T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL-KOMPLEKS SAYILAR İÇİN DE-MOIVRE FORMÜLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer TETİK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

Mayıs 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL-KOMPLEKS SAYILAR İÇİN DE-MOIVRE FORMÜLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer TETİK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**

Bu tez 31/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Prof. Dr.**	**Doç. Dr.**
Murat TOSUN	**Mehmet Ali GÜNGÖR**	**Osman Zeki OKUYUCU**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ömer TETİK

31.05.2019

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan annem Ayşe TETİK, babam Mehmet TETİK ve ablam Asiye YILDIZ'a tez yazımındaki yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\vec{e}$	: Birim vektör
S^3	: Birim kuaterniyon
S^2	: Birim vektör kuaterniyonu
ε	: Dual birim
$w^\dagger$	: Dual-Kompleks sayıların eşleği
$\mathbb{DC}$	: Dual-Kompleks sayılar kümesi
$Q_{\mathbb{D}}$	: Dual kuaterniyon elemanı
$\mathbb{D}$	: Dual kuaterniyonlar kümesi
$\overline{Q_{\mathbb{D}}}$	: Dual kuaterniyonun eşleniği
D	: Dual sayılar kümesi
G^4	: Galilean uzayı
$[.]$	: Galilean uzayında dış işlem
$(\times)$	: Kuaterniyon çarpımı
$q_{\mathbb{C}}$	: Kompleks kuaterniyon elemanı
$\overline{q}_{\mathbb{C}}$	: Kompleks kuaterniyonların eşleniği
$Q_{\mathbb{C}}$	: Kompleks kuaterniyonlar kümesi
N	: Kuaterniyonun normu
$\bar{z}$	: Kompleks sayıların eşleniği
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$(\cdot)$	: Öklid iç çarpım
κ	: Reel kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$(\wedge)$	: Vektörel çarpım

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Dual-Kompleks Sayılar, De-Moivre Formülü, Euler Formülü

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Reel, Kompleks ve Dual kuaterniyonlar tanıtılmıştır. Ayrıca Reel, Kompleks ve Dual kuaterniyonlar için De-Moivre ve Euler formülleri verilmiştir.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Tezin orijinal kısmı beş alt bölüm halinde düzenlenmiştir. İlk bölümde dual-kompleks sayıların cebirsel yapıları tanıtılmış ve trigonometrik değerler verilmiştir. Daha sonra dual-kompleks sayıların üstel gösterimi türetilmiş ve bu gösterim ile Euler Formülü verildi. Ayrıca Euler Formülü yardımıyla De-Moivre Formülü bulundu. Son olarak dual-kompleks sayıların Logaritmik ve Matris gösterimleri verildi.

Dördüncü bölümde bu tezin bir değerlendirilmesi yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

DE-MOIVRE FORMULA FOR DUAL-COMPLEX NUMBERS

SUMMARY

Keywords: Dual-Complex Numbers, De-Moivre Formula, Euler Formula

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction. In the second part, Real, Complex and Dual quaternions are introduced. De-Moivre and Euler formulae are given for Real, Complex and Dual quaternions.

The third part is the original part of the thesis. The original part of the thesis is organized in five sub-sections. In the first chapter, algebraic strutures of dual- complex numbers are introduced and trigonometric values are given. Then the exponential representation of the dual-complex numbers is derived and the Euler formula is given. Finally, logarithmic and matrix representations of dual-complex numbers are given.

In the fourth chapter of this thesis, the general evaluation of the study is given and a suggestion is proposed for further investigations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İtalyan matematikçiler G.Carden (1501-1576) ve Rafael Bombelli (1526-1572), Fransız filozof Rene Descartes (1596-1650) kompleks sayılar için çeşitli ifadeler kullanmışlardır. Fakat kompleks sayılar için ilk defa Leonard Euler (1707-1783) $i = \sqrt{-}$ ifadesini kullanmıştır [1]. Daha sonra da Euler kompleks sayıların üstel gösterimi olarak $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ eşitliğini gösterdi. Abraham de Moivre (1667-1754) kendi adı ile bilinen De-Moivre formülünü,

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

ifadesini göstermiştir.

19. Yüzyılın üzerinde en çok uğraşılan konularından biri kuaterniyonlardır. Kuaterniyonlar İrlandalı matematikçi W. R. Hamilton (1805-1865) tarafından 1843 yıllarında kompleks sayıların genelleştirilmiş hali olan 4-boyutlu yeni bir sayı sistemi olarak tanımlanmıştır [2]. Kuaterniyonlar da aynı reel sayılar ya da kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşenden oluşurken kuaterniyonlar 4 bileşenden oluşur. Bu sayı sistemi Hamiltonun matematiğe yapmış olduğu en önemli katkılardan biri olarak gösterilir.

Kuateniyonlar sistemi sonraki yıllarda gelişmeye devam etmiş ve yeni tanımlamalar yapılmıştır. Türkiyede de gerek lisans gerekse lisanüstü eğitim programlarında öğretimine yer verilmiş bir çok akademik çalışmada kullanılmıştır.

Kompleks sayılarda iyi bilinen bir formül olan De-Moivre formülü E. Cho tarafından kuaterniyonlar içinde uyarlanmıştır [3].

İngiliz geometrici William Kingdon Clifford (1843-1879) tarafından dual sayılar ortaya atılmış ve geliştirilmiştir [4]. Dual sayıların tanımlanması yeni birçok çalışmayada yol açmıştır. Kuaterniyonlar üzerine yapılan çalışmalar dual kuaterniyonların türetilmesine yol açmıştır. Dual kuaterniyonlara ait bilinen en önemli çalışmalar Majernik [5] ve Yüce [6] tarafından yapılmıştır. Yeni bir kuaterniyon çeşidi olan dual kuaterniyonlarda çalışan Majernik fizikteki bir çok problem dual kuaterniyonlar aracılığıyla çözülebileceğini söylemiştir [5]. Yüce tarafından yapılan çalışmada dual kuaterniyonların matris karşılığı gösterilmiş ve kompleks sayılar için gösterilen Euler ve De-Moivre formülleri dual kuaterniyonlar için de gösterilmiştir [6].

