T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL-HİPERBOLİK FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arzu CİHAN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

Mayıs 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL-HİPERBOLİK FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arzu CİHAN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**

Bu tez 31/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Prof. Dr.**	**Doç. Dr.**
Murat TOSUN	**Mehmet Ali GÜNGÖR**	**Osman Zeki OKUYUCU**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Arzu CİHAN

31.05.2019

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp engin bilgi ve tecrübeleri ile yol gösteren, aynı zamanda tez çalışmamım her aşamasında ilgi ve desteğini esirgemeyen, gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren çok değerli ve kıymetli hocam Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca yüksek lisans hayatımın bu son döneminde kıymetli zamanını ayırıp bana kattığı her bilgi için çok kıymetli hocam Dr. Öğretim Üyesi Ayşe Zeynep AZAK'a sonsuz teşekkür ve minnetimi sunarım. Aynı şekilde bu süreç zarfında yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana yardımcı olup yol gösteren Matematik bölümündeki bütün hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Teşekkürlerimin az kalacağını bildiğim, her zaman yanımda olan, hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, beni bu günlere sevgi, saygı ve ahlak kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren, bu hayattaki en büyük şansım olan annem Derya CİHAN, babam Ergin CİHAN ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayı uzayı
F_n	: $n.$ dereceden Fibonacci sayısı
L_n	: $n.$ dereceden Lucas sayısı
$\mathbb{D}$	: Dual sayı cümlesi
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik sayı cümlesi
Ķ	: Reel kuaterniyon sayı cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayı cümlesi
$\mathbb{DH}$F	: Dual-hiperbolik Fibonacci sayı cümlesi
$\mathbb{DH}$L	: Dual-hiperbolik Lucas sayı cümlesi

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Dual-Hiperbolik Sayılar, Dual-Hiperbolik Fibonacci Sayılar, Dual-Hiperbolik Lucas Sayılar

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölüm ise beş alt başlığa ayrılmış ve gerekli temel kavramlar verilmiştir. Bu alt başlıkların birincisinde Fibonacci ve Lucas sayıları tanıtılmış ve gerekli özdeşlikler verilmiştir. İkincisinde hiperbolik sayı sistemi tanıtılmıştır. Üçüncüsünde dual sayı sistemi tanıtılmış ve gerekli teoremler verilmiştir. Dördüncüsün de ise kuaterniyonlar tanıtılmış ve alt başlık olarak reel kuaterniyonlar verilmiştir. Beşinci ve son alt başlıkta ise dual-hiperbolik sayı sistemi tanıtılmıştır.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde dual-hiperbolik Fibonacci ve Lucas sayıları tanımlanmıştır. Bu sayılar için toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri verilmiştir ve bu sayılar için beş faklı eşlenik tanımı yapılmıştır. Daha sonra ise Fibonacci sayıları için olan üreteç fonksiyonu baz alınarak dual-hiperbolik Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Son olarak ise Fibonacci ve Lucas sayıları için önemli olan özdeşlikler dual-hiperbolik Fibonacci ve Lucas sayıları için tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde bu tezin bir değerlendirilmesi yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

DUAL-HYPERBOLIC FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

SUMMARY

Keywords: Dual-Hyperbolic Numbers, Dual-Hyperbolic Fibonacci Numbers, Dual-Hyperbolic Lucas Numbers.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction. The second part is divided into five sub-headings and basic concepts are given. In the first sub-headings, Fibonacci and Lucas numbers are introduced and necessary identities are given. In the second chapter, hyperbolic number system is introduced. In the third, dual number system is introduced and necessary theorems are given. In the fourth, quaternions are introduced and real quaternions are given as subheadings. In the fifth and last subheadings, dual-hyperbolic number system is introduced.

The third section comprises the original part of thesis. In this section, dual-hyperbity Fibonacci and Lucas numbers are defined. In addition, subtraction and multiplication operations are given for these numbers and five different conjugates are defined for these numbers. Then, based on the generator function for Fibonacci numbers, generator function is obtained for dual hyperbolic Fibonacci numbers. Finally, the identities that are important for Fibonacci and Lucas numbers are defined for dual-hyperbolic Fibonacci and Lucas numbers.

In the fourth chapter the general evaluation of thesis and recommendations for new researches are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Fibonacci sayı dizisi ilk kez 12. ve 13. yüzyılları arasında (1170-1240) İtalya'da yaşamış olan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci'nin Liber Abaci kitabında görülmüştür. Fakat Fibonacci sayı dizisi ilk olarak 6. yüzyılda Hint matematikçiler tarafından bulunmuş olmasına rağmen bu sayı dizisi tavşanların üremesiyle ilgili olan problemin hesaplanması sonucu Leonardo Fibonacci'nin Liber Abaci kitabında 1202 yılında ortaya konmuştur [1].

Bu sayı sitemi üç sebepten dolayı önemli bir sayı sistemi haline dönüşmüştür. Bunlardan birincisi insan bedeninde, bitki, böcek, inşaa edilen birçok antik yapıda ve daha başka birçok alanda çok sık olarak karşımıza çıkmasıdır. İkinci olarak dizinin bir terimini kendinden önceki terime bölünmesiyle elde dilen sabit bir sayı elde edilmesidir. "Altın oran" adı verilen bu sayı doğada bulunan birçok canlıdan Mısır'daki piramitlere kadar birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Üçüncü olarak ise Fibonacci sayı dizisinin sayılar teorisinde çok önemli ve ilginç özelliklerinin bulunmasıdır. Bu sayı dizisinin ilk iki terimi sırasıyla 0 ve 1 olmak üzere kendinden önceki iki terimi toplanmasıyla elde edilir [2].

Fibonacci sayı dizisinin başlangıç değerleri değiştirilirse bu sayı dizisinden bağımsız başka bir sayı dizisi oluşturulur. Bu düşünceden hareketle Fransız matematikçi Edward Lucas başlangıç şartları için seçilebilecek sırasıyla 2 ve 1 değerlerini kullanarak Lucas sayı dizisini oluşturdu. Lucas sayı dizisinin Fibonacci sayı dizisi ile arasında birçok ilginç bağıntı olmasından dolayı literatürde çok fazla kullanılmaktadır.

Tavşan problemini çözmek için ortaya çıkan Fibonacci sayı dizileri gibi kompleks sayılar da üçüncü dereceden denklemelerin çözümünü ararken ortaya çıkan bir sayı sistemidir. Bu sayı sistemi ilk olarak İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano tarafından cebirde ki üçüncü dereceden denklemleri çözmeye çalışırken bulunmuştur. Cardano denklemleri çözmeye çalışırken $a+\sqrt{-b}$ ifadesini bulur fakat bu ifadeyi henüz tanımlayamaz. Cardanonın bulduğu ifadeden sonra Rafael Bombelli $\sqrt{-1}$ tanımladı ve bunun ismini de "piu'di meno" olarak tanımladı. 17. yüzyılda Leonard Euler $i=\sqrt{-1}$ ifadesini kullandı ve karmaşık sayıları kartezyen sistemin koordinat noktaları olarak görselleştirdi. Karmaşık sayılardan yola çıkılarak imajiner kısmı $i=\sqrt{-1}$'den faklı alınıp farklı tanımlar bulundu. Buna örnek olarak 17. yüzyılda Clifford $\varepsilon^2=0$ ve $\varepsilon \neq 0$ olan yeni bir sayı sistemi tanımladı. Bu sayı sitemine dual sayı sistemi denildi ve $A=a+\varepsilon a^*$ $\left(a, a^* \in \mathbb{R}\right)$ şeklinde tanımlandı [3]. Bu olaylardan sonra Kotelnikov (1895) ve Study (1903) dual sayıların uygulamalrını mekaniğe genelledi [4, 5].

Kompleks sayılara bir diğer benzer olan sayı sistemi de hiperbolik sayılardır. Hiperbolik sayılar $z=x+jy$ $\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ şeklinde ifade edilir ve buradaki j ($j^2=1$, $j \notin \mathbb{R}$) hiperbolik imajiner kısım olarak adlandırılır. Aynı zamanda bu sayılar bölünmüş karmaşık sayılar, ikili sayılar da olarak bilinir. 20. yüzyılın sonunda Oleg Bodnar, Alexey Stakhov ve Ivan Tkachenko altın oran yardımı ile bir hiperbolik fonksiyon sınıfı ortaya koydu [6]. Daha sonra ise Stakhov and Rozin bu teoriyi temel alarak simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarını geliştirdi. Bu çalışmalardan sonra Oleg Bodnar simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarının botanik geometri de kullanılmasını sağlayan altın hiperbolik fonksiyonları buldu. Bu bulunan altın hiperbolik sayılar ve Binet formülü arasında bir benzerlik vardı. Bu yüzden bu yeni keşif hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyolarının yanında hiperbolik fonksiyonlarının bir yeni sınıfı olarak adlandırıldı. Burada Fibonacci ve Lucas sayıları ve hiperbolik Fibonacci ve Lucas sayıları çok benzerliklere sahiptir. Bir x değişkeninin faklı değerleri için hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarına karşılık gelir. Bu yüzden dual-kompleks Fibonacci, dual-kompleks Lucas sayı sistemleri tanımlanabilir ve bu sayı sistemleri için iyi bilinen özdeşlikler elde edilebilir [7].

Biz ise dual-hiperbolik Fibonacci, dual-hiperbolik Lucas sayılarını tanımladık. Daha sonra bu sayılar için toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini verdik. Dual- hiperbolik Fibonacci sayıları için modül tanımını yaptık. Daha sonra dual-hiperbolik Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonunu tanımlayıp, bu fonksiyon yardımıyla bulunan Binet fomülünü tanımladık. Aynı zamanda dual-hiperbolik Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet fomülünü ispatladık. En son olarak Fibonacci ve Lucas sayıları için iyi bilinen D'Ocagne, Cassini ve Catalan özdeşliklerini dual-hiperbolik Fibonacci ve Lucas sayıları için verdik.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

Tanım 2.1.1. Sırasıyla ilk iki terimi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n \geq 1 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısıyla elde edilen tam sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu bağıntının oluşturduğu tam sayı dizisine ise Fibonacci dizisi sayı dizisi denir. Bununla birlikte Fibonacci sayı dizisinin $n.$ terimi F_n ile ifade edilir [1].

Teorem 2.1.1. (Üreteç Fonksiyonu) Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir [8].

İspat. Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu

$$f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

olsun. Buradan $F_0 = 0$ olduğundan

$$f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

eşitliği yazılabilir. O halde Fibonacci sayıları için rekürans bağıntısı gözönüne alınırsa yukarıdaki eşitlik

$$f(n)=x+\sum_{n=2}^{\infty}F_n x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(F_{n-1}+F_{n-2}\right)x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda elde edilen iki toplamdan

$$\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n=x\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n=xf(x)$$

ve

$$\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^{n-2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n=x^2 f(x)$$

eşitlikleri bulunur. Buradan

$$f(x)=x+xf(x)+x^2 f(x)$$

denklemi sağlanır ve yukarıdaki denklemde $f(x)$ fonksiyonu yalnız bırakılırsa

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir.

Teorem 2.1.2. (Binet Formülü) Fibonacci sayı dizisinin $n.$ terimi F_n olmak üzere

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},\qquad n\geq 1$$

eşitliği ile ifade edilebilir ve bu ifadeye Binet formülü denir. Burada

$$\alpha^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta^n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir [1].

İspat. α^n ve β^n sayılarının eşiti $\alpha^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta^n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \text{ ve } \beta^2 = \beta + 1$$

denklemlerinin sağlandığı kolaylıkla görülmektedir. Burada bulunan denklemler sırasıyla α^n ve β^n sayıları ile çarpılırsa

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \text{ ve } \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıda bulunan denklemler taraf tarafa çıkarılırsa ve elde dilen denklem $\frac{1}{\alpha-\beta}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n+1}+\alpha^n}{\alpha-\beta} - \frac{\beta^{n+1}+\beta^n}{\alpha-\beta}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$S_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

olsun. O halde $n \geq 1$ için $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$ ve $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ eşitlikleri dikkate alınırsa $S_1 = 1$ ve $S_2 = \alpha + \beta$ elde edilir. Burada S_n dizisi bir Fibonacci sayı dizisi olur ve $S_n = F_n$ olduğu görülür. Yani

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir.

Teorem 2.1.3. (Honsberger Özdeşliği) F_n, n. derceden Fibonacci sayısı ve m, n doğal sayılar olmak üzere

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1} \tag{2.2}$$

eşitliği sağlanır [9].

