olan $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır" özelliğine sahip olsun. $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $X_T=\{x\in X|(x,Tx)\in E(G)\}$ kümesi tanımlansın. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $|F(T)|=|[x]_{\tilde{G}}:x\in X_T|$ dir.
2. $F(T)\neq\varnothing\Leftrightarrow X_T\neq\varnothing$ dir.
3. T tek bir sabit noktaya sahiptir $\Leftrightarrow X_T\subseteq[x_0]_{\tilde{G}}$ olan $x_0\in X_T$ vardır.
4. Herhangi $x\in X_T$ için $T\big|_{[x]_{\tilde{G}}}$ Picard operatörüdür.
5. $X_T\neq\varnothing$ ve G zayıf bağlantılı ise T Picard operatörüdür.
6. $X'=\bigcup\{[x]_{\tilde{G}}:x\in G\}$ ise $T|_{X'}$ zayıf Picard operatörüdür.
7. $T\subseteq E(G)$ ise T zayıf Picard operatörüdür (Jachymski, 2008).

F. Bojor 2010 ylında kıyaslama fonksiyonlarını kullanarak grafla donatılmış metrik uzaylarda φ-daralmalar için sabit noktanın varlığı problemini çalışmıştır.

Tanım 1.8.6. (X,d) metrik uzayı üzerinde G grafı verilsin.

a. $\forall x,y\in X\left((x,y)\in E(G)\Rightarrow(Tx,Ty)\in E(G)\right)$ dir,

b. $\forall(x,y)\in E(G)$ için $d(Tx,Ty)\leq\varphi\left(d(x,y)\right)$ olacak şekilde $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ kıyaslama fonksiyonu vardır,

özelliklerini sağlayan $T:X\to X$ dönüşümüne (G,φ)-daralma dönüşümü denir (Bojor, 2010).

Teorem 1.8.7. (X,d), G grafı ile donatılmış metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdakiler sağlansın.

(a) G zayıf bağlantılıdır,

(b) $d(x_n,x_{n+1})\to 0$ olan herhangi bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ dizisi için $m,n\geq n_0$ olan $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için $\left(x_{k_n},x_{k_m}\right)\in E(G)$ olacak şekilde $k,n_0\in\mathbb{N}$ vardır,

$(c)_1$ T yörüngesel süreklidir,

veya

$(c)_2$ T, yörüngesel G- süreklidir ve her bir $k\in\mathbb{N}$ için $\left(T^{n_k}x_0,x^*\right)\in E(G)$ olan $\left(T^n x_0\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left(T^{n_k}x_0\right)_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır,

(d) $T,(G,\varphi)$-daralma dönüşümüdür,

(e) d tam metriktir.

Bu durumda T dönüşümü Picard operatörüdür (Bojor, 2010).

BÖLÜM 2. MODÜLER UZAYLAR

2.1. Temel Tanımlar Ve Teoremler

L^p Lebesgue fonksiyon uzaylarını genelleştirmeye yönelik ilk çalışmalar 1930'ların başlarında ortogonal açılımlarla bağlantılı olarak Orlicz ve Birnbaum tarafından yapılmıştır. Fonksiyon uzayları

$$L^{\varphi^*} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \exists \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} \varphi^* \left(\lambda \left| f(x) \right| \right) dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\varphi^* : [0,\infty] \to [0,\infty]$ sonlu, artan konveks bir fonksiyondur.

φ^* fonksiyonuna

a. $\varphi^*(t) = e^t - 1$

b. $\varphi^*(t) = \mathrm{In}(1+t)$

fonksiyonları örnek verilebilir. Birçok diferansiyel uygulamaları ve bu uzayların farklı özellikleri dahil edilerek L^{φ^*} lineer metrik uzayın yapısını inşa etmek mümkündür. Ayrıca herhangi bir kuvvete sahip olmayan tipteki çekirdekleri içeren diferansiyel ve integral denklemlerle yapılan birçok uygulama Orlicz uzayları teorisinin gelişimine katkı sağlamıştır.

Bu gelişmelerin iki ana yönü gözlemlenmektedir. Bunlardan ilki 1955 yılında Luxemburg tarafından başlatılan ve daha sonra Zaanen ile yapılan ortak çalışmalar ile geliştirilen Banach fonksiyon uzayları teorisidir. Bu teorinin ana fikri (X,Σ,λ) ölçüm uzayı, $\mathrm{M}(X,S)$ tüm kuvvetli ölçülebilir fonksiyonların kümesi olmak üzere $|f(x)|\leq|g(x)|$ iken $\|f\|\leq\|g\|$ ($\lambda-h.h.y$) şartını sağlayan

$$L=\{f:X\to\mathbb{R};\ f\in\mathrm{M}(X,\mathbb{R}),\ \|f\|<\infty\}$$

fonksiyon uzayının geliştirilmesi temeline dayanmaktadır.

Uzayın elemanlarının büyümesini kontrol eden lineer olmayan bir fonksiyonelin integral formu ile bazı basit ve temel özelliklere sahip olan soyut olarak verilen bir fonksiyonelin değiştirilmesi prensibine dayanan Orlicz uzay teorisinden esinlenerek diğer yön çalışılmış ve geliştirilmiştir. Bu fikir Nakano'nun 1950'de sıralı uzay teorisi ile bağlantılı olarak başlattığı ve 1959'da Musielak ve Orlicz'in yeniden tanımladığı ve geliştirdiği modüler uzay teorisinin temelini oluşturmaktadır.

Tanım 2.1.1. X, K üzerinde keyfi bir vektör uzayı olsun $(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$. $f,g\in X$ için $\mu:X\to[0,\infty)$ fonksiyoneli

a. $\mu(0)=0$;

b. $|a|=1$ için $\mu(af)=\mu(f)$;

c. $a+b=1\ (a,b\geq 0)\Rightarrow\mu(af+bg)\leq\mu(f)+\mu(g)$;

şartları sağlıyorsa μ fonksiyoneline X üzerinde modülerimsi (pseudo modüler) denir. Ayrıca (iii) özelliği yerine aşağıdaki özellik sağlanırsa

d. $a+b=1\ (a,b\geq 0)\Rightarrow\mu(af+bg)\leq a\mu(f)+b\mu(g)$;

μ fonksiyoneline X üzerinde konveks modülerimsi denir (Musielak ve Orlicz, 1959).

(a) yerine aşağıdaki şartlar alınırsa

a_1. $\mu(0)=0$ ve $\lambda>0$ için $\mu(\lambda f)=0 \Leftrightarrow f=0$ şartı sağlanıyorsa μ fonksiyoneline X üzerinde yarı modülerdir (semi modülerdir) denir.

a_2. $\mu(f)=0 \Leftrightarrow f=0$ şartı sağlanıyorsa μ fonksiyoneline X üzerinde modülerdir denir (Musielak ve Orlicz, 1959).

Tanım 2.1.2. μ, X üzerinde konveks modülerimsi olsun.

$$X_\mu = \left\{ h \in X : \lim_{\lambda \to 0} \mu(\lambda h) = 0 \right\}$$

kümesine modüler uzay denir (Musielak, 1983).

Tanım 2.1.3. X_μ, X uzayının alt vektör uzayı olsun.

$$\|f\|_\mu = \inf \left\{ t > 0 : \mu\left(\frac{f}{t}\right) \le t \right\}$$

modülerine F-yarınorm (seminorm) denir (Musielak ve Orlicz, 1959).

Ayrıca, μ-konveks modülerimsi için $\|f\|_\mu = \inf \left\{ t > 0 : \mu\left(\frac{f}{t}\right) \le 1 \right\}$ modülerine de F-yarınorm denir (Musielak ve Orlicz, 1959).

μ modüler ise F-normu her $t>0$ için $\mu\big(t(f_n - f)\big) \to 0$ ifadesi $\|f_n - f\| \to 0$ ifadesi ile eşdeğerdir. Ayrıca $\mu(f) \le \|f\|_\mu$ eşitsizliği $\|f\|_\mu < 1$ şartını sağlar.

Örnek 2.1.4. $\varphi^* : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

a. Sürekli, artan ve ikinci değişkene göre sonlu,
b. Birinci değişkene göre ölçülebilirdir.

şartlarını sağlasın.

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi^*\left(X, |f(x)|\right) dx$$

fonksiyoneli bir modülerdir ve X uzayı da modüler uzaydır (Musielak ve Orlicz 1959).

Musielak ve Orlicz 1959 yılında modüler uzay teorisinin temel teoremlerini ispatlamışlardır. Bu tür uzaylar analizin uygulama alanında geniş yer kaplamaktadır. Birçok alanda genelleştirmelerine rastlanabilir. Vektör değerli fonksiyonlar için bazı genellemeler öne sürülmüştür. Ayrıca bu uzayların olasılık ve matematiksel istatistik alanlarında birçok uygulamaları vardır.

Musielak-Orlicz uzay teorisindeki kavramlar yeni talepleri karşılamamaya başlamıştır. Çünkü toplam alma veya eşdeğer modülerlere geçme gibi birçok işlemi yapısında bulundurmamaktadır. Çalışmalarda herhangi bir özel formda olmayan ancak yine de soyut modülerin sahip olabileceğinden çok daha uygun özelliklere sahip modüler sınıfı tarafından verilen modüler uzaylar araştırılmıştır. Bu araştırma norm ve F-norm olmayan fonksiyonellerin uygulamaları için yararlı olmuştur.

Tanım 2.1.5. X, K cismi üzerinde keyfi bir vektör uzayı olsun $(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$. $\forall x, y \in X$ ve $a, b \in K$ için $\mu : X \to [0, \infty)$ fonksiyoneli

$(\mu_1.)$ $\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$(\mu_2.)$ $|a| = 1$ için $\mu(ax) = \mu(x)$,

$(\mu_3.)$ $a+b=1, (a,b\geq 0)\Rightarrow \mu(ax+by)\leq \mu(x)+\mu(y)$,

şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyoneline X üzerinde modüler denir ve X uzayına da modüler uzay denir ve genellikle (X,μ) veya X_μ ile gösterilir. Ayrıca (μ_3) özelliği yerine aşağıdaki özellik sağlandığında ise

$(\mu_4.)$ $a+b=1, (a,b\geq 0)\Rightarrow \mu(ax+by)\leq a\mu(x)+b\mu(y)$

μ fonksiyoneline X üzerinde konveks modüler denir (Musielak ve Orlicz, 1959, 1959a).

Örnek 2.1.6. $\mu:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ fonksiyoneli

$$\mu(x)=\sqrt{|x|}$$

reel değerli bir μ - modülerdir.

Tanım 2.1.7. μ, X üzerinde konveks modüler olsun.

$$X_\mu=\left\{x\in X:\lim_{\lambda\to 0}\mu(\lambda x)=0\right\}$$

kümesine modüler uzay denir (Musielak ve Orlicz, 1959, 1959a).

Örnek 2.1.8. (X,μ) modüler uzay olsun. $d_\mu:X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu

$$d_\mu=\begin{cases} 0, & x\neq y \text{ ise} \\ \mu(x)+\mu(y), & x=y \text{ ise} \end{cases}$$

bir metriktir. (X,μ) uzayı da bir metrik uzaydır.

μ alt toplamsal olmadığından norm veya uzaklık olarak ifade edilmez Fakat μ fonksiyoneli aşağıda tanımlanacak olan F - norm ile ilişkilendirilebilir.

Tanım 2.1.9. X vektör uzayı üzerinde tanımlanan $\|\ \|: X \to [0,\infty)$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyonele F -norm denir (Rolewicz, 1985).

$(n_1.)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$(n_2.)$ $|\alpha| = 1$ için $\|\alpha x\| = \|x\|$,

$(n_3.)$ $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$,

$(n_4.)$ $(a_n) \to 0 \Rightarrow \|a_n x\| \to 0$,

$(n_4.)$ $(x_n) \to 0 \Rightarrow \|a x_n\| \to 0$,

$(n_5.)$ $(a_n) \to 0,\ (x_n) \to 0, \Rightarrow \|a_n x_n\| \to 0$

dır. Ayrıca $\{x_n\}$, X üzerinde bir dizi olmak üzere $\alpha_n \to \alpha$ ve $\|x_n - x\| \to 0$ ise $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \to 0$ dır.

Tanım 2.1.10. X_μ modüler uzayında $\|.\|_\mu : X_\mu \to [0,\infty)$ F -normu

$$\|x\|_\mu = \inf\left\{\lambda > 0 : \mu\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

şeklinde tanımlanırsa $\|.\|_\mu$ bir normdur ve bu norma özel olarak Luxemburg normu adı verilir (Musielak ve Orlicz, 1959, 1959a).

Teorem 2.1.11. $(X,\| \ \|)$ ikilisi F-uzayı olsun. $\|x\|^1 = \sup\limits_{0\le t\le 1}\|tx\|$ normu, $\|x\|$ standart normu ile denktir. $\|.\|^1$ normu azalmayandır ve bu norm bir μ-modülerdir (Rolewicz, 1985).

İspat:

a. $\|x\|^1 = \sup\limits_{0\le t\le 1}\|tx\| = 0$ dır. $\|x\|^1 = 0$ ise $\|x\| \le \|x\|^1$ ve $\|x\| = 0$ şartı sağlandığından $x = 0$ dır.

b. $|\alpha| = 1$ için

$$\|\alpha x\|^1 = \sup_{0\le t\le 1}\|t\alpha x\| = \sup_{0\le t\le 1}\|tx\| = \|x\|^1 \text{ dır.}$$

c. $\forall x, y \in X$ için,

$$\|x+y\|^1 = \sup_{0\le t\le 1}\|t(x+y)\|^1$$

$$\le \sup_{0\le t\le 1}\|t(x)\|^1 + \sup_{0\le t\le 1}\|t(y)\|^1$$

$$\le \|x\|^1 + \|y\|^1$$

dır.

d. $\{t_n\}$ skalerlerin 0 noktasına yakınsayan bir dizisi olsun. $[0,1]$ aralığı kompakt olduğundan $\forall x \in X$ için $\|tx\|$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca $0 \le b_n \le 1$ olmak üzere $\{b_n\}$ dizisi $\|t_n x\|^1 = \|t_n b_n x\|$ şartını sağlasın. Böylece $\{t_n b_n\}$ dizisi sıfıra yakınsar ve normun 4. özelliğinden $\|t_n x\|^1 \to 0$ dır. $\|x_n\|^1 \to 0$ olsun. $\|x\|^1$ azalmayan olduğundan ve üçgen eşitsizliğinden

$$\|tx_n\|^1 \le (|t|+1)\|x_n\|^1 \to 0$$

elde edilir. $t_n \to 0$ ve $\|x_n\|^1 \to 0$ olsun. $\|t_n x_n\|^1 = \|t_n b_n x_n\|^1$ olacak şekilde $0 \le b_n \le 1$ şartını sağlayan $\{b_n\}$ dizisi vardır. $\{t_n b_n\}$ dizisi sıfıra yakınsak ve $\|x\| \le \|x\|^1$ şartı sağlandığından $\|t_n b_n x_n\|^1 = \|t_n x_n\|^1 \to 0$ bulunur.Dolayısıyla $\|x\|^1$ normu F -normdur.

$\|x\| \le \|x\|^1$ olduğundan $\|x\| \to 0$ ise $\|x\|^1 \to 0$ dır. $\{x_n\}$ dizisi için $\|x_n\| \to 0$ iken $\|x_n\|^1$ dizisi sıfıra yakınsak olmasın. $\|x\|$ fonksiyonu $[0,1]$ kompakt aralığında süreklidir ve α_n, $0 \le \alpha_n \le 1$ için $\|x_n\|^1 = \|\alpha_n x_n\|$ sağlanır. Bolzano-Weierstrass teoremi gereğince $\{\alpha_n\}$ dizisi α noktasına yakınsak olsun. Skaler çarpımın sürekliliğinden $\|x_n\|^1 = \|\alpha_n x_n\| \to 0$ dır. Böylece çelişki oluşmaktadır. Buradan $\|x\|$ ve $\|x\|^1$ normlarının denk olduğu elde edilir.

Teorem 2.1.12. X lineer uzayı üzerinde μ bir modüler olsun. X_μ modüler uzayında $\|x\|$ ile F normu tanımlansın. Bu durumda $\mu(x_n) \to 0$ olması için gerek ve yeter şart$\|x_n\| \to 0$ olmasıdır (Musielak ve Orlicz, 1959, 1959a).

İspat:

$\|x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \quad \mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) < \varepsilon\right\}$ olsun

a. $x = 0 \Leftrightarrow \mu(x) = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$ olduğu açıktır.

b. $|\alpha| = 1$ olsun.

$$\|\alpha x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \quad \mu\left(\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right) < \varepsilon\right\}$$

$$= \inf\left\{\varepsilon > 0 : \quad \mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) < \varepsilon\right\} = \|x\|$$

elde edilir.

c. $\forall x, y \in X$ ve $\delta > 0$ keyfi bir sayı olsun. $\|.\|$ fonksiyonelinin tanımından $\mu\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right) < \varepsilon_1$ $\mu\left(\frac{x}{\varepsilon_2}\right) < \varepsilon_2$ eşitsizliklerini sağlayan ε_1, ve ε_2 pozitif sayıları mevcuttur. Ayrıca $\|x\| < \varepsilon_1 < \|x\| + \delta$ ve $\|y\| < \varepsilon_2 < \|y\| + \delta$ eşitsizlikleri sağlanır.

$$\mu\left(\frac{x+y}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right) \leq \mu\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}.\frac{x}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}.\frac{y}{\varepsilon_2}\right)$$

$$\leq \mu\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right) + \mu\left(\frac{y}{\varepsilon_2}\right) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

elde edilir. Böylece $\|x+y\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \|x\| + \|y\| + 2\delta$ dır. Burada δ keyfi bir sayı olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmış olur.

d. $\mu(x_n) \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\| \to 0$ olduğunu göstermek için $\varepsilon > 0$ verilsin. $\mu(x_n) \to 0$ olsun. Böylece modülerin özelliğinden $\mu\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) \to 0$ dır. Yani her $n > N$ için $\mu\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) < \varepsilon$ şartını sağlayan N doğal sayısı vardır. Buradan $\|x_n\| < \varepsilon$ elde edilir. ε keyfi bir sayı olduğundan $\|x\| \to 0$ bulunur.

Diğer taraftan $\|x_n\| < 1$ olsun. $\|x_n\| < a < 1$ olacak şekilde bir a sayısını verilsin. $\mu(x_n) \leq \mu\left(\frac{x_n}{a}\right) \leq a$ dır. Buradan $\mu(x_n) \leq \|x_n\|$ elde edilir. Böylece $\|x_n\| \to 0$ ise $\mu(x_n) \to 0$ görülür.

Dört şart sağlandığından $\|x\|$ fonksiyoneli bir F - normdur. X_μ modüler uzayı bu norma göre F -normlu uzaydır.

Örnek 2.1.13. X vektör uzayı $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ölçülebilir fonksiyon}\}$ olarak tanımlansın. $\varphi^* : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

a. sürekli, artan ve ikinci değişkene göre konvekstir,

b. $\varphi^*(t,x) = \begin{cases} \varphi^*(t,0) = 0, & x = 0 \text{ ise} \\ \varphi^*(t,x) > 0, & x > 0 \text{ ise} \\ \varphi^*(t,x) \to 0, & x \to \infty \text{ ise} \end{cases}$

olan $\varphi^*(t,x)$ fonksiyonu x e göre azalmayan sürekli bir fonksiyondur,

c. φ^*, birinci değişkene göre ölçülebilirdir,

özellikleri sağlansın. $f \in X$ için,

$$\mu(f) = \int_0^1 \varphi^*\left(t, |f(t)|\right) dt$$

X üzerinde bir modülerdir. X_μ ise modüler uzaydır. Ayrıca X_μ modüler uzayı Musielak-Orlicz uzayı olarak da adlandırılmaktadır (Rolewicz, 1984).

Örnek 2.1.14. $i(t)$, R direncinden geçen bir akım olsun. $[0,T]$ periyodundaki akım enerjisi

$$P(i) = \int_0^T Ri^2(t)\, dt$$

ile ifade edilir. $P(i)$, $[0,T]$ üzerinde bir modülerdir (Rolewicz, 1984).

Örnek 2.1.15. $M(t)$, R iç direncine sahip bir bataryanın içinden geçen elektrik akım kuvveti olsun. Amper saatlerinin I büyüklüğü $L^{1/2}[0,T]$ uzayında

$$I = \int_0^T \sqrt{\frac{M(t)}{R}}\, dt$$

ile gösterilir. I, bir modülerdir (Rolewicz, 1984).

Örnek 2.1.16. Bir teknenin hızı $V(t)$, motorun dönme hızı olan $V(t)=N(r(t))$ bağıntısı ile ilişkilendirilmektedir. Burada N, $N(0)=0$ şartını sağlayan sürekli, konkav bir fonksiyon olmak üzere

$$P_N(r)=\int_0^T N(r(t))dt$$

ile ifade edilen. $P_N(r)$ yol-dönme fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde bir modülerdir (Rolewicz, 1984).