Bu çalışmanın amacı dual-kompleks sayıların için Euler ve De-Moivre formüllerini göstermektir. Öncelikle dual-kompleks sayılar kümesi tanıtılacak ve cebirsel işlemler verilecektir. Dual-kompleks sayılara karşılık gelen açının gösterimi yapılıp ve Dual-kompleks sayıların üstel ifadesi yapılacaktır. Euler ve De-Moivre formülleri ispat edilecek ve son olarak Dual-kompleks sayıların matris gösterimleride verilecektir. Son olarak bulunan teoremler örnekler ile desteklenecektir.

BÖLÜM 2. REEL, KOMPLEKS VE DUAL KUATERNİYONLAR

İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton'un matematiğe kattığı kuaterniyonlar kompleks sayıların üst kümesi olarak düşünülebilir. Reel sayıların genişletilmesiyle elde edilen karmaşık sayılar nasıl iki boyutlu uzayda nokta ifade ediyorsa kuaterniyonlarda dört boyutlu uzayda bir nokta gibi düşünülebilir [7].

Kuaterniyonların geliştirilmesi fizik alanında bir çok hareketin anlamlandırılmasınıda kolaylaştırmıştır. Türk fizikçi Prof. Dr. Feza Gürsoy kuaterniyonların önemini anlamış ve fizik kanunlarını kuaterniyonlar ile ifade eden kitabını çıkarmıştır [7].

2.1. Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.1.1. Reel sayılar kümesinden keyfi x_1, x_2, x_3 ve x_4 sayıları alınsın. Bir reel kuaterniyonun cebirsel ifadesi

$$q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ki i, j ve k üç boyutlu vektör uzayında birim vektörlerdir. Bu birim vektörler

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \; jk = -kj = i, \; ki = -ik = j$$

denklemlerini sağlar. Burada $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin çarpımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	$-i$
k	k	j	i	-1

Tablo 2.1. Reel kuaterniyonların birimlerinin çarpımı

q reel kuaterniyonu için $S_q = x_1$ skaler kısmı ve $\overrightarrow{V_q} = x_2 i + x_3 j + x_4 k$ vektörel kısmı göstermek üzere $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$ olarak yazılabilir [8].

Tanım 2.1.2. $\kappa = \left\{ q : q = S_q + \overrightarrow{V_q} \right\}$ reel kuaterniyonlar kümesi olmak üzere $q_1, q_2 \in \kappa$ kuaterniyonlarını alalım. O halde

$$\begin{aligned} \oplus : \kappa \times \kappa &\to \kappa \\ (q_1, q_2) &\to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 + q_2} + \overrightarrow{V}_{q_1 \oplus q_2} \end{aligned}$$

işlemi

$$S_{q_1+q_2} = S_{q_1} + S_{q_2} \text{ ve } \overrightarrow{V}_{q_1 \oplus q_2} = \overrightarrow{V}_{q_1} \oplus \overrightarrow{V}_{q_2}$$

reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi olarak tanımlanır. Toplama işleminin etkisiz elemanı sıfır kuaterniyonu olarak adalandırılır ve $(0,0,0,0)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.3. λ reel sayısını ve q reel kuaterniyonunu alalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \kappa & \quad \kappa \\ (\lambda, q) &\to \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \overrightarrow{V_q} \end{aligned}$$

biçiminde tanımı yapılan işleme skaler ile reel kuaterniyonun çarpım işlemi denir [9].

Tanım 2.1.4. q_1 ve q_2 reel kuaterniyonları alalım. Burada

$$\begin{aligned} \times : \kappa \times \kappa &\rightarrow \kappa \\ (q_1, q_2) &\rightarrow q_1 \times q_2 \end{aligned}$$

κ üzerinde kuaterniyon çarpım işlemi

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \; jk = -kj = i, \; ki = -ik = j$$

birimlerinin özellikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) \times (y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k) \\ &= x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3) i + \\ &\quad (x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_4 + x_4 y_2)\, j + (x_1 y_4 + x_4 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2) k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada reel kuaterniyonların çarpma işlemi kapalılık, birleşim ve dağılım özelliklerini sağlar fakat değişme özelliğini sağlamaz [9].

Tanım 2.1.5. Her q_1 ve q_2 iki reel kuaterniyon olmak üzere kuaterniyonlar cebri üzerinde

$$q_1 = q_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_{q_1} = S_{q_2} \quad \text{ve} \quad \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2}$$

eşitlik bağıntısı tanımlanır [9].

için $q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k = S_q + V_q$ kuaterniyonu için

Tanım 2.1.6. Her $q \in \kappa$

$$K : \kappa \times \kappa \to \kappa$$
$$q \to K(q) = \bar{q}$$
$$q = S_q + \vec{V_q} \to \bar{q} = S_q - \vec{V_q}$$

işlemi ile eşlenik tanımlanır. $q = S_q + \vec{V_q}$ kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q} = S_q - \vec{V_q}$ olarak gösterilir [8].

Tanım 2.1.7. Eğer $q = S_q + \vec{V_q}$ reel kuaterniyonu için skaler kısmı $S_q = 0$ ise $q = \vec{V_q} = x_2 i + x_3 j + x_4 k$ olur. Bu ifadeye vektör kuaterniyonu denir.

Dolayısıyla vektör kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{q} = -q$$

olur [8].