İspat. m herhangi bir doğal sayı olsun. O halde her n doğal sayısı için $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$ denkleminin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için de ikinci tümevarım ilkesini kullanalım.
$F_1 = F_2 = 1$ olduğundan

$$F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_m F_2 \quad \text{ve} \quad F_{m+1} = F_{m-1} + F_m$$

eşitlikleri $n = 1$ doğrudur. Kabul edelim ki $1 \leq k \leq n$ için

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_m F_{k+1}$$

denklemi doğru olsun. Bu durumda

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1} \quad \text{ve} \quad F_{m+n-1} = F_{m-1}F_{n-1} + F_m F_n$$

eşitliği bulunur ve bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
F_{m+n}+F_{m+n-1} &= F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_{n-1}+F_mF_n \\
F_{m+n+1} &= F_{m-1}\left(F_n+F_{n-1}\right)+F_m\left(F_{n+1}+F_n\right) \\
&= F_{m-1}F_{n+1}+F_mF_{n+2}
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten görüldüğü üzere kabulümüz $n+1$ için de doğrudur. Buradan ikinci tümevarım ilkesine göre $F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$ eşitliği her n doğal sayısı için doğrudur.

Teorem 2.1.4. F_n, n. dereceden Fibonacci sayısı olsun. O halde

$$F_{2n+1}=F_n^2+F_{n+1}^2 \tag{2.3}$$

$$F_mF_n-F_{m+k}F_{n-k}=\left(-1\right)^{n-k}F_{m+k-n}F_k \tag{2.4}$$

eşitlikleri sağlanır [1].

Teorem 2.1.5. (D'Ocagne Özdeşliği) F_n, n. dereceden Fibonacci sayısı ve $m>n$ olmak üzere

$$F_mF_{n+1}-F_{m+1}F_n=\left(-1\right)^n F_{m-n} \tag{2.5}$$

dir [10].

İspat. Fibonacci sayıları için Binet formülü gözönüne alınırsa

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$
$$= \frac{\alpha^{m+n+1} - \alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^m \beta^{n+1} + \beta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1} + \alpha^{m+1}\beta^n + \alpha^n \beta^{m+1} - \beta^{m+n+1}}{(\alpha - \beta)^2}$$
$$= \frac{-\alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^m \beta^{n+1} + \alpha^{m+1}\beta^n + \alpha^n \beta^{m+1}}{(\alpha - \beta)^2}$$
$$= \frac{\alpha^m \beta^n (\alpha - \beta) - \alpha^n \beta^m (\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2}$$
$$= \frac{\alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m}{(\alpha - \beta)}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\alpha\beta = -1$ eşitliği ve $m > n$ olduğu gözönüne alınırsa

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = \frac{\alpha^n \beta^n \left(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}\right)}{\alpha - \beta} = \frac{(-1)^n \left(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}\right)}{\alpha - \beta} = (-1)^n F_{m-n}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.6. (Catalan Özdeşliği) F_n, n. Fibonaci sayısı ve $n > r$ olmak üzere

$$F_n^2 - F_{n-r} F_{n+r} = (-1)^{n-r} F_r^2 \tag{2.6}$$

dir [11].

İspat. Binet formülü ve $\alpha\beta = -1$ eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left[\left(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&= \frac{\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}-\alpha^{2n}+\alpha^{n-r}\beta^{n+r}+\beta^{n-r}\alpha^{n+r}-\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{-2(-1)^n+\alpha^{n-r}\beta^{n-r}\left(\beta^{n+r-n+r}+\alpha^{n+r-n+r}\right)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{-2(-1)^n+(-1)^{n-r}\left(\beta^{2r}+\alpha^{2r}\right)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{(-1)^{n-r}\left[\beta^{2r}+\alpha^{2r}-2(\alpha\beta)^r\right]}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= (-1)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= (-1)^{n-r}F_r^2
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.7. (Cassini Özdeşliği) F_n, *n*. derceden Fibonacci sayısı ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{2.7}$$

dir [1].

İspat. Teorem 2.1.6. da (Catalan Özdeşliği) verilen özdeşlikte $r=1$ alınırsa ispat açık bir şekilde görülür. Buradan görüldüğü üzere Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliğinin özel bir halidir.

Teorem 2.1.8. F_n, *n*. dereceden Fibonacci sayısı olsun. O halde

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n} \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanır [9].

Teorem 2.1.9. F_n, n. Fibonacci sayısını alalım ve $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033$ altın oran olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

dır [12].

İspat. Binet formülü ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\dfrac{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)}{(\alpha-\beta)}}{\dfrac{\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)}{(\alpha-\beta)}} = \frac{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)}{\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)} = \frac{\alpha^{n+1}\left(1-\dfrac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}\right)}{\alpha^{n}\left(1-\dfrac{\beta^{n}}{\alpha^{n}}\right)} = \frac{\alpha\left[1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right]}{\left[1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right]}$$

denklemi elde edilir. Burada $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n} = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} = 0$ eşitlikleriden yararlanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\left[1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right]}{\left[1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right]} = \alpha$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.1.10. (Nega Fibonacci Sayısı) Her $n \in Z^{+}$ sayısı için

$$F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n \tag{2.9}$$

dir [2].

İspat. Fibonacci sayıları için Binet formülü ve $\alpha\beta=-1$ eşitliği kullanılırsa

$$F_{-n}=\frac{\left(\alpha^{-n}-\beta^{-n}\right)}{\alpha-\beta}=\frac{\left(\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}\right)}{\alpha-\beta}=\frac{\left(\frac{\beta^n-\alpha^n}{(\alpha\beta)^n}\right)}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\left(\frac{\beta^n-\alpha^n}{(-1)^n}\right)}{\alpha-\beta}=(-1)^{n+1}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)=(-1)^{n+1}F_n$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlnır.

Tanım 2.1.2. Sırasıyla ilk iki terimi $L_0=2$, $L_1=1$olmak üzere

$$L_{n+1}=L_n+L_{n-1}, \qquad n\geq 2 \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısıyla elde tam sayılara Lucas sayıları denir ve bu bağıntının oluşturduğu tam sayı dizisine de Lucas sayı dizisi denir. Bununla birlikte Lucas sayı dizisinin $n.$ terimi L_n ile ifade edilir [13].

Teorem 2.1.11 (Üreteç Fonksiyonu) Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu

$$l(x)=\frac{x-2}{x^2+x-1}$$

eşitliği ile verilir [8].

İspat. Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu

$$l(n)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n$$

olsun. Burada $L_0=2$ olduğu gözönüne alınırsa

$$l(n)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n=2+\sum_{n=1}^{\infty}L_n x^n$$

eşitliği elde edilir. O halde Lucas sayıları için reküans bağıntısı yukarıdaki eşitlikte gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}l(n)&=2+x+\sum_{n=2}^{\infty}L_n x^n=2+x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(L_{n-1}+L_{n-2}\right)x^n\\&=2+x+\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-2}x^n\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Burada yukarıda bulunan eşitliklerden

$$\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-1}x^n=x\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-1}x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}L_n x^n=x\,l(x)$$

ve

$$\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-2}x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-2}x^{n-2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n=x^2 l(x)$$

bulunur. Buradan ise

$$l(x)=2+x+x\,l(x)+x^2 l(x)$$

denklemi sağlanır ve yukarıdaki denklemde $l(x)$ fonksiyonu yalnız bırakılırsa

$$l(x)=\frac{2+x}{1-x-x^2}$$

Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu elde edilir.

Teorem 2.1.12. (Binet Formülü) Lucas dizisinin $n.$ terimi L_n olmak üzere

$$L_n=\alpha^n+\beta^n, \qquad n\geq 1$$

eşitliği yazılabilir ve bu eşitliğe Lucs sayıları için Binet formülü denir. Burada

$$\alpha^n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta^n=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir [1].

İspat. Birinci tümavarım ilkesi gözününe alınırsa

$$L_n=\alpha^n+\beta^n$$

denklemi $n=1$ için

$$L_1=\alpha+\beta=1$$

olur ve $L_1=1$ olduğundan denklem $n=1$ için doğrudur. Şimdi ise denklemin n için doğru olduğunu kabul edelim ve $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. $\alpha+1=\alpha^2$ ve $\beta+1=\beta^2$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} L_{n+1} = L_n + L_{n-1} &= \alpha^n + \beta^n + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\ &= \alpha^{n-1}\alpha + \beta^{n-1}\beta + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\ &= \alpha^{n-1}(\alpha+1) + \beta^{n-1}(\beta+1) \\ &= \alpha^{n-1}\alpha^2 + \beta^{n-1}\beta^2 \\ &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $L_n = \alpha^n + \beta^n$ denklemi $n+1$ için de doğru olduğundan birinci tümevarım ilkesi sağlanır. O halde Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

her $n \geq 1$ için ispatlanmış olur.

Teorem 2.1.13. L_n, n. dereceden Lucas sayısı olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1} \tag{2.11}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.1.14. F_n, n. dereceden Fibonacci sayısı ve L_n, n. derecedan Lucas sayısı olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n L_n = F_{2n} \tag{2.12}$$

dir [1].

Teorem 2.1.15. F_n, n. dereceden Fibonacci sayısı ve L_n, n. dereceden Lucas sayısı olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n \tag{2.13}$$

ve

$$F_n + F_{n+2} = L_{n+1} \tag{2.14}$$

eşitlikleri elde edilir [13].

Teorem 2.1.16. F_n, n. dereceden Fibonacci sayısı ve L_n, n. dereceden Lucas sayısı olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_{m+n} + L_{m-n} = \begin{cases} 5F_m F_n, & n = 2k+1 \left(k \in \mathbb{R}\right) \\ L_m L_n, & n \neq 2k+1 \left(k \in \mathbb{R}\right) \end{cases} \tag{2.15}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.1.17. F_n, n. dereceden Fibonacci sayısı ve L_n, n. dereceden Lucas sayısı olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4\left(-1\right)^n \tag{2.16}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.1.18. (Nega Lucas Sayısı) L_n, n. dereceden Lucas sayısı olmak üzere her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$L_{-n} = \left(-1\right)^n L_n \tag{2.17}$$

dir [2].

İspat. Lucas sayıları için Binet formülü ve $\alpha\beta = -1$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$L_{-n}=\alpha^{-n}+\beta^{-n}=\frac{1}{\alpha^{n}}+\frac{1}{\beta^{n}}=\frac{\beta^{n}+\alpha^{n}}{(\alpha\beta)^{n}}=\frac{\alpha^{n}+\beta^{n}}{(-1)^{n}}=(-1)^{n}L_{n}$$

denklemi bulunur ve ispat tamamlanır.

2.2. Hiperbolik Sayı Sistemi

Tanım 2.2.1. $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma işlemine göre bir cisim olan $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere, her $x,\ y\in\mathbb{R}$ için $z=(x,y)$'ye bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{H}$ olmak üzere

$$\mathbb{H}=\left\{z=x+jy \mid x,y\in\mathbb{R} \text{ ve } j^{2}=1\ \left(j\neq\pm1\right)\right\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye hiperbolik sayılar cümlesi ve bu cümlenin her bir elemanına da hiperbolik sayı denir. Burada x reel sayısına, z sayısının reel kısmı ve y reel sayısına da z sayısının hiperbolik kısmı denir [14].

Tanım 2.2.2. $z_1,\ z_2\in\mathbb{H}$ olmak üzere $z_1=x_1+jx_2$ ve $z_2=y_1+jy_2$ için $x_1=y_1$ ve $x_2=y_2$ eşitlikleri sağlanıyorsa z_1 eşittir z_2 denir ve $z_1=z_2$ şeklinde gösterilir [14].

Tanım 2.2.3. $z_1,\ z_2\in\mathbb{H}$ olmak üzere $z_1=x_1+jx_2$ ve $z_2=y_1+jy_2$ için $+:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\rightarrow\mathbb{H}$ toplama işlemi

$$z_1+z_2=(x_1+y_1)+j(x_2+y_2)$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 2.2.4. $z\in\mathbb{H}$ ve $z=x+jy$ olmak üzere

$$z+e=e+z=z$$

denkleminin çözümü olan e hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı cümlesinin $+$ işlemine göre etkisiz elemanı denir ve bu eleman $0 = 0 + j0$ ile gösterilir [14].

Tanım 2.2.5. $z \in \mathbb{H}$ ve $z = x + jy$ olmak üzere

$$z + w = w + z = 0$$

denkleminin çözümü olan w hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı cümlesinin $+$ işlemine göre ters elemanı denir ve $w = -x + j(-y)$ şeklinde ifade edilir [14].

Teorem 2.2.1. $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı cümlesi $(+)$ işlemi ile birlikte bir abel gruptur [14].

Tanım 2.2.6. $z_1,\ z_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere $z_1 = x_1 + jx_2$ ve $z_2 = y_1 + jy_2$ için $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ çarpma işlemi

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 2.2.7. $z \in \mathbb{H}$ ve $z = x + jy$ olmak üzere

$$z \cdot e = e \cdot z = z$$

denkleminin çözümü olan e hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı cümlesinin $(\cdot)$ işlemine göre etkisiz elemanı denir ve $1 = 1 + j0$ ile gösterilir [14].

Tanım 2.2.8. $z \in \mathbb{H}$ ve $z = x + jy$ olmak üzere

$$z \cdot w = w \cdot z = 1$$

denkleminin çözümü olan w hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı cümlesinin $(\cdot)$ işlemine göre ters elemanı denir [14].