2.2.Modüler Uzayların Topolojik Yapısı

Bu kısımda modüler uzay yapısındaki yakınsaklık, Cauchy dizisi, tamlık ve süreklilik gibi kavramlardan bahsedilecektir**.**

Tanım 2.2.1. X_μ modüler uzay ve $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\mu(x_n-x)=0$$

ise $\{x_n\}$ dizisi $x\in X_\mu$ noktasına μ-yakınsaktır denir (Musielak, 1983).

Tanım 2.2.2. X_μ modüler uzay ve $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ ve $m,n>n_0$ iken

$$\lim_{n,m\to\infty}\mu(x_n-x_m)=0$$

olacak şekilde en az bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine X_μ uzayında μ-Cauchy dizisi denir (Musielak, 1983).

Tanım 2.2.3. Her $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μ-Cauchy dizisi μ-yakınsak ise X_μ uzayına μ-tam uzay denir (Musielak, 1983).

Tanım 2.2.4. C, X_μ modüler uzayının bir alt kümesi olsun. Her $\{x_n\}\subset C$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\mu(x_n-x)=0$$

olacak şekilde $x\in C$ varsa X_μ modüler uzayına μ-kapalıdır denir (Musielak, 1983).

Tanım 2.2.5. C, X_μ modüler uzayının bir alt kümesi olsun.

$$\delta_\mu(C)=\sup_{x,y\in C}\mu(x-y)$$

ifadesine C kümesinin μ-çapı denir. $\delta_\mu(C)<\infty$ ise X_μ modüler uzayına μ-sınırlıdır denir (Musielak, 1983).

Tanım 2.2.6. X_μ modüler uzayında $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $x\in X_\mu$ noktasına ve $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de $y\in X_\mu$ noktasına μ-yakınsak olsun.

$$\mu(x-y)\le\liminf_{n\to\infty}\mu(x_n-y_n)$$

eşitsizliği sağlanırsa μ fonksiyoneli X_μ modüler uzayında Fatou özelliği sahiptir denir (Musielak, 1983).

Tanım 2.2.7. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X uzayında bir dizi olsun.

a) $\forall x \in X_\mu$ için $\mu(2x) \le K\mu(x)$ şartını sağlayan $K > 0$ sayısı varsa μ fonksiyoneli $\Delta_2 -$tipi şartını sağlar denir (Benavides ve ark., 2001).

b) $\mu(x_n) \to 0$, $(n \to \infty)$ iken $\mu(2x_n) \to 0\,(n \to \infty)$ ise μ fonksiyoneli Δ_2-şartı sağlar denir (Kozlowski, 1988).

Δ_2-tipi şartı ve Δ_2-şartı denk şartlar değildir. Fakat Δ_2-tipi şartının Δ_2-şartını gerektirdiği açıktır. μ-modüleri üçgen eşitsizliğini sağlamadığından μ-yakınsak olan bir dizinin μ-Cauchy dizisi olması gerekmez. Bu durumun sağlanması için gerek ve yeter şart μ modülerinin Δ_2-şartını sağlamasıdır. Ayrıca μ, Δ_2-tipi şartını sağlarsa norma göre yakınsaklık ve modüler yakınsaklık denktir (Benavides ve ark., 2001).

Örnek 2.2.8. Ω kümesinin alt kümesi olan Σ sayılabilir toplamsal cebiri verilmiş olsun. $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ üçlüsü ölçülebilir uzaydır. Ω, sonlu sayılabilir ($\Omega_n < \infty$) ve Ω_n kümelerinin sayılabilir ailesi olarak temsil edilirse ölçülebilir uzaya $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ σ-sonludur veya kısaca Ω, σ-sonludur denir.

$N(u)$ fonksiyonu $u \ge 0$ için aşağıdaki şartları sağlar.

a. Azalmayan, negatif olmayan ve sürekli bir fonksiyondur.
b. $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ dır.

$N(u)$ fonksiyonu $k > 0$ için $N(2u) \le kN(u)$ olacak şekilde Δ_2-şartını sağlar. X, Ω üzerinde tanımlanan sayılabilir fonksiyonların kümesi olsun. $x(t), y(t) \in X$ için

$$\lambda(t : x(t) \ne y(t)) = 0 \Rightarrow x = y$$

oluyorsa $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları denktir. Lineer uzayda sıfıra eşit olan tüm fonksiyonlarının oluşturduğu küme θ olsun. $S_0(\Omega,\Sigma,\lambda)$ uzayı $X/_{\theta}$ bölüm uzayı olarak tanımlansın;

$$P_N(x)=\int_{\Omega} N(|x(t)|)d\lambda$$

fonksiyoneli $S_0(\Omega,\Sigma,\lambda)$ bölüm uzayı üzerinde modülerdir (Rolewicz, 1985).

İspat:

a. $N(u)=0 \Leftrightarrow u=0$ olduğundan $P_N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ şartının sağlandığı açıktır.

b. $|\alpha|=1$ için

$$P_N(\alpha x)=\int_{\Omega} N(|\alpha x(t)|)d\lambda$$

$$=\int_{\Omega} N(|x(t)|)d\lambda = P_N(x)$$

şartı sağlanır.

c. $a,b\geq 0$, $a+b=1$ olsun;

$$\Omega_1=\{t:|x(t)|\geq|y(t)|\} \quad \text{ve} \quad \Omega_2=\{t:|x(t)|<|y(t)|\}$$

olarak tanımlansın. $N(u)$ azalmayan fonksiyon olduğundan

$$P_N(ax+by)=\int_{\Omega} N(|ax(t)+by(t)|)d\lambda$$

$$\leq \int_{\Omega_1\cup\Omega_2} N(a|x(t)|+b|y(t)|)d\lambda$$

$$\leq \int_{\Omega_1} N\left(\left(a+b\right)\left|x\left(t\right)\right|\right)d\lambda + \int_{\Omega_2} N\left(\left(a+b\right)\left|y\left(t\right)\right|\right)d\lambda$$

$$\leq \int_{\Omega} N\left(\left|x\left(t\right)\right|\right)d\lambda + \int_{\Omega} N\left(\left|y\left(t\right)\right|\right)d\lambda = P_N\left(x\right) + P_N\left(y\right)$$

olur. (a)-(c) şartları sağlandığından $P_N(x)$ fonksiyoneli bir modülerdir.

Tanım 2.2.9. X_μ bir modüler uzay ve $T: X_\mu \to X_\mu$ bir dönüşüm olsun. $(x_n) \in X_\mu$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(x_n - x\right) = 0 \text{ iken } \lim_{n\to\infty} \mu\left(T\left(x_n\right) - T\left(x\right)\right) = 0\,;$$

oluyorsa T dönüşümü X_μ modüler uzayında μ -süreklidir denir (Musielak ve Orlicz, 1959).

Önerme 2.2.10. Modüler uzayda (μ_3) şartından aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. $|a| < |b|$ şartını sağlayan a ve b reel sayıları için $\mu(ax) < \mu(bx)$ dir.
2. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ pozitif sayıları için $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ olsun. $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ olmak üzere

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu\left(x_i\right)$$

dır (Musielak ve Orlicz, 1959).

Teorem 2.2.11. X_μ modüler uzayı lineerdir.

İspat:

a. $x \in X_\mu$ ve t bir skaler olsun. X_μ uzayının tanımından

$$\mu(kx) = \mu\left(\frac{k}{|t|}|t|x\right) = \mu\left(\frac{k}{|t|}tx\right) < \infty$$

olacak şekilde k pozitif sayısı vardır. Böylece $tx \in X_\mu$ bulunur.

b. $x, y \in X_\mu$ olsun. X_μ uzayının tanımından

$$\mu(k_x x) < \infty \ , \quad \mu(k_y y) < \infty$$

olacak şekilde k_x ve k_y pozitif sayıları mevcuttur. $k = \min\{k_x, k_y\}$ seçilirse modülerin (μ_3) özelliğinden

$$\mu\left(\frac{k}{2}(x+y)\right) \leq \mu(kx) + \mu(ky) \leq \mu(k_x x) + \mu(k_y y) < \infty$$

olur. (a) ve (b) den X_μ uzayı lineerdir (Rolewicz, 1985).

2.3. Modüler Uzaylarda Sabit Nokta Teorisi

Bu kısımda modüler uzaylarda kullanılacak olan sabit nokta teorisiyle ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.3.1. X_μ modüler uzayında S ve T iki dönüşüm olsun.

a. $\mu(Sx - x) = 0$ şartı sağlanıyorsa $x \in X$ noktası S dönüşümünün sabit noktası olarak adlandırılır.

b. $\mu(Sx - Tx) = 0$ ise $x \in X$ noktasına (S,T) çiftinin çakışma noktası denir.

c. $Sx = Tx = x$ ise $x \in X$ noktasına (S,T) çiftinin ortak sabit noktası denir.

Tanım 2.3.2. X_μ modüler uzay $C \subset X_\mu$ ve $T : C \to C$ keyfi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X_\mu$ için

$$\mu(Tx - Ty) \le L\mu(x - y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde $L \ge 0$ sayısı varsa T dönüşümü X_μ modüler uzayı üzerinde μ-Lipschitzian dönüşüm olarak adlandırılır (Kozlowski, 1988).

$L < 1$ olduğunda T dönüşümü μ-daralma dönüşümü, $L \le 1$ olduğunda ise μ-genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm adını alır.

Örnek 2.3.3. $X = (0, \infty)$, Σ ise X kümesinin tüm Lebesgue ölçülebilir altkümelerinin bir σ-cebiri olsun. P ile sonlu ölçü alt kümelerinin δ-halkası gösterilsin.

$$\mu(f) = \frac{1}{e^2} \int_0^\infty |f(x)|^{x+1} \, dm(x)$$

modüleri tanımlansın. B, $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$ olan $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların kümesi olmak üzere T lineer operatörü

$$T(f)(x) = \begin{cases} f(x-1), & x \ge 1 \text{ ise} \\ 0, & x \in [0,1] \text{ ise} \end{cases}$$

kuralı ile verilsin. $T(B) \subset B$ olduğu açıktır. $f, g \in B$ olmak üzere $\lambda \le 1$ için

$$\begin{aligned}
\mu\left(\lambda\left(Tf-Tg\right)\right) &= e^{-2}\int_{0}^{\infty}\lambda^{x+1}\left|Tf\left(x\right)-Tg\left(x\right)\right|^{x+1}dm\left(x\right) \\
&= e^{-2}\int_{1}^{\infty}\lambda^{x+1}\left|f\left(x-1\right)-g\left(x-1\right)\right|^{x+1}dm\left(x\right) \\
&= \lambda e^{-2}\int_{0}^{\infty}\lambda^{x+1}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|^{x+1}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dm\left(x\right) \\
&= \lambda e^{-2}\int_{0}^{\infty}\lambda^{x+1}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|^{x+1}dm\left(x\right) \\
&= \lambda\mu\left(\lambda\left(f-g\right)\right)
\end{aligned}$$

sağlandığından T dönüşümü μ-genişlemeyen dönüşümdür (Khamsi ve ark., 1990).

M.A.Khamsi (2008) modüler uzaylarda quasi daralma dönüşümlerini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.3.4. X_μ modüler uzay olsun. $C \subset X_\mu$ ve $T: C \to C$ keyfi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in C$ için

$$\mu\left(Tx-Ty\right) \leq k\max\left\{\mu\left(x-y\right),\mu\left(x-Tx\right),\mu\left(y-Ty\right),\mu\left(x-Ty\right),\mu\left(y-Tx\right)\right\} \qquad (2.2)$$

olan $0<k<1$ sayısı varsa T dönüşümüne quasi-daralma dönüşümü denir (Khamsi, 2008).

Tanım 2.3.5. X_μ modüler uzay olsun. μ modüleri Δ_2-şartını sağlasın. Bazı $z \in X$ noktaları için $Sx_n \to z$ ve $Tx_n \to z$ şartını sağlayan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi mevcutken $\mu\left(TSx_n - STx_n\right) \to 0$ ise X_μ uzayındaki T ve S dönüşümlerine μ-uyumludur denir. Eğer T ve S dönüşümleri çakışma noktasında değişmeli ise $\left(S,T\right)$ çiftine μ-zayıf uyumludur denir (Mongkolkeha ve Kumam, 2011).

Tanım 2.3.6. X_μ modüler uzay ve $S,T: X_\mu \to X_\mu$ iki dönüşüm olsun.

a. $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ sürekli, azalmayan,

b. $\theta:[0,\infty)\to[0,\infty)$ alttan yarı sürekli,

c. $\psi(t)=\theta(t)=0 \Leftrightarrow t=0$,

fonksiyonları verilsin. $\forall x,y\in X$ için

$$M(x,y)=\max\left\{\mu(x-y),\mu(x-Sx),\mu(y-Ty),\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{1}{2}(y-Sx)\right)+\mu\left(\frac{1}{2}(x-Ty)\right)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$\psi(\mu(Sx-Ty))\leq\psi(M(x,y))-\theta(M(x,y))+LN(x,y)$$

ifadesini sağlayan $L\geq 0$ sayısı mevcutsa (S,T) çiftine (ψ,θ)-hemen hemen daralma dönüşümü adı verilir (Öztürk, Abbas ve Girgin, 2016).

Teorem 2.3.7. X_μ modüler uzayı μ-tam ve (S,T) çifti (ψ,θ)-hemen hemen daralma dönüşümü olsun. S ve T dönüşümlerinden herhangi biri μ-sürekli olduğunda S ve T dönüşümlerinin ortak bir tek sabit noktası vardır (Öztürk, Abbas ve Girgin, 2016).

2.4. Grafla Donatılmış Modüler Uzaylar

Bu kısımda modüler uzaylarda graf yapısıyla ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.4.1. X_μ, G grafıyla donatılmış modüler uzay ve $T:X_\mu\to X_\mu$ bir dönüşüm olsun. $X_T=\{x\in X:(x,Tx)\in E(G)\}$ ile tanımlanmaktadır (Öztürk, Abbas ve Girgin, 2016).

Tanım 2.4.2. $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir dizi olsun. $\forall x^* \in X_\mu$ için $\mu\left(c\left(T^n x - x^*\right)\right) \to 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \in E(G)$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. $\forall p \in \mathbb{N}$ için $\left(T^{n_p} x, x^*\right) \in E(G)$ şartını sağlayan $T^n(x)$ dizisinin alt dizisi olacak şekilde $\left\{T^{n_p} x\right\}$ dizisi varsa G grafına C_μ - graf denir (Öztürk, Abbas ve Girgin, 2014).

Tanım 2.4.3. $T : X_\mu \to X_\mu$ bir dönüşüm olsun ve $\left(n_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ pozitif değerli bir dizi olsun. $\mu\left(c\left(T^{n_p} x - y\right)\right) \to 0$, $\left(T^{n_p} x, T^{n_p+1} x\right) \in E(G)$ iken $\mu\left(c\left(T\left(T^{n_p} x\right) - Ty\right)\right) \to 0$, $(p \to \infty)$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı varsa $\forall x, y \in X_\mu$ için T dönüşümüne yörüngesel G_μ -süreklidir denir (Öztürk, Abbas ve Girgin, 2014).

Tanım 2.4.4. X_μ modüler uzayı üzerinde G grafı verilsin ve T, X_μ üzerinde bir dönüşüm olsun.

a. $\forall x, y \in X_\mu$ için $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$ dir. Yani, T dönüşümü G grafının kenarlarını korur.
b. $k < 1$ ve $a < b$ olan a, b, k pozitif sayıları ve $\forall (x, y) \in E(G)$ için

$$\mu\left(b(Tx - Ty)\right) < k\mu\left(a(x - y)\right)$$

ise T dönüşümüne Banach G_μ -daralma dönüşümü denir.(Aghaniansa, Kourosh ve Nourouz, 2014).

Tanım 2.4.5. X_μ modüler uzayı üzerinde G grafı verilsin ve T, X_μ modüler uzayında bir dönüşüm olsun.

a. $\forall x, y \in X_\mu$ için $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$ dir. Yani, T dönüşümü G grafının kenarlarını korur.

b. $k+l<1$, $a_1 \le \frac{b}{2}$ ve $a_2 \le \frac{b}{2}$ olan a_1, a_2, k, l pozitif sayıları ve $\forall (x,y) \in E(G)$ için

$$\mu\big(b(Tx-Ty)\big) < k\mu\big(a_1(Tx-x)\big) + l\mu\big(a_2(Ty-y)\big)$$

ise T dönüşümüne Kannan G_μ-daralma dönüşümü denir (Aghaniansa ve ark., 2014).

BÖLÜM 3. MODÜLER UZAYLARDA KIYASLAMA FONKSİYONLARI İÇEREN GENELLEŞTİRİLMİŞ DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Modüler Uzaylarda φ-Fonksiyonlarını İçeren Daralma Dönüşümleri

Bu bölümde φ kıyaslama fonksiyonları kullanılarak genelleştirilmiş daralma dönüşümlerini sağlayan zayıf uyumlu dönüşümler için sabit noktaların varlığı ve tekliği ile ilgili teoremler ve sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.1.1. X_μ modüler uzay ve μ, bu uzayda Δ_2-şartını sağlayan konveks modüler olsun. $A, B, S, T : X_\mu \to X_\mu$ dönüşümleri için aşağıdakiler sağlansın.

a. $SX_\mu \subset BX_\mu$ ve $TX_\mu \subset AX_\mu$ dir.

b. $\left(AX_\mu \cup BX_\mu\right)$, X_μ modüler uzayının μ-tam alt uzayıdır.

c. φ, (c)-kıyaslama fonksiyonudur.

Bu durumda $\forall x, y \in X_\mu$ ve $l < c$ olan l ve c sabitleri için,

$$M(x,y) = \max\Big\{\mu\big(l(Ax - By)\big), \mu\big(l(Ax - Sx)\big), \mu\big(l(By - Ty)\big),$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(Ax - Ty)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}(Sx - By)\right)\right]\Big\}$$

ve

$$N(x,y)=\min\{\mu(l(Ax-Sx)),\mu(l(By-Ty)),\mu(l(Ax-Ty)),\mu(l(Sx-By))\}$$

olmak üzere

$$\mu(c(Sx-Ty))\leq\varphi(M(x,y))+L(N(x,y)), \tag{3.1}$$

olan $L\geq 0$ sayısı varsa (S,A) ve (T,B) ikililerinin tek bir çakışma noktaları vardır. Ayrıca (S,A) ve (T,B) zayıf uyumlu dönüşüm çiftleri ise A, B, S, T dönüşümleri tek bir ortak sabit noktaya sahiptirler.

İspat: $x_0\in X_\mu$ keyfi bir nokta olsun. $SX_\mu\subset BX_\mu$ ve $TX_\mu\subset AX_\mu$ olduğundan x_1, x_2, x_3,… noktaları $Sx_0=Bx_1$, $Tx_1=Ax_2$, $Sx_2=Bx_3$,… şeklinde bulunur. Buradan

$$y_{2n}=Sx_{2n}=Bx_{2n+1}$$

ve

$$y_{2n+1}=Tx_{2n+1}=Ax_{2n+2}$$

biçiminde $\{y_n\}\in X_\mu$ dizisi elde edilir. $\forall n\geq 0$ için (3.1) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\mu(c(y_{2n}-y_{2n+1}))&=\mu(c(Sx_{2n}-Tx_{2n+1}))\\&\leq\varphi(M(x_{2n},x_{2n+1}))+L(N(x_{2n},x_{2n+1}))\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$M(x_{2n},x_{2n+1})=\max\Big\{\mu(l(Ax_{2n}-Bx_{2n+1})),\mu(l(Ax_{2n}-Sx_{2n})),\mu(l(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1})),$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(Ax_{2n}-Tx_{2n+1})\right)+\mu\left(\frac{l}{2}(Sx_{2n}-Bx_{2n+1})\right)\right]\Big\}$$

$$= \max\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n+1}\right)\right)+\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n}\right)\right)\right]\right\}$$

ve

$$N\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=\min\left\{\left\{\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Sx_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right),\right.\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Tx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Sx_{2n}\right)\right)\right\}$$

$$=\min\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n}\right)\right)\right\}$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlik dikkate alındığında

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(y_{2n-1}-y_{2n+1}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(y_{2n-1}-y_{2n}+y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{1}{2}l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)+\mu\left(\frac{1}{2}l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)+\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right]$$

$$M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=\max\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right\} \tag{3.3}$$

ve

$$N\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n}\right)\right)=0 \tag{3.4}$$

eşitlikleri bulunur. (3.2) ifadesinde (3.3) ve (3.4) kullanılırsa

$$\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\leq\varphi\left(\max\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\,\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right\}\right) \tag{3.5}$$

elde edilir. Ayrıca

$$M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=\max\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right\}=\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)$$

şeklinde seçilirse (3.5) ve Lemma (1.4.3) den

$$\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right)<\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)$$

sağlanır ve bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden

$$M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=\max\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right\}=\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)$$

olarak seçilmelidir. Böylece

$$\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)\right)\leq\mu\left(c\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\mu\left(c\left(y_{2n+1}-y_{2n+2}\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right)\leq\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)$$

eşitsizliği ispatlanabilir. Böylece $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\mu\left(c\left(y_{n}-y_{n+1}\right)\right)&\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(y_{n-1}-y_{n}\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(y_{n-1}-y_{n}\right)\right)\right)\\&\leq\varphi\left(\varphi\left(\mu\left(c\left(y_{n-2}-y_{n-1}\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\leq \varphi^2\left(\mu\left(c\left(y_{n-2}-y_{n-1}\right)\right)\right)$$

$$\vdots \tag{3.6}$$

$$\leq \varphi^n\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)$$

bulunur. En son eşitsizlikte $n\to\infty$ için limit alınırsa φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olduğundan $\varphi^n\left(\mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)\right)\to 0$ olur. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)=0$ elde edilir.