Tanım 2.1.8. Her $q \in \kappa$ için $q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ reel kuaterniyonu için eşlenik işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar [9]. $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

i. $\overline{\lambda q + \mu q_1} = \lambda \bar{q} + \mu \bar{q}_1$

ii. $\overline{q \times q_1} = \bar{q} \times \bar{q}_1$

iii. $\overline{(\bar{q})} = q$

Tanım 2.1.9. Her $q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ bir reel kuaterniyon olmak üzere

$$N : \kappa \rightarrow \mathbb{R}$$
$$q \rightarrow N(q) = N_q = q \times \overline{q} = \overline{q} \times q$$

ile tanımlanan işleme q kuaterniyonunun normu denir veya

$$N_q = q \times \overline{q} = \overline{q} \times q$$

işlemini açık şekilde yazasak

$$\begin{aligned} N_q = q \times \overline{q} &= (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) \times (x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k) \\ &= x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 + x_4x_4 + (-x_1x_2 + x_2x_1 - x_3x_4 + x_4x_3)i + \\ &\quad (-x_1x_3 + x_3x_1 + x_2x_4 - x_4x_2)j + (-x_1x_4 + x_4x_1 - x_2x_3 + x_3x_2)k \\ &= x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 + x_4x_4 \end{aligned}$$

$$N_q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

olur. Bu pozitif reel sayıya q reel kuaterniyonunun normu denir [8].

2.2. Reel Kuaterniyonların Kutupsal Formu

Tanım 2.2.1. $q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ reel kuaterniyonu olmak üzere, reel eksen ile q arasında θ kadar bir açı olsun,

$$q = \sqrt{N_q}\left(\cos\theta + \vec{e}\sin\theta\right)$$

ifadesine q reel kuaterniyonunun kutupsal gösterimi denir.

Burada ki $\vec{e}$ birim vektörü ve θ açısı,

$$e = (e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}, \frac{x_4}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \right)$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{N_q}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{N_q}}$$

olacak şekildedir. Gerçektende bu kutupsal gösterim,

$$q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$$

$$= \sqrt{N_q}\left(\frac{x_1}{\sqrt{N_q}} + \frac{1}{\sqrt{N_q}}(x_2 i + x_3 j + x_4 k)\right)$$

$$= \sqrt{N_q}\left(\frac{x_1}{\sqrt{N_q}} + \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{N_q}}\left(i\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} + j\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} + k\frac{x_4}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{N_q}\left(\cos\theta + \sin\theta(e_1, e_2, e_3)\right)$$

$$= \sqrt{N_q}\left(\cos\theta + \vec{e}\sin\theta\right)$$

işlemlerini yaparak $q = \sqrt{N_q}\left(\cos\theta + \vec{e}\sin\theta\right)$ şeklinde gösterilebilir. Bu işlemlerde $\vec{e}$ vektörünün birim vektör olduğu bilindiğinden

$$N_{\vec{e}} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

$$= \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} + \frac{x_3^2}{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} + \frac{x_4^2}{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

$$= \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

$$= 1$$

ifadesi açık bir şekilde görülebilir [8].

Eğer reel kuaterniyonun normu $N_q = 1$ ise reel birim kuaterniyon olarak adlandırılır.

q reel birim kuaterniyonu, kutupsal formda yazılacak olursa

$$\cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{N_q}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{N_q}} \quad (N_q = 1) \text{ denklemlerinde}$$

$$\cos\theta = x_1 \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \text{ olduğu görülür. Böylece}$$

$$q = \cos\theta + \vec{e}\sin\theta$$

biçiminde yazılır.

2.3. Reel Kuaterniyonlar için De-Moivre Formülü

Öklid çarpımını $(\,\cdot\,)$ işlemi, $(\times)$ işlemi reel kuaterniyon için kuaterniyon çarpımını ve $(\wedge)$ işlemi vektörel çarpımı göstersin. Birim vektör kuaterniyonlar kümesi $S^2 = \left\{\vec{V_q} \in \mathbb{R}^3 : N_{\vec{V_q}} = 1, \overline{\vec{V_q}} = -\vec{V_q}\right\}$ ve birim reel kuaterniyonlar kümesi $S^3 = \left\{q \in \mathbb{R}^4 : N_q = 1\right\}$ olmak üzere

$$\vec{V_q}.\vec{V_q} = 1, \ \vec{V_q} \times \vec{V_q} = 0 \text{ ve } \vec{V_q} \wedge \vec{V_q} = \vec{V_q}^{\,2} = -1 \tag{2.1}$$

bağıntıları sağlanır [3]. Dolayısıyla aşağıdaki Lemma ve Teoremler verilebilir.

Lemma 2.3.1. $\vec{V_q} \in S^2$ birim vektör kuaterniyonu olmak üzere,

$$\left(\cos\alpha + \vec{V_q}\sin\alpha\right)\left(\cos\beta + \vec{V_q}\sin\beta\right) = \cos(\alpha+\beta) + \vec{V_q}\sin(\alpha+\beta)$$

olur.

İspat. $\overrightarrow{V_q} \in S^2$ için (2.1) denkleminden

$$\overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_q} = \overrightarrow{V_q}^2 = -1$$

ve

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

özdeşlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\cos\alpha+\overrightarrow{V_q}\sin\alpha\right)\left(\cos\beta+\overrightarrow{V_q}\sin\beta\right) &= \cos\alpha\cos\beta+\overrightarrow{V_q}\cos\alpha\sin\beta+\overrightarrow{V_q}\sin\alpha\cos\beta+\overrightarrow{V_q}\wedge\overrightarrow{V_q}\sin\alpha\sin\beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\overrightarrow{V_q} \\ &= \cos(\alpha+\beta)+\overrightarrow{V_q}\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [3].

Teorem 2.3.2. (De-Moivre Formülü) Kutupsal gösterimi $q = \cos\theta + \underline{V_q}\sin\theta$ biçiminde olan kuateriyon, $q \in S^3$ ve $\overrightarrow{V_q} \in S^2$ olmak üzere, $n \in \mathbb{Z}$ için

$$q^n = \left(\cos\theta + \overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + \overrightarrow{V_q}\sin(n\theta)$$

dir.