Teorem 2.2.2. $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı cümlesi olmak üzere

i. Her $z_1,\ z_2 \in \mathbb{H}$ için $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{H}$ (Kapalılık özelliği)

ii. Her $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{H}$ için $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (Birleşme özelliği)

iii. Her $z_1,\ z_2 \in \mathbb{H}$ için $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \in \mathbb{H}$ (Değişme özelliği)

v. Her $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{H}$ için $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$

$(z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1)$ (Dağılma özelliği)

özellikleri sağlanır [14].

Teorem 2.2.3. Hiperbolik sayılar üzerinde tanımlanan $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerine göre hiperbolik sayı cümlesi birimli ve değişmeli bir halkadır [14].

Teorem 2.2.4. Hiperbolik sayılar üzerinde tanımlanan $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerine göre hiperbolik sayı cümlesi cisim değildir [14].

Tanım 2.2.9. Her $z \in \mathbb{H}$ için $z = x + jy$ olsun. Bu taktirde $\overline{z} = x - jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısına z hiperbolik sayısının eşleniği denir. Burada z ve $\overline{z}$ hiperbolik sayıları x-eksenine göre simetriktir [14].

Teorem 2.2.5. Her $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ için $z_1 = x_1 + jx_2$ ve $z_2 = y_1 + jy_2$ olmak üzere

i. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

iii. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iv. $z_2 \neq 0$ olmak üzere $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$

v. $z_1 + \overline{z_1} = 2\operatorname{Re}(z_1)$, $z_1 - \overline{z_1} = 2j\operatorname{Im}(z_1)$

özellikleri sağlanır [14].

Tanım 2.2.10. Herhangi $z = x + jy \in \mathbb{H}$ sayısını alalım.Buradan

$$|z| = \sqrt{|z \cdot \overline{z}|} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

reel sayısına z hiperbolik sayısının modülü denir [14].

Teorem 2.2.6. Her $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ için $z_1 = x_1 + jx_2$ ve $z_2 = y_1 + jy_2$ olmak üzere

i. $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$, $|z_1| = \sqrt{|z_1 \cdot \overline{z_1}|}$

ii. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$

iii. $z_2 \neq 0$ olmak üzere $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

özellikleri sağlanır [14].

Teorem 2.2.7. Her $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ için $z_1 = x_1 + jx_2$ ve $z_2 = y_1 + jy_2$ iki hiperbolik sayı olmak üzere hiperbolik düzlemde bu iki sayı arasındaki uzaklık

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{\left|(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2\right|}$$

eşitliği ile hesaplanır [14].

Tanım 2.2.11. Herhangi bir $z = x + jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısı için z hiperbolik sayısının çarpma işlemine göre tersi $x^2 - y^2 \neq 0$ olmak üzere

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

dir [14].

Tanım 2.2.12. Hiperbolik düzlemde bir nokta $z = x + jy$ olsun. O halde hiperbolik düzlemde açı

$$\theta = \operatorname{arctan} h \frac{y}{x}$$

eşitliği ile ifade edilir [14].

Tanım 2.2.13. Hiperbolik düzlemde bir nokta $z = x + jy$ olmak üzere Maclaurin serisi yardımıyla Euler formülü

$$e^{j\theta} = \cosh\theta + j\sinh\theta$$

denklemi ile verilir [14].

Tanım 2.2.14. $z = x + jy \in \mathbb{H}$ olmak üzere z hiperbolik sayısının üstel ve kutupsal formu

$$z = r\left(\cosh\theta + j\sinh\theta\right) = re^{j\theta}$$

eşitliği ile verilir. Burada $|z| = r > 0$ reel sayısına, z hiperbolik sayısının büyüklüğü ve θ açısına ise z hiperbolik sayısının argümenti denir [14].

Tanım 2.2.15. Hiperbolik düzlemde $e^{j\theta}$ tarafından tanımlanan dönme matrisi ise

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

matrisi ile ifade edilir [14].

2.3. Dual Sayı Sistemi

Reel sayılar $\mathbb{R}$ ile ifade edilsin. O halde $\mathbb{R}$ $(+)$ toplama ve $(\cdot)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Dolayısıyla bu cisim üzerinde yeni bir sayı sistemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.3.1. Her $x, x^* \in \mathbb{R}$ sayıları için $X = (x, x^*)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin ve bu $\mathbb{D}$ cümlesi

$$\mathbb{D}=\left\{(x, x^*):\ x, x^* \in \mathbb{R}\right\}$$

ile ifade edilir. $\mathbb{D}$ üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik aşağıdaki şekilde verilir [15].

Tanım 2.3.2. $\mathbb{D}$ dual sayı cümlesi olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

iç işlemi ve $X = (x, x^*)$, $Y = (y, y^*)$ dual sayı cümlesinin iki elemanı olmak üzere

$$X \oplus Y = (x, x^*) \oplus (y, y^*) = (x+y, x^* + y^*)$$

şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan $\oplus$ işlemi dual sayı cümlesinde toplama işlemi olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.3.3. $\mathbb{D}$ dual sayı cümlesi olmak üzere

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

iç işlemi ve $X = (x, x^*)$, $Y = (y, y^*)$ dual sayı cümlesinin iki elemanı olmak üzere

$$X \odot Y = (x, x^*) \odot (y, y^*) = (xy, xy^* + x^* y)$$

şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan $\odot$ işlemi dual sayı cümlesinde çarpma işlemi olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.3.4. $X = (x, x^*)$ ve $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için

$$x = y\,,\ x^* = y^*$$

eşitlikleri sağlanıyorsa X ile Y sayıları eşittir denir. Bu durum ise $X = Y$ ile ifade edilir [15].

Tanım 2.3.5. Reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde tanımlanan toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri sırasıyla Tanım 2.3.2., Tanım 2.3.3. ve Tanım 2.3.4. de verilen şekilde tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi denir ve her $(x, x^*) \in \mathbb{D}$ sıralı ikilisine ise bir dual sayı denir [15].

Teorem 2.3.1. $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesi olmak üzere $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halka belirtir [15].

Teorem 2.3.2. $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesi üzerinde tanımlanan $(\oplus)$ ve $(\odot)$ işlemleriyle birlikte bir cisim değildir [15].

İspat. Her $X = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ için

$$X \odot A = A \odot X = (1, 0)$$

olacak şekilde bir tek $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ ters elemanı yoktur. Çünkü bu eleman için Tanım 2.3.3. ve Tanım 2.3.4. gereğince

$$X \odot A = (x, x^*) \odot (a, a^*) = (xa, xa^* + x^*a) = (1, 0)$$
$$xa = 1, \quad xa^* + x^*a = 0$$

eşitlikleri sağlanır ve son denklemlerde a ve a^* çözülürse

$$A = \left(\frac{1}{x}, \frac{-x^*}{x^2} \right)$$

eşitliği bulunur. Daha sonra

$$A \odot X = (1, 0)$$

eşitliğinden aynı şekilde

$$A = \left(\frac{1}{x}, \frac{-x^*}{x^2} \right)$$

denklemi elde edilir. Bu durumda $A = (a, a^*)$ elemanı, X dual sayısının ters elemanı olması için $x \neq 0$ olması gerekmektedir. Bu da $(0, x^*) \in \mathbb{D}$ elemanının tersi olan bir eleman yoktur demektir. O halde $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

Sonuç 2.3.1. $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesi çıkarma ve $X \neq (0, x)$ olmak üzere dual sayıları için bölmeye işlemlerine göre de kapalıdır [15].

Tanım 2.3.6. $X=\left(x,x^*\right)$ ve $Y=\left(y,y^*\right)$ iki dual sayı olmak üsere $X\oplus A=Y$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Bu denklemde $A=\left(a,a^*\right)$ dual sayısı olmak üzere Tanım 2.3.2.'den

$$\left(x+a,\,x^*+a^*\right)=\left(y,\,y^*\right)$$

ve Tanım 2.3.4.'ten de

$$A=Y-X=\left(y-x,\,y^*-x^*\right)\in\mathbb{D}$$

eşitliği elde edilir [15].

Tanım 2.3.7. $X\oplus A=X$ denkleminin çözümü olan A dual sayısına $\mathbb{D}$'nin sıfırı denir ve bu ifade $0=\left(0,0\right)$ eşitliği ile gösterilir [15].

Tanım 2.3.8. $X=\left(x,x^*\right)$, $\left(x\neq 0\right)$ ve $Y=\left(y,y^*\right)$ iki dual sayı olmak üzere $X\oplus A=Y$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Bu denklemde A dual sayısının eşiti $A=\left(a,a^*\right)$ olmak üzere Tanım 2.3.3.'ten

$$\left(x+a,\,x^*+a^*\right)=\left(y,\,y^*\right)$$

ve Tanım 2.3.4.'te verilen tanım kullanılırsa

$$A=\left(\frac{y}{x},\,\frac{xy^*-x^*y}{x^2}\right)$$

eşitliği bulunur ve dolayısıyla $A\in\mathbb{D}$ elde edilir [15].

Tanım 2.3.9. Her $X=\left(x, x^{*}\right)\in\mathbb{D}$ dual sayısında $"x"$ reel sayısına X dual sayısının reel kısmı, $"x^{*}"$ reel sayısına da X dual sayısının dual kısmı denir ve sırasıyla $\operatorname{Re}X=x$ ve $\operatorname{Du}X=x^{*}$ şeklinde ifade edilir [15].

Tanım 2.3.10. $(1,0)=1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ dual sayı cümlesinde çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ dual sayı cümlesinde reel birim denir [15].

Tanım 2.3.11. $(0,1)\in\mathbb{D}$ dual sayısına dual birim denir. Burada $(0,1)=\varepsilon$ ile ifade edilir ve $\varepsilon^{2}=0$ ’dır [15].

Teorem 2.3.3. Her $X=\left(x, x^{*}\right)\in\mathbb{D}$ dual sayısı

$$X=x+\varepsilon x^{*}$$

şeklinde ifade edilebilir. Yani

$$\left(x, x^{*}\right)=x+\varepsilon x^{*}$$

eşitliği yazılabilir [15].

Teorem 2.3.4. İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan birinin sıfır olması gerekli değildir [15].

İspat. $X=\left(0, x^{*}\right)$ ve $Y=\left(0, y^{*}\right)$ dual sayıları için Tanım 2.3.3.’ten

$$X\otimes Y=\left(0, x^{*}\right)\otimes\left(0, y^{*}\right)=(0,0)$$

eşitliği sağlanır. Burada $X\neq 0$ ve $Y\neq 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.5. Her $X = \left(x, x^{*}\right) \in \mathbb{D}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile X dual sayısının çarpımı

$$\lambda X = \left(\lambda x, \lambda x^{*}\right)$$

dır [15].

Tanım 2.3.12. $X = \left(x, x^{*}\right) \in \mathbb{D}$ dual sayılarının tamamına dual düzlem denir ve bu dual düzlem $\mathbb{D}$ ile gösterilir. Buradaki her bir $\left(x, x^{*}\right)$ ikilisine de dual düzlemin bir dual noktası denir [15].

Tanım 2.3.13. X bir dual sayı olmak üzere $X = x + \varepsilon x^{*}$ dual sayısının mutlak değeri $|x|$ reel sayısına karşılık gelir ve

$$|X| = \left|x + \varepsilon x^{*}\right| = |x|$$

eşitliği ile ifade edilir. Fakat bu tanım $\mathbb{D}$ dual sayı cümlesinde bir metrik vermez [15].

Teorem 2.3.6. X bir dual sayı olmak üzere

$$|X| = \left|x + \varepsilon x^{*}\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

dır [15].

Teorem 2.3.7. İki dual sayısının çarpımının mutlak değeri, mutlak değerlerinin çarpımına eşittir. Yani

$$\left|X_1 \cdot X_2\right| = \left|\left(x_1 + \varepsilon x_1^{*}\right) \cdot \left(x_2 + \varepsilon x_2^{*}\right)\right| \quad \Rightarrow \quad \left|X_1\right|\left|X_2\right| = \left|x_1 + \varepsilon x_1^{*}\right|\left|x_2 + \varepsilon x_2^{*}\right|$$

dir [15].

Teorem 2.3.8. (Üçgen Eşitsizliği) $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{D}$ dual sayıları için

$$|X_1 + X_2| \leq |X_1| + |X_2|$$

eşitsizliği sağlanır [15].

Tanım 2.3.14. Her $X = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısı için $\overline{X} = x - \varepsilon x^*$ dual sayısına X dual sayısının eşleniği denir [15].