$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğunu görmek için ilk olarak $\left\{\frac{c}{m}y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ile tanımlı dizinin μ-Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $m>n$ için (3.6) ve Önerme 2.2.10. kullanılarak

$$\mu\left(\frac{c}{m}\left(y_n-y_{n+m}\right)\right)=\mu\left(\frac{c}{m}\left(y_n-y_{n+1}\right)+\frac{c}{m}\left(y_{n+1}-y_{n+2}\right)+\cdots+\frac{c}{m}\left(y_{n+m-1}-y_{n+m}\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)+\mu\left(c\left(y_{n+1}-y_{n+2}\right)\right)+\cdots\mu\left(c\left(y_{n+m-1}-y_{n+m}\right)\right)$$

$$\leq \varphi^n\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)+\varphi^{n+1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)+\cdots+\varphi^{n+m-1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right) \qquad (n,m\to\infty)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)<\infty$$

elde edilir. Böylece $\left\{\frac{c}{m}y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ-Cauchy dizisidir. Δ_2-şartından sağlandığından $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ-Cauchy dizisidir. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(AX_\mu\cup BX_\mu\right)$

alt uzayında μ-Cauchy dizisi olduğundan ve bu uzayda μ-tam olduğundan $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $y\in\left(AX_\mu \cup BX_\mu\right)$ noktası vardır. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\left(y_n - y\right)=0$ dır.

$y\in AX_\mu$ olsun. Böylece $y=Az$ ve $Sz\neq y$ olacak şekilde $z\in X_\mu$ noktası bulunur. Burada $\mu\left(c\left(Sz-y\right)\right)>0$ dır.

$$\mu\left(c\left(Sz-Tx_{2n+1}\right)\right)\leq\varphi\left(M\left(z,x_{2n+1}\right)\right)+LN\left(z,x_{2n+1}\right) \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} M(z,x_{2n+1})=\max\Big\{&\mu\left(l\left(Az-Bx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Az-Sz\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right),\\ &\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(Az-Tx_{2n+1}\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(Sz-Bx_{2n+1}\right)\right)\right]\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned} N\left(z,x_{2n+1}\right)=\min\Big\{&\mu\left(l\left(Az-Bz\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right),\\ &\mu\left(l\left(Az-Tx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Sz-Bx_{2n+1}\right)\right)\Big\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

dır. (3.7) ifadesinde $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\mu\left(c\left(Sz-y\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(Sz-y\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(Sz-y\right)\right)\right)<\mu\left(c\left(Sz-y\right)\right)$$

elde edilir ve bu da bir çelişki oluşturmaktadır. Böylece $Sz=y$ elde edilir. $SX_\mu\subset BX_\mu$ olduğundan $Bw=Sz=y=Az$ şartını sağlayan $w\in X_\mu$ noktası vardır. Burada $Bw=y$ fakat $Tw\neq y$ olsun. (3.1) ifadesi kullanılarak

$$\mu\left(c\left(Sz-Tw\right)\right)\leq\varphi\left(M\left(z,w\right)\right)+LN\left(z,w\right) \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} M(z,w)=\max\Big\{&\mu\left(l\left(Az-Bw\right)\right),\mu\left(l\left(Az-Sz\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right), \\ &\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(Az-Tw\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(Sz-Bw\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

ve

$$\begin{aligned} N\left(z,w\right)=\min\Big\{&\mu\left(l\left(Az-Bz\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right), \\ &\mu\left(l\left(Az-Tw\right)\right),\mu\left(l\left(Sz-Bw\right)\right)\Big\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. (3.10)-(3.12) ifadelerinden

$$\mu\left(c\left(y-Tw\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(y-Tw\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(y-Tw\right)\right)\right)<\mu\left(c\left(y-Tw\right)\right)$$

elde edilir ve bu durum ise çelişki oluşturmaktadır. Böylece $y=Tw$ elde edilir. Ayrıca $Sz=Az=Bw=y=Tw$ eşitliği sağlanır. $\left(T,B\right)$ ve $\left(S,A\right)$ çiftleri zayıf uyumlu olsunlar. T ve B, w noktası için S ve A, $z\in X_{\mu}$ noktasında değişmeli dönüşümlerdir. Yani;

$$By=B\left(Bw\right)=B\left(Tw\right)=T\left(Bw\right)=Ty$$

ve

$$Sy=S\left(Sz\right)=S\left(Az\right)=A\left(Sz\right)=Ay$$

dir. Bu dönüşümler için y noktasının ortak sabit nokta olduğu gösterilmelidir. (3.1) ifadesinden

$$\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right)=\mu\left(c\left(Sy-Tw\right)\right)\leq\varphi\left(M\left(y,w\right)\right)+LN\left(y,w\right) \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}M(y,w)=\max\Big\{&\mu\left(l\left(Ay-Bw\right)\right),\mu\left(l\left(Ay-Sy\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right),\\&\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(Ay-Tw\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(Sy-Bw\right)\right)\right]\end{aligned} \tag{3.14}$$

ve

$$\begin{aligned}N\left(y,w\right)=\min\Big\{&\mu\left(l\left(Ay-By\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right),\\&\mu\left(l\left(Ay-Tw\right)\right),\mu\left(l\left(Sy-Bw\right)\right)\Big\}\end{aligned} \tag{3.15}$$

dır. (3.13)-(3.15) ifadelerinden

$$\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(Sy-y\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right)\right)<\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right)$$

sağlanır ve çelişki elde edilir. Dolayısıyla $Sy=y=Ay$ eşitliği doğrudur. Benzer şekilde $By=y=Ty$ elde edilir. Buradan S,T,A,B için y noktası ortak sabit noktadır.

S,T,A ve B dönüşümleri için ortak sabit noktasının tek olduğunun gösterilmesi için $y^{*}\in X_{\mu}$ ikinci bir sabit nokta olsun. Buradan

$$\mu\left(c\left(y^{*}-y\right)\right)=\mu\left(c\left(Sy^{*}-Ty\right)\right)\leq\varphi\left(M\left(y^{*},y\right)\right)+LN\left(y^{*},y\right)$$

$$M(y^*,y)=\max\Big\{\mu\big(l\big(Ay^*-By\big)\big),\mu\big(l\big(Ay^*-Sy^*\big)\big),\mu\big(l(Ty-By)\big),$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\big(Ay^*-Ty\big)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\big(Sy^*-By\big)\right)\right]$$

ve

$$N\big(y^*,y\big)=\min\Big\{\mu\big(l\big(Ay^*-Sy^*\big)\big),\mu\big(l(Ty-By)\big),\mu\big(l\big(Ay^*-Ty\big)\big),\mu\big(l\big(y^*-Ty^*\big)\big)\Big\}$$

olduğundan

$$\mu\big(c\big(y^*-y\big)\big)\le\varphi\big(\mu\big(c\big(y^*-y\big)\big)\big)<\mu\big(c\big(y^*-y\big)\big)$$

elde edilir. Dolayısıyla $y=y^*$ sağlanmaktadır. y, S,T,A,B dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

Yukarıdaki teorem kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1.2. X_μ μ-tam modüler uzay olsun. μ konveks ve Δ_2-şartını sağlayan bir fonksiyonel olsun. $T,A:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümleri için aşağıdakiler sağlansın.

a. $TX_\mu\subset AX_\mu$, şartını sağlayan X_μ alt kümelerinden en az biri μ-kapalıdır.
b. φ, (c)-kıyaslama fonksiyonudur.

Bu durumda $\forall x,y\in X_\mu$ ve $l<c$ olan $l,c>0$ sabitleri için,

$$M(x,y)=\max\left\{\mu\left(l\left(Ax-Ay\right)\right),\mu\left(l\left(Tx-Ax\right)\right),\mu\left(l\left(Ty-Ay\right)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(Tx-Ay)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}(Ty-Ax)\right)\right]\right\}$$

ve

$$N(x,y)=\min\left\{\mu\left(l\left(Tx-Ax\right)\right),\mu\left(l\left(Ty-Ay\right)\right),\mu\left(l\left(Tx-Ay\right)\right),\mu\left(l\left(Ty-Ax\right)\right)\right\}$$

olmak üzere

$$\mu\left(c\left(Tx-Ty\right)\right)\leq\varphi\left(M\left(x,y\right)\right)+L\left(N\left(x,y\right)\right)$$

ifadesini sağlayan $L\geq 0$ sayısı mevcutsa A ve T dönüşümlerinin tek bir çakışma noktası vardır. A ve T dönüşümleri zayıf uyumlu dönüşümler ise X_μ uzayında bir tek ortak noktaya sahiptirler.

Sonuç 3.1.3. X_μ μ-tam modüler uzay olsun. μ modüleri konveks olsun ve Δ_2-şartını sağlasın.

a. $T:X_\mu\to X_\mu$ bir dönüşüm olsun.

b. φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olsun.

Bu durumda $\forall x,y\in X_\mu$ $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$M(x,y)=\max\left\{\mu\left(l\left(x-y\right)\right),\mu\left(l\left(Tx-x\right)\right),\mu\left(l\left(Ty-y\right)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(Tx-y)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}(Ty-x)\right)\right]\right\}$$

ve

$$N(x,y)=\min\{\mu(l(Tx-x)),\mu(l(Ty-y)),\mu(l(Tx-y)),\mu(l(Ty-x))\}$$

olmak üzere

$$\mu(c(Tx-Ty))\leq\varphi(M(x,y))+L(N(x,y)),$$

şartını sağlayan $L\geq 0$ varsa T dönüşümü X_μ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.2. Modüler Uzaylarda İntegral Tipi Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ olan ve aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyonların ailesi Φ_1 ile gösterilecektir.

a. ϕ, $[0,\infty)$ kümesinin her kompakt alt kümesi üzerinde toplanabilirdir.
b. Lebesgue integrallenebilirdir.
c. Non-negatif ve $\forall\varepsilon>0$ için $\int_0^\varepsilon \phi(s)ds>0$ dır.

Teorem 3.2.1. X_μ modüler uzay olsun. μ konveks bir fonksiyonel olsun ve Δ_2-şartını sağlasın. $A,B,S,T:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümleri için aşağıdakiler sağlansın.

a. $SX_\mu\subset BX_\mu$ ve $TX_\mu\subset AX_\mu$ dir.
b. $(AX_\mu\cup BX_\mu)$, X_μ modüler uzayının μ-tam alt uzayıdır.
c. φ, (c)-kıyaslama fonksiyonudur.
d. $\phi\in\Phi_1$ dir.

Bu durumda $\forall x, y \in X_\mu$ ve $l < c$ olan l ve c sabitleri için,

$$M(x,y) = \max\Big\{\mu\big(l(Ax-By)\big), \mu\big(l(Ax-Sx)\big), \mu\big(l(By-Ty)\big),$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(Ax-Ty)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}(Sx-By)\right)\right]\Big\}$$

ve

$$N(x,y) = \min\Big\{\mu\big(l(Ax-Sx)\big), \mu\big(l(By-Ty)\big), \mu\big(l(Ax-Ty)\big), \mu\big(l(By-Sx)\big)\Big\}$$

olmak üzere

$$\int_0^{\mu(c(Sx-Ty))} \phi(s)\,ds \le \varphi\left(\int_0^{M(x,y)} \phi(s)\,ds\right) + L.\left(\int_0^{N(x,y)} \phi(s)\,ds\right)$$

olan $L \ge 0$ sayısı mevcut ise (S,A) ve (T,B) ikililerinin tek bir çakışma noktası vardır. Ayrıca (S,A) ve (T,B) zayıf uyumlu dönüşümler ise A, B, S, T dönüşümleri X_μ uzayında tek bir ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. X_μ uzayında $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi Teorem 3.3.1 deki gibi oluşturulur ve Φ ailesi ile (c)-kıyaslama fonksiyonunun özellikleri kullanılırsa Teorem 3.1.1. deki ispata benzer şekilde bu dönüşümlerin tek bir sabit noktaya sahip olduğu görülür.

Sonuç 3.2.2. X_μ μ-tam modüler uzay ve μ modüleri Δ_2-şartını sağlayan konveks modüler olsun. $T, A : X_\mu \to X_\mu$ dönüşümleri için aşağıdakiler sağlansın.

a. $TX_\mu \subset AX_\mu$, olan X_μ alt kümelerinden en az biri μ-kapalıdır.

b. φ, (c)-kıyaslama fonksiyonudur.

c. $\phi \in \Phi_1$ dir.

Bu durumda $\forall x, y \in X_\mu$ ve $l < c$ olan l, c pozitif sabitleri için

$$M(x,y) = \max\left\{\mu\left(l(Ax - Ay)\right), \mu\left(l(Tx - Ax)\right), \mu\left(l(Ty - Ay)\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(Tx - Ay)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}(Ty - Ax)\right)\right]\right\}$$

ve

$$N(x,y) = \min\left\{\mu\left(l(Tx - Ax)\right), \mu\left(l(Ty - Ay)\right), \mu\left(l(Tx - Ay)\right), \mu\left(l(Ty - Ax)\right)\right\}$$

olmak üzere

$$\int_0^{\mu(c(Tx-Ty))} \phi(s)\,ds \le \varphi\left(\int_0^{M(x,y)} \phi(s)\,ds\right) + L.\left(\int_0^{N(x,y)} \phi(s)\,ds\right)$$

şartını sağlayan $L \ge 0$ sayısı varsa A ve T dönüşümleri çakışma noktasına sahiptirler. Ayrıca, A ve T dönüşümleri zayıf uyumlu dönüşümler ise ortak tek bir sabit noktaya sahiptirler.

Sonuç 3.2.3. X_μ μ-tam modüler uzay olsun ve μ modüleri bu uzayda Δ_2-şartı sağlayan konveks modüler olsun. $T : X_\mu \to X_\mu$ dönüşümü için aşağıdakiler sağlansın.

a. φ, (c)- kıyaslama fonksiyonudur.

b. $\phi \in \Phi_1$ dir.

Bu durumda, $\forall x, y \in X_\mu$ ve $l < c$ olan l ve c pozitif değerleri için

$$M(x,y) = \max\Big\{\mu\big(l(x-y)\big), \mu\big(l(x-Tx)\big), \mu\big(l(y-Ty)\big),$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(x-Ty)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}(Tx-y)\right)\right]\Big\}$$

ve

$$N(x,y) = \min\Big\{\mu\big(l(x-Tx)\big), \mu\big(l(y-Ty)\big), \mu\big(l(x-Ty)\big), \mu\big(l(Tx-y)\big)\Big\}$$

olmak üzere

$$\int_0^{\mu(c(Tx-Ty))} \phi(s)\,ds \le \varphi\left(\int_0^{M(x,y)} \phi(s)\,ds\right) + L.\left(\int_0^{N(x,y)} \phi(s)\,ds\right)$$

şartını sağlayan $L \geq 0$ sayısı mevcut ise T dönüşümü X_μ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

BÖLÜM 4. GRAFLA DONATILMIŞ MODÜLER UZAYLARDA SABİT NOKTA VE ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde yönlendirilmiş grafla donatılmış modüler uzaylarda (φ, L, G)-daralma adı verilen hem kıyaslama fonksiyonu hem de hemen hemen daralma yapısını içeren yeni bir dönüşüm sınıfı tanımlanmış bu dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilmiştir.

4.1. Grafla Donatılmış Modüler Uzaylarda Kıyaslama Fonksiyonu İçeren Genelleştirilmiş (φ, L, G) Daralma Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teorisi

Tanım 4.1.1. X_μ, G grafı ile donatılmış modüler uzay olsun. $T : X_\mu \to X_\mu$ dönüşümü

a. $\forall x, y \in X_\mu$ için $(x, y) \in E(G)$ iken $(Tx, Ty) \in E(G)$ dir. Yani T, G grafının kenarlarını korur.
b. φ, (c)-kıyaslama fonksiyonudur.
c. $\forall (x, y) \in E(G)$ ve $l < c$ olan l, c pozitif sayıları için

$$M(x, y) = \max\left\{\mu(l(x-y)), \mu(l(x-Tx)), \mu(l(y-Ty)),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(y-Tx)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}(x-Ty)\right)\right]\right\}$$

ve

$$N(x,y)=\min\{\mu(l(x-Tx)),\mu(l(y-Ty)),\mu(l(y-Tx)),\mu(l(x-Ty))\}$$

olmak üzere

$$\mu(c(Tx-Ty))\leq\varphi(M(x,y))+L(N(x,y)), \tag{4.1}$$

şartını sağlayan $L\geq 0$ sayısı mevcutsa T dönüşümüne genelleştirilmiş hemen hemen (φ,L,G) daralma dönüşümü denir.

Lemma 4.1.2. X_μ, G grafı ile donatılmış modüler uzay olsun. $T:X_\mu\to X_\mu$ genelleştirilmiş (φ,L,G) daralma dönüşümü için $Tx_0\in[x_0]_{\tilde{G}}$ iken $x_0\in X_\mu$ vardır ve

a. T hem genelleştirilmiş (φ,L,G^{-1}) daralma dönüşümü hem de genelleştirilmiş $\left(\varphi,L,\tilde{G}\right)$ daralma dönüşümüdür.

b. $[x_0]_{\tilde{G}}$, T invaryanttır ve $T|_{[x_0]_{\tilde{G}}}$ dönüşümü genelleştirilmiş hemen hemen $\left(\varphi,L,\tilde{G}x_0\right)$ daralma dönüşümüdür.

Teorem 4.1.3. X_μ, G grafı ile donatılmış μ-tam modüler uzay ve μ modüleri Δ_2-şartını sağlayan konveks modüler olsun. $T:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümü için aşağıdakiler sağlansın.

a. G, zayıf bağlantılı ve C_μ-graftır;

b. T, genelleştirilmiş hemen hemen $\left(\varphi,L,\tilde{G}\right)$ daralma dönüşümüdür;

c. X_T, boştan farklı bir kümedir.

Bu durumda T bir Picard operatörüdür.

İspat. $x_0 \in X_\mu$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Tx_0 \in [x_0]_{\tilde{G}}$ ve $(T^n x, T^{n+1}x) \in E(G)$ dir. (4.1) ifadesinden

$$\mu\left(c\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right) \leq \varphi\left(M\left(T^{n-1}x, T^n x\right)\right) + L\left(N\left(T^{n-1}x, T^n x\right)\right) \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} M\left(T^{n-1}x, T^n x\right) = \max\Big\{&\mu\left(l\left(T^{n-1}x - T^n x\right)\right), \mu\left(l\left(T^{n-1}x - T^n x\right)\right), \mu\left(l\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right), \\ &\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(T^n x - T^n x\right)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}\left(T^{n-1}x - T^{n+1}x\right)\right)\right]\Big\} \\ \leq \max\Big\{&\mu\left(l\left(T^{n-1}x - T^n x\right)\right), \mu\left(l\left(T^n x - T^{n-1}x\right)\right), \\ &\frac{1}{2}\left[\mu\left(l\left(T^n x - T^n x\right)\right) + \mu\left(l\left(T^{n-1}x - T^{n+1}x\right)\right)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} N\left(T^{n-1}x, T^n x\right) = \min\Big\{\Big\{&\mu\left(l\left(T^{n-1}x - T^n x\right)\right), \mu\left(l\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right), \\ &\mu\left(l\left(T^n x - T^n x\right)\right), \mu\left(l\left(T^{n-1}x - T^{n+1}x\right)\right)\Big\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

dir. (4.2)-(4.4) ve φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olduğundan

$$\mu\left(c\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right) \leq \varphi\left(\max\left\{\mu\left(l\left(T^{n-1}x - T^n x\right)\right), \mu\left(l\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right)\right\}\right)$$

elde edilir. Burada

$$\max\left\{\mu\left(l\left(T^{n-1}x-T^{n}x\right)\right),\mu\left(l\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)\right\}=\mu\left(l\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\mu\left(c\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)&\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)\right)\\&\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)\right)<\mu\left(c\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve çelişki oluşmaktadır. Böylece

$$\max\left\{\mu\left(l\left(T^{n-1}x-T^{n}x\right)\right),\mu\left(l\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)\right\}=\mu\left(l\left(T^{n-1}x-T^{n}x\right)\right)$$

seçilmelidir. Dolayısıyla

$$\mu\left(c\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(T^{n-1}x-T^{n}x\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(T^{n-1}x-T^{n}x\right)\right)\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned}\mu\left(c\left(T^{n}x-T^{n+1}x\right)\right)&\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(T^{n-1}x-T^{n}x\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(T^{n-1}x-T^{n}x\right)\right)\right)\\&\leq\varphi\left(\varphi\left(\mu\left(l\left(T^{n-2}x-T^{n-1}x\right)\right)\right)\right)\\&\leq\varphi^{2}\left(\mu\left(c\left(T^{n-2}x-T^{n-1}x\right)\right)\right)\qquad(4.5)\\&\ \ \vdots\\&\leq\varphi^{n}\left(\mu\left(c\left(x_{0}-x_{1}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olduğundan $\varphi^n\left(\mu\left(c\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right)\right) \to 0$ olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} \mu\left(c\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right) = 0$ elde edilir.