İspat. $q \in S^3$ ve $\underline{V_q} \in S^2$ olmak üzere kutupsal gösterimi $q = \cos\theta + \underline{V_q}\sin\theta$ olan reel kuaterniyonun De-Moivre formülünü sağladığını tümevarım yöntemi ile gösterelim.

n negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$n=2$ için teoremin doğru olduğu Lemma 2.3.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)\\
&=\cos\theta\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\cos\theta\sin\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\wedge\overrightarrow{V_q}\sin\theta\sin\theta\\
&=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta+\left(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta\right)\overrightarrow{V_q}\\
&=\cos\left(\theta+\theta\right)+\overrightarrow{V_q}\sin\left(\theta+\theta\right)\\
&=\cos\left(2\theta\right)+\overrightarrow{V_q}\sin\left(2\theta\right)
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

$n=k$ için

$$q^k=\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)^k=\cos\left(k\theta\right)+\overrightarrow{V_q}\sin\left(k\theta\right)$$

olduğunu varsayalım,

$n=k+1$ için

$$q^{k+1}=\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)^{k+1}=\cos\left(k+1\right)\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\left(k+1\right)\theta$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)^{k+1}&=\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)^k\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)\\
&=\left(\cos\left(k\theta\right)+\overrightarrow{V_q}\sin\left(k\theta\right)\right)\left(\cos\theta+\overrightarrow{V_q}\sin\theta\right)\\
&=\cos\left(k\theta+\theta\right)+\overrightarrow{V_q}\sin\left(k\theta+\theta\right)\\
&=\cos\left(\left(k+1\right)\theta\right)+\overrightarrow{V_q}\sin\left(\left(k+1\right)\theta\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

n negatif bir tamsayı olsun. Böylece

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \cos\theta - \overrightarrow{V_q}\sin\theta \\ q^{-n} &= \cos(n\theta) - \overrightarrow{V_q}\sin(n\theta) \\ &= \cos(-n\theta) + \overrightarrow{V_q}\sin(-n\theta) \end{aligned}$$

olduğu aşikardır. Böylelikle pozitif ve negatif tamsayılar için De-Moivre formülü ispatlanmış oldu [3].

2.4. Reel Kuaterniyonlar için Euler Formülü

Teorem 2.4.1. Her $q \in K$ kuaterniyonu için $q \in S^3$ ve $\overrightarrow{V_q} \in S^2$ olmak üzere

$$e^{\overrightarrow{V_q}\theta} = \cos\theta + \overrightarrow{V_q}\sin\theta$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.1) denkleminde $\overrightarrow{V_q} \in S^2$ ve $\overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_q} = \overrightarrow{V_q}^2 = -1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\overrightarrow{V_q}^3 = -\overrightarrow{V_q},\ \overrightarrow{V_q}^4 = -1,\ \overrightarrow{V_q}^5 = \overrightarrow{V_q},...$$

şeklide kuvvetleri yorumlanabilir. Herhangi bir θ açısı için

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - ...$$

$$\sin\theta = \theta \quad \frac{\theta^3}{3!} \quad \frac{\theta^5}{5!} \quad \frac{\theta^7}{7!} \quad \frac{\theta^9}{9!} - ...$$

eşitlikleride ispat içerisinde kullanılırsa,

$$e^{\vec{V}_q\theta} = 1 + \vec{V}_q\theta + \frac{\left(\vec{V}_q\theta\right)^2}{2!} + \frac{\left(\vec{V}_q\theta\right)^3}{3!} + \frac{\left(\vec{V}_q\theta\right)^4}{4!} + \frac{\left(\vec{V}_q\theta\right)^5}{5!} + \frac{\left(\vec{V}_q\theta\right)^6}{6!} + \frac{\left(\vec{V}_q\theta\right)^7}{7!} + \frac{\left(\vec{V}_q\theta\right)^8}{8!} + \ldots$$

$$= 1 + \vec{V}_q\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\vec{V}_q\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\vec{V}_q\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\vec{V}_q\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + \vec{V}_q\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + \vec{V}_q \sin\theta$$

eşitliği yazılabilir [3].

2.5. Kompleks Kuaterniyonlar

Tanım 2.5.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini göstermek üzere, her x ve y reel sayısı için $z = (x, y)$ ifadesine bir sıralı ikili denir. Bu sıralı ikililerle tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ kümesi bir $\mathbb{C}$ olmak üzere

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1 \right\}$$

olarak tanımlanan kümeye kompleks sayılar kümesi ve bu kümenin her bir elemanına kompleks sayı denir. Burada x reel sayısına kompleks sayının reel kısmı ve y reel sayısına kompleks sayının sanal(imajiner) kısmı denir [10].

Bir x reel sayısı ile $(x,0)$ kompleks sayısı $\mathbb{R}^2$ de aynı noktayı ifade ettiğinden $x = (x, 0)$ yazılabilir. $\mathbb{R} = A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ olduğu görülüyor. $(0,1)$ kompleks sayısı ise $\mathbb{R}^2$ deki y ekseni üzerinde 1 birim uzaklıktaki noktaya karşılık gelir. Bu sayı tanım olarak $i = (0,1)$ simgesi ile gösterilir. Bu i sayısına $\mathbb{C}$ nin sanal (imajiner) birimi diyeceğiz.

Tanım 2.5.2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = x_1 + ix_2$ ve $z_2 = y_1 + iy_2$ için $x_1 = y_1$ ve $x_2 = y_2$ eşitlikleri sağlanıyor ise bu iki kompleks sayı eşittir denir ve $z_1 = z_2$ şeklinde gösterilir [10].

Tanım 2.5.3. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = x_1 + ix_2$ ve $z_2 = y_1 + iy_2$ için

$$+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

toplama işlemi

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)$$

şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 2.5.4. $z \in \mathbb{C}$ ve $z = x + iy$ olmak üzere

$$z + e = e + z = z$$

denkleminin çözümü olan e kompleks sayısına $\mathbb{C}$ 'nin + işlemine göre etkisiz elemanı denir ve $0 = 0 + i0$ olarak gösterilir [10].