Teorem 2.3.9. $\forall X \in \mathbb{D}$ olmak üzere

i. $\forall X \in \mathbb{D}$ ise $\overline{X}$ 'nin dual eşleniği X , yani $\overline{\left(\overline{X}\right)} = X$

ii. $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} + \overline{X_2}$

iii. $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_1}\,\overline{X_2}$ ve $X_2 \neq (0, x^*)$ için $\overline{\left(\dfrac{X_1}{X_2}\right)} = \dfrac{\overline{X_1}}{\overline{X_2}}$

iv. $\forall X \in \mathbb{D}$ için $X \cdot \overline{X} = |X|^2$

v. $\forall X \in \mathbb{D}$ için $X + \overline{X} = 2\operatorname{Re} X$, $X - \overline{X} = 2\varepsilon \mathrm{Du} X$ ve $X = \overline{X}$ ise $X \in \mathbb{R}$

özellikleri sağlanır [15].

2.4. Kuaterniyonlar

Kuaterniyon sayıları kabaca tanımlamak gerekirse nasıl karmaşık sayılar, gerçel sayıları kapsayan bir cümle ise kuaterniyonlar sayılar da karmaşık sayıları kapsayan bir cümledir. Ayrıca nasıl karmaşık sayılar iki boyutlu bir sistemdeki noktalar halinde düşünülebiliyorsa, kuaterniyon sayılar da dört boyutlu bir sistemdeki noktalar olarak düşünülebilir. Buradan da anlaşılacağı üzere her gerçel ve karmaşık sayı bir kuaterniyondur.

Kuaterniyolar 1843 yılında İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından keşfedilmiştir. Hamilton kuaterniyonları tanımlamasıyla iki vektör için, bölümün de mümkün olabileceğini, yeni bir çarpma işlemini vektör cebirine dahil etmiş oldu. Böylece üç boyutlu uzayda hareketlerin tetkikini kolaylaştırmış oldu.

Hamilton'un kuaterniyonları bulması şöyle bir katkı sağlamıştır. Biz biliyoruz ki Öklid uzayında vektörü vektöre bölemeyiz. Aslında kuaterniyonların çıkış noktası da budur. Hamilton kuaterniyonları tanımlayarak iki vektör için bölme işleminin de mümkün olabileceğini göstermiştir. Bu buluştan sonra karmaşık sayılar 2-boyutlu koordinat sistemindeki noktalar olarak düşünülebiliyorsa, kuaterniyonlar da 4-boyutlu koordinat sistemindeki noktalar olarak düşünülmeye başlanmıştır [15]. Literatür incelendiği zaman [16-20] çalışmalarında kuaterniyonlar, split kuaterniyonlar, kompleks kuaterniyonlar, dual kuaterniyonlar, hiperbolik kuaterniyonlar ve bunların özellikleriyle ilgili çalışmaların olduğu görülmektedir.

2.4.1. Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.4.1.1. Bir reel kuaterniyon tanımı, sıralı dört sayının $+1$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesi ile tanımlanabilir. Burada, birinci birim $+1$ bir reel sayıdır, diğer üç birim ise

i. $\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = -1$

ii. $\vec{e}_1 \Lambda \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \Lambda \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \Lambda \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

iii. $\vec{e}_2 \Lambda \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \Lambda \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \Lambda \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir kuaterniyon

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

şeklinde ifade edilir ve burada $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri ise 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilirler ve dolayısıyla q kuaterniyonu S_q ile gösterilen skaler kısım ve $\vec{V}_q$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir:

$$S_q = d \quad \text{ve} \quad \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

dir. Buradan bir kuaterniyon

$$q = S_q + \vec{V}_q$$

şeklinde yazılabilir.

Reel kuaterniyonlar cümlesi $\mathbb{K}$ ile ifade edilsin ve bir reel kuaterniyonun dört biriminin özellikleri incelenecek olursa $\mathbb{K}$ cümlesinin özel halleri olan, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu vektörler cümlesi elde edilebilir [15].

Tanım 2.4.1.2. $q_1, q_2 \in \mathbb{K}$ kuaterniyonlarını alalım. O halde

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ (q_1, q_2) &\to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} \end{aligned}$$

işlemi

$$S_{q_1+q_2} = S_{q_1} + S_{q_2} \quad \text{ve} \quad \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} = \vec{V}_{q_1} \oplus \vec{V}_{q_2}$$

iki reel kuaterniyonun toplamı olarak tanımlanır. Burada $S_{q_1},\ S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve + işlemi $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesindeki toplama işlemidir ve $\vec{V}_{q_1},\ \vec{V}_{q_2}$ de birer vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. Buradaki etkisiz elemana sıfır kuaterniyon denir ve $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ ile gösterilir [15].

Tanım 2.4.1.3. $q \in K$ kuaterniyonunu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısını alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \odot :\ & \mathbb{R} \times K \to K \\ & (\lambda,\ q) \to \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dış işleme skaler ile reel kuaterniyonun çarpımı denir ve bu çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. Her $q_1,\ q_2 \in K$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = (\lambda \odot q_1) \oplus (\lambda \odot q_2)$$

ii. Her $q \in K$ ve $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$$

iii. Her $q \in K$ ve $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$$

iv. Her $q \in K$ için

$$1 \odot q = q$$

olur [15].

Tanım 2.4.1.4. $q_1,\ q_2 \in \mathbb{K}$ kuaterniyonlarını alalım. O halde

$$
\begin{aligned}
x : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\
(q_1,\ q_2) &\to q_1 x q_2
\end{aligned}
$$

iki kuaterniyon arasındaki çarpma işlemi

i. $\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = -1$

ii. $\vec{e}_1 \Lambda \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \ \vec{e}_2 \Lambda \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \ \vec{e}_3 \Lambda \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

iii. $\vec{e}_2 \Lambda \vec{e}_1 = -\vec{e}_3,\ \ \vec{e}_3 \Lambda \vec{e}_2 = -\vec{e}_1,\ \ \vec{e}_1 \Lambda \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

eşitlikleri ile tanımlanır. O halde $q_1,\ q_2 \in \mathbb{K}$ kuaterniyonları için

$$
q_1 = d_1 + a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3 \quad \text{ve} \quad q_2 = d_2 + a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
q_1 x q_2 &= \left(d_1 + a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3\right) x \left(d_2 + a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3\right) \\
q_1 x q_2 &= d_1 d_2 - \left(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2\right) \\
&\quad + \left(d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2\right)\vec{e}_1 \\
&\quad + \left(d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 d_2 - a_1 c_2\right)\vec{e}_2 \\
&\quad + \left(d_1 c_2 + d_1 c_2 + a_1 b_2 - b_1 a_2\right)\vec{e}_3
\end{aligned}
$$

ile kuaterniyon çarpımı tanımlanır. Ayrıca katerniyon çarpımı

i. İki kuaterniyonun çarpımı yine bir kuaterniyondur.

ii. Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iii. Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

iv. Kuaterniyon çarpımı değişimli değildir.

özelliklerini sağlar [15].

Tanım 2.4.1.5. Her $q_1,\ q_2 \in Ҝ$ iki kuaterniyon olmak üzere

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \quad \text{ve} \quad \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2}$$

ile kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı tanımlanır [15].

Tanım 2.4.1.6. Her $q_1,\ q_2 \in Ҝ$ iki kuaterniyon olmak üzere

$$q_1 - q_2 = \left(S_{q_1} - S_{q_2}\right) + \left(\vec{V}_{q_1} - \vec{V}_{q_2}\right)$$

dir. Yani

$$S_{q_1 - q_2} = S_{q_1} - S_{q_2} \quad \text{ve} \quad \vec{V}_{q_1 - q_2} = \vec{V}_{q_1} - \vec{V}_{q_2}$$

ile verilen eşitliklerle iki kuaterniyon arasındaki fark tanımlanır [15].

Tanım 2.4.1.7. Her $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \in Ҝ$ için

$$K : Ҝ \times Ҝ \rightarrow Ҝ$$
$$q \rightarrow K(q) = K_q$$
$$q = S_q + \vec{V}_q \rightarrow K_q = S_q - \vec{V}_q$$

işlemi ile eşlenik tanımlanır ve K_q kuaterniyonuna q'nun eşleniği denir. Buradan $\vec{V}_{K_q} = -\vec{V}_q$ olduğundan

$$qxK_q = K_q xq = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$$

dır. O halde eşlenik işleminin aşağıdaki

i. $K\left(aq_1 + bq_2\right) = aK_{q_1} + bK_{q_2}$

ii. $K\left(q_1 x\, q_2\right) = K_{q_1} x\, K_{q_2}$

iii. $K\left(K_q\right) = q$

özelliklerinin sağlandığı görülür [15].

Tanım 2.4.1.8. Her $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \in Ķ$ için

$$N : Ķ \to \mathbb{R}$$
$$q \to N\left(q\right) = N_q = qxK_q = K_q xq$$

veya

$$N_q = qxK_q = K_q xq = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

pozitif reel sayısına q reel kuaterniyonunun normu denir [15].

Tanım 2.4.1.9. Bir kuaterniyonun normu bir ise bu kuaterniyona özel olarak birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir [15].

2.5. Dual-Hiperbolik Sayı Sistemi

Tanım 2.5.1. $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ iki hiperbolik sayı olmak üzere $\left(z_1, z_2\right)$ sıralı ikilisinin hiperbolik birimi 1 ve dual birimi ε olmak üzere $\left(\varepsilon^2 = 0,\ \varepsilon \neq 0\right)$

$$\omega = z_1 + \varepsilon z_2$$

sayısına dual-hiperbolik sayı denir ve dual-hiperbolik sayılar cümlesi

$$\mathbb{DH} = \left\{ \omega = z_1 + \varepsilon z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{H} \text{ ve } \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \right\}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ve $z_1 = x_1 + jx_2$ ve $z_2 = y_1 + jy_2$ için

$$\omega = x_1 + x_2 j + y_1 \varepsilon + y_2 j\varepsilon$$

dual-hiperbolik sayısı yazılabilir [21].

Tanım 2.5.2. $\omega = x_1 + x_2 j + y_1 \varepsilon + y_2 j\varepsilon \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısı için

$$\operatorname{Re}\omega = x_1$$

reel sayısı, ω dual-hiperbolik sayısının reel kısmı olarak adlandırılır [21].

Tanım 2.5.3. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2$ dual-hiperbolik sayısı için z_1 ve z_2 hiperbolik sayıları sırasıyla hiperbolik ve dual kısım olarak adlandırılır [21].

Tanım 2.5.4. $\omega_1 = z_1 + \varepsilon z_2$, $\omega_2 = z_3 + \varepsilon z_4 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar olmak üzere dual-hiperbolik sayılarda toplama ve çıkarma işlemi

$$\omega_1 \mp \omega_2 = \left(z_1 + \varepsilon z_2\right) \mp \left(z_3 + \varepsilon z_4\right) = \left(z_1 \mp z_3\right) + \varepsilon\left(z_2 \mp z_4\right)$$

eşitliği ile tanımlanır [21].

Tanım 2.5.5. $\omega_1 = z_1 + \varepsilon z_2$, $\omega_2 = z_3 + \varepsilon z_4 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar olmak üzere dual-hiperbolik sayılarda çarpma işlemi

$$\omega_1 \times \omega_2 = \left(z_1 + \varepsilon z_2\right) \times \left(z_3 + \varepsilon z_4\right) = z_1 z_3 + \varepsilon\left(z_1 z_4 + z_2 z_3\right)$$

şeklinde tanımlanır [21].

Tanım 2.5.6. $\omega_1 = z_1 + \varepsilon z_2$, $\omega_2 = z_3 + \varepsilon z_4 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar ve $\operatorname{Re}\omega_2 \neq 0$ olmak üzere dual-hiperbolik sayılarda bölme işlemi

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_1 + \varepsilon z_2}{z_3 + \varepsilon z_4}$$

$$\frac{\left(z_1 + \varepsilon z_2\right)\left(z_3 - \varepsilon z_4\right)}{\left(z_1 + \varepsilon z_2\right)\left(z_3 - \varepsilon z_4\right)} = \frac{z_1}{z_3} + \varepsilon \frac{z_2 z_3 - z_1 z_4}{z_3^2}$$

şeklindedir [21].

Tanım 2.5.7. $\mathrm{A} = \left\{ z_2 \mid z_2 \in \mathbb{H} \right\}$ cümlesini $\mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayı cümlesinin sıfır bölen cümlesi olarak tanımlayalım. O halde $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısı için beş farklı eşlenik

$$\begin{aligned}
&\omega^{\dagger_1} = \overline{z}_1 + \varepsilon \overline{z}_2, && && \text{(hiperbolik eşlenik)}\\
&\omega^{\dagger_2} = z_1 - \varepsilon z_2, && && \text{(dual eşlenik conjugation)}\\
&\omega^{\dagger_3} = \overline{z}_1 - \varepsilon \overline{z}_2, && && \text{(çift eşlenik)}\\
&\omega^{\dagger_4} = \overline{z_1}\left(1 - \varepsilon \frac{z_2}{z_1}\right) && \left(\omega \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}\right), && \text{(dual - hiperbolik eşlenik)}\\
&\omega^{\dagger_5} = z_2 - \varepsilon z_1, && && \text{(anti-dual eşlenik)}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir ve buradaki "$-$" sembolü hiperbolik eşleniği temsil eder [22].