$\left\{T^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi için ilk olarak $\left\{\frac{c}{m} T^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $m > n$ için (4.5) ifadesi ve Önerme 2.2.10. kullanılarak

$$\mu\left(\frac{c}{m}\left(T^n x - T^{n+m}x\right)\right)$$

$$= \mu\left(\frac{c}{m}\left(T^n x - T^{n+1}x\right) + \frac{c}{m}\left(T^{n+1}x - T^{n+2}x\right) + \cdots + \frac{c}{m}\left(T^{n+m-1}x - T^{n+m}x\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(c\left(T^n x - T^{n+1}x\right)\right) + \mu\left(c\left(T^{n+1}x - T^{n+2}x\right)\right) + \cdots \mu\left(c\left(T^{n+m-1}x - T^{n+m}x\right)\right)$$

$$\leq \varphi^n\left(\mu\left(c\left(x - Tx\right)\right)\right) + \varphi^{n+1}\left(\mu\left(c\left(x - Tx\right)\right)\right) + \cdots + \varphi^{n+m-1}\left(\mu\left(c\left(x - Tx\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(x - Tx\right)\right)\right) \qquad (n,m \to \infty)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(x - Tx\right)\right)\right) < \infty$$

bulunur. Buradan $\left\{\frac{c}{m} T^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ-Cauchy dizisidir. Δ_2-şartı sağlandığından $\left\{T^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ-Cauchy dizisidir. X_μ, μ-tam olduğundan $\left\{T^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $x^* \in X_\mu$ noktası vardır. G, C_μ-graf olduğundan $\forall p\in\mathbb{N}$ için $\left(T^{n_p}x, x^*\right) \in E(G)$ olacak şekilde $\left\{T^{n_p}x\right\}$ alt dizisi vardır. Böylece $\forall p\in\mathbb{N}$ için $\left(T^{n_p}x, x^*\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ dir. Yani;

$$\mu\left(c\left(T^{n_p+1}x-Tx^*\right)\right)\leq\varphi\left(M\left(T^{n_p}x,x^*\right)\right)+L\left(N\left(T^{n_p}x,x^*\right)\right) \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}M\left(T^{n_p}x,x^*\right)=\max\Big\{&\mu\left(l\left(T^{n_p}x-x^*\right)\right),\mu\left(l\left(T^{n_p}x-T^{n_p+1}x\right)\right),\mu\left(l\left(x^*-Tx^*\right)\right),\\&\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(x^*-T^{n_p+1}x\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(T^{n_p}x-Tx^*\right)\right)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned}N\left(T^{n_p}x,x^*\right)=\min\Big\{\Big\{&\mu\left(l\left(T^{n_p}x-T^{n_p+1}x\right)\right),\mu\left(l\left(x^*-Tx^*\right)\right),\\&\mu\left(l\left(x^*-T^{n_p+1}x\right)\right),\mu\left(l\left(T^{n_p}x-Tx^*\right)\right)\Big\}\end{aligned} \tag{4.8}$$

dır. (4.6)-(4.8) ifadelerinde $p\to\infty$ için limit alınırsa

$$\mu\left(c\left(x^*-Tx^*\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(x^*-Tx^*\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(x^*-Tx^*\right)\right)\right)<\mu\left(c\left(x^*-Tx^*\right)\right)$$

elde edilir ki bu durumda çelişki oluşmaktadır. Dolayısıyla $x^*=Tx^*$ sağlanır.

T dönüşümünün sabit noktasının tek olduğunu göstermek için T dönüşümünün bir diğer sabit noktası y^* olsun. G, C_μ-graf olduğundan $\forall p\in\mathbb{N}$ için $\left(T^{n_p}x,x^*\right)\in E(G)$ ve $\left(T^{n_p}x,y^*\right)\in E(G)$ şartını sağlayan $\left\{T^{n_p}x\right\}$ alt dizisi vardır. Dahası G zayıf-bağlantılı olduğundan $\left(x^*,y^*\right)\in E\left(\tilde{G}\right)$ dir. Yani;

$$\mu\left(c\left(x^*-y^*\right)\right)=\mu\left(c\left(Tx^*-Ty^*\right)\right)$$

$$\le\varphi\left(\max\left\{\mu\left(l\left(x^*-y^*\right)\right),\mu\left(l\left(x^*-Tx^*\right)\right),\mu\left(l\left(y^*-Ty^*\right)\right),\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(x^*-Ty^*\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(y^*-Tx^*\right)\right)\right]\right\}\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(x^*-Tx^*\right)\right),\mu\left(l\left(y^*-Ty^*\right)\right),\mu\left(l\left(x^*-Ty^*\right)\right),\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(y^*-Tx^*\right)\right)\right\}\le\varphi\left(\mu\left(l\left(x^*-y^*\right)\right)\right)<\mu\left(l\left(x^*-y^*\right)\right)$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $x^*=y^*$ dır. Böylece T dönüşümünün sabit noktasının tek olduğu görülür.

Sonuç 4.1.4. X_μ, G grafı ile donatılmış μ-tam modüler uzay olsun. μ modüleri Δ_2-şartı sağlasın. $T:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümü G grafının kenarlarını korusun ve X_T kümesi de boştan farklı bir küme olsun. T dönüşümü için

a. G, zayıf bağlantılı ve C_μ-graf;

b. $\forall x,y\in E\left(\tilde{G}\right)$, $\delta\in(0,1)$ ve $l<c$ olan l ve c sabitleri için

$$\mu\left(c\left(Tx-Ty\right)\right)\le\delta\max\left\{\mu\left(l\left(x-y\right)\right),\mu\left(l\left(x-Tx\right)\right),\mu\left(l\left(y-Ty\right)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(x-Ty\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(y-Tx\right)\right)\right]\right\}$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(x-Tx\right)\right),\mu\left(l\left(y-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(x-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(y-Tx\right)\right)\right\}$$

olan $L \geq 0$ sayısı varsa T bir Picard operatörüdür.

Sonuç 4.1.5. X_μ, G grafı ile donatılmış μ-tam modüler uzay ve μ modüleri Δ_2-şartını sağlayan konveks bir fonksiyon olsun. $T: X_\mu \to X_\mu$, $\forall x, y \in X_\mu$ olmak üzere $(x,y) \in E(G) \Rightarrow (Tx,Ty) \in E(G)$ özelliğine sahip bir dönüşüm ve X_T boştan farklı bir küme olsun. T dönüşümü için

a. G, zayıf bağlantılı ve C_μ-graf;

b. $\forall x, y \in E\left(\tilde{G}\right)$, $\delta \in (0,1)$, $l < c$ olan l ve c pozitif sayıları için

$$\mu\left(c\left(Tx-Ty\right)\right) \leq \delta\left(\mu\left(l\left(x-y\right)\right)\right) + L\min\left\{\mu\left(l\left(x-Tx\right)\right), \mu\left(l\left(y-Ty\right)\right),\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(x-Ty\right)\right), \mu\left(l\left(y-Tx\right)\right)\right\}$$

şartını sağlayan $L \geq 0$ sayısı varsa T bir Picard operatörüdür.

Teorem 4.1.3. de C_μ-graf özelliği yerine T dönüşümünün yörüngesel G_μ-sürekli olma özelliği kullanılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.6. X_μ, G grafı ile donatılmış $\mu-$tam modüler uzay ve μ konveks bir fonksiyonel olsun. Δ_2-şartını sağlasın. $T: X_\mu \to X_\mu$ dönüşümü yörüngesel G_μ-sürekli ve genelleştirilmiş $\left(\varphi, L, \tilde{G}\right)$ daralma dönüşümü olsun. Aynı zamanda X_T kümesi boştan farklı bir küme ve G-grafı zayıf bağlantılı olsun. Böylece T bir Picard operatörüdür.

İspat. $x \in X_T$ olsun. Teorem 4.1.3 deki gibi $\left\{\frac{c}{m}T^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mu-$Cauchy dizisidir ve Δ_2 şartı sağlandığından da $\left\{T^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu-$Cauchy dizisidir. X_μ modüler uzayının tamlığından $\lim_{n\to\infty}\mu\left(T^n x - x^*\right)=0$ şartı sağlanır. Böylece $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\left(T^n x, T^{n+1}x\right)\in E(G)$ ve T yörüngesel G_μ-sürekli olduğundan $\mu\left(T^{n+1}x - T^n x\right)\to 0$ dır. Dolayısıyla $Tx^* = x^*$ dır. y^* farklı bir sabit noktası olarak seçildiğinde de. Teorem 4.1.3 deki ispata benzer şekilde $y^* = x^*$ eşitliği yani sabit noktanın tekliği de benzer şekilde ispatlanır.

4.2. Yönlü Grafla Donatılmış Modüler Uzaylarda Kıyaslama Fonksiyonu İçeren Genelleştirilmiş Hemen Hemen (φ, L, G) Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teorisi

Bu kısımda, ilk olarak ST-bağlantılılık ve ℓ_μ-graf notasyonlarını tanımlanacaktır. Ayrıca bu kısımda elde edilen tüm sonuçlar için grafın yönlü graf olması özelliği kullanılacaktır.

Tanım 4.2.1. X_μ yönlü graf ile donatılan modüler uzay olsun. $S,T : X \to X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ için $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$x_{2n+2} = Tx_{2n+1} \qquad x_{2n+1} = Sx_{2n} \qquad n = 0,1,2.......$$

olarak inşa edilsin. $\forall x, y \in X_\mu$, G grafının köşe noktaları olsun. $x_0 = x$, $x_{2N} = y$, $\left(x_{2n}, Sx_{2n}\right)\in E(G)$ ve $\left(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}\right)\in E(G)$, $n = 0,1,.....N-1$ özellikli $2N+1$ tane köşe nokta için $\left(x_n\right)_{n=0}^{2N}$ bir dizi oluşturacak şekilde x noktasından y noktasına $2N$ uzunluğunda bir yol varsa G yönlü grafına ST-bağlantılı graf adı verilir. $\tilde{G}$, ST-bağlantılı ise G grafı zayıf ST-bağlantılıdır denir.

Tanım 4.2.2. X_μ modüler uzay ve $S,T : X_\mu \to X_\mu$ iki dönüşüm olsun. X_μ uzayında $\mu(x_n - x) \to 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_{2n}, x_{2n+1}) \in E(G)$ şartını sağlayan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi mevcut olsun. T, μ-sürekli ve her $p \geq 0$ için $\left(x, x_{2n_p+1}\right) \in E(G)$ ya da T, μ-sürekli ve her $p \geq 0$ için $\left(x, x_{2n_p}\right) \in E(G)$ şartını sağlayan $\{x_{2n}\}$ dizisinin alt dizisi olan $\left\{x_{2n_p}\right\}$ dizisi varsa G grafına ℓ_μ-graf denir.

Teorem 4.2.3. X_μ, yönlü G grafı ile donatılmış μ-tam modüler uzay olsun ve μ modüleri Δ_2-şartını sağlasın. $S,T : X_\mu \to X_\mu$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın.

a. G, ST-bağlantılıdır ve ℓ_μ-graftır,

b. $(x_{2n}, Sx_{2n}) \in E(G) \Rightarrow (x_{2n+2}, Sx_{2n+2}) \in E(G)$

ve

$$(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \in E(G) \Rightarrow (x_{2n+3}, Tx_{2n+3}) \in E(G)$$

olacak şekilde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X_\mu$ dizisi vardır.

c. φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olmak üzere, $\forall (x,y) \in E(G)$ ve $l < c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$M^*(x,y) = \max\Big\{\mu\big(l(x-y)\big), \mu\big(l(x-Sx)\big), \mu\big(l(y-Ty)\big),$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(y-Sx)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}(x-Ty)\right)\right]\Big\}$$

ve

$$N^*(x,y)=\min\{\mu(l(x-Sx)),\mu(l(y-Ty)),\mu(l(x-Ty)),\mu(l(y-Sx))\}$$

olmak üzere

$$\mu(c(Sx-Ty))\le\varphi(M^*(x,y))+L(N^*(x,y)),$$

olan $L\ge 0$ sayısı mevcuttur.

Bu durumda T,S dönüşümleri ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0, X_μ modüler uzayında seçilen keyfi bir eleman olsun. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$x_{2n+2}=Tx_{2n+1} \text{ ve } x_{2n+1}=Sx_{2n},\quad n=0,1,2,...$$

şeklinde oluşturulsun. $x_0,x_1\in X_\mu$ için $(x_0,Sx_0)\in E(G)$ ve $(x_1,Tx_1)\in E(G)$ olsun. (b) deki kabulden $x_2,x_3\in X$ için $(x_2,Sx_2)\in E(G)$ ve $(x_3,Tx_3)\in E(G)$ dir. Bu şekilde devam edilerek $\forall n\in\mathbb{N}$ için $(x_{2n},x_{2n+1})\in E(G)$ ve $(x_{2n+1},x_{2n+2})\in E(G)$ elde edilir. (c) şartından

$$\begin{aligned}\mu(c(x_{2n+1}-x_{2n+2}))&=\mu(c(Sx_{2n}-Tx_{2n+1}))\\&\le\varphi(M^*(x_{2n},x_{2n+1}))+L(N^*(x_{2n},x_{2n+1})),\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}M^*(x_{2n},x_{2n+1})=\max\{&\mu(l(x_{2n}-x_{2n+1})),\mu(l(x_{2n}-Sx_{2n})),\mu(l(x_{2n+1}-Tx_{2n+1})),\\&\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(x_{2n+1}-Sx_{2n})\right)+\mu\left(\frac{l}{2}(x_{2n}-Tx_{2n+1})\right)\right]\}\\=\max\{&\mu(l(x_{2n}-x_{2n+1})),\mu(l(x_{2n}-x_{2n+1})),\mu(l(x_{2n+1}-x_{2n+2})),\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}(x_{2n+1}-x_{2n+1})\right)+\mu\left(\frac{l}{2}(x_{2n}-x_{2n+2})\right)\right]\Bigg\}$$

$$\leq \max\left\{\mu\left(l\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(l\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right)+\mu\left(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right]\right\} \tag{4.10}$$

$$= \max\left\{\mu\left(l\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right\}$$

ve

$$N^*\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) = \min\left\{\mu\left(l\left(x_{2n}-Sx_{2n}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right)\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(x_{2n}-Tx_{2n+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-Sx_{2n}\right)\right)\right\}$$

$$= \min\left\{\mu\left(l\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right. \tag{4.11}$$

$$\left.\mu\left(l\left(x_{2n}-x_{2n+2}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+1}\right)\right)\right\},$$

dır. (4.9)-(4.11) eşitsizliklerinden ve φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olduğundan

$$\mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right) \leq \varphi\left(\max\left\{\mu\left(l\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right\}\right)$$

$$\leq \varphi\left(\max\left\{\mu\left(c\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right\}\right) \tag{4.12}$$

olur ve $\max\left\{\mu\left(c\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right\} = \mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)$ alınırsa (4.9) eşitsizliğinde

$$\mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right) \leq \varphi\left(\mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right) < \mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)$$

elde edilir ve bu ise bir çelişkidir. Böylece

$$\max\left\{\mu\left(c\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right\} = \mu\left(c\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right)$$

dır. Buradan

$$\mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right) \leq \varphi\left(\mu\left(c\left(x_{2n}-x_{2n+1}\right)\right)\right) \tag{4.13}$$

olur. (b) özelliği kullanıldığında $\left(x_{2n}, Sx_{2n}\right) \in E(G)$ ve $\left(x_{2n+2}, Sx_{2n+2}\right) \in E(G)$ dir. Yani $\left(x_{2n+2}, Sx_{2n+3}\right) \in E(G)$ elde edilir. (c) özelliğinden

$$\begin{aligned} \mu\left(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\right) &= \mu\left(c\left(Sx_{2n+2}-Tx_{2n+1}\right)\right) \\ &\leq \varphi\left(M^{*}\left(x_{2n+2}, x_{2n+1}\right)\right) + L\left(N^{*}\left(x_{2n+2}, x_{2n+1}\right)\right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} M^{*}\left(x_{2n+2}, x_{2n+1}\right) = \max\Big\{ & \mu\left(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+2}-Sx_{2n+2}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right), \\ & \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(x_{2n+1}-Sx_{2n+2}\right)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}\left(x_{2n+2}-Tx_{2n+1}\right)\right)\right]\Big\} \\ = \max\Big\{ & \mu\left(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right), \\ & \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(x_{2n+1}-x_{2n+3}\right)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}\left(x_{2n+2}-x_{2n+2}\right)\right)\right]\Big\} \end{aligned}$$

$$\leq \max\Big\{\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+1}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big),$$

$$\frac{1}{2}\Big[\mu\big(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\big)+\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big)\Big]\Big\} \tag{4.15}$$

$$=\max\Big\{\mu\big(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big)\Big\}$$

ve

$$N^{*}\left(x_{2n+2},x_{2n+1}\right)=\min\Big\{\mu\big(l\left(x_{2n+2}-Sx_{2n+2}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\big)$$

$$\mu\big(l\left(x_{2n+2}-Tx_{2n+1}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+1}-Sx_{2n+2}\right)\big)\Big\}$$

$$=\min\Big\{\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\big), \tag{4.16}$$

$$\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+2}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+3}\right)\big)\Big\}$$

$$=\min\Big\{\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\big),0,\mu\big(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+3}\right)\big)\Big\}=0$$

dır. (4.14)-(4.16) eşitsizliklerinden ve φ fonksiyonunun özelliğinden

$$\mu\big(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big)\leq\varphi\Big(\max\Big\{\mu\big(l\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\big),\mu\big(l\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big)\Big\}\Big)$$

$$\leq\varphi\Big(\max\Big\{\mu\big(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\big),\mu\big(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big)\Big\}\Big) \tag{4.17}$$

olur. $\max\Big\{\mu\big(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\big),\mu\big(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big)\Big\}=\mu\big(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\big)$ alınırsa (4.14) eşitsizliğinde

$$\mu\left(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\right) \leq \varphi\left(\mu\left(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\right)\right) < \mu\left(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\right)$$

elde edilir ve bu da bir çelişkidir. Buradan

$$\max\left\{\mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right), \mu\left(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\right)\right\} = \mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)$$

olarak alınırsa

$$\mu\left(c\left(x_{2n+2}-x_{2n+3}\right)\right) \leq \varphi\left(\mu\left(c\left(x_{2n+1}-x_{2n+2}\right)\right)\right)$$

(4.18)

elde edilir. (4.13) ve (4.18) eşitsizliklerinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\mu\left(c\left(x_{n}-x_{n+1}\right)\right) \leq \varphi\left(\mu\left(c\left(x_{n-1}-x_{n}\right)\right)\right) \tag{4.19}$$

sağlanır. (4.19) eşitsizliğinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \mu\left(c\left(x_{n}-x_{n+1}\right)\right) &\leq \varphi\left(\mu\left(c\left(x_{n-1}-x_{n}\right)\right)\right) \\ &\leq \varphi^{2}\left(\mu\left(c\left(x_{n-2}-x_{n-1}\right)\right)\right) \\ &\;\;\vdots \\ &\leq \varphi^{n}\left(\mu\left(c\left(x_{0}-x_{1}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ ve $m>n$ için (4.20) ve Önerme 2.2.10. kullanılarak

$$\mu\left(\frac{c}{m}(x_n - x_{n+m})\right)$$
$$= \mu\left(\frac{c}{m}(x_n - x_{n+1}) + \frac{c}{m}(x_{n+1} - x_{n+2}) + \cdots + \frac{c}{m}(x_{n+m} - x_{n+m+1})\right)$$
$$\leq \mu\left(c\left(x_n - x_{n+1}\right)\right) + \mu\left(c\left(x_{n+1} - x_{n+2}\right)\right) + \cdots \mu\left(c\left(x_{n+m} - x_{n+m+1}\right)\right)$$

$$\leq \varphi^{n}\left(\mu\left(c\left(x_0 - x_1\right)\right)\right) + \varphi^{n+1}\left(\mu\left(c\left(x_0 - x_1\right)\right)\right) + \cdots + \varphi^{n+m-1}\left(\mu\left(c\left(x_0 - x_1\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(x_0 - x_1\right)\right)\right) \qquad (n, m \to \infty)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(x - Tx\right)\right)\right) < \infty$$

elde edilir. Böylece $\left\{\frac{c}{m}x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ-Cauchy dizisi ve Δ_2 şartından $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ-Cauchy dizisidir. Bu uzay μ-tam olduğundan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $x^* \in X_\mu$ noktası vardır. Buradan $\mu\left(x_n - x^*\right) \to 0$ ve $\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) \in E(G)$ vardır ve G, ℓ_μ-graf olduğundan T, μ-sürekli ve $\left(x^*, x_{2n_p+1}\right) \in E(G)$ veya S, μ-sürekli ve $\left(x^*, x_{2n_p}\right) \in E(G)$ olacak şekilde $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizisi olan $\left\{x_{2n_p}\right\}_{n_p\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. T, μ-sürekli ve $\left(x^*, x_{2n_p+1}\right) \in E(G)$ olsun. Dolayısıyla

$$\mu\left(Tx_{2n_p+1} - Tx^*\right) = \mu\left(x_{2n_p+2} - Tx^*\right) \to 0, \ (p \to \infty)$$

dir ve sonuç olarak $Tx^* = x^*$ elde edilir. (c) özelliğinden

$$\mu\left(c\left(Sx^* - Tx_{2n_p+1}\right)\right) \leq \varphi\left(M^*\left(x^*, x_{2n_p+1}\right)\right) + L\left(N^*\left(x^*, x_{2n_p+1}\right)\right) \tag{4.21}$$

$$M^*\left(x^*, x_{2n_p+1}\right) = \max\Big\{\mu\left(l\left(x^* - x_{2n_p+1}\right)\right), \mu\left(l\left(x^* - Sx^*\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n_p+1} - Tx_{2n_p+1}\right)\right),$$
$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(x_{2n_p+1} - Sx^*\right)\right) + \mu\left(\frac{l}{2}\left(x^* - Tx_{2n_p+1}\right)\right)\right]\Big\} \tag{4.22}$$

ve

$$N^*\left(x^*, x_{2n_p+1}\right) = \min\Big\{\Big\{\mu\left(l\left(x^* - Sx^*\right)\right), \mu\left(l\left(x_{2n_p+1} - Tx_{2n_p+1}\right)\right),$$
$$\mu\left(l\left(x_{2n_p+1} - Sx^*\right)\right), \mu\left(l\left(x^* - Tx_{2n_p+1}\right)\right)\Big\}, \tag{4.23}$$

dir. (4.21)-(4.23) ifadelerinde $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$\mu\left(c\left(Sx^* - x^*\right)\right) \le \varphi\left(\mu\left(l\left(Sx^* - x^*\right)\right)\right) \le \varphi\left(\mu\left(c\left(Sx^* - x^*\right)\right)\right) < \mu\left(c\left(Sx^* - x^*\right)\right)$$

elde edilir ki bu ise çelişki oluşturmaktadır. Yani, $x^* = Sx^*$ sağlanır. Buradan $x^* \in X_\mu$ noktasının T ve S dönüşümleri için ortak sabit nokta olduğu görülür. S, μ -sürekli ve $\left(x^*, x_{2n_p}\right) \in E(G)$ olduğunda da benzer şekilde ispat yapılır.