Tanım 2.5.5. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = x_1 + ix_2$ ve $z_2 = y_1 + iy_2$ için $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ çarpma işlemi

$$z_1 . z_2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 2.5.6. Kompleks sayılar kümesinden keyfi z_1, z_2, z_3 ve z_4 kompleks sayıları alınsın bir kompleks kuaterniyonun cebirsel ifadesi

$$q_{\mathbb{C}} = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k$$

şeklinde ifade edilebilir [2]. Burada ki i, j ve k üç boyutlu vektör uzayında birim vektörlerdir. Bu birim vektörler

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

denklemlerini sağlar. Yukarıda cebirsel ifadesi verilen kompleks kuaterniyonların kümesini $Q_{\mathbb{C}}$ şeklinde göstereceğiz. $q_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu için $S_{q_{\mathbb{C}}} = z_1$ skaler kısmı ve $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} = z_2 i + z_3 j + z_4 k$ vektörel kısmı göstermek üzere,

$$q_{\mathbb{C}} = S_{q_{\mathbb{C}}} + \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}$$

olarak yazılabilir [2].

Tanım 2.5.7. $Q_{\mathbb{C}} = \left\{ q_{\mathbb{C}} : q_{\mathbb{C}} = S_{q_{\mathbb{C}}} + \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \right\}$ kompleks kuaterniyonlar kümesi olmak üzere $q_{1\mathbb{C}}$ ve $q_{2\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlarını alalım. O halde

$$\oplus : Q_{\mathbb{C}} \times Q_{\mathbb{C}} \to Q_{\mathbb{C}}$$
$$\left(q_{\mathbb{C}1}, q_{\mathbb{C}2}\right) \to q_{\mathbb{C}1} \oplus q_{\mathbb{C}2} = S_{q_{\mathbb{C}1}+q_{\mathbb{C}2}} + \vec{V}_{q_{\mathbb{C}1} \oplus q_{\mathbb{C}2}}$$

işlemi

$$S_{q_{\mathbb{C}1}+q_{\mathbb{C}2}} = S_{q_{\mathbb{C}_1}} + S_{q_{\mathbb{C}_2}} \text{ ve } \vec{V}_{q_{\mathbb{C}1} \oplus q_{\mathbb{C}2}} = \vec{V}_{q_{\mathbb{C}1}} \oplus \vec{V}_{q_{\mathbb{C}2}}$$

kompleks kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi olarak tanımlanır.Toplama işleminin etkisiz elemanı sıfır kuaterniyonu olarak adalandırılır ve $(0,0,0,0)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.5.8. λ reel sayısını ve $q_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonunu alalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \odot :\ & \mathbb{R} \times Q_{\mathbb{C}} \to Q_{\mathbb{C}} \\ & (\lambda, q_{\mathbb{C}}) \to \lambda \odot q_{\mathbb{C}} = \lambda q_{\mathbb{C}} = \lambda S_{q_{\mathbb{C}}} + \lambda \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme skaler ile kompleks kuaterniyonun çarpımı denir [2].

Tanım 2.5.9. $q_{\mathbb{C}1}, q_{\mathbb{C}2} \in Q_{\mathbb{C}}$ $(q_{\mathbb{C}1} = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k$ ve $q_{\mathbb{C}2} = y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k)$ kuaterniyonları alalım. Burada

$$\begin{aligned} \times :\ & Q_{\mathbb{C}} \times Q_{\mathbb{C}} \to Q_{\mathbb{C}} \\ & (q_{\mathbb{C}1}, q_{\mathbb{C}2}) \to q_{\mathbb{C}1} \times q_{\mathbb{C}2} \end{aligned}$$

$Q_{\mathbb{C}}$ üzerinde kuaterniyon çarpım işlemi

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

birimlerinin özellikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned} q_{\mathbb{C}1} \times q_{\mathbb{C}2} &= (z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k) \times (y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k) \\ &= z_1 y_1 - z_2 y_2 - z_3 y_3 - z_4 y_4 + (z_1 y_2 + z_2 y_1 + z_3 y_4 - z_4 y_3) i + \\ &\quad (z_1 y_3 + z_3 y_1 - z_2 y_4 + z_4 y_2) j + (z_1 y_4 + z_4 y_1 + z_2 y_3 - z_3 y_2) k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.5.10. Her $q_{\mathbb{C}1}$ ve $q_{\mathbb{C}2}$ iki kompleks kuaterniyon olmak üzere kuaterniyonlar cebri üzerinde

$$q_{\mathbb{C}1} = q_{\mathbb{C}2} \quad \Leftrightarrow \quad S_{q_{\mathbb{C}1}} = S_{q_{\mathbb{C}2}} \quad \text{ve} \quad \vec{V}_{q_{\mathbb{C}1}} = \vec{V}_{q_{\mathbb{C}2}}$$

eşitlik bağıntısı tanımlanır [2].

Tanım 2.5.11. Her $q_{\mathbb{C}} \in Q_{\mathbb{C}}$ için $q_{\mathbb{C}} = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k = S_{q_{\mathbb{C}}} + \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyonu için

$$K : Q_{\mathbb{C}} \times Q_{\mathbb{C}} \to Q_{\mathbb{C}}$$
$$q_{\mathbb{C}} \to K(q_{\mathbb{C}}) = \overline{q_{\mathbb{C}}}$$

$$q_{\mathbb{C}} = S_{q_{\mathbb{C}}} + \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \to \overline{q_{\mathbb{C}}} = S_{q_{\mathbb{C}}} - \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}$$

işlemi ile eşlenik tanımlanır. $q_{\mathbb{C}} = S_{q_{\mathbb{C}}} + \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}$ kuaterniyonunun eşleniği $\overline{q_{\mathbb{C}}} = S_{q_{\mathbb{C}}} - \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}$ olarak gösterilir [2].

Tanım 2.5.12. Eğer $q_{\mathbb{C}} = S_{q_{\mathbb{C}}} + \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyonu için skaler kısmı $S_{q_{\mathbb{C}}} = 0$ ise $q_{\mathbb{C}} = \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} = z_2 i + z_3 j + z_4 k$ olur. Bu ifadeye vektör kuaterniyonu denir.