Tanım 2.5.8. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısını alalım. O halde w dual-hiperbolik saysının modülü $|\omega|_{\dagger_i}$ $\left(1 \leq i \leq 5\right)$ olmak üzere

$$|\omega|^2_{\dagger_1} = \omega \times \omega^{\dagger_1} = |z_1|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}\left(z_1 \overline{z}_2\right) \in \mathbb{D}$$

$$|\omega|^2_{\dagger_2} = \omega \times \omega^{\dagger_2} = z_1^2 \in \mathbb{H}$$

$$|\omega|^2_{\dagger_3} = \omega \times \omega^{\dagger_3} = |z_1|^2 - 2j\varepsilon \operatorname{Im}\left(z_1 \overline{z}_2\right) \in \mathbb{DH}$$

$$|\omega|^2_{\dagger_4} = \omega \times \omega^{\dagger_4} = |z_1|^2 \in \mathbb{R} \left(\omega \in \mathbb{DH} - \mathrm{A}\right)$$

$$|\omega|^2_{\dagger_5} = \omega \times \omega^{\dagger_5} = z_1 z_2 + \varepsilon\left(z_2^2 - z_1^2\right) \in \mathbb{DH}$$

beş farklı modül tanımlanır [22].

Teorem 2.5.1. $\omega = z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayısını için

i. $\omega + \omega^{\dagger_1} = 2\operatorname{Re}\left(z_1\right) + \varepsilon 2 \operatorname{Re}\left(z_2\right) \in \mathbb{D}$

ii. $\omega + \omega^{\dagger_2} = 2\left(z_1\right) \in \mathbb{H}$

iii. $\omega + \omega^{\dagger_3} = 2\operatorname{Re}\left(z_1\right) + \varepsilon j 2 \operatorname{Im}\left(z_2\right)$

iv. $\omega + \omega^{\dagger_4} = \left(z_1 + \overline{z_1}\right) + \varepsilon\left(z_2 - \dfrac{z_2 \overline{z_1}}{z_1}\right) \quad \left(z_1 \neq 0\right)$

v. $\omega + \omega^{\dagger_5} = \left(z_1 + z_2\right) + \varepsilon\left(z_2 - z_1\right)$

eşitlikleri sağlanır [22].

Teorem 2.5.2. $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{DH}$ dual-hiperbolik sayılar olmak üzere

i. $\left(\omega^{\dagger_i}\right)^{\dagger_i} = \omega, \quad \left(i = 1, \ldots, 4 \quad \text{ve} \quad \omega^{\dagger_4} \text{ için } z_1 \neq 0\right)$

ii. $\left(\omega^{\dagger_5}\right)^{\dagger_5} = -\omega$

iii. $\left(\omega_1 + \omega_2\right)^{\dagger_i} = \omega_1^{\dagger_i} + \omega_2^{\dagger_i}, \quad \left(i = 1, \ldots, 5\right)$

iv. $\left(\omega_1 \omega_2\right)^{\dagger_i} = \omega_1^{\dagger_i} \omega_2^{\dagger_i}, \quad \left(i = 1, \ldots, 4 \quad \text{ve} \quad \omega^{\dagger_4} \text{ için } z_1 \neq 0\right)$

v. $\overline{\left(\frac{1}{\omega}\right)}^{\dagger_i} = \frac{1}{\omega^{\dagger_i}}, \ \left(z_1 \neq 0\right) \ i = 1, \ldots, 4$

eşitlikleri sağlanır [22].

BÖLÜM 3. DUAL-HİPERBOLİK FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

Horadam ilk olarak bir kuaterniyonun başlangıç katsayılarını Fibonacci sayısı alarak Fibonacci kuaterniyonlarını tanımladı [23]. Son zamanlarda ise birçok yazar bu makaleyi temel alarak Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını çalıştı. Biz de bu çalışmaları gözönüne alıp Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayı sistemi üzerinde temel teorem ve işlemleri çalıştık.

3.1. Fibonacci ve Lucas Katsayılı Dual-Hiperbolik Sayılar

Tanım 3.1.1. F_n ve L_n sırasıyla n. dereceden Fibonacci ve Lucas sayıları olmak üzere Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar sırasıyla

$$\mathbb{DH}\mathrm{F} = \left\{ \mathbb{DH}F_n = R_n + \varepsilon R_n^* = \left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right) \mid F_n \text{ Fibonacci sayısı} \right\}$$

$$\mathbb{DH}\mathrm{L} = \left\{ \mathbb{DH}L_n = P_n + \varepsilon P_n^* = \left(L_n + jL_{n+1}\right) + \varepsilon\left(L_{n+2} + jL_{n+3}\right) \mid L_n \text{ Lucas sayısı} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ε dual $\left(\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0\right)$, j hiperbolik $\left(j^2 = 1\right)$ ve $j\varepsilon$ hiperbolik-dual $\left(j\varepsilon \neq 0,\ \left(j\varepsilon\right)^2 = 0\right)$ birim belirtir. Buradan görüleceği üzere Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\mathbb{DH}F_n = R_n + \varepsilon R_n^* = \left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right) = F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon \quad (3.1)$$

$$\mathbb{DH}L_n = P_n + \varepsilon P_n^* = \left(L_n + jL_{n+1}\right) + \varepsilon\left(L_{n+2} + jL_{n+3}\right) = L_n + L_{n+1}j + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}j\varepsilon \quad (3.2)$$

Tanım 3.1.2. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar $\mathbb{DH}F_n$ ve $\mathbb{DH}F_m$ olsun. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı cümlesi için toplama ve çıkarma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_n \mp \mathbb{DH}F_m &= \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) \mp \left(R_m + \varepsilon R_m^*\right) \\ &= \left(F_n \mp F_m\right) + \left(F_{n+1} \mp F_{m+1}\right) j + \left(F_{n+2} \mp F_{m+2}\right) \varepsilon + \left(F_{n+3} \mp F_{m+3}\right) j\varepsilon \quad (3.3)\end{aligned}$$

Tanım 3.1.3. Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar $\mathbb{DH}L_n$ ve $\mathbb{DH}L_m$ olsun. Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar cümlesi için toplama ve çıkarma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}L_n \mp \mathbb{DH}L_m &= \left(P_n + \varepsilon P_n^*\right) \mp \left(P_m + \varepsilon P_m^*\right) \\ &= \left(L_n \mp L_m\right) + \left(L_{n+1} \mp L_{m+1}\right) j + \left(L_{n+2} \mp L_{m+2}\right) \varepsilon + \left(L_{n+3} \mp L_{m+3}\right) j\varepsilon \quad (3.4)\end{aligned}$$

Tanım 3.1.4. Reel kuaterniyonların baz elementlerinin $\left(1, j, \varepsilon, j\varepsilon\right)$ değişmeli çarpımı aşağıdaki şemayla tanımlanır.

$\times$	1	j	ε	$j\varepsilon$
1	1	j	ε	$j\varepsilon$
j	j	1	$j\varepsilon$	ε
ε	ε	$j\varepsilon$	0	0
$j\varepsilon$	$j\varepsilon$	ε	0	0

Tablo 3.1. Reel kuaterniyonların birimlerinin çarpımı

Tanım 3.1.5. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar $\mathbb{DH}F_n$ ve $\mathbb{DH}F_m$ olsun. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar cümlesi için çarpma işlemi Tanım 3.1.4. gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_m = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) \mp \left(R_m + \varepsilon R_m^*\right)$$
$$= F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + \left(F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1}\right) j$$
$$+ \left(F_nF_{m+2} + F_{n+1}F_{m+3} + F_{n+2}F_m + F_{n+3}F_{m+1}\right)\varepsilon \tag{3.5}$$
$$+ \left(F_{n+1}F_{m+2} + F_nF_{m+3} + F_{n+3}F_m + F_{n+2}F_{m+1}\right) j\varepsilon$$

eşitliği ile verilir.

Tanım 3.1.6. Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar $\mathbb{DH}L_n$ ve $\mathbb{DH}L_m$ olsun. Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayı cümlesi için çarpma işlemi Tanım 3.1.4. gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}L_n \times \mathbb{DH}L_m = \left(P_n + \varepsilon P_n^*\right) \mp \left(P_m + \varepsilon P_m^*\right)$$
$$= L_nL_m + L_{n+1}L_{m+1} + \left(L_{n+1}L_m + L_nL_{m+1}\right) j$$
$$+ \left(L_nL_{m+2} + L_{n+1}L_{m+3} + L_{n+2}L_m + L_{n+3}L_{m+1}\right)\varepsilon \tag{3.6}$$
$$+ \left(L_{n+1}L_{m+2} + L_nL_{m+3} + L_{n+3}L_m + L_{n+2}L_{m+1}\right) j\varepsilon$$

eşitliği ile ifade edilir.

Tanım 3.1.7. $\mathbb{DH}F_n$ Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısını alalım ve bu Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısı

$\mathbb{DH}F_n = R_n + \varepsilon R_n^* = \left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)$ şeklinde yazılabildiğinden dolayı beş farklı eşlenik mevcuttur ve bu eşlenikler

$$\mathbb{DH}F_n^{\dagger_1} = \left(F_n - F_{n+1}j\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} - F_{n+3}j\right) \qquad \text{(hiperbolik eşlenik)}$$

$$\mathbb{DH}F_n^{\dagger_2} = \left(F_n + F_{n+1}j\right) - \varepsilon\left(F_{n+2} + F_{n+3}j\right) \qquad \text{(dual eşlenik)}$$

$$\mathbb{DH}F_n^{\dagger_3} = \left(F_n - F_{n+1}j\right) - \varepsilon\left(F_{n+2} - F_{n+3}j\right) \qquad \text{(çift eşlenik)}$$

$$\mathbb{DH}F_n^{\dagger_4} = \left(F_n - F_{n+1}j\right)\left(1 - \varepsilon\,\frac{F_{n+2} + F_{n+3}j}{F_n + F_{n+1}j}\right) \qquad \text{(dual-hiperbolik eşlenik)}$$

$$\mathbb{DH}F_n^{\dagger_5} = \left(F_{n+2} + F_{n+3}j\right) - \varepsilon\left(F_n + F_{n+1}j\right) \qquad \text{(anti-dual eşlenik)}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{DH}F_n \in \mathbb{DH}\mathrm{F}$ bir Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı olsun. $\mathbb{DH}F_n$ sayısı için eşleniklerle ilgili

1) $\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_1} = 2\left(F_n + \varepsilon F_{n+2}\right)$ (3.12)

2) $\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_1} = -F_{n+2}F_{n-1} + 2\left(F_nF_{n+2} - F_{n+1}F_{n+3}\right)$ (3.13)

3) $\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_2} = 2\left(F_n + jF_{n+1}\right)$ (3.14)

4) $\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_2} = F_{2n+1} + j2F_nF_{n+1}$ (3.15)

5) $\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_3} = 2\left(F_n + j\varepsilon F_{n+3}\right)$ (3.16)

6) $\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_3} = -F_{n+2}F_{n-1} - j\varepsilon 2\left(-1\right)^n$ (3.17)

7) $\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_4} = 2F_n + \varepsilon \dfrac{2F_{n+1}}{F_n + jF_{n+1}}\left(F_{n+3} + jF_{n+2}\right)$ (3.18)

8) $\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_4} = F_n^2 - F_{n+1}^2$ (3.19)

9) $\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_5} = \left(F_n + F_{n+2}\right) + \left(F_{n+3} + F_{n+1}\right)j + \left(F_{n+1}\right)\varepsilon + \left(F_{n+2}\right)j\varepsilon$ (3.20)

10) $\mathbb{DC}F_n \times \mathbb{DC}F_n^{\dagger_5} = F_{2n+3} + (F_nF_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2})j + (F_{2n+5} - F_{2n+1})\varepsilon$ (3.21)

$+2\left(F_{n+3}F_{n+2} - F_{n+1}F_n\right)j\varepsilon$

eşitlikleri tanımlanır.

İspat.

1) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.7) eşitliklerinden

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_1} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) + \left(\overline{R_n} + \varepsilon \overline{R_n^*}\right)$$
$$= \left[\left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)\right] + \left[\left(F_n - jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} - jF_{n+3}\right)\right]$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) + \left(F_n - F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon - F_{n+3}j\varepsilon\right)$$

eşitliği bulunur ve (3.3) denklemi gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_1} = 2\left(F_n + \varepsilon F_{n+2}\right)$$

eşitliği elde edilir.

2) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.7) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_1} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) \times \left(\overline{R_n} + \varepsilon \overline{R_n^*}\right)$$
$$= \left[\left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)\right] \times \left[\left(F_n - jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} - jF_{n+3}\right)\right]$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) \times \left(F_n - F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon - F_{n+3}j\varepsilon\right)$$

denklemi elde edilir. Yukarıda elde edilen denklem için (3.5) eşitliğinden yararlanırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_1} = -F_{n+2}F_{n-1} + 2\left(F_nF_{n+2} - F_{n+1}F_{n+3}\right)$$

eşitliği elde edilir.

3) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.8) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_2} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) + \left(R_n - \varepsilon R_n^*\right)$$
$$= \left[\left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)\right] + \left[\left(F_n + jF_{n+1}\right) - \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)\right]$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) + \left(F_n + F_{n+1}j - F_{n+2}\varepsilon - F_{n+3}j\varepsilon\right)$$

denklemi bulunur ve bu denklemde Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için toplamı işlemi olan (3.3) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_2} = 2\left(F_n + jF_{n+1}\right)$$

bulunur.

4) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.8) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_2} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) \times \left(R_n - \varepsilon R_n^*\right)$$
$$= \left[\left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)\right] \times \left[\left(F_n + jF_{n+1}\right) - \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)\right]$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) \times \left(F_n + F_{n+1}j - F_{n+2}\varepsilon - F_{n+3}j\varepsilon\right)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayıların çarpma işlemi olan (3.5) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_2} = F_{2n+1} + 2jF_nF_{n+1}$$

denklemi bulunur.

5) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için (3.1) ve (3.9) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_3} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) + \left(\overline{R_n} - \varepsilon \overline{R_n^*}\right)$$
$$= \left[\left(F_n + F_{n+1}j\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + F_{n+3}j\right)\right] + \left[\left(F_n - F_{n+1}j\right) - \varepsilon\left(F_{n+2} - F_{n+3}j\right)\right]$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) + \left(F_n - F_{n+1}j - F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right)$$

denklemi bulunur. Yukarıda elde edilen denklem için (3.3) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_3} = 2\left(F_n + j\varepsilon F_{n+3}\right)$$

elde edilir.

6) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.9) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_3} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) \times \left(\overline{R_n} - \varepsilon \overline{R_n^*}\right)$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) \times \left(F_n - F_{n+1}j - F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right)$$

denklemi bulunur. Buradan Fibonacci katsyılı dual-hiperbolik sayılar için çarpma işlemi ve (2.4) denklemi gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_3} = -F_{n+2}F_{n-1} - j\varepsilon 2\left(-1\right)^n$$

denklemi bulunur.

7) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.10) eşitliklerinden

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_4} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) + \left[\overline{R_n}\left(1 - \varepsilon \frac{R_n^*}{R_n}\right)\right]$$

$$= \left[\left(F_n + jF_{n+1}\right) + \varepsilon\left(F_{n+2} + jF_{n+3}\right)\right] + \left[\left(F_n - jF_{n+1}\right)\left(1 - \varepsilon \frac{F_{n+2} + jF_{n+3}}{F_n + jF_{n+1}}\right)\right]$$

denklemi bulunur ve bu denklemde (3.3) gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_4} = 2F_n + \varepsilon \frac{2F_{n+1}}{F_n + jF_{n+1}}\left(F_{n+3} + jF_{n+2}\right)$$

denklemi elde edilir.

8) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.10) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_4} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) \times \left[\overline{R_n}\left(1 - \varepsilon \frac{R_n^*}{R_n}\right)\right]$$

$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) \times \left[\left(F_n - jF_{n+1}\right)\left(1 - \varepsilon \frac{F_{n+2} + jF_{n+3}}{F_n + jF_{n+1}}\right)\right]$$

eşitliği bulunur ve bu eşitlikte (3.5) denklemi gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_4} = F_n^2 - F_{n+1}^2$$

eşitliği bulunur.

9) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) ve (3.11) eşitliklerinden

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_5} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) + \left(R_n^* - \varepsilon R_n\right)$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) + \left(F_{n+2} + F_{n+3}j - F_n\varepsilon - F_{n+1}j\varepsilon\right)$$

denklemi bulunur. Buradan Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılarda toplama işlemi gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_n^{\dagger_5} = \left(F_n + F_{n+2}\right) + \left(F_{n+3} + F_{n+1}\right)j + \left(F_{n+1}\right)\varepsilon + \left(F_{n+2}\right)j\varepsilon$$

eşitliği elde edilir.

10) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olsun. O halde (3.1) ve (3.11) eşitlikleri kullanırsa

$$\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_5} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) + \left(R_n^* - \varepsilon R_n\right)$$
$$= \left(F_n + F_{n+1}j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) \times \left(F_{n+2} + F_{n+3}j - F_n\varepsilon - F_{n+1}j\varepsilon\right)$$

denklemi elde edilir. Bulunan denklemde (3.5) eşitliği ve (2.3) denklemi gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DC}F_n \times \mathbb{DC}F_n^{\dagger_5} = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) \times \left(R_n^* - \varepsilon R_n\right)$$
$$= F_{2n+3} + (F_nF_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2})j + (F_{2n+5} - F_{2n+1})\varepsilon + 2\left(F_{n+3}F_{n+2} - F_{n+1}F_n\right)j\varepsilon$$

denklemi bulunur.

Tanım 3.1.8. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere *j*-modülü $\left(1 \le j \le 5\right)$

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{DH}F_n\right|_{\dagger_1}^2 &= \mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_1}\\
\left|\mathbb{DH}F_n\right|_{\dagger_2}^2 &= \mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_2}\\
\left|\mathbb{DH}F_n\right|_{\dagger_3}^2 &= \mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_3}\\
\left|\mathbb{DH}F_n\right|_{\dagger_4}^2 &= \mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_4}\\
\left|\mathbb{DH}F_n\right|_{\dagger_5}^2 &= \mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_n^{\dagger_5}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

eşitlikleri ile verilir.

Teorem 3.1.2. $\mathbb{DH}F_n$ ve $\mathbb{DH}L_n$ sırasıyla Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar olmak üzere, $n \geq 0$ için

1) $\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_{n+1} = \mathbb{DH}F_{n+2}$

2) $\mathbb{DH}L_n + \mathbb{DH}L_{n+1} = \mathbb{DH}L_{n+2}$

3) $\mathbb{DH}F_{n-1} + \mathbb{DH}F_{n+1} = \mathbb{DH}L_n$

4) $\mathbb{DH}F_{n+2} - \mathbb{DH}F_{n-2} = \mathbb{DH}L_n$

5) $\mathbb{DH}F_n^2 + \mathbb{DH}F_{n+1}^2 = \mathbb{DH}F_{2n+1} + F_{2n+3} + F_{2n+2}j + (2F_{2n+5} + F_{2n+3})\varepsilon + 3F_{2n+4}j\varepsilon$

6) $\mathbb{DH}F_{n+1}^2 - \mathbb{DH}F_{n-1}^2 = F_{2n} - F_{2n+2}$

7) $\mathbb{DH}F_n \times \mathbb{DH}F_m + \mathbb{DH}F_{n+1} \times \mathbb{DH}F_{m+1} = F_{n+m+1} + 2F_{n+m+3}i - 2F_{n+m+5}\varepsilon + 4F_{n+m+5}j\varepsilon$

8) $-\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_{n+1}j + \mathbb{DH}F_{n+2}\varepsilon - \mathbb{DH}F_{n+3}j\varepsilon = F_{n+1}$

eşitlikleri verilir.

İspat.

1) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısı için (3.1) ve (3.5) eşitliklerini kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_{n+1} &= \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) + \left(R_{n+1} + \varepsilon R_{n+1}^*\right)\\ &= \left(F_n + F_{n+1} j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3} j\varepsilon\right) + \left(F_{n+1} + F_{n+2} j + F_{n+3}\varepsilon + F_{n+4} j\varepsilon\right)\\ &= \left(F_n + F_{n+1}\right) + \left(F_{n+1} + F_{n+2}\right) j + \left(F_{n+2} + F_{n+3}\right)\varepsilon + \left(F_{n+3} + F_{n+4}\right) j\varepsilon\\ &= F_{n+2} + F_{n+3} j + F_{n+4}\varepsilon + F_{n+5} j\varepsilon\\ &= \mathbb{DH}F_{n+2}\end{aligned}$$

denklemi elde edilir.

2) Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayısı için (3.2) ve (3.4) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}L_n + \mathbb{DH}L_{n+1} &= \left(P_n + \varepsilon P_n^*\right) + \left(P_{n+1} + \varepsilon P_{n+1}^*\right)\\ &= \left(L_n + L_{n+1} j + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3} j\varepsilon\right) + \left(L_{n+1} + L_{n+2} j + L_{n+3}\varepsilon + L_{n+4} j\varepsilon\right)\\ &= \left(L_n + L_{n+1}\right) + \left(L_{n+1} + L_{n+2}\right) j + \left(L_{n+2} + L_{n+3}\right)\varepsilon + \left(L_{n+3} + L_{n+4}\right) j\varepsilon\\ &= L_{n+2} + L_{n+3} j + L_{n+4}\varepsilon + L_{n+5} j\varepsilon\\ &= \mathbb{DH}L_{n+2}\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

3) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) eşitliğini ve (2.13) özdeşliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_{n-1} + \mathbb{DH}F_{n+1} &= \left(R_{n-1} + \varepsilon R_{n-1}^*\right) + \left(R_{n+1} + \varepsilon R_{n+1}^*\right)\\ &= \left(F_{n-1} + F_n j + F_{n+1}\varepsilon + F_{n+2} j\varepsilon\right) + \left(F_{n+1} + F_{n+2} j + F_{n+3}\varepsilon + F_{n+4} j\varepsilon\right)\\ &= \left(F_{n-1} + F_{n+1}\right) + \left(F_n + F_{n+2}\right) j + \left(F_{n+1} + F_{n+3}\right)\varepsilon + \left(F_{n+2} + F_{n+4}\right) j\varepsilon\\ &= L_n + L_{n+1} j + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3} j\varepsilon\\ &= \mathbb{DH}L_{\mathrm{n}}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

4) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı $\mathbb{DH}F_n$ olmak üzere (3.1) eşitliğini ve (2.13) özdeşliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbb{DH}F_{n+2} - \mathbb{DH}F_{n-2} &= \left(R_{n+2} + \varepsilon R^*_{n+2}\right) - \left(R_{n-2} + \varepsilon R^*_{n-2}\right) \\
&= \left(F_{n+2} + F_{n+3} j + F_{n+4}\varepsilon + F_{n+5} j\varepsilon\right) - \left(F_{n-2} + F_{n-1} j + F_n\varepsilon + F_{n+1} j\varepsilon\right) \\
&= \left(F_{n+2} - F_{n-2}\right) + \left(F_{n+3} - F_{n-1}\right) j + \left(F_{n+4} - F_n\right)\varepsilon + \left(F_{n+5} - F_{n+1}\right) j\varepsilon \\
&= L_n + L_{n+1} j + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3} j\varepsilon \\
&= \mathbb{DH}L_{\mathrm{n}}
\end{aligned}$$

denklemi bulunur.

5) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısı için (3.1) eşitliğinin her iki tarafının karesini alınırsa

$$\mathbb{DH}F_n^2 = \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right)^2 = F_n^2 + F_{n+1}^2 + 2F_n F_{n+1} j + 2\left(F_n F_{n+2} + F_{n+1}F_{n+3}\right)\varepsilon + 2\left(F_n F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2}\right) j\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{DH}F_{n+1}^2 = \left(R_{n+1} + \varepsilon R_{n+1}^*\right)^2 = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + 2F_{n+1}F_{n+2} j + 2\left(F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+2}F_{n+4}\right)\varepsilon \\
+ 2\left(F_{n+1}F_{n+4} + F_{n+2}F_{n+3}\right) j\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Yukarıdaki eşitlikler için (2.8) ve (2.2) denklemleri gözönüne alınırsa aşağıdaki

$$\begin{aligned}
\mathbb{DH}F_n^2 + \mathbb{DH}F_{n+1}^2 &= \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right)^2 + \left(R_{n+1} + \varepsilon R_{n+1}^*\right)^2 \\
&= \mathbb{DH}F_{2n+1} + F_{2n+3} + F_{2n+2} j + (2F_{2n+5} + F_{2n+3})\varepsilon + 3F_{2n+4} j\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

6) $\mathbb{DH}F_n$ Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı olsun. O halde Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için olan (3.3) ve (3.5) eşitlikleri ve Fibonacci sayıları için verilen (2.2) ve (2.8) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}F_{n+1}^2-\mathbb{DH}F_{n-1}^2=\left(R_{n+1}+\varepsilon R_{n+1}^*\right)^2-\left(R_{n-1}+\varepsilon R_{n-1}^*\right)^2$$

$$=\begin{bmatrix} F_{n+1}^2+F_{n+2}^2+2F_{n+1}F_{n+2}j+2\left(F_{n+1}F_{n+3}+F_{n+2}F_{n+4}\right)\varepsilon \\ +2\left(F_{n+1}F_{n+4}+F_{n+2}F_{n+3}\right)j\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} F_{n-1}^2+F_n^2+2F_{n-1}F_nj+2\left(F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+2}\right)\varepsilon \\ +2\left(F_{n-1}F_{n+2}+F_nF_{n+1}\right)j\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$=\mathbb{DH}F_{2n}+F_{2n+2}+F_{2n+1}j+(F_{2n+2}+2F_{2n+4})\varepsilon+3F_{2n+3}j\varepsilon$$

denklemi bulunur.