Sabit noktanın tek olduğunu göstermek için T dönüşümünün bir diğer sabit noktası y^* olsun. G, ℓ_μ-graf olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(x_{2n_p}, x^*\right) \in E(G)$ ve $\left(x_{2n_p}, y^*\right) \in E(G)$ şartları sağlanır. Dahası G, ST-bağlantılı olduğundan $\left(x^*, y^*\right) \in E(G)$ dir. Yani;

$$\mu\left(c\left(x^*-y^*\right)\right)=\mu\left(c\left(Sx^*-Ty^*\right)\right)$$

$$\leq\varphi\Big(\max\Big\{\mu\left(l\left(x^*-y^*\right)\right),\mu\left(l\left(x^*-Sx^*\right)\right),\mu\left(l\left(y^*-Ty^*\right)\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(y^*-Sx^*\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(x^*-Ty^*\right)\right)\right]\Big\}\Big)+$$

$$L\min\left\{\mu\left(l\left(x^*-Sx^*\right)\right),\mu\left(l\left(y^*-Ty^*\right)\right),\mu\left(l\left(x^*-Ty^*\right)\right),\mu\left(l\left(y^*-Sx^*\right)\right)\right\}$$

$$\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(x^*-y^*\right)\right)\right)<\mu\left(l\left(x^*-y^*\right)\right)$$

dır. Buradan çelişki elde edilir. Dolayısıyla $x^*=y^*$ eşitliği sağlanır. Böylece T ve S dönüşümlerinin ortak tek bir sabit noktasının olduğu görülür.

Sonuç 4.2.4. X_μ, yönlü G grafı ile donatılmış μ-tam modüler uzay olsun ve μ konveks modüleri Δ_2-şartını sağlasın. $S,T:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın.

a. G, ST- bağlantılıdır ve ℓ_μ-graftır;

b. $(x_{2n},Sx_{2n})\in E(G)\Rightarrow(x_{2n+2},Sx_{2n+2})\in E(G)$

ve

$(x_{2n+1},Tx_{2n+1})\in E(G)\Rightarrow(x_{2n+3},Tx_{2n+3})\in E(G)$

olacak şekilde $\{x_n\}\in X_\mu$ dizisi vardır.

c. $\forall(x,y)\in E(G)$ ve $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$\mu\left(c\left(Sx-Ty\right)\right)\leq\delta\max\left\{\mu\left(l\left(x-y\right)\right),\mu\left(l\left(x-Sx\right)\right),\mu\left(l\left(y-Ty\right)\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{l}{2}\left(y-Sx\right)\right)+\mu\left(\frac{l}{2}\left(x-Ty\right)\right)\right]\right\}+L\min\left\{\mu\left(l\left(x-Sx\right)\right),\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(y-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(x-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(y-Sx\right)\right)\right\}$$

şartını sağlayan $\delta\in(0,1)$ ve $L\geq 0$ sayıları vardır.

Bu durumda T ve S dönüşümleri ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.2.5. X_μ, yönlü G grafı ile donatılmış μ-tam modüler uzay olsun ve μ konveks modüleri Δ_2-şartını sağlasın. $S,T:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümleri verilsin. Aşağıdakiler sağlansın.

a. G, ST- bağlantılıdır ve ℓ_μ-graftır;

b. $\left(x_{2n},Sx_{2n}\right)\in E(G)\Rightarrow\left(x_{2n+2},Sx_{2n+2}\right)\in E(G)$

ve

$\left(x_{2n+1},Tx_{2n+1}\right)\in E(G)\Rightarrow\left(x_{2n+3},Tx_{2n+3}\right)\in E(G)$

olacak şekilde $\{x_n\}\in X_\mu$ dizisi vardır.

c. $\forall(x,y)\in E(G)$ ve $l<c$ pozitif sabitleri için

$$\mu\left(c\left(Sx-Ty\right)\right)\leq\delta\mu\left(l\left(x-y\right)\right)+L\min\left\{\mu\left(l\left(x-Sx\right)\right),\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(y-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(x-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(y-Sx\right)\right)\right\}$$

şartını sağlayan $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri mevcuttur.

Böylece T, S dönüşümleri ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

Yukarıdaki sonuçları destekleyen iki örnek aşağıdaki şekilde verilebilir.

Örnek 4.2.6. $X_\mu = [0,1]$ ve $\forall x \in X_\mu$ için μ modüleri $\mu(x) = |x|$ olarak tanımlansın. $E(G) = \{(x,y) : x, y \in [0,1]\}$ ve $Tx = \frac{x}{4}, x \in X_\mu$ olsun. G zayıf bağlantılı ve C_μ-graf olduğundan X_T boştan farklı bir küme ve $c = \frac{1}{2}$, $l = \frac{1}{3}$, $L \geq 0$ ve $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ için T dönüşümü genelleştirilmiş hemen hemen $\left(\varphi, L, \tilde{G}\right)$ daralma dönüşümüdür. Buna ek olarak T yörüngesel G_μ- sürekli olsun ve μ modüleri Δ_2-şartını sağlasın. Böylece Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.6 şartları sağlanır yani, T dönüşümü Picard operatörüdür.

Örnek 4.2.7. $X_\mu = [0,1]$ ve $\forall x \in X_\mu$ için μ modüleri $\mu(x) = |x|$ olarak tanımlansın.

$E(G) = \{(x,y) : x, y \in [0,1]\}$

ve

$S, T : X_\mu \to X_\mu, Sx = \frac{x}{3}$ ve $Tx = \frac{x}{4}, x \in X_\mu$

olsun. $c=\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{3}$, $L\geq 0$ sabitleri ve $\varphi(t)=\frac{t}{2}$ fonksiyonu için Teorem 4.2.3. ün şartları sağlanır. 0 noktası da S ve T dönüşümlerinin ortak tek bir sabit noktasıdır.

Not 4.2.8. Yukarıdaki örneklerde $\mu(x)=x^2$ fonksiyoneli kullanıldığında da benzer sonuçlar elde edilir.

BÖLÜM 5. MODÜLER UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ A-DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde modüler uzaylarda (c)-kıyaslama fonksiyonları kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş hemen hemen A_φ-daralma dönüşümleri için sabit nokta ve ortak sabit noktaların varlığı ve tekliği problemleri çalışılmıştır. Bunlara ek olarak integral tipi daralma şartını sağlayan bazı dönüşümler için de bazı sonuçlar verilmiştir.

5.1. Modüler Uzaylarda Genelleştirilmiş A_φ-Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 5.1.1. X_μ modüler uzay olsun ve μ konveks fonksiyoneli Δ_2-tipi şartını sağlasın. $\forall x, y \in X_\mu$, $l < c$ olan l ve c sabitleri için

$$N(x,y) = \min\left\{\mu\left(l(Ax - Sx)\right), \mu\left(l(By - Ty)\right), \mu\left(l(Ax - Ty)\right), \mu\left(l(By - Sx)\right)\right\}$$

olmak üzere

$$\mu\left(c(Sx - Ty)\right) \le \alpha\left(\mu\left(l(Ax - By)\right), \mu\left(l(Ax - Sx)\right), \mu\left(l(By - Ty)\right)\right) + L.N(x,y),$$
(5.1)

ifadesini sağlayan $L \ge 0$ sayısı ve $\alpha \in A_\varphi$ fonksiyonu varsa A, B, S, T dönüşümlerine hemen hemen A_φ daralma dönüşümleri denir.

Teorem 5.1.2. X_μ modüler uzay olsun ve μ modüleri Δ_2-tipi şartını sağlasın. A, B, S, T dönüşümleri için aşağıdakiler sağlansın.

a. $SX_\mu \subset BX_\mu$ ve $TX_\mu \subset AX_\mu$ dir.

b. $\left(AX_\mu \cup BX_\mu\right)$, X_μ modüler uzayının μ - tam alt uzayı olsun.

c. $A,B,S,T : X_\mu \to X_\mu$ hemen hemen A_φ daralma dönüşümü olsun.

Bu durumda (S,A) ve (T,B) ikililerinin bir tek çakışma noktası vardır. Ayrıca (S,A) ve (T,B) zayıf uyumlu dönüşümler ise A, B, S, T dönüşümleri tek bir ortak sabit noktaya sahiptirler.

İspat. $x_0 \in X_\mu$ keyfi bir nokta olsun. $SX_\mu \subset BX_\mu$ ve $TX_\mu \subset AX_\mu$ olduğundan x_1, x_2, $x_3 \ldots$ noktaları $Sx_0 = Bx_1$, $Tx_1 = Ax_2$, $Sx_2 = Bx_3, \ldots$ olacak şekilde vardır. Buradan

$$y_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n+1}$$

ve

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n+2}$$

biçiminde $\{y_n\} \in X_\mu$ dizisi oluşturulur. $\forall n \geq 0$ için (5.1) eşitsizliği kullanılırsa $\alpha \in A_\varphi$ olduğundan

$$\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)=\mu\left(c\left(Sx_{2n}-Tx_{2n+1}\right)\right)$$

$$=\alpha\left(\mu\left(c\left(Ax_{2n}-Bx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Sx_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Sx_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Tx_{2n+1}\right)\right),\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Sx_{2n}\right)\right)\right\}=\alpha\left(\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n+1}\right)\right),0\right\}$$
(5.2)

elde edilir. Buradan

$$\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)\right)$$

sağlanır. Diğer taraftan μ fonksiyonelinin ikinci özelliğinden

$$\mu\left(c\left(y_{2n}-y_{2n-1}\right)\right)=\mu\left(c\left(Sx_{2n}-Tx_{2n-1}\right)\right)$$

$$=\alpha\left(\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Bx_{2n-1}\right)\right),\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Sx_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n-1}-Tx_{2n-1}\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Sx_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n-1}-Tx_{2n-1}\right)\right),\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Tx_{2n-1}\right)\right),\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(Bx_{2n-1}-Sx_{2n}\right)\right)\right\}\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(y_{2n-1}-y_{2n-2}\right)\right),\mu\left(c\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n-2}-y_{2n-1}\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(c\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(c\left(y_{2n-2}-y_{2n-1}\right)\right),0,\mu\left(c\left(y_{2n-2}-y_{2n}\right)\right)\right\}$$

dir. Buradan $\mu\left(c\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right)\leq\varphi\left(\mu\left(c\left(y_{2n-2}-y_{2n-1}\right)\right)\right)$ elde edilir. Böylece $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right) &\leq \varphi\left(\mu\left(c\left(y_{n-1}-y_n\right)\right)\right)\\ &\leq \varphi^2\left(\mu\left(c\left(y_{n-2}-y_{n-1}\right)\right)\right)\\ &\;\vdots\\ &\leq \varphi^n\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur. $n\to\infty$ için limit alınırsa φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olduğundan $\varphi^n\left(\mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)\right)\to 0$ olur. Böylece $\lim_{n\to\infty}\mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)=0$ elde edilir.

$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi için ilk olarak $\left\{\frac{c}{m}y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $m>n$ için (5.3) ifadesi ve Önerme 2.2.10. kullanılarak

$$\mu\left(\frac{c}{m}\left(y_n-y_{n+m}\right)\right)=\mu\left(\frac{c}{m}\left(y_n-y_{n+1}\right)+\frac{c}{m}\left(y_{n+1}-y_{n+2}\right)+\cdots+\frac{c}{m}\left(y_{n+m-1}-y_{n+m}\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)+\mu\left(c\left(y_{n+1}-y_{n+2}\right)\right)+\cdots\mu\left(c\left(y_{n+m-1}-y_{n+m}\right)\right)$$

$$\leq \varphi^n\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)+\varphi^{n+1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)+\cdots+\varphi^{n+m-1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)\qquad (n,m\to\infty)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(y_0-y_1\right)\right)\right)<\infty,$$

elde edilir. Böylece $\left\{\frac{c}{m}y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ-Cauchy dizisidir. Δ_2-tipi şartından $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ-Cauchy dizisidir. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(AX_\mu \cup BX_\mu\right)$ uzayında μ-Cauchy dizisi olduğundan ve bu uzay μ-tam olduğundan $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsadığı bir $y\in\left(AX_\mu \cup BX_\mu\right)$ noktası vardır. Yani, $\lim_{n\to\infty}\mu\left(y_n - y\right)=0$ dır. $y\in AX_\mu$ olsun. Böylece $y = Az$ olacak şekilde $z\in X_\mu$ noktası vardır. Böylece

$$\mu\left(c\left(Sz-Tx_{2n+1}\right)\right)\leq\alpha\left(\mu\left(l\left(Az-Bx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Az-Sz\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(Az-Bz\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Az-Tx_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n+1}-Sz\right)\right)\right\}$$

ve

$$\mu\left(c\left(Sz-y_{2n+1}\right)\right)\leq\alpha\left(\mu\left(l\left(y-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y-Sz\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(y-Sz\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(y-y_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-Sz\right)\right)\right\}$$

dır. Burada $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\mu\left(c\left(Sz-y\right)\right)\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(y-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-Sz\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(0,\mu\left(c\left(y-Sz\right)\right),0\right)\leq\varphi(0)=0$$

elde edilir. Böylece $Sz=y$ elde edilir. $SX_\mu\subset BX_\mu$ olduğundan $Bw=Sz=y=Tz$ şartını sağlayan $w\in X_\mu$ noktası vardır. (5.1) eşitsizliği kullanılarak

$$\mu\left(c\left(Sz-Tw\right)\right)\leq\alpha\left(\mu\left(l\left(Az-Bw\right)\right),\mu\left(l\left(Az-Sz\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{\mu\left(l\left(Az-Bz\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right),\mu\left(l\left(Az-Tw\right)\right),\mu\left(l\left(Sz-Bw\right)\right)\right\}$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(y-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-Tw\right)\right)\right)$$

$$+L\min\left\{0,\mu\left(c\left(y-Tw\right)\right),\mu\left(c\left(y-Tw\right)\right),0\right\}$$

$$\leq\alpha\left(0,0,\mu\left(c\left(y-Tw\right)\right)\right)\leq\varphi\left(0\right)=0$$

olur. Buradan $Sz=Az=Bw=y=Tw$ eşitliği elde edilir. $\left(T,B\right)$ ve $\left(S,A\right)$ çiftleri zayıf uyumlu olsunlar. T ve B, w noktası için S ve A, z noktası için değişmeli dönüşümlerdir. Yani;

$$By=B\left(Bw\right)=B\left(Tw\right)=T\left(Bw\right)=Ty$$

ve

$$Sy=S\left(Sz\right)=S\left(Az\right)=A\left(Sz\right)=Ay$$

dir. Böylece

$$N\left(y,w\right)=\min\left\{\mu\left(l\left(Ay-Sy\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right),\mu\left(l\left(Ay-Tw\right)\right),\mu\left(l\left(Sy-Bw\right)\right)\right\}$$

$$=\min\left\{0,0,\mu\left(l\left(Sy-y\right)\right),\mu\left(l\left(y-Sy\right)\right)\right\}=0$$

elde edilir. Buradan

$$\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right)=\mu\left(c\left(Sy-Tw\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(l\left(Ay-Bw\right)\right),\mu\left(l\left(Ay-Sy\right)\right),\mu\left(l\left(Bw-Tw\right)\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right),0,0\right)\leq\varphi\left(0\right)=0$$

ifadesi sağlanır. Dolayısıyla $Sy=y=Ay$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$N\left(y,y\right)=\min\left\{\mu\left(l\left(Ay-Sy\right)\right),\mu\left(l\left(By-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(Ay-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(Sy-By\right)\right)\right\}$$

$$=\min\left\{0,0,\mu\left(l\left(y-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(Ty-y\right)\right)\right\}=0$$

ve

$$\mu\left(c\left(y-Ty\right)\right)=\mu\left(c\left(Sy-Ty\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(l\left(Ay-By\right)\right),\mu\left(l\left(Ay-Sy\right)\right),\mu\left(l\left(By-Ty\right)\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(y-Ty\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(Sy-y\right)\right),0,0\right)\leq\varphi\left(0\right)=0$$

sağlanır. Buradan da $By=y=Ty$ olduğu görülür. Bu dönüşümler için y ortak sabit noktadır. y noktasının tek ortak sabit nokta olduğunu göstermek için y^* diğer bir sabit nokta olsun.

$$N\left(y,y^*\right)=\min\left\{\mu\left(l\left(Ay^*-Sy^*\right)\right),\mu\left(l\left(By-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(Ay^*-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(By-Sy^*\right)\right)\right\}$$

$$=\min\left\{0,0,\mu\left(l\left(y^*-y\right)\right),\mu\left(l\left(y-y^*\right)\right)\right\}=0$$

ve

$$\mu\left(c\left(y^*-y\right)\right)=\mu\left(c\left(Sy^*-Ty\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(l\left(Ay^*-By\right)\right),\mu\left(l\left(Ay^*-Sy^*\right)\right),\mu\left(l\left(By-Ty\right)\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(y^*-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right),\mu\left(c\left(y-y\right)\right)\right)$$

$$\leq\alpha\left(\mu\left(c\left(y^*-y\right)\right),0,0\right)\leq\varphi(0)=0$$

dır. $y=y^*$, yani y noktası tek ortak sabit noktadır.

Sonuç 5.1.2. X_μ μ-tam modüler uzay ve μ konveks modüler Δ_2-tipi şartını sağlasın.

a. $S,T:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümleri μ-sürekli dönüşüm olsun.

b. $\forall x,y\in X_\mu$, $l<c$ olan pozitif değerleri l,c sabitleri ve $\alpha\in A_\varphi$ için

$$N(x,y)=\min\left\{\mu\left(l(x-Sx)\right),\mu\left(l(y-Ty)\right),\mu\left(l(x-Ty)\right),\mu\left(l(y-Sx)\right)\right\}$$

olmak üzere

$$\mu\left(c\left(Sx-Ty\right)\right)\leq\alpha\left(\mu\left(l(x-y)\right),\mu\left(l(x-Sx)\right),\mu\left(l(y-Ty)\right)\right)+L\left(N(x,y)\right),$$

olan $L\geq 0$ sayısı varsa T ve S dönüşümleri ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.1.3. X_μ, μ-tam modüler uzay olsun ve μ konveks fonksiyoneli Δ_2-tipi şartını sağlasın.

a. $T: X_\mu \to X_\mu$ dönüşümü μ-sürekli bir dönüşümdür.

b. $\forall x, y \in X_\mu$, $l < c$ olan l, c sabitleri ve $\alpha \in A_\varphi$ için

$$N(x,y) = \min\left\{\mu\left(l(x-Tx)\right), \mu\left(l(y-Ty)\right), \mu\left(l(x-Ty)\right), \mu\left(l(y-Tx)\right)\right\}$$

olmak üzere

$$\mu\left(c(Tx-Ty)\right) \le \alpha\left(\mu\left(l(x-y)\right), \mu\left(l(x-Tx)\right), \mu\left(l(y-Ty)\right)\right) + L\left(N(x,y)\right),$$

şartını sağlayan $L \ge 0$ sayısı varsa T dönüşümü X_μ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

$\forall t > 0$, $L = 0$ için $k \in (0,1)$ iken $\varphi(t) = kt$ alınırsa (Akram ve ark., 2002) çalışmasında elde edilen sonuçların modüler uzay yapısındaki karşılıkları elde edilir.