Dolayısıyla vektör kuaterniyonun eşleniği

$$\overline{q_{\mathbb{C}}} = -q_{\mathbb{C}}$$

olur [8]. Ayrıca kompleks kuaterniyonlar için kompleks eşlenikte tanımlanabilir. Kompleks eşlenik $q_{\mathbb{C}}^{*} = \overline{z_1} + \overline{z_2} i + \overline{z_3} j + \overline{z_4} k$ olarak gösterilebilir.

Tanım 2.5.13. Her $q_{\mathbb{C}} = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k$ bir kompleks kuaterniyon olmak üzere

$$N : Q_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$$
$$q_{\mathbb{C}} \to N(q_{\mathbb{C}}) = N_{q_{\mathbb{C}}} = q_{\mathbb{C}} \times \overline{q_{\mathbb{C}}} = \overline{q_{\mathbb{C}}} \times q_{\mathbb{C}}$$

ile tanımlanan işleme $q_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonunun normu denir veya

$$N_{q_{\mathbb{C}}} = q_{\mathbb{C}} \times \overline{q_{\mathbb{C}}} = \overline{q_{\mathbb{C}}} \times q_{\mathbb{C}}$$

işlemi açık şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned} N_{q_{\mathbb{C}}} = q_{\mathbb{C}} \times \overline{q_{\mathbb{C}}} &= \left(z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k\right) \times \left(z_1 - z_2 i - z_3 j - z_4 k\right) \\ &= z_1 z_1 + z_2 z_2 + z_3 z_3 + z_4 z_4 + \left(-z_1 z_2 + z_2 z_1 - z_3 z_4 + z_4 z_3\right) i + \\ &\quad \left(-z_1 z_3 + z_3 z_1 + z_2 z_4 - z_4 z_2\right) j + \left(-z_1 z_4 + z_4 z_1 - z_2 z_3 + z_3 z_2\right) k \\ &= z_1 z_1 + z_2 z_2 + z_3 z_3 + z_4 z_4 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan norm

$$N_{q_{\mathbb{C}}} = z_1^{\,2} + z_2^{\,2} + z_3^{\,2} + z_4^{\,2}$$

olur [2].

2.6. Kompleks Kuaterniyonların Kutupsal Formu

Tanım 2.6.1. $q_{\mathbb{C}} = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k$ kompleks kuaterniyonu olmak üzere, φ kompleks açı olsun,

$$q_{\mathbb{C}} = \sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}} \left(\cos\varphi + \vec{e} \sin \varphi\right)$$

ifadesine $q_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonunun kutupsal gösterimi denir.

Burada ki $\vec{e}$ birim vektörü ve φ kompleks açısı,

$$e = \left(e_1, e_2, e_3\right) = \left(\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^{\,2}}}, \frac{z_3}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^{\,2}}}, \frac{z_4}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^{\,2}}} \right)$$

$$\cos\varphi = \frac{z_1}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}}$$

olacak şekildedir. Gerçektende bu kutupsal gösterim,

$$\begin{aligned}
q_{\mathbb{C}} &= z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k \\
&= \sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}\left(\frac{z_1}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}} + \frac{1}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}}\left(z_2 i + z_3 j + z_4 k\right)\right) \\
&= \sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}\left(\frac{z_1}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}} + \frac{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}}\left(i\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}} + j\frac{z_3}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}} + k\frac{z_4}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}}\right)\right) \\
&= \sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\left(e_1, e_2, e_3\right)\right) \\
&= \sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}\left(\cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi\right)
\end{aligned}$$

işlemlerini yaparak $q_{\mathbb{C}} = \sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}\left(\cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi\right)$ şeklinde gösterilebilir. Bu işlemlerde $\vec{e}$ vektörünün birim vektör olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned}
N_{\vec{e}} &= e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \\
&= \frac{z_2^2}{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2} + \frac{z_3^2}{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2} + \frac{z_4^2}{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2} \\
&= \frac{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ifadesi açık bir şekilde görülebilir.

Eğer kompleks kuaterniyonun normu $N_{q_{\mathbb{C}}} = 1$ ise kompleks birim kuaterniyon olarak adlandırılır.

$q_{\mathbb{C}}$ kompleks birim kuaterniyonu, kutupsal formda yazılacak olursa

$$\cos\varphi = \frac{z_1}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}}{\sqrt{N_{q_{\mathbb{C}}}}} \quad \left(N_{q_{\mathbb{C}}} = 1\right)$$

eşitliklerinden

$$\cos\varphi = z_1 \quad \text{ve} \quad \sin\varphi = \sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}$$

olur. Böylece

$$q_{\mathbb{C}} = \cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi$$

biçiminde yazılır [11].

2.7. Kompleks Kuaterniyonlar için De-Moivre Formülü

Öklid çarpımını $(\,\cdot\,)$ işlemi, $(\times)$ işlemi kompleks kuaterniyon için kuaterniyon çarpımını ve $(\wedge)$ işlemi vektörel çarpımı göstersin.

Birim vektör kompleks kuaterniyonlar kümesi

$$S_{Q_{\mathbb{C}}}^{2} = \left\{ \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \in Q_{\mathbb{C}}^{3} : N_{\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}} = 1, \overline{\vec{V}}_{q_{\mathbb{C}}} = -\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \right\}$$

ve birim kompleks kuaterniyonlar kümesi

$$S_{Q_{\mathbb{C}}}^{3} = \left\{ q_{\mathbb{C}} \in Q_{\mathbb{C}}^{4} .\ N_{q_{\mathbb{C}}} = 1 \right\}$$

olmak üzere

$$\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} . \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} = 1, \quad \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \times \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} = 0 \ \text{ ve } \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \wedge \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} = \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}^{\,2} = -1 \qquad (2.2)$$

bağıntıları sağlanır [11]. Dolayısıyla aşağıdaki Lemma ve Teoremler verilebilir.