7) $\mathbb{DH}F_n$ Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı olsun. O halde Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için olan (3.3) ve (3.5) eşitlikleri ve Fibonacci sayıları için verilen (2.2) ve (2.8) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\left[\mathbb{DH}F_n\times\mathbb{DH}F_m\right]+\left[\mathbb{DH}F_{n+1}\times\mathbb{DH}F_{m+1}\right]=\left[\left(R_n+\varepsilon R_n^*\right)\times\left(R_m+\varepsilon R_m^*\right)\right]+\left[\left(R_{n+1}+\varepsilon R_{n+1}^*\right)\times\left(R_{m+1}+\varepsilon R_{m+1}^*\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&=F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}+\left(F_{n+1}F_m+F_nF_{m+1}\right)j \\
&+\left(F_nF_{m+2}+F_{n+1}F_{m+3}+F_{n+2}F_m+F_{n+3}F_{m+1}\right)\varepsilon \\
&+\left(F_{n+1}F_{m+2}+F_nF_{m+3}+F_{n+3}F_m+F_{n+2}F_{m+1}\right)j\varepsilon \\
&+F_{n+1}F_{m+1}+F_{n+2}F_{m+2}+\left(F_{n+2}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+2}\right)j \\
&+\left(F_{n+1}F_{m+3}+F_{n+2}F_{m+4}+F_{n+3}F_{m+1}+F_{n+4}F_{m+2}\right)\varepsilon \\
&+\left(F_{n+2}F_{m+3}+F_{n+1}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+1}+F_{n+3}F_{m+2}\right)j\varepsilon \\
&=\mathbb{DH}F_{m+n+1}+F_{n+m+3}+F_{n+m+2}j+\left(F_{n+m+3}+2F_{n+m+5}\right)\varepsilon \\
&+3F_{n+m+4}j\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

8) $\mathbb{DH}F_n$ Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı olsun. O halde Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için olan (3.3) ve (3.5) eşitlikleri ve Fibonacci sayıları için verilen (2.2) ve (2.8) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
-\mathbb{DH}F_n + \mathbb{DH}F_{n+1}j + \mathbb{DH}F_{n+2}\varepsilon - \mathbb{DH}F_{n+3}j\varepsilon = &-\left(F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}j\varepsilon\right) \\
&+\left(F_{n+1} + F_{n+2}j + F_{n+3}\varepsilon + F_{n+4}j\varepsilon\right)j \\
&+\left(F_{n+2} + F_{n+3}j + F_{n+4}\varepsilon + F_{n+5}j\varepsilon\right)\varepsilon \\
&-\left(F_{n+3} + F_{n+4}j + F_{n+5}\varepsilon + F_{n+6}j\varepsilon\right)j\varepsilon \\
= &F_{n+1}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.3. $\mathbb{DH}F_{-n}$ ve $\mathbb{DH}L_{-n}$ sırasıyla Fibonacci ve Lucas katsayılı negadual-hiperbolik sayılar olsun. Buradan $n \geq 0$ için

a) $\mathbb{DH}F_{-n} = (-1)^{n+1}\,\mathbb{DH}F_n + (-1)^n L_n\left(j + \varepsilon + 2j\varepsilon\right)$

b) $\mathbb{DH}L_{-n} = (-1)^n\,\mathbb{DH}L_n + (-1)^{n-1}5F_n\left(j + \varepsilon + 2j\varepsilon\right)$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat.

a) $\mathbb{DH}F_n$ Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı olmak üzere, Fibonacci sayıları için verilen (2.9) ve (2.14) eşitlikleri ve Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayıların tanımı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathbb{DH}F_{-n} &= \left(R_{-n} + \varepsilon R^*_{-n}\right) = \left(F_{-n} + F_{-n+1}j\right) + \varepsilon\left(F_{-n+2} + F_{-n+3}j\right) \\
&= (-1)^{n+1}F_n + (-1)^n F_{n-1}j + (-1)^{n+1}F_{n-2}\varepsilon + (-1)^n F_{n-3}j\varepsilon \\
&= (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n+1}F_{n+1}j + (-1)^{n+1}F_{n+2}\varepsilon + (-1)^{n+1}F_{n+3}j\varepsilon \\
&\quad -(-1)^{n+1}F_{n+1}j - (-1)^{n+1}F_{n+2}\varepsilon - (-1)^{n+1}F_{n+3}j\varepsilon \\
&\quad +(-1)^n F_{n-1}j + (-1)^{n+1}F_{n-2}\varepsilon + (-1)^n F_{n-3}j\varepsilon \\
&= (-1)^{n+1}\mathbb{DH}F_n + (-1)^n\left[F_{n-1} + F_{n+1}\right]j + (-1)^n\left[F_{n+2} - F_{n-2}\right]\varepsilon \quad + (-1)^n\left[F_{n-3} + F_{n+3}\right]j\varepsilon \\
&= (-1)^{n+1}\mathbb{DH}F_n + (-1)^n L_n j + (-1)^n L_n\varepsilon + (-1)^n 2L_n j\varepsilon \\
&= (-1)^{n+1}\mathbb{DH}F_n + (-1)^n L_n\left(j + \varepsilon + 2j\varepsilon\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

b) $\mathbb{DH}L_n$ Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayı olmak üzere, Lucas ve Fibonacci sayıları için verilen (2.15) ve (2.17) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathbb{DH}L_{-n} &= \left(P_{-n} + \varepsilon P_{-n}^{*}\right) = \left(L_{-n} + L_{-n+1}\, j\right) + \varepsilon\left(L_{-n+2} + L_{-n+3}\, j\right) \\
&= (-1)^n L_n + \left(-1\right)^{n-1} L_{n-1}\, j + \left(-1\right)^{n-2} L_{n-2}\,\varepsilon + \left(-1\right)^{n-3} L_{n-3}\, j\varepsilon \\
&= \left(-1\right)^n L_n + \left(-1\right)^n L_{n+1}\, j + \left(-1\right)^n L_{n+2}\,\varepsilon + \left(-1\right)^n L_{n+3}\, j\varepsilon \\
&\quad - \left(-1\right)^n L_{n+1}\, j - \left(-1\right)^n L_{n+2}\,\varepsilon - \left(-1\right)^n L_{n+3}\, j\varepsilon \\
&\quad + \left(-1\right)^{n-1} L_{n-1}\, j + \left(-1\right)^{n-2} L_{n-2}\,\varepsilon + \left(-1\right)^{n-3} L_{n-3}\, j\varepsilon \\
&= \left(-1\right)^{n+1} \mathbb{DH}L_n + \left(-1\right)^{n-1}\left[L_{n-1} + L_{n+1}\right] j + \left(-1\right)^{n-2}\left[L_{n+2} - L_{n-2}\right]\varepsilon + \left(-1\right)^{n-1}\left[L_{n-3} + L_{n+3}\right] j\varepsilon \\
&= \left(-1\right)^{n+1} \mathbb{DH}L_n + 5\left(-1\right)^{n-1} F_n\, j + 5\left(-1\right)^{n-1} F_n\,\varepsilon + 10\left(-1\right)^n F_n\, j\varepsilon \\
&= \left(-1\right)^n \mathbb{DH}L_n + \left(-1\right)^{n-1} 5F_n\left(j + \varepsilon + 2j\varepsilon\right)
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir.

Teorem 3.1.4. $\mathbb{DH}F_n$ Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayı ve $e_0 = 1,\ e_1 = j,\ e_2 = \varepsilon,\ e_3 = j\varepsilon$ olmak üzere Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için üreteç fonksiyonu

$$
g\left(x\right) = \frac{1}{1 - x - x^2} \sum_{s=0}^{3} (\mathbb{DH}F_s + \mathbb{DH}F_{s-1}x)e_s
$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılarının üreteç fonksiyonu

$$
g\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n
$$

olsun. Burada $P_n = \left(\mathbb{DH}F_n, \mathbb{DH}F_{n+1}, \mathbb{DH}F_{n+2}, \mathbb{DH}F_{n+3}\right)$'dır. O halde üreteç fonksiyonu sırasıyla x ve x^2 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} xg(x) &= P_0 x + P_1 x^2 + \ldots + P_{n-1} x^n + \ldots \\ x^2 g(x) &= P_0 x^2 + P_1 x^3 + \ldots + P_{n-2} x^n + \ldots \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Daha sonra gerekli düzenlemeler yapılarak

$$g(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \sum_{s=0}^{3} (P_0 + (P_1 - P_0)x) e_s$$

eşitliği bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için Binet formülü $P_n = \left(\mathbb{DH}F_n, \mathbb{DH}F_{n+1}, \mathbb{DH}F_{n+2}, \mathbb{DH}F_{n+3}\right)$ olmak üzere

$$P_n = P_1 F_n + P_0 F_{n-1}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. P_n sayısı için $P_n = A\alpha^n + B\beta^n$ eşitliğini alalım. Bu eşitlikte $n = 0$ ve $n = 1$ değerleri için

$$A = \frac{P_1 - \beta P_0}{\alpha - \beta}, \qquad B = \frac{\alpha P_0 - P_1}{\alpha - \beta}$$

olur. Bu durumda $P_n = A\alpha^n + B\beta^n$ eşitliği

$$P_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\left(P_1 - \beta P_0\right)\alpha^n + \left(\alpha P_0 - P_1\right)\beta^n\right]$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra, P_0 ve P_1 sayılarının Teorem 3.1.4 olan karşılıkları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P_n = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\sum_{s=0}^{3} \mathbb{DH}F_{s+1}e_s + \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)\sum_{s=0}^{3} \mathbb{DH}F_s e_s$$

eşitliği bulunur ve $e_0 = 1,\ e_1 = j,\ e_2 = \varepsilon$ ve $e_3 = j\varepsilon$ karşılık gelir. Son olarak da

$$P_n = P_1 F_n + P_0 F_{n-1}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.6. (Binet Formülü) $\mathbb{DH}F_n$ ve $\mathbb{DH}L_n$ sırasıyla Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar olsun. Burada $n \geq 1$ olmak üzere sırasıyla Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar için Binet formülü sırasıyla

$$\mathbb{DH}F_n = \frac{\bar{\alpha}\,\alpha^n - \bar{\beta}\,\beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\mathbb{DH}L_n = \bar{\alpha}\,\alpha^n + \bar{\beta}\,\beta^n$$

eşitkleri ile tanımlanır ve burada $\bar{\alpha}$ ve $\bar{\beta}$ sayıları $\bar{\alpha} = 1 + \alpha j + \alpha^2\varepsilon + \alpha^3 j\varepsilon$ ve $\bar{\beta} = 1 + \beta j + \beta^2\varepsilon + \beta^3 j\varepsilon$ şeklinde ifade edilir.

İspat. Fibonacci ve Lucas sayıları için olan Binet formülü gözönüne alınırsa Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar için

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_n &= R_n + \varepsilon R_n^* = F_n + F_{n+1} j + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3} j\varepsilon \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} j + \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}\varepsilon + \frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta} j\varepsilon \\ &= \frac{\alpha^n\left(1 + \alpha j + \alpha^2\varepsilon + \alpha^3 j\varepsilon\right) + \beta^n\left(1 + \beta j + \beta^2\varepsilon + \beta^3 j\varepsilon\right)}{\alpha - \beta}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}L_n &= P_n + \varepsilon P_n^* = L_n + L_{n+1} j + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3} j\varepsilon \\ &= \alpha^n + \beta^n + \left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) j + \left(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}\right)\varepsilon + \left(\alpha^{n+3} + \beta^{n+3}\right) j\varepsilon \\ &= \alpha^n\left(1 + \alpha i + \alpha^2\varepsilon + \alpha^3 j\varepsilon\right) + \beta^n\left(1 + \beta j + \beta^2\varepsilon + \beta^3 j\varepsilon\right)\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Daha sonra sırasıyla $1 + \alpha j + \alpha^2\varepsilon + \alpha^3 j\varepsilon$ ve $1 + \beta j + \beta^2\varepsilon + \beta^3 j\varepsilon$ sayıları yerine $\bar{\alpha}$ ve $\bar{\beta}$ yazılırsa sırasıyla Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar için Binet formülü

$$\mathbb{DH}F_n = \frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$\mathbb{DH}L_n = \bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Teorem 3.1.7. (D'Ocagne Özdeşliği) $\mathbb{DH}F_n$ ve $\mathbb{DH}F_m$ Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar olsun. O halde $n, m \geq 0$ değerleri için

$$\left(\mathbb{DH}F_m \times \mathbb{DH}F_{n+1}\right) - \left(\mathbb{DH}F_{m+1} \times \mathbb{DH}F_n\right) = \left(-1\right)^n F_{m-n}(1 + j + 3j\varepsilon)$$

Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için d'Ocagne özdeşliği elde edilir.