Sonuç 5.1.4. X_μ, μ-tam modüler uzayı üzerinde $S, T: X_\mu \to X_\mu$ dönüşümleri μ-sürekli dönüşümler olsunlar. $\forall x, y \in X_\mu$, $l < c$ olan l, c sabitleri ve $\alpha \in A_\varphi$ için

$$\mu\left(c(Sx-Ty)\right) \le \alpha\left(\mu\left(l(x-y)\right), \mu\left(l(x-Sx)\right), \mu\left(l(y-Ty)\right)\right)$$

sağlansın. T ve S dönüşümleri X_μ uzayında ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.1.5. X_μ, μ-tam modüler uzayı üzerinde $T: X_\mu \to X_\mu$ dönüşümü μ-sürekli dönüşümü olsun. $\forall x, y \in X_\mu$, $l < c$ olan l, c sabitleri ve $\alpha \in A_\varphi$ için

$$\mu\left(c\left(Tx-Ty\right)\right)\leq\alpha\left(\mu\left(l\left(x-y\right)\right),\mu\left(l\left(x-Tx\right)\right),\mu\left(l\left(y-Ty\right)\right)\right)$$

olsun. T dönüşümü X_μ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

5.2. İntegral Tipi Daralma Şartını Sağlayan Genelleştirilmiş Hemen Hemen A_φ-Daralma Dönüşümleri İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda modüler uzaylarda integral tipi daralma şartını sağlayan hemen hemen A_φ-daralma dönüşümleri için sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri verilecektir.

Teorem 5.2.1. X_μ μ-tam modüler uzay olsun ve μ konveks modüleri Δ_2-tipi şartını sağlasın. $A,B,S,T:X_\mu\to X_\mu$ dönüşümleri için aşağıdakiler sağlansın.

a. $SX_\mu\subset BX_\mu$ ve $TX_\mu\subset AX_\mu$ dir.

b. $\left(AX_\mu\cup BX_\mu\right)$, X_μ modüler uzayının μ- tam alt uzayı olsun.

c. $\phi\in\Phi_1$ olsun.

d. $\forall x,y\in X_\mu$, $l<c$ olan l,c pozitif sayıları ve $\alpha\in A_\varphi$ için

$$N\left(x,y\right)=\min\left\{\mu\left(l\left(Ax-Sx\right)\right),\mu\left(l\left(By-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(Ax-Ty\right)\right),\mu\left(l\left(By-Sx\right)\right)\right\}$$

olmak üzere

$$\int_0^{\mu\left(c\left(Sx-Ty\right)\right)}\phi\left(t\right)dt\leq\alpha\left(\int_0^{\mu\left(l\left(Ax-By\right)\right)}\phi\left(t\right)dt,\int_0^{\mu\left(l\left(Ax-Sx\right)\right)}\phi\left(t\right)dt,\int_0^{\mu\left(l\left(By-Ty\right)\right)}\phi\left(t\right)dt\right)$$
$$+L\int_0^{N\left(x,y\right)}\phi\left(t\right)dt \tag{5.4}$$

olan $L\geq0$ sabiti mevcut olsun.

Bu durumda (S,A) ve (T,B) ikililerinin tek bir çakışma noktası vardır. Ayrıca (S,A) ve (T,B) zayıf uyumlu dönüşüm çiftleri ise A, B, S, T tek bir ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Herhangi bir $x_0 \in X_\mu$ noktası için (a) özelliğinden $Sx_0 = Bx_1$, $Tx_1 = Ax_2$, $Sx_2 = Bx_3$ …. olacak şekilde x_1, x_2, x_3,….. noktaları vardır. Buradan

$$y_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n+1}$$

ve

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n+2}$$

özellikli $\{y_n\} \in X_\mu$ dizisi $\forall n \geq 0$ için tanımlanır. (5.4) eşitsizliğinde $\alpha \in A_\varphi$ için

$$N(x_{2n}, x_{2n+1}) = \min\Big\{\mu\big(l(Ax_{2n} - Sx_{2n})\big), \mu\big(l(Bx_{2n+1} - Tx_{2n+1})\big),$$
$$\mu\big(l(Ax_{2n} - Tx_{2n+1})\big), \mu\big(l(Bx_{2n+1} - Sx_{2n})\big)\Big\}$$

olmak üzere

$$\int_0^{\mu(c(y_{2n} - y_{2n+1}))} \phi(t)\,dt = \int_0^{\mu(c(Sx_{2n} - Tx_{2n+1}))} \phi(t)\,dt$$

$$\leq \alpha\left(\int_0^{\mu(c(Ax_{2n} - Bx_{2n+1}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(Ax_{2n} - Sx_{2n}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(Bx_{2n+1} - Tx_{2n+1}))} \phi(t)\,dt\right) \tag{5.5}$$

$$+L \int_0^{N(x_{2n}, x_{2n+1})} \phi(t)\,dt$$

elde edilir. Buradan

$$N\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=\min\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n}-y_{2n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n+1}\right)\right),0\right\}=0$$

olduğundan

$$\int_0^{\mu(c(y_{2n}-y_{2n+1}))}\phi(t)\,dt\leq\alpha\left(\int_0^{\mu(c(y_{2n-1}-y_{2n}))}\phi(t)\,dt,\int_0^{\mu(l(y_{2n-1}-y_{2n}))}\phi(t)\,dt,\int_0^{\mu(l(y_{2n}-y_{2n+1}))}\phi(t)\,dt\right)$$

$$+L\int_0^{N(x_{2n},x_{2n+1})}\phi(t)\,dt$$

dır. Buradan α fonksiyonunun özelliğinden

$$\int_0^{\mu(c(y_{2n}-y_{2n+1}))}\phi(t)\,dt\leq\varphi\left(\int_0^{\mu(c(y_{2n-1}-y_{2n}))}\phi(t)\,dt\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan μ fonksiyonelinin ikinci özelliğinden

$$N(x,y)=\min\left\{\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Sx_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n-1}-Tx_{2n-1}\right)\right),\right.$$

$$\left.\mu\left(l\left(Ax_{2n}-Tx_{2n-1}\right)\right),\mu\left(l\left(Bx_{2n-1}-Sx_{2n}\right)\right)\right\}$$

iken

$$\int_0^{\mu(c(y_{2n}-y_{2n-1}))}\phi(t)dt=\int_0^{\mu(c(Sx_{2n}-Tx_{2n-1}))}\phi(t)dt$$

$$=\alpha\left(\int_0^{\mu(l(Ax_{2n}-Bx_{2n-1}))}\phi(t)dt,\int_0^{\mu(l(Ax_{2n}-Sx_{2n}))}\phi(t)dt,\int_0^{\mu(l(Bx_{2n-1}-Tx_{2n-1}))}\phi(t)dt\right)$$

$$+L\int_0^{N(x_{2n},x_{2n-1})}\phi(t)dt$$

dir. Buradan

$$N\left(x_{2n},x_{2n-1}\right)=\min\left\{\mu\left(l\left(y_{2n-1}-y_{2n}\right)\right),\mu\left(l\left(y_{2n-2}-y_{2n-1}\right)\right),0,\mu\left(l\left(y_{2n-2}-y_{2n}\right)\right)\right\}$$

olduğundan

$$\int_0^{\mu(c(y_{2n}-y_{2n-1}))}\phi(t)dt=\alpha\left(\int_0^{\mu(l(y_{2n-1}-y_{2n-2}))}\phi(t)dt,\int_0^{\mu(l(y_{2n}-y_{2n-1}))}\phi(t)dt,\int_0^{\mu(l(y_{2n-1}-y_{2n-2}))}\phi(t)dt\right)$$

$$+L\int_0^{N(x_{2n},x_{2n-1})}\phi(t)dt$$

elde edilir. Yine $\alpha\in A_{\varphi}$ olduğundan

$$\int_0^{\mu(c(y_{2n-1}-y_{2n}))}\phi(t)dt\le\varphi\left(\int_0^{\mu(c(y_{2n-1}-y_{2n-2}))}\phi(t)dt\right)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Böylece $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\int_0^{\mu(c(y_n-y_{n+1}))}\phi(t)\,dt\le\varphi\left(\int_0^{\mu(c(y_{n-1}-y_n))}\phi(t)\,dt\right)$$

$$\le\varphi^2\left(\int_0^{\mu(c(y_{n-2}-y_{n-1}))}\phi(t)\,dt\right)$$

$$\vdots \tag{5.6}$$

$$\le\varphi^n\left(\int_0^{\mu(c(y_0-y_1))}\phi(t)\,dt\right)$$

olur. $n\to\infty$ için limit alınırsa φ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olduğundan $\varphi^n\left(\mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)\right)\to 0$ dır ve buradan da $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\mu(c(y_n-y_{n+1}))}\phi(t)dt=0$ elde edilir. $\left\{\frac{c}{m}y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $m>n$ için (5.6) ifadesi ve Önerme 2.2.10. kullanılarak

$$\mu\left(\frac{c}{m}(y_n-y_{n+m})\right)=\mu\left(\frac{c}{m}(y_n-y_{n+1})+\frac{c}{m}(y_{n+1}-y_{n+2})+\cdots+\frac{c}{m}(y_{n+m-1}-y_{n+m})\right)$$

$$\le\mu\left(c\left(y_n-y_{n+1}\right)\right)+\mu\left(c\left(y_{n+1}-y_{n+2}\right)\right)+\cdots\mu\left(c\left(y_{n+m-1}-y_{n+m}\right)\right)$$

$$\le\int_0^{\mu(c(y_n-y_{n+1}))}\phi(t)\,dt+\int_0^{\mu(c(y_{n+1}-y_{n+2}))}\phi(t)\,dt+\ldots+\int_0^{\mu(c(y_{n+m-1}-y_{n+m}))}\phi(t)\,dt$$

$$\le\varphi^n\left(\int_0^{\mu(c(y_0-y_1))}\phi(t)\,dt\right)+\varphi^{n+1}\left(\int_0^{\mu(c(y_0-y_1))}\phi(t)\,dt\right)+\cdots+\varphi^{n+m-1}\left(\int_0^{\mu(c(y_0-y_1))}\phi(t)\,dt\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \varphi^{n+j-1} \left(\int_{0}^{\mu(c(y_0-y_1))} \phi(t)\,dt \right) \qquad (n,m \to \infty)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{n+j-1} \left(\int_{0}^{\mu(c(y_0-y_1))} \phi(t)\,dt \right) < \infty$$

elde edilir. Böylece $\left\{ \frac{c}{m} y_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ-Cauchy dizisidir. Δ_2-tipi şartı sağlandığından $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ-Cauchy dizisidir. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(AX_\mu \cup BX_\mu)$ μ-Cauchy dizisi ve bu uzay μ-tam olduğundan $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $z \in (AX_\mu \cup BX_\mu)$ noktası vardır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\mu(y_n-z)} \phi(t)\,dt = 0$$

dır. $y \in AX_\mu$ olsun. Böylece $z = Aw$ olacak şekilde $w \in X_\mu$ noktası vardır. $Sw = z$ olduğu gösterilmelidir.

$$N(w, x_{2n+1}) = \min\Big\{ \mu\big(l(Aw - Sw)\big), \mu\big(l(Bx_{2n+1} - Tx_{2n+1})\big),$$

$$\mu\big(l(Aw - Tx_{2n+1})\big), \mu\big(l(Bx_{2n+1} - Sw)\big) \Big\}$$

iken

$$\int_0^{\mu(c(Sw-Tx_{2n+1}))} \phi(t)\,dt \le \alpha\left(\int_0^{\mu(l(Aw-Bx_{2n+1}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(Aw-Sw))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(Bx_{2n+1}-Tx_{2n+1}))} \phi(t)\,dt \right)$$

$$+L \int_0^{N(w,x_{2n+1})} \phi(t)\,dt$$

dır. Burada $n \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\int_0^{\mu(c(Sw-z))} \phi(t)dt \le \alpha\left(0, \int_0^{\mu(c(z-Sw))} \phi(t)dt, 0 \right) + L \int_0^{\min\{\mu(l(z-Sw)),0,0,\mu(l(z-Sw))\}} \phi(t)dt$$

$$\le \varphi(0) = 0$$

bulunur. Böylece $Sw = Aw = z$ elde edilir. $SX_\mu \subset BX_\mu$ olduğundan $Bu = Sw = Aw = z$ şartını sağlayan $u \in X_\mu$ noktası vardır. (5.4) eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^{\mu(c(z-Tu))} \phi(t)dt \le \alpha\left(\int_0^{\mu(l(Aw-Bu))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(Aw-Sw))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(Bu-Tu))} \phi(t)dt \right)$$

$$+L \int_0^{\min\{\mu(l(Aw-Sw)),\mu(l(Bu-Tu)),\mu(l(Aw-Tu)),\mu(l(Sw-Bu))\}} \phi(t)dt$$

$$\le \alpha\left(\int_0^{\mu(c(z-z))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(c(z-Sz))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(c(z-Tu))} \phi(t)dt \right)$$

$$+L \int_0^{\min\{0,\mu(l(z-Tu)),\mu(l(z-Tu)),0\}} \phi(t)dt \le \alpha\left(0,0, \int_0^{\mu(c(z-Tu))} \phi(t)dt \right) \le \varphi(0) = 0,$$

elde edilir. Dolayısıyla $Sw = Aw = Bu = z = Tu$ eşitliği sağlanır.

T ve B, $w \in X_\mu$ noktası için S ve A, $z \in X_\mu$ noktası için değişmeli dönüşümlerdir. Yani;

$$Bz = B(Bu) = B(Tu) = T(Bu) = Tz$$

ve

$$Sz = S(Sw) = S(Aw) = A(Sw) = Az$$

dir. $z \in X_\mu$ noktası için $Sz \neq z$ olduğu gösterilecektir.

$$\int_0^{\mu(c(Sz-z))} \phi(t)dt = \int_0^{\mu(c(Sz-Tu))} \phi(t)\,dt$$

$$\leq \alpha\left(\int_0^{\mu(l(Az-Bu))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(Az-Sz))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(Bu-Tu))} \phi(t)\,dt \right)$$

$$+L \int_0^{\min\{\mu(l(Az-Sz)),\mu(l(Bu-Tu)),\mu(l(Az-Tu)),\mu(l(Bu-Sz))\}} \phi(t)dt$$

$$\leq \alpha\left(\int_0^{\mu(c(Sz-z))} \phi(t)dt, 0, 0 \right) \leq \varphi(0) = 0$$

olur. Dolayısıyla $Sz = z = Az$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^{\mu(c(z-Tz))}\phi(t)dt=\int_0^{\mu(c(Sz-Tz))}\phi(t)\,dt$$

$$\leq\alpha\left(\int_0^{\mu(l(Az-Bz))}\phi(t)\,dt,\int_0^{\mu(l(Az-Sz))}\phi(t)\,dt,\int_0^{\mu(l(Bz-Tz))}\phi(t)\,dt\right)$$

$$+L\int_0^{\min\{\mu(l(Az-Sz)),\mu(l(Bz-Tz)),\mu(l(Az-Tz)),\mu(l(Bz-Sz))\}}\phi(t)dt$$

$$\leq\alpha\left(\int_0^{\mu(c(z-Tz))}\phi(t)dt,0,0\right)\leq\varphi(0)=0$$

sağlanır. Böylece $Bz=z=Tz$ dir. Buradan bu dönüşümler için z ortak sabit noktadır. S,T,A,B için z^* diğer bir ortak sabit nokta olsun.

$$\int_0^{\mu(c(z-z^*))}\phi(t)dt=\int_0^{\mu(c(Sz-Tz^*))}\phi(t)\,dt$$

$$\leq\alpha\left(\int_0^{\mu(l(Az-Bz^*))}\phi(t)\,dt,\int_0^{\mu(l(Az-Sz))}\phi(t)\,dt,\int_0^{\mu(l(Bz^*-Tz^*))}\phi(t)\,dt\right)$$

$$+L\int_0^{\min\{\mu(l(Az-Sz)),\mu(l(Bz^*-Tz^*)),\mu(l(Az-Tz^*)),\mu(l(Bz^*-Sz))\}}\phi(t)dt$$

$$\leq\alpha\left(\int_0^{\mu(c(z-z^*))}\phi(t)dt,0,0\right)\leq\varphi(0)=0$$

olur. Dolayısıyla $\int_0^{\mu(c(z-z^*))}\phi(t)dt=0$ dır. Lemma 1.7.6. dan $\mu\left(c\left(z-z^*\right)\right)=0$ elde edilir. Yani $z=z^*$ sağlanmaktadır. Bu ise istenen sonuçtur.

Sonuç 5.2.2. X_μ μ-tam modüler uzay olsun ve μ konveks fonksiyoneli Δ_2-tipi şartını sağlasın.

a. $S,T : X_\mu \to X_\mu$ dönüşümleri μ- sürekli dönüşümdür.

b. $\forall x,y \in X_\mu$, $l<c$ olan l,c pozitif sabitler, $\alpha \in A_\varphi$ ve $\phi \in \Phi_1$

fonksiyonları olmak üzere

$$\int_0^{\mu(c(Sx-Ty))} \phi(t)dt \le \alpha\left(\int_0^{\mu(l(x-y))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(x-Sx))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(y-Ty))} \phi(t)dt \right)$$

$$+L \int_0^{\min\{\mu(l(x-Sx)),\mu(l(y-Ty)),\mu(l(x-Ty)),\mu(l(y-Sx))\}} \phi(t)dt$$

şartını sağlayan $L \ge 0$ sayısı mevcut olsun.

Bu durumda T ve S dönüşümleri X_μ uzayında ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.2.3. X_μ μ-tam modüler uzay olsun ve μ konveks modüleri Δ_2-tipi şartını sağlasın.

a. $T : X_\mu \to X_\mu$ dönüşümü μ-sürekli bir dönüşümdür.

b. $\forall x,y \in X_\mu$, $l<c$ olan l,c pozitif sabitleri $\alpha \in A_\varphi$ ve $\phi \in \Phi_1$

fonksiyonları olmak üzere

$$\int_0^{\mu(c(Tx-Ty))} \phi(t)dt \le \alpha\left(\int_0^{\mu(l(x-y))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(x-Tx))} \phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(y-Ty))} \phi(t)dt \right)$$

$$+L \int_0^{\min\{\mu(l(x-Tx)),\mu(l(y-Ty)),\mu(l(x-Ty)),\mu(l(y-Tx))\}} \phi(t)dt$$

eşitsizliğini sağlayan $L \geq 0$ sayısı var olsun.

Bu durumda T dönüşümü X_μ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

BÖLÜM 6. B_{φ}^{f} -DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümün ilk kısmında Beiranvand 2009, Berinde 1997, Rus 2001 ve Van An ve ark. 2014 tarafından verilen kavramlar kullanılarak modüler uzaylarda B_{φ}^{f} -daralma dönüşümleri tanımlandı. Bu dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlandı. İkinci kısımda ise integral tipi daralma şartlarını sağlayan B_{φ}^{f} -daralma dönüşümleri için sonuçlar elde edildi.

6.1. B_{φ}^{f} -Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 6.1.1. X_{μ} modüler uzay ve $T, f : X_{\mu} \to X_{\mu}$ iki dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X_{\mu}$ ve $\lambda \in [0,1)$ için

$$\mu(fTx - fTy) \leq \lambda \mu(fx - fy)$$

ise T dönüşümüne $f - \mu -$daralma dönüşümü denir.

Örnek 6.1.2. $X_{\mu} = \mathbb{R}$ modüler uzay ve $\mu(x) = \sqrt{|x|}$ bu uzayda modüler olsun. T, f dönüşümleri

$$\begin{aligned} f : X_{\mu} &\to X_{\mu} \\ x &\to f(x) = e^{-x} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} T : X_{\mu} &\to X_{\mu} \\ x &\to T(x) = x + 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

a. T, $\mu-$daralma dönüşümü değildir.

b. T, $f-\mu-$daralma dönüşümüdür. $\lambda \in (0,1)$ için

$$\mu(fTx - fTy) = \sqrt{\left|e^{-(x+1)} - e^{-(y+1)}\right|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{\left|e^{-x} - e^{-y}\right|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\mu(fx - fy) \leq \lambda\mu(fx - fy)$$

dir.

Tanım 6.1.3. X_μ modüler uzay olsun. $T : X_\mu \to X_\mu$ bir dönüşüm olsun.

a. (Ty_n) dizisi μ-yakınsak iken (y_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(y_n - y) = 0$ olacak şekilde $y \in X_\mu$ noktası varsa T dönüşümüne μ-dizisel yakınsaktır denir.

b. (Ty_n) dizisi μ-yakınsak iken (y_n) dizisi μ-yakınsak altdizisi ise T dönüşümüne μ alt dizisel yakınsaktır denir.