Lemma 2.7.1. $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \in S_{Q_{\mathbb{C}}}{}_2$ birim vektör kompleks kuaterniyonu φ ve δ kompleks açılar olmak üzere,

$$\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)\left(\cos\delta+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\delta\right)=\cos(\varphi+\delta)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(\varphi+\delta)$$

olur.

İspat. $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \in S_{Q_{\mathbb{C}}}{}^2$ için (2.2) denkleminde

$$\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \wedge \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} = \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}{}^2 = -1$$

ve

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

trigonometrik özdeşlikleri gözönüne alınırsa

$$\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)\left(\cos\delta+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\delta\right)=\cos\varphi\cos\delta+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\cos\varphi\sin\delta+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\cos\delta+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\wedge\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\sin\delta$$

$$=\cos\varphi\cos\delta-\sin\varphi\sin\delta+\left(\sin\varphi\cos\delta+\cos\varphi\sin\delta\right)\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}$$

$$=\cos(\varphi+\delta)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(\varphi+\delta)$$

eşitliği elde edilir [3].

Teorem 2.7.2. (De-Moivre Formülü) Kutupsal gösterimi $q_{\mathbb{C}} = \cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi$ biçiminde olan kuateriyon, $q_{\mathbb{C}} \in S_{Q_{\mathbb{C}}}{}^3$ ve $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}} \in S_{Q_{\mathbb{C}}}{}^2$ olmak üzere, $n\mathbb{Z}$ için

$$q_{\mathbb{C}}^{n}=\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)^{n}=\cos(n\varphi)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(n\varphi)$$

şeklindedir.

İspat. $q_{\mathbb{C}}\in S_{Q_{\mathbb{C}}}^{3}$ ve $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\in S_{Q_{\mathbb{C}}}^{2}$ olmak üzere kutupsal gösterimi $q_{\mathbb{C}}=\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi$ olan kompleks kuaterniyonun De-Moivre formülünü sağladığını tümevarım yöntemi ile gösterelim.

n negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$n=2$ için teoremin doğru olduğu Lemma 2.7.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)\\
&=\cos\varphi\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\cos\varphi\sin\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\wedge\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\sin\varphi\\
&=\cos\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\varphi+\left(\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi\right)\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\\
&=\cos\left(\varphi+\varphi\right)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\left(\varphi+\varphi\right)\\
&=\cos\left(2\varphi\right)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\left(2\varphi\right)
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

$n=k$ için

$$q_{\mathbb{C}}^{k}=\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)^{k}=\cos(k\varphi)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(k\varphi)$$

olduğunu varsayalım,

$n=k+1$ için

$$q_{\mathbb{C}}^{k+1}=\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)^{k+1}=\cos(k+1)\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(k+1)\varphi$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)^{k+1}=\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)^{k}\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)$$

$$=\left(\cos(k\varphi)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(k\varphi)\right)\left(\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi\right)$$

$$=\cos(k\varphi+\varphi)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(k\varphi+\varphi)$$

$$=\cos((k+1)\varphi)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin((k+1)\varphi)$$

olduğu görülür.

n negatif bir tamsayı olmak üzere

$$q_{\mathbb{C}}^{-1}=\cos\varphi-\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi$$

$$q_{\mathbb{C}}^{-n}=\cos(n\varphi)-\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(n\varphi)$$

$$=\cos(-n\varphi)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin(-n\varphi)$$

olduğu aşikardır. Böylelikle pozitif ve negatif tamsayılar için kompleks kuaterniyonlarda De-Moivre formülü ispatlanmış oldu [11].

2.8. Kompleks Kuaterniyonlar için Euler Formülü

Teorem 2.8.1. (Euler Formülü) Her $q_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu için $q_{\mathbb{C}}\in S_{Q_{\mathbb{C}}}^{3}$ ve $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\in S_{Q_{\mathbb{C}}}^{2}$ olmak üzere

$$e^{\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi}=\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.2) denkleminden $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\in S_{Q_{\mathbb{C}}}^{2}$ ve $\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\wedge\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}=\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}^{2}=-1$ eşitliklerini gözönüne alalım. Buradan

$$\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}^{3}=-\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}},\ \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}^{4}=-1,\ \vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}^{5}=\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}},...$$

şeklide kuvvetleri yorumlanabilir. Herhangi bir θ açısı için

$$\cos\theta = 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\frac{\theta^8}{8!}-\dots$$

$$\sin\theta = \theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\frac{\theta^9}{9!}-\dots$$

eşitlikleride ispat içerisinde kullanılırsa,

$$e^{\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi} = 1+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi+\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^2}{2!}+\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^3}{3!}+\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^4}{4!}+\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^5}{5!}+\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^6}{6!}+\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^7}{7!}+\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^8}{8!}+\dots$$

$$=1+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^6}{6!}-\frac{\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi^7}{7!}+\frac{\varphi^8}{8!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\frac{\varphi^8}{8!}-\dots\right)+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{i\varphi^7}{7!}+\dots\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\varphi\right)^{2n}}{(2n)!}+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\cos\varphi+\vec{V}_{q_{\mathbb{C}}}\sin\varphi$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla kompleks kuaterniyonlar için Euler formülü görülür [11].

2.9. Dual sayılar ve Dual Kuaterniyonlar

Tanım 2.9.1. $\forall x, x^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir (x, x^*) ikilisine sıralı ikili denir. Bu

şekildeki (x, x^*) ikililerinin oluşturduğu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\mathbb{D}=\left\{(x,x^*): x,x^* \in\right.$

kümesi D ile gösterilsin.

üzerinde toplama ve çarpma olmak üzere iki iç işlem ve bir eşitlik tanımlanır [6].

Tanım 2.9.2.

$$\oplus : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi $A=(x,x^*)$ ve $B=(y,y^*)$ dual sayıalr olmak üzere

$$A \oplus B = (x,\ x^*)\oplus(y,\ y^*) = (x+y,\ x^*+y^*)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem $\mathbb{D}$ deki toplama işlemidir [6].