İspat. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik için (3.1) ve (3.5) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_m \times \mathbb{DH}F_{n+1} = \left(R_m + \varepsilon R_m^*\right) \times \left(R_{n+1} + \varepsilon R_{n+1}^*\right) = F_m F_{n+1} + F_{m+1}F_{n+2} + \left(F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_{n+2}\right) j \\ + \left(F_m F_{n+3} + F_{m+1}F_{n+4} + F_{m+2}F_{n+1} + F_{m+3}F_{n+2}\right)\varepsilon \\ + \left(F_{m+1}F_{n+3} + F_m F_{n+4} + F_{m+3}F_{n+1} + F_{m+2}F_{n+2}\right) j\varepsilon\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_{m+1} \times \mathbb{DH}F_n = \left(R_{m+1} + \varepsilon R_{m+1}^*\right) \times \left(R_n + \varepsilon R_n^*\right) = F_{m+1}F_n + F_{m+2}F_{n+1} + \left(F_{m+2}F_n + F_{m+1}F_{n+1}\right) j \\ + \left(F_{m+1}F_{n+2} + F_{m+2}F_{n+3} + F_{m+3}F_n + F_{m+4}F_{n+1}\right)\varepsilon \\ + \left(F_{m+2}F_{n+2} + F_{m+1}F_{n+3} + F_{m+4}F_n + F_{m+3}F_{n+1}\right) j\varepsilon\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Yukarıda elde ettiğimiz eşitliklerde (3.3) ve (2.5) denklemleri gözönüne alınırsa Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için d'Ocagne özdeşliği

$$\left(\mathbb{DH}F_m \times \mathbb{DH}F_{n+1}\right) - \left(\mathbb{DH}F_{m+1} \times \mathbb{DH}F_n\right) = \left(-1\right)^n F_{m-n}(1 + j + 3j\varepsilon)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8. (Cassini Özdeşliği) $\mathbb{DH}F_n$ ve $\mathbb{DH}L_n$ sıarsaıyla Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar olsun. O halde bu sayılar için Cassini özdeşliği sırasıyla

a) $\left(\mathbb{DH}F_{n+1} \times \mathbb{DH}F_{n-1}\right) - \mathbb{DH}F_n^2 = \left(-1\right)^n \left(j + 3j\varepsilon\right)$

b) $\left(\mathbb{DH}\,L_{n+1}\times\mathbb{DH}\,L_{n-1}\right)-\mathbb{DH}\,L_n^2=5\left(-1\right)^{n-1}(j+3j\varepsilon)$

eşitlikleri ile verilir.

İspat.

a) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısının tanımı olan (3.1) eşitliği ve (3.5) denklemi kullanılırsa

$$\mathbb{DH}\,F_n^2=\left(R_n+\varepsilon R_n^*\right)^2=F_n^2+F_{n+1}^2+2F_nF_{n+1}\,j+2\left(F_nF_{n+2}+F_{n+1}F_{n+3}\right)\varepsilon+2\left(F_{n+1}F_{n+2}+F_nF_{n+3}\right)j\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}\,F_{n+1}\times\mathbb{DH}\,F_{n-1}&=\left(R_{n+}+\varepsilon R_{n+1}^*\right)\times\left(R_{n-1}+\varepsilon R_{n-1}^*\right)=F_{n+1}F_{n-1}+F_{n+2}F_n+\left(F_{n+2}F_{n-1}+F_{n+1}F_n\right)j\\&+\left(F_{n+1}^2+F_{n+2}^2+F_{n+3}F_{n-1}+F_{n+4}F_n\right)\varepsilon+\left(2F_{n+1}F_{n+2}+F_{n-1}F_{n+4}+F_nF_{n+3}\right)j\varepsilon\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bulduğumuz eşitliklerde Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için çıkarma işlemi yapılır ve (2.2), (2.3), (2.5) özdeşlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}\,F_{n+1}\times\mathbb{DH}\,F_{n-1}-\mathbb{DH}\,F_n^2&=\begin{bmatrix}F_{n+1}F_{n-1}+F_{n+2}F_n+\left(F_{n+2}F_{n-1}+F_{n+1}F_n\right)j\\+\left(F_{n+1}^2+F_{n+2}^2+F_{n+3}F_{n-1}+F_{n+4}F_n\right)\varepsilon\\+\left(2F_{n+1}F_{n+2}+F_{n-1}F_{n+4}+F_nF_{n+3}\right)j\varepsilon\end{bmatrix}\\&-\begin{bmatrix}F_n^2+F_{n+1}^2+2F_nF_{n+1}j+2(F_{n+2}F_n+F_{n+3}F_{n+1})\varepsilon\\+2(F_nF_{n+3}+F_{n+2}F_{n+1})j\varepsilon\end{bmatrix}\\&=(-1)^n\left[j+3j\varepsilon\right]\end{aligned}$$

denklemi elde edilir.

b) Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayısı için (3.6) eşitliği ve Fibonacci sayısı için (2.11) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\mathbb{DH}L_{n+1}\times\mathbb{DH}L_{n-1}-\mathbb{DH}L_n^2=\begin{bmatrix} L_{n+1}L_{n-1}+L_{n+2}L_n+\left(L_{n+2}L_{n-1}+L_{n+1}L_n\right)j \\ +\left(L_{n+1}^2+L_{n+2}^2+L_{n+3}L_{n-1}+L_{n+4}L_n\right)\varepsilon \\ +\left(2L_{n+1}L_{n+2}+L_{n-1}L_{n+4}+L_nL_{n+3}\right)j\varepsilon \end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} L_n^2+L_{n+1}^2+2L_nL_{n+1}j+2(L_{n+2}L_n+L_{n+3}L_{n+1})\varepsilon \\ +2(L_nL_{n+3}+L_{n+2}L_{n+1})j\varepsilon \end{bmatrix}$$
$$=5\left(-1\right)^{n-1}(j+3j\varepsilon)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.9. (Catalan Özdeşliği) Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayısı $\mathbb{DH}F_n$ olsun. O halde Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için Catalan özdeşliği

$$\mathbb{DH}F_n^2-\left(\mathbb{DH}F_{n+r}\times\mathbb{DH}F_{n-r}\right)=\left(-1\right)^{n-r}F_r^2\left(j+3j\varepsilon\right)$$

şeklindedir.

İspat. Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için (3.5) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_n^2=\left(R_n+\varepsilon R_n^*\right)^2&=F_n^2+F_{n+1}^2+2F_nF_{n+1}j\\&+2\left(F_nF_{n+2}+F_{n+1}F_{n+3}\right)\varepsilon+2\left(F_{n+1}F_{n+2}+F_nF_{n+3}\right)j\varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{DH}F_{n+r}\times\mathbb{DH}F_{n-r}&=\left(R_{n+r}+\varepsilon R_{n+r}^*\right)\times\left(R_{n-r}+\varepsilon R_{n-r}^*\right)\\&=F_{n+r}F_{n-r}+F_{n+r+1}F_{n-r+1}+\left(F_{n+r+1}F_{n-r}+F_{n+r}F_{n-r+1}\right)j\\&+\left(F_{n+r}F_{n-r+2}+F_{n+r+1}F_{n-r+3}+F_{n-r+2}F_{n-r}+F_{n-r+3}F_{n-r+1}\right)\varepsilon\\&+\left(F_{n+r+1}F_{n-r+2}+F_{n+r}F_{n-r+3}+F_{n+r+3}F_{n-r}+F_{n+r+2}F_{n-r+1}\right)j\varepsilon\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Fibonacci sayıları için olan (2.4) ve (2.6) eşitlikleri gözönüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\mathbb{DH}F_n^2 - \left(\mathbb{DH}F_{n-r} \times \mathbb{DH}F_{n-r}\right) = \begin{bmatrix} F_n^{\,2} + F_{n+1}^2 + 2\left(F_{n+1}F_n\right)j + 2\left(F_{n+2}F_n + F_{n+1}F_{n+3n}\right)\varepsilon \\ +2\left(F_nF_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2}\right)j\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} F_{n+r}F_{n-r} + F_{n+r+1}F_{n-r+1} + (F_{n+r}F_{n-r+1} + F_{n+r+1}F_{n+r})j \\ +(F_{n+r}F_{n-r+2} + F_{n+r+2}F_{n-r} + F_{n+r+1}F_{n-r+3} + F_{n+r+3}F_{n-r+1})j \\ +(F_{n+r}F_{n-r+3} + F_{n+r+3}F_{n-r} + F_{n+r+1}F_{n-r+2} + F_{n+r+2}F_{n-r+1})j\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{n-r}F_r^2\left[j + 3j\varepsilon\right]$$

Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için olan Catalan özdeşliğini elde ederiz.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki orijinal kısım üçüncü bölüm olup bu bölümde ‘Dual sayıların bileşenleri hiperbolik sayılar olursa ne olur?’ sorusu üzerinde duruldu. Bunun için ilk olarak Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayı sistemi tanımlandı. Bu sayı sistemi için toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri verildi. Daha sonra ise Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayı sistemi için beş farklı eşlenik tanımlandı ve bu beş farklı eşlenikle ilgili eşitlikler ispatlandı. Ayrıca Fibonacci katsayılı dual-hiperbolik sayılar için üreteç fonksiyonu elde edildi. Sonrasında ise Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayılar için Binet formülü tanımlandı. Son olarak ise bu sayılar için iyi bilinen Cassini, Catalan, D’Ocagne özdeşlikleri ve önemli eşitlikler tanımlandı.

Bu tezde tanımlanan Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayı sistemi sayesinde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-hiperbolik sayısı sistemi ve genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas katsayılı dual-kompleks sayı sistemi alanlarına da yer açtık. Ayrıca tanımlanabilecek daha kapsamlı sayı sistemleri için de temel niteliğinde bir sayı sistemi tanımladık.

KAYNAKLAR

[1] Koshy T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. John Wiley, New York, 2001.

[2] Dunlap R.A., The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1997.

[3] Clifford, W.K., Preliminary Sketch of Biquaternions. Proceedings of the London Mathematical Society. 4(64), 381–395, 1873.

[4] Kotelnikov, A. P., Screw Calculus and Some of Its Applications to Geometry and Mechanics. Magister Dissertation, Kazan. Gos. Univ., Russian, 1895.

[5] Study E., Geometrie der Dynamen. Verlag Teubner, Leipzig, 1903.

[6] Stakhov A.P. and Tkachenko I.S., The Golden Shofar. Chaos Soliton. Fract. 26 (3), 677-684, 2005.

[7] Güngör M.A. and Azak A.Z., Investigation of Dual-Complex Fibonacci, Dual-Complex Lucas Numbers and Their Properties. Adv. Appl. Clifford Algebras, 27(4), 3083-3096, 2017.

[8] Oligmueller S., Generating Functions and the Fibonacci Sequence. Department of Mathematics Nebraska Wesleyan University, 2015.

[9] Vajda S., Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section. Ellis Horwood Limited Publ., England, 1989.

[10] http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html. Erişim Tarihi: 29.02.2000.

[11] Nurkan S.K. and Güven İ.A., Dual Fibonacci Quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras, 25(2), 403-414, 2015.

[12] Kepler J., On Hexagonal Snow. Oxford University Press, 1996.

[13] Hoggatt Jr. V.E., Fibonacci and Lucas Numbers. Houghton-Miin Co., Boston, 1969.

[14] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P., Geometry of Minkowski Space-Time. Springer Briefs in Physics, 1-99, 2011.

[15] Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometri ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. 2, Ankara, 1983.

[16] Clifford W.K., Preliminary Sketch of Bi-quaternions. Proc. London Math. Soc., 4(1), 381-395, 1873.

[17] Cockle J., On Systems of Algebra İnvolving More Than One Imaginariy Philos. Mag., 35, 434-436, 1843.

[18] Hamilton W.R., Lectures on Quaternions: Containing a systematic state-ment of a new mathematical method. Hodges and Smith, Dublin, 1843.

[19] Macfarlane A., Hyperbolic Quaternions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 23, 169-180, 1902.

[20] Akyiğit M., Köksal H.H., Tosun M., Fibonacci Generalized Quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras, 24, 631-641, 2014.

[21] Majernik, V., Multicomponent Number Systems. Acta Phys. Pol. A, 90(3) 491-498, 1996.

[22] Cihan A., Azak A.Z., Güngör M.A. Tosun M., A Study on Dual Hyperbolic Fibonacci and Lucas Numbers. An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 27(1), 34-48, 2019.

[23] Horadam A.F., Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions. Amer. Math. Monthly 70, 289-291, 1963.

ÖZGEÇMİŞ

Arzu CİHAN, 19.02.1994 tarihinde İstanbul Fatih'de doğdu. İlköğrenimini İstanbul'un Şişli ilçesinde Mareşal Fevzi Çakmak İlkokulunda, ortaöğrenimini Fatih Ahmet Rasim Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2016 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Matematik anabilim dalı Geometri bilim dalında yüksek lisansa başladı. Ayrıca Eylül 2018 - Ocak 2019 da Sakarya'nın Serdivan ilçesinde Şehit Üstteğmen Selçuk Esatoğlu Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak ücretli öğretmenlik yaptı.