Tanım 6.1.4. X_μ modüler uzay, $T, f : X_\mu \to X_\mu$ iki dönüşüm ve $\beta^* \in B_\varphi$ olsun. $\forall x, y \in X_\mu$ ve $l < c$ olan l, c pozitif sayıları için

$$\mu\big(c(fTx - fTy)\big)$$

$$\leq \beta^*\left(\frac{\mu\big(l(fx - fTx)\big)\mu\big(l(fy - fTy)\big)}{\mu\big(l(fx - fy)\big)}, \frac{\mu\big(l(fx - fTx)\big)\mu\big(l(fT^2x - fTx)\big)}{\mu\big(l(fx - fy)\big)}, \right. \tag{6.1}$$

$$\frac{\mu\left(l\left(fy-fTy\right)\right)\mu\left(l\left(fT^2x-fTy\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx-fy\right)\right)},\frac{\mu\left(l\left(fx-fTx\right)\right)\mu\left(l\left(fx-fTy\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx-fy\right)\right)},$$

$$\mu\left(l\left(fx-fy\right)\right),\mu\left(l\left(fx-fTx\right)\right),\mu\left(l\left(fx-fTy\right)\right),\mu\left(l\left(fy-fTy\right)\right),\mu\left(l\left(fy-fTx\right)\right)\Big)$$

ise T dönüşümüne 1. tip B_{φ}^{f} - daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 6.1.5. X_{μ} μ-tam modüler uzay, $T,f:X_{\mu}\to X_{\mu}$ μ-sürekli dönüşümler ve μ, Δ_2-tipi şartını sağlayan konveks modüler olsun. Aşağıdakiler sağlansın.

a. f bire-bir dönüşüm ve μ-alt dizisel yakınsak olsun.
b. T dönüşümü 1. tip B_{φ}^{f} daralma dönüşümü olsun.

Bu durumda T dönüşümü X_{μ} uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca (f,T) ikilisi Banach operatör çifti ise (f,T) çifti ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0\in X_{\mu}$ keyfi bir nokta ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall n\geq 1$ için $x_n=Tx_{n-1}$ olsun. (6.1) eşitsizliğinde $x=x_{n-1}$ ve $y=x_n$ olarak alınırsa

$$\mu\left(c\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right)=\mu\left(c\left(fTx_{n-1}-fTx_n\right)\right)$$

$$\leq\beta^*\Bigg(\frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fx_n-fTx_{n-1}\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)},$$

$$\frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fT^2x_{n-1}-fTx_{n-1}\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)},$$

$$\frac{\mu\left(l\left(fx_n-fTx_n\right)\right)\mu\left(l\left(fT^2x_{n-1}-fTx_n\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)},\frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fTx_n\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)},$$

$$\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right),\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fTx_{n-1}\right)\right),\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fTx_n\right)\right),$$

$$\mu\left(l\left(fx_n-fTx_n\right)\right),\mu\left(l\left(fx_n-fTx_{n-1}\right)\right)\Big)$$

elde edilir. Buradan

$$\mu\left(c\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right)\leq\beta^*\Big(\mu\left(l\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right),0,\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_{n+1}\right)\right),$$

$$\mu\left(l\left(fx_n-fx_{n-1}\right)\right),\mu\left(l\left(fx_n-fx_{n-1}\right)\right),\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_{n+1}\right)\right),\mu\left(l\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right),0\Big)$$

bulunur. $\beta^*\in B$ ve

$$\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_{n+1}\right)\right)\leq\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)+\mu\left(l\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right)$$

eşitsizliğinden $\forall n\geq 1$ için

$$\mu\left(c\left(fx_n-fx_{n-1}\right)\right)\leq\varphi\Big(\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)\Big)\leq\varphi\Big(\mu\left(c\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)\Big)$$

sağlanır. (6.1) eşitsizliğinde $x=x_{n-2}$ ve $x=x_{n-1}$ alınırsa benzer şekilde

$$\mu\left(c\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right)\leq\varphi\Big(\varphi\Big(\mu\left(l\left(fx_{n-2}-fx_{n-1}\right)\right)\Big)\Big)\leq\varphi^2\Big(\mu\left(c\left(fx_{n-2}-fx_{n-1}\right)\right)\Big)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\mu\left(c\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right)\leq\varphi^n\Big(\mu\left(c\left(fx_0-fx_1\right)\right)\Big) \tag{6.2}$$

bulunur. $n\to\infty$ için limit alınırsa $\mu\left(c\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right)\to 0$ elde edilir.

$\{fx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi için ilk olarak $\left\{\frac{c}{m}fx_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $m>n$ için (6.2) ve Önerme 2.2.10. kullanılarak

$$\mu\left(\frac{c}{m}(fx_n - fx_{n+m})\right)$$

$$=\mu\left(\frac{c}{m}(fx_n - fx_{n+1})+\frac{c}{m}(fx_{n+1} - fx_{n+2})+\cdots+\frac{c}{m}(fx_{n+m-1} - fx_{n+m})\right)$$

$$\leq \mu\left(c\left(fx_n - fx_{n+1}\right)\right)+\mu\left(c\left(fx_{n+1} - fx_{n+2}\right)\right)+\cdots\mu\left(c\left(fx_{n+m-1} - fx_{n+m}\right)\right)$$

$$\leq \varphi^{n}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right)+\varphi^{n+1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right)+\cdots+\varphi^{n+m-1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right) \qquad (n,m\to\infty)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right)<\infty$$

bulunur. Böylece $\left\{\frac{c}{m}fx_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ-Cauchy dizisidir. Δ_2-tipi şartı sağlandığından $\{fx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ-Cauchy dizisidir. Bu uzay μ-tam olduğundan $\{fx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $u\in X_\mu$ noktası vardır. Yani, $\lim_{n\to\infty} fx_n = u$ dur.

Ayrıca f, μ-alt dizisel yakınsak olduğundan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizisi olan $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\lim_{m\to\infty} x_m = z$ olan $z\in X_\mu$ vardır. f, μ-sürekli olduğundan $\lim_{m\to\infty} fx_m = fz$ dir. Böylece limitin tekliğinden $fz=u$ dur. Buradan T, μ-sürekli olduğundan $\lim_{m\to\infty} Tx_m = Tz$ ve f, μ-sürekliliğinden $\lim_{m\to\infty} fTx_m = fTz$ elde edilir.

$fu \neq fTu$ olsun. (6.1) eşitsizliğinden

$$\mu\left(\frac{c}{2}(fu - fTu)\right) \leq \mu\left(\left(c\left(\frac{1}{2}(fu - fx_n)\right)\right)\right) + \mu\left(\left(c\left(\frac{1}{2}(fx_n - fTu)\right)\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(\left(c\left(fu - fx_n\right)\right)\right) + \beta^*\left(\frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fu - fTu\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fu\right)\right)},\right.$$

$$\frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fT^2x_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fu\right)\right)},$$

$$\frac{\mu\left(l\left(fu - fTu\right)\right)\mu\left(l\left(fT^2x_{n-1} - fTu\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fu\right)\right)}, \frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTu\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fu\right)\right)},$$

$$\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fu\right)\right), \mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right), \mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTu\right)\right),$$

$$\left.\mu\left(l\left(fu - fTu\right)\right), \mu\left(l\left(fu - fTx_{n-1}\right)\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(\left(c\left(fu - fx_n\right)\right)\right) + \beta^*\left(\frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fu - fTu\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-2} - fu\right)\right)},\right.$$

$$\frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fx_{n+1} - fTx_n\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-2} - fu\right)\right)},$$

$$\frac{\mu\left(l\left(fu - fTu\right)\right)\mu\left(l\left(fx_{n+1} - fTu\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-2} - fu\right)\right)}, \frac{\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right)\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTu\right)\right)}{\mu\left(l\left(fx_{n-2} - fu\right)\right)},$$

$$\mu\left(l\left(fx_{n-1} - fu\right)\right), \mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTx_{n-1}\right)\right), \mu\left(l\left(fx_{n-1} - fTu\right)\right),$$

$$\left.\mu\left(l\left(fu - fTu\right)\right), \mu\left(l\left(fu - fTx_{n-1}\right)\right)\right)$$

olduğundan ve β^* fonksiyonunun sürekliliği kullanılarak $n \to \infty$ limit alınırsa

$$\mu\left(\frac{c}{2}(fu-fTu)\right)\leq\beta^*\Big(0,0,\mu\big(l(fu-fTu)\big),\mu\big(l(fu-fTu)\big),0,0,$$

$$\mu\big(l(fu-fTu)\big),\mu\big(l(fu-fTu)\big),\mu\big(l(fu-fTu)\big)\Big)$$

elde edilir. Buradan

$$\mu\left(\frac{c}{2}(fu-fTu)\right)\leq\varphi\Big(\mu\big(l(fu-fTu)\big)\Big)\leq\varphi\Big(\mu\big(c(fu-fTu)\big)\Big)<\varphi\Big(\mu\big(c(fu-fTu)\big)\Big)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\mu\left(\frac{c}{2}(fu-fTu)\right)\leq\mu\big(c(fu-fTu)\big)<\mu\big(c(fu-fTu)\big)$$

çelişki elde edilir. Yani, $fu=fTu$ sağlanır. f bire-bir dönüşüm olduğundan olduğundan $u=Tu$ bulunur. Yani; u, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Son olarak u noktasının, T dönüşümünün tek sabit noktası olduğunun gösterilmesi için $u\neq u^*$ olan u^* diğer bir sabit noktası olsun. f bire bir olduğundan $fu\neq fu^*$ dir. (6.1) ifadesinde $x=u$, $y=u^*$ alınırsa

$$\mu\big(c(fu-fu^*)\big)=\mu\Big(\big(c(fTu-fTu^*)\big)\Big)$$

$$\leq\beta^*\left(\frac{\mu\big(l(fu-fTu)\big)\mu\big(l(fu^*-fTu^*)\big)}{\mu\big(l(fu-fu^*)\big)},\frac{\mu\big(l(fu-fTu)\big)\mu\big(l(fT^2u-fTu)\big)}{\mu\big(l(fu-fu^*)\big)}\right.$$

$$\frac{\mu\big(l(fu-fTu)\big)\mu\big(l(fu-fTu^*)\big)}{\mu\big(l(fu-fu^*)\big)},\frac{\mu\big(l(fu^*-fTu^*)\big)\mu\big(l(fT^2u-fTu^*)\big)}{\mu\big(l(fu-fu^*)\big)},$$

$$\mu\left(l\left(fu-fu^{*}\right)\right),\mu\left(l\left(fu-fTu\right)\right),\mu\left(l\left(fu-fTu^{*}\right)\right),\mu\left(l\left(fu^{*}-fTu^{*}\right)\right),\mu\left(l\left(fu^{*}-fTu\right)\right)\right).$$

ve dolayısıyla

$$\mu\left(c\left(fu-fu^{*}\right)\right)\leq\beta^{*}\left(0,0,0,0,\mu\left(l\left(fu-fu^{*}\right)\right),0,\mu\left(l\left(fu-fu^{*}\right)\right),0,\mu\left(l\left(fu-fu^{*}\right)\right)\right)$$

$$\mu\left(c\left(fu-fu^{*}\right)\right)\leq\varphi(0)=0$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden $fu=fu^{*}$ ve f, bire-bir olduğundan $u=u^{*}$ sağlanır. Böylece u, T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

(f,T), Banach operatör çifti olduğundan f ve T dönüşümleri T dönüşümünün sabit noktasında değişmelidir. Dolayısıyla $u\in F(T)$ için $fTu=Tfu$ sağlanır. $fu=Tfu$ eşitliğinden T'nin diğer sabit noktası elde edilir. Sabit noktanın tekliğinden dolayı $fu=u$ olmalıdır. Böylece $u=fu=Tu$ sağlanır. Yani u, (f,T) çiftinin ortak tek bir sabit noktasıdır.

Tanım 6.1.6. X_μ modüler uzay, $T,f:X_\mu\to X_\mu$ iki dönüşüm ve $\beta^{*}\in B_\varphi$ olsun. $\forall x,y\in X_\mu$ ve $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$\mu\left(c\left(fTx-fTy\right)\right)\leq\beta^{*}\left(\mu\left(l\left(fx-fy\right)\right),\mu\left(l\left(fx-fTx\right)\right),\right.$$

$$\mu\left(l\left(fy-fTy\right)\right),\mu\left(l\left(fx-fTy\right)\right),\mu\left(l\left(fy-fTx\right)\right),\mu\left(l\left(fT^{2}x-fx\right)\right),\qquad(6.3)$$

$$\left.\mu\left(l\left(fT^{2}x-fTx\right)\right),\mu\left(l\left(fT^{2}x-fy\right)\right),\mu\left(l\left(fT^{2}x-fTy\right)\right)\right)$$

ise T dönüşümüne 2. tip B_φ^{f} - daralma dönüşümü denir.

Teorem 6.1.7. X_μ $\mu-$tam modüler uzay ve T, f dönüşümleri μ-sürekli dönüşümler olsun. μ konveks modüleri Δ_2-tipi şartını sağlasın.

a. f bire-bir dönüşüm ve μ-alt dizisel yakınsak olsun.
b. T dönüşümü 2. tip B_φ^f daralma dönüşümü olsun.

T, X_μ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca (f,T) Banach operatör çifti ise (f,T) çifti ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

$\forall t>0$ için $\varphi(t)=kt, k\in(0,1)$ ve $f=I(\text{birim dönüşüm})$ alınırsa modüler uzay üzerinde (Van ve Ark, 2014) nın sonuçları elde edilir.

Sonuç 6.1.8. X_μ μ-tam modüler uzay, $T: X_\mu \to X_\mu$ bir dönüşüm ve $\beta^* \in B_\varphi$ olsun. $\forall x,y\in X_\mu$ ve $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$\mu(c(Tx-Ty)) \le \beta^*\Big(\mu(l(x-y)), \mu(l(x-Tx)), \mu(l(y-Ty)), \mu(l(x-Ty)),$$

$$\mu(l(y-Tx)), \mu(l(T^2x-x)), \mu(l(T^2x-Tx)), \mu(l(T^2x-y)), \mu(l(T^2x-Ty))\Big)$$

eşitsizliği sağlanırsa T dönüşümü $x^* \in X_\mu$, tek sabit noktasına sahiptir ve $\lim_{n\to\infty} \mu(Tx_n - x^*) = 0$ dır.

Sonuç 6.1.9. X_μ μ-tam modüler uzay, $T: X_\mu \to X_\mu$ bir dönüşüm ve $\alpha \in A_\varphi$ olsun. $\forall x,y\in X_\mu$, f, bire-bir, μ-sürekli ve μ-alt dizisel yakınsak dönüşüm olsun. $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$\mu(c(fTx-fTy)) \le \alpha\big(\mu(l(fx-fy)), \mu(l(fx-fTx)), \mu(l(fy-fTy))\big)$$

ise T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca (f,T) çifti Banach operatör çifti ise (f,T) çiftinin ortak tek bir sabit noktası vardır.

6.2. B_{φ}^{f}-İntegral Tipi Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 6.2.1. X_{μ} modüler uzay, $T,f:X_{\mu}\to X_{\mu}$ iki dönüşüm ve $\beta^{*}\in B_{\varphi}$ olsun. $\forall x,y\in X_{\mu}$, $\phi\in\Phi_1$ ve $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$\int_0^{\mu(c(fTx-fTy))}\phi(t)dt$$

$$\leq\beta^{*}\left(\int_0^{\frac{\mu(l(fx-fTx))\mu(l(fy-fTy))}{\mu(l(fx-fy))}}\phi(t)dt,\ \int_0^{\frac{\mu(l(fx-fTx))\mu(l(fT^2x-fTx))}{\mu(l(fx-fy))}}\phi(t)dt,\right.$$

$$\int_0^{\frac{\mu(l(fy-fTy))\mu(l(fT^2x-fTy))}{\mu(l(fx-fy))}}\phi(t)dt,\ \int_0^{\frac{\mu(l(fx-fTx))\mu(l(fx-fTy))}{\mu(l(fx-fy))}}\phi(t)dt, \tag{6.4}$$

$$\left.\int_0^{\mu(l(fx-fy))}\phi(t)dt,\ \int_0^{\mu(l(fx-fTx))}\phi(t)dt,\ \int_0^{\mu(l(fx-fTy))}\phi(t)dt,\ \int_0^{\mu(l(fy-fTy))}\phi(t)dt,\ \int_0^{\mu(l(fy-fTx))}\phi(t)dt\right)$$

ifadesi sağlanırsa T dönüşümüne 1. tipten B_{φ}^{f}-integral tipi daralma dönüşümü denir.

Teorem 6.2.2. X_{μ} μ-tam modüler uzay ve $T,f:X_{\mu}\to X_{\mu}$ μ- sürekli dönüşümler ve μ, Δ_2-tipi şartını sağlayan konveks fonksiyonel olsun ve aşağıdakiler sağlansın.

a. f bire-bir dönüşüm ve μ-alt dizisel yakınsaktır.
b. T dönüşümü B_{φ}^{f} integral çeşit daralma dönüşümüdür.

Bu durumda T X_μ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca (f,T) Banach operatör çifti ise (f,T) çifti ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X_\mu$ keyfi bir nokta ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \geq 1$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olsun. (6.4) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ olarak alınırsa

$$\int_0^{\mu(c(fx_n - fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt = \int_0^{\mu(c(fTx_{n-1} - fTx_n))} \phi(t)\,dt$$

$$\leq \beta^*\left(\int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1} - fTx_{n-1}))\mu(l(fx_n - fTx_{n-1}))}{\mu(l(fx_{n-1} - fx_n))}} \phi(t)\,dt, \int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1} - fTx_{n-1}))\mu(l(fT^2x_{n-1} - fTx_{n-1}))}{\mu(l(fx_{n-1} - fx_n))}} \phi(t)\,dt, \right.$$

$$\int_0^{\frac{\mu(l(fx_n - fTx_n))\mu(l(fT^2x_{n-1} - fTx_n))}{\mu(l(fx_{n-1} - fx_n))}} \phi(t)\,dt, \int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1} - fTx_{n-1}))\mu(l(fx_{n-1} - fTx_n))}{\mu(l(fx_{n-1} - fx_n))}} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_{n-1} - fx_n))} \phi(t)\,dt,$$

$$\left. \int_0^{\mu(l(fx_{n-1} - fTx_{n-1}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_{n-1} - fTx_n))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_n - fTx_n))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_n - fTx_{n-1}))} \phi(t)\,dt \right)$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^{\mu(c(fx_n - fx_{n-1}))} \phi(t)\,dt \leq \beta^*\left(\int_0^{\mu(l(fx_n - fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_n - fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt, 0, \int_0^{\mu(l(fx_{n-1} - fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt, \right.$$

$$\left. \int_0^{\mu(l(fx_n - fx_{n-1}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_n - fx_{n-1}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_{n-1} - fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx_n - fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt, 0 \right)$$

elde edilir. $\beta^* \in B$ ve $\mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_{n+1}\right)\right) \leq \mu\left(l\left(fx_{n-1}-fx_n\right)\right)+\mu\left(l\left(fx_n-fx_{n+1}\right)\right)$ olduğundan $\forall n \geq 1$ için

$$\int_0^{\mu(c(fx_n-fx_{n-1}))} \phi(t)dt \leq \varphi\left(\int_0^{\mu(l(fx_{n-1}-fx_n))} \phi(t)dt\right) \leq \varphi\left(\int_0^{\mu(c(fx_{n-1}-fx_n))} \phi(t)dt\right)$$

sağlanır. (6.4) eşitsizliğinde $x = x_{n-2}$ ve $x = x_{n-1}$ alınırsa benzer şekilde

$$\int_0^{\mu(c(fx_n-fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt \leq \varphi\left(\varphi\left(\int_0^{\mu(l(fx_{n-2}-fx_{n-1}))} \phi(t)\,dt\right)\right) \leq \varphi^2\left(\int_0^{\mu(c(fx_{n-2}-fx_{n-1}))} \phi(t)\,dt\right)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^{\mu(c(fx_n-fx_{n+1}))} \phi(t)dt \leq \varphi^n\left(\int_0^{\mu(c(fx_0-fx_1))} \phi(t)dt\right) \tag{6.5}$$

bulunur ve bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $\int_0^{\mu(c(fx_n-fx_{n+1}))} \phi(t)\,dt \to 0$ elde edilir.

$\{fx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğunun gösterilmesi için ilk olarak $\left\{\frac{c}{m} fx_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ-Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için (6.5) ve Önerme 2.2.10. kullanılarak

$$\mu\left(\frac{c}{m}\left(fx_n - fx_{n+m}\right)\right)$$

$$= \mu\left(\frac{c}{m}\left(fx_n - fx_{n+1}\right) + \frac{c}{m}\left(fx_{n+1} - fx_{n+2}\right) + \cdots + \frac{c}{m}\left(fx_{n+m-1} - fx_{n+m}\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(c\left(fx_n - fx_{n+1}\right)\right) + \mu\left(c\left(fx_{n+1} - fx_{n+2}\right)\right) + \cdots \mu\left(c\left(fx_{n+m-1} - fx_{n+m}\right)\right)$$

$$\leq \varphi^n\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right) + \varphi^{n+1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right) + \cdots + \varphi^{n+m-1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right) \qquad (n, m \to \infty)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{n+j-1}\left(\mu\left(c\left(fx_0 - fx_1\right)\right)\right) < \infty$$

bulunur. Böylece $\left\{\frac{c}{m} fx_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ-Cauchy dizisidir. Δ_2-tipi şartından $\{fx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ-Cauchy dizisidir. Bu uzay μ-tam olduğundan $\{fx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olduğu bir $w\in X_\mu$ noktası vardır. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = w$ dır.

Ayrıca f, μ-alt dizisel yakınsak olduğundan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizisi olan $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = v$ olan $v\in X_\mu$ vardır. f, μ-sürekli olduğundan $\lim\limits_{m\to\infty} fx_m = fv$ dir. Böylece limitin tekliğinden $fz = u$ bulunur. Buradan T, μ-sürekli olduğundan $\lim\limits_{m\to\infty} Tx_m = Tv$ ve f, μ-sürekliliğinden $\lim\limits_{m\to\infty} fTx_m = fTv$ elde edilir.

$fw \neq fTw$ olsun. (6.4) eşitsizliğinden

$$\int_0^{\mu\left(\frac{c}{2}(fw-fTw)\right)}\phi(t)dt \le \int_0^{\mu\left(\left(c\left(\frac{1}{2}(fw-fx_n)\right)\right)\right)}\phi(t)dt + \int_0^{\mu\left(\left(c\left(\frac{1}{2}(fx_n-fTw)\right)\right)\right)}\phi(t)dt$$

$$\le \int_0^{\mu((c(fw-fx_n)))}\phi(t)dt + \beta^*\left(\int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1}-fTx_{n-1}))\mu(l(fw-fTw))}{\mu(l(fx_{n-1}-fw))}}\phi(t)dt, \right.$$

$$\int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1}-fTx_{n-1}))\mu\left(l\left(fT^2x_{n-1}-fTx_{n-1}\right)\right)}{\mu(l(fx_{n-1}-fw))}}\phi(t)dt, \quad \int_0^{\frac{\mu(l(fw-fTw))\mu\left(l\left(fT^2x_{n-1}-fTw\right)\right)}{\mu(l(fx_{n-1}-fw))}}\phi(t)dt,$$

$$\int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1}-fTx_{n-1}))\mu(l(fx_{n-1}-fTw))}{\mu(l(fx_{n-1}-fw))}}\phi(t)dt, \quad \int_0^{\mu(l(fx_{n-1}-fw))}\phi(t)dt, \quad \int_0^{\mu(l(fx_{n-1}-fTx_{n-1}))}\phi(t)dt,$$

$$\left. \int_0^{\mu(l(fx_{n-1}-fTw))}\phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(fw-fTx_{n-1}))}\phi(t)dt \right)$$

$$\le \int_0^{\mu((c(fw-fx_n)))}\phi(t)dt + \beta^*\left(\int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1}-fx_n))\mu(l(fw-fTw))}{\mu(l(fx_{n-2}-fw))}}\phi(t)dt, \right.$$

$$\int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1}-fx_n))\mu(l(fx_{n+1}-x_n))}{\mu(l(fTx_{n-2}-fw))}}\phi(t)dt, \quad \int_0^{\frac{\mu(l(fw-fTw))\mu(l(fx_{n+1}-fTw))}{\mu(l(fTx_{n-2}-fw))}}\phi(t)dt,$$

$$\int_0^{\frac{\mu(l(fx_{n-1}-fx_n))\mu(l(fx_{n-1}-fTw))}{\mu(l(fTx_{n-2}-fw))}}\phi(t)dt, \quad \int_0^{\mu(l(fx_{n-1}-fw))}\phi(t)dt, \quad \int_0^{\mu(l(fx_{n-1}-fx_n))}\phi(t)dt,$$

$$\left. \int_0^{\mu(l(fx_{n-1}-fTw))}\phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt, \int_0^{\mu(l(fw-fx_n))}\phi(t)dt \right)$$

dir. β^* sürekli olduğundan $n \to \infty$ limit alınırsa

$$\int_0^{\mu\left(\frac{c}{2}(fw-fTw)\right)}\phi(t)dt \le \beta^*\left(0,0,\int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt,\int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt,0,0,\right.$$

$$\left.\int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt,\int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt,\int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^{\mu\left(\frac{c}{2}(fw-fTw)\right)}\phi(t)dt \le \varphi\left(\int_0^{\mu(l(fw-fTw))}\phi(t)dt\right) \le \varphi\left(\int_0^{\mu(c(fw-fTw))}\phi(t)dt\right)$$

$$<\varphi\left(\int_0^{\mu(c(fw-fTw))}\phi(t)dt\right) < \int_0^{\mu(c(fw-fTw))}\phi(t)dt,$$

olur ki bu ise çelişkidir. Böylece $fw = fTw$ elde edilir. f bire-bir olduğundan $w = Tw$ olur. Yani; w, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Son olarak $w \in X_\mu$ noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğunun gösterilmesi için $w \ne w^*$ olan $w^* \in X_\mu$ diğer bir sabit nokta olsun. f bire-bir olduğundan $fw \ne fw^*$ dir. Buradan

$$\int_0^{\mu\left(c\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt = \int_0^{\mu\left(\left(c\left(fTw-fTw^*\right)\right)\right)}\phi(t)dt$$

$$\le \beta^*\left(\int_0^{\frac{\mu(l(fw-fTw))\mu\left(l\left(fw^*-fTw^*\right)\right)}{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}}\phi(t)dt,\int_0^{\frac{\mu(l(fw-fTw))\mu\left(l\left(fT^2w-fTw\right)\right)}{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}}\phi(t)dt,\right.$$

$$\int_0^{\frac{\mu\left(l\left(fw^*-fTw^*\right)\right)\mu\left(l\left(fT^2w-fTw^*\right)\right)}{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}}\phi(t)dt,\quad \int_0^{\frac{\mu\left(l\left(fw-fTw\right)\right)\mu\left(l\left(fw-fTw^*\right)\right)}{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}}\phi(t)dt,\quad \int_0^{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt,$$

$$\left.\int_0^{\mu\left(l\left(fw-fTw\right)\right)}\phi(t)dt,\quad \int_0^{\mu\left(l\left(fw-fTw^*\right)\right)}\phi(t)dt,\quad \int_0^{\mu\left(l\left(fw^*-fTw^*\right)\right)}\phi(t)dt,\quad \int_0^{\mu\left(l\left(fw^*-fTw\right)\right)}\phi(t)dt\right)$$

$$\int_0^{\mu\left(c\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt \le \beta^*\left(0,0,0,0,\int_0^{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt,0,\int_0^{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt,0,\int_0^{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt\right)$$

bulunur. $\beta^* \in B_\varphi$ olduğundan

$$\int_0^{\mu\left(c\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt \le \varphi\left(\int_0^{\mu\left(l\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt\right) \le \varphi\left(\int_0^{\mu\left(c\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt\right)$$

$$< \varphi\left(\int_0^{\mu\left(c\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt\right) < \int_0^{\mu\left(c\left(fw-fw^*\right)\right)}\phi(t)dt,$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $fw = fw^*$ dır ve f, bire-bir olduğundan $w = w^*$ sağlanır. Böylece w, T dönüşümünün tek bir sabit noktasıdır.

(f,T), Banach operatör çifti olduğundan f ve T, T dönüşümünün sabit noktasında değişmelidir. $w \in F(T)$ için $fTw = Tfw$ sağlanır. $fw = Tfw$ eşitliğinden T dönüşümünün diğer sabit noktası elde edilir. Sabit noktanın tekliğinden $fw = w$ olmalıdır. Buradan $w = fw = Tw$ sağlanır. Yani w, (f,T) çiftinin ortak tek bir sabit noktasıdır.

Sonuç 6.2.3. X_μ μ-tam modüler uzay, $T,f: X_\mu \to X_\mu$ sürekli iki dönüşüm ve $\beta^* \in B_\varphi$ olsun. $\forall x,y \in X_\mu$, $\phi \in \Phi_1$ ve $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$\int_0^{\mu(c(fTx-fTy))} \phi(t)\,dt \le \beta^*\left(\int_0^{\mu(l(fx-fy))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx-fTx))} \phi(t)\,dt, \right.$$

$$\int_0^{\mu(l(fy-fTy))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx-fTy))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fy-fTx))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu\left(l\left(fT^2x-fx\right)\right)} \phi(t)\,dt,$$

$$\left. \int_0^{\mu\left(l\left(fT^2x-fTx\right)\right)} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu\left(l\left(fT^2x-fy\right)\right)} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu\left(l\left(fT^2x-fTy\right)\right)} \phi(t)\,dt \right)$$

ise T dönüşümünün X_μ uzayında tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca (f,T) çifti Banach operatör çifti ise f ve T ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 6.2.4. X_μ μ-tam modüler uzay, $T: X_\mu \to X_\mu$ bir dönüşüm ve $\alpha \in A_\varphi$ olsun. $\forall x,y \in X_\mu$, f bire-bir, μ-sürekli ve μ-alt dizisel yakınsak dönüşüm olsun. $\phi \in \Phi_1$ ve $l<c$ olan l,c pozitif sayıları için

$$\int_0^{\mu(c(fTx-fTy))} \phi(t)\,dt \le \alpha\left(\int_0^{\mu(l(fx-fy))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fx-fTx))} \phi(t)\,dt, \int_0^{\mu(l(fy-fTy))} \phi(t)\,dt \right)$$

ise T dönüşümünün X_μ uzayında tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca (f,T) çifti Banach operatör çifti ise f ve T ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

KAYNAKLAR

Aamri, M., El Moutawakil, D. 2002. Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions. J. Math. Anal. Applications., 270: 181-188.

Agarwal, R. P., Meehan, M., Donal, O. 2001. Fixed point theory and applications.,Cambridge University Press.

Aghanians, A., Nourouzi, K. 2004. Fixed point for Banach and Kannan contractions in modular spaces with graph. Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 5(2): 50-59

Akinbo, G., Mewomo, O. 2011. Fixed point theorems for a general class of almostcontractions in metric spaces. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyaaziensis., 27: 299-305.

Akram, M., Zafar, A. A., Siddiqui, A. A. 2002. A general class of contractions: A-contractions, Novi Sad J. Math., 38(1): 25-33.

Aleomraninejad, S.M.A., Rezapour, Sh., Shahzad, N. 2012. Some fixed point results on a metric space with a graph. Topology and Its Applications., 159: 659-663.

Asl, J.H., Mohammadi, B., Rezapour, Sh., Vaezpour, S.M. 2013. Some fixed point results generalized quasi-contractive multifunctions on graphs. Filomat., 27(2): 311-315.

Babu, G.V.R., Sandhya, M.L., Kameswari, M.V.R., 2008. A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions, Carpath. J. Math., 24(1): 8-12.

Banach, S. 2012. Sur les operations dans les emsembles abstraits et leurs applications aux equations integrales. Fund. Math., (1): 133-181.

Branciari, A. 2002. A Fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type. International Journal of Mathematics and Mathematical Science., 29: 531-536.

Beg, I., Butt, A.R. 2013. Fixed point of set-valued graph contractive mappings, Journal of Inequalities and Applications., 2013(252): 1-7.

Beg, I., Rashid Butt, A., Radojevic, S. 2010. The contraction principle for set valued mappings on a metric space with a graph, Comput.Math.Appl., 60: 1214-1219.

Beiranvand, A., Moradi, S., Omid, M., Pazandeh. H. 2009. Two fixed-point theorems for special mappings., arXiv:0903.1504v1.

Benavides, T. D. 1998. Fixed point theorems for uniformly Lipschitzian mappings and asymptotically regular mappings. Nonlinear Anal., 32: 15-27.

Benavides, T. D., Khamsi, M. A., Samadi, S. 2001. Uniformly Lipschitzian mappings in modular function spaces. Nonlinear Analysis., 46: 267-278.

Berinde, V. 1997. Contractii generalizate si aplicatii. Editura Cub Press, Baia Mare., (2): Romania.

Berinde, V. 2004. Approximation fixed points of weak contractions using the Picard iteration, Nonlinear Anal. Forum., 9(1): 43-53.

Berinde, V. 2007. Iterative Approximation of Fixed Points. Springer.

Berinde, V. 2008. General constructive fixed point theorems for Ciric-type almost contractions in metric spaces, Carpath. J. Math., 24(2): 10-19.

Berinde, V., Pacurar, M. 2008. Fixed points and continuity of almost contractions Fixed Point Theory, 9(1): 23-34.

Berinde, V. 2009. Some remarks on a fixed point theorem for Ciric-type almost contractions. Carpath. J. Math. 25(2): 157-162.

Berinde, V. 2002. Iterative approximation of fixed points. Springer, Berlin, Heıdelberg, New York.

Beygmohammadi, M., Razani. 2010. A two fixed-point theorems for mappings satisfying a general contractive condition of ıntegral type in the modular space. Int J Math Math Sci., Article ID 317107.

Bianchini, R. 1972. Su un problema di S. Reich riguardante la teori dei punti fissi, Boll. Un. Math. Ital., 5: 103-108.

Büyükkaya, A., Öztürk, M. 2018. Fixed points theorems for mappings satisfying B_{φ} contraction. Proceedings Book of ICRAPAM., 2018: 70-74.

Chatterjea, S.K. 1972. Fixed point theorems. C.R. Acad. Bulgare Sci., 25 727-730.

Chen, J., Li, Z. 2007. Common fixed-points for Banach operator pairs in best approximation. J. Math. Anal. Appl., 336: 1466-1475.

Chistyakov, W. 2010. Modular metric space. I:basic concepts. Nonlinear Analysis, 72: doi:10.1016/j.na.2009.04.057, 1-14.

Chungh, R., Kumar, S. 2001. Common fixed points for weakly compatible maps. Proc. India Acad. Sci., 111(2): 241-247.

Ciric, L., Abbas, M., Saadati, R., Hussain, N. 2011. Common fixed points of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces, Appl. Math. Comput., 217: 5784-5789.

Granas, A., Dugundjı J. 2002. Fixed point theory. Springer Monographs in Mathematics.

Haghi, R.H., Rezapour, Sh., Shahzad, N. 2013. Fixed Points of G-type Quasi-Contractions on Graphs. Abstract and Applied Analysis., (2013): 5 sayfa.

Jain, P.K. 2009. Metric spaces. Narosa Publishing House., New Delhi.

Jachymski, J. 2008. The contraction principle for mappings on a metric space endowed wit a graph. Proc. Amer. Math. Soc., 136: 1359-1373.

Johnsonbough, R. 1997. Discrete mathematics. Pearson, Prentice Hall.

Jungck, G. 1976. Commuting mappings and fixed points. Amer. Math. Monthly., 83: 261-263.

Jungck, G., Rhoades, B.E. 1998. Fixed point for set valued functions without continuity. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics., 29(3): 277-238.

Jungck, G. 1986. Compatible mappings and common fixed points. International Journal of Mathematics and Mathematical Science., 9(4): 771-779.

Jungck, G. 1988 Compatible mappings and common fixed points. International Journal of Mathematics and Mathematical Science., 2(2): 285-288.

Jungck, G. 1988. Common fixed points for commuting and compatible maps on compact. Proceedings of the American Mathematical Society., 103(3): 977-983.

Kannan, R. 1968. Some results on fixed points. Bull. Calcutta. Math. Soc., 60: 71-76.

Khamsi, M. A., Kozlowski, W.M., K., Reich, S. 1990. Fixed point theory in modular function spaces. Nonlinear Anal., 14(11): 935-953.

Khamsi, M. A., Kozlowski, W.M. 2015. Fixed point theory in modular function spaces. Springer, New York.

Khamsi, M. A. 1996 A convexity property in modular function spaces. Math. Japonica., 44: 269-279.

Kreyszig, E. 1978. Introductory functional analysis with applications, John Wiley and Sons, New York.

Kozlowski, W.M. 1988. Modular function spaces, Series of Monogrraphs and Texbooks İn Pure and Applied Mathematics, 122. Cilt, Dekker, New York (Base).

Koshi, S., Shimogaki, T. 1961. On F-norms of quasi-modular spaces. J Fac Sci Hokkaido Univ Ser I.,15(3-4): 202-218.

Kuakket, K., Kumam, P. 2004. Fixed points of asymptotic pointwise contractions in modular spaces. Applied Mathematic Letters., 24(11): 1795-1798.

Kuaket, K., Kumam, P. 2011. Fixed points of asymptotic pointwise contractions in modular spaces. Applied Mathematics Letters., 24: 1795-1798.

Liu, Z., Li, X., Kang, SM., Cho, SY.2011. Fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type and applications. Fixed Point Theory and App., 2011(64): 18 sayfa.

Luxemburg, W. A. 1955. Banach function spaces. Thesis, Delft, Inst. of Techn. Asser, The Netherlands.

Maddox, Z. 1970. Elements of functional analysis. Cambridge University Press.

Mazur, S. Orlicz, W. 1958.On some classes of linear spaces. Studia Math., 17: 97-119.

Mongkolkeha, C., Kumam, P. 2011. Fixed point and common fixed point theorems for generalized weak contraction mappings of integral type in Modular spaces, Int. J. Math. Math. Sci., 2011: Article ID. 705943, 12 sayfa.

Mongkolkeha, C., Kumam, P. 2012. Common fixed points for generalized weak contraction mappings in modular spaces. Scie. Math. Japonicae, Online., 117-127.

Mongkolkeha, C., Kumam, P. 2013. Some fixed point results for generalized weak contraction mappings in modular spaces, Int. Journal of Analysis., 2013: Article ID 247378, 6 sayfa.

Musielak, T., Orlicz, W. 1959. On modular spaces. Studia Math., 18: 49-65.

Musielak, T., Orlicz, W. 1959a. Some remarks on modular spaces. Bull. Acad. Pol. Sci., 7: 661-668.

Musielak, T. 1983. Orlicz spaces and modular spaces. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin.

Nakano, H. 1950. Modulared semi-ordered linear spaces. In Tokyo Math. Book Ser., (1): Maruzen Co., Tokyo.

Öztürk, M., Girgin, E. 2014. On some fixed-point theorems for ψ-contraction on metric space involving a graph. Journal of Inequalities and Applications., 2014: 39, doi:10.1186/1029-242X-2014-39.

Öztürk, M., Abbas, M., Girgin, E. 2014. Fixed points of mappings satisfying contractive condition of integral type in modular spaces endowed with a graph. Fixed Point Theory And Applications., 2014(220): 17 sayfa.

Öztürk, M., Girgin, E. 2015. Some Fixed Point Theorems and Common Fixed Point Theorems in Metric Space Involving a Graph. Bangmod Int. J. Math. Comp.Sci.,1(1):167-177.

Öztürk, M., Abbas, M., Girgin, E. 2016.Common fixed point results of a pair of generalized (ψ,φ) contraction mappings in modular spaces, Fixed Point Theory Appl., 2016 19 sayfa.

Petruşel, A., Petruşel, G., Rus, I.A. 2008. Fixed Point Theory. Cluj Universty Press.

Razani, A., Moradi, R. 2009. Common fixed point theorems of integral type in modular spaces. Bulletin of the Iranian Math. Soc., 35(2): 11-24.

Reich, S.1971. Kannan's fixed point theorem, Boll. Un. Math. Ital., 5: 1-11.

Rolewicz, S. 1985. Metric linear space. DReidel Publishing Company,, Poland.

Rus, I.A. 2001 Generalized contractions and applications. Cluj University Press, Cluj-Napoca, Romania.

Saha, M., Dey, D. 2012. Fixed point theorems for A-contraction mappings of integral type. J. Nonlinear Sci. Appl., 5: 84-92.

Sawangsup, Kanokwan. 2015. Fixed point theorems for various contraction mappings in metric spaces endowed with binary telations and application to nonlinear matrix equations. Thammasat Üniversitesi, Matematik ve İstatistik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi.

Samreen, M., Kamran, T. 2013. Fixed point theorems for integral G-contractions. Fixed Point Theory and Applications., 2013: 149.

Sessa. S. 1982. On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations. Publ. Inst. Math., 32(46): 149-153.

Soykan, Y. 2008. Fonksiyonel Analiz Yayın Dağıtım, Ankara.

Subrahmanyam, P.V. 1974. Remarks on some fixed point theorems related to Banach’s contraction principle. J. Math. Phys. Sci., 8: 445-457.

Sumitra, V.R., Uthariaraj, R., Hemavathy, R. 2010. Common fixed point theorem for T- Hardy- Rogers contraction mapping in a cone metric space. International Mathematical Forum., 5: 1495-1506.

Şuhubi, E. 2001. Fonksiyonel analiz. İTÜ Vakfı Yayınları.

Tiammee, J., Suantai, S. 2014. Coincidence point theorems for graph-preserving multi-valued mappings. Fixed Point Theory and Applications., 2014: 11.

Turpin, P. H. 1978. Fubini inequalities and bounded multiplier property in generalized modular spaces. Comment, Math Tomus specialis in homorem Ladislai Orlicz., I, 331-353.

Van An, T., Van Dung, N., Le Hang, V. 2014. General fixed point theorems on metric spaces and 2-metric spaces. Filomat., 28(10): 2037-2045.

Yamamuro, S. 1959 On conjugate spaces of Nakano spaces. Trans Amer Math Soc., 90: 291-311.

Zamfirescu, T. 1972. Fixed point theorems in metric spaces, Arch. Math., 23: 292-298.

ÖZGEÇMİŞ

Şeyda ÇAKAR, 25.10.1989'da Sakarya'da doğdu. İlk, orta, lise ve üniversite eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2007 yılında Zehra Akkoç Kız Lisesi'nden mezun oldu. 2008 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2012 yılında bitirdi. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2016 yılında Sakarya'nın Ferizli ilçesindeki Şehit Hakan Bayram Anadolu İmam Hatip Lisesine öğretmen olarak atandı. Halen aynı kurumda öğretmen olarak görev yapmaktadır.