Tanım 2.9.3.

$$\odot : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi $A=(x,x^*)$ ve $B=(y,y^*)$ dual sayılar olmak üzere

$$A \odot B = (x,x^*)\odot(y,y^*) = (xy,\ xy^*+x^*y)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem $\mathbb{D}$ deki çarpma işlemidir [6].

Tanım 2.9.4. $A=(x,x^*)$ *ve* $B=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ olmak üzere

$$x=y \text{ ve } x^*=y^*$$

ise A ile B eşittir denir ve $A=B$ ile gösterilir [6].

Tanım 2.9.5. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere

$$\mathbb{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

kümesinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri Tanım 2.9.2., Tanım 2.9.3 ve Tanım 2.9.4. de gösterildiği gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ kümesine Dual sayılar sistemi denir ve $\forall\left(x, x^*\right)\in\mathbb{D}$ elemanına da Dual Sayı denir [6].

Tanım 2.9.6. $(0,1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilmektedir. $\varepsilon=(0,1)$ dual birim olarak adlandırılır [6].

$\odot$ işleminin özelliği olarak dual birimin karesinin sıfır olduğu görülür. Yani,

$$\varepsilon.\varepsilon=\varepsilon^2=(0,1)\odot(0,1)=(0,0)=0$$

olur [6].

Teorem 2.9.7. $A=\left(x, x^*\right)$ dual sayısı $A=x+\varepsilon x^*$ şeklinde ve tek türlü yazılır.

İspat. i-) $A=\left(x, x^*\right)$ dual sayısı $\oplus$ toplama işleminin tanımına göre

$$A=\left(x, x^*\right)=(x, 0)+\left(0, x^*\right)$$

şeklinde olur. Dual birimin tanımı gereği

$$A=\left(x, x^*\right)=x+\varepsilon x^*$$

biçiminde yazılabilir.

ii-) $A=\left(x, x^*\right)=x+\varepsilon x^*$ yazılışı tek türlüdür. Gerçektende $A=\left(x, x^*\right)$ dual sayısının bir başka yazılışı da $A=\left(x, x^*\right)=y+\varepsilon y^*$ biçiminde olsun. Bu ifadeye göre

$$A=\left(x, x^*\right)=x+\varepsilon x^*=y+\varepsilon y^*$$

olup iki dual sayının eşitliği özelliği gereği

$$x=y \text{ ve } x^*=y^*$$

olur. Bu da bize $A=\left(x, x^*\right)=(x, 0)+\left(0, x^*\right)$ yazılışının tek türlü olduğunu gösterir.

i ve ii şıklarına göre $A=\left(x,x^*\right)=x+\varepsilon x^*$ olarak tek türlü yazıldığı görülür [6].

Tanım 2.9.8. X_1, X_2, X_3 ve $X_4 \in D$ olmak üzere, dual kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilir ve cebirsel şekli

$$Q_{\mathbb{D}} = X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k$$

biçiminde ifade edilir. Buradaki i, j ve k üç boyutlu vektör uzayında birim vektörlerdir. Bu birim vektörler

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

denklemlerini sağlar. $Q_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonu için $S_{Q_{\mathbb{D}}} = X_1$ skaler kısmı ve $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} = X_2 i + X_3 j + X_4 k$ vektörel kısmı göstermek üzere,

$$Q_{\mathbb{D}} = S_{Q_{\mathbb{D}}} + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$$

olarak yazılabilir [9].

Tanım 2.9.9. $\mathbb{D} = \left\{ Q_{\mathbb{D}} : Q_{\mathbb{D}} = S_{Q_{\mathbb{D}}} + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \right\}$ dual kuaterniyonlar kümesi olmak üzere $Q_{\mathbb{D}1}$ ve $Q_{\mathbb{D}2}$ dual kuaterniyonlarını ele alalım. O halde

$$\oplus :\ \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{D}$$
$$\left(Q_{\mathbb{D}1}, Q_{\mathbb{D}2}\right) \to Q_{\mathbb{D}1} \oplus Q_{\mathbb{D}2} = S_{Q_{\mathbb{D}1}+Q_{\mathbb{D}2}} + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}1}\oplus Q_{\mathbb{D}2}}$$

işlemi

$$S_{Q_{\mathbb{D}1}+Q_{\mathbb{D}2}} = S_{Q_{\mathbb{D}1}} + S_{Q_{\mathbb{D}2}} \text{ ve } \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}1}\oplus Q_{\mathbb{D}2}} = \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}1}} \oplus \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}2}}$$

dual kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi olarak tanımlanır [9].

Tanım 2.9.10. λ reel sayısını ve $Q_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunu alalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{D} &\to \mathbb{D} \\ (\lambda, Q_{\mathbb{D}}) &\to \lambda \odot Q_{\mathbb{D}} = \lambda Q_{\mathbb{D}} = \lambda S_{Q_{\mathbb{D}}} + \lambda \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme skaler ile dual kuaterniyonun çarpımı denir [9].

Tanım 2.9.11. $Q_{\mathbb{D}1} = X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k$ ve $Q_{\mathbb{D}2} = Y_1 + Y_2 i + Y_3 j + Y_4 k$ dual kuaterniyonlarını alalım. Burada

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\to \mathbb{D} \\ (Q_{\mathbb{D}1}, Q_{\mathbb{D}2}) &\to Q_{\mathbb{D}1} \times Q_{\mathbb{D}2} \end{aligned}$$

$\mathbb{D}$ üzerinde kuaterniyon çarpım işlemi

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j$$

birimlerinin özellikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned} Q_{\mathbb{D}1} \times Q_{\mathbb{D}2} &= (X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k) \times (Y_1 + Y_2 i + Y_3 j + Y_4 k) \\ &= X_1 Y_1 - X_2 Y_2 - X_3 Y_3 - X_4 Y_4 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_3 Y_4 - X_4 Y_3) i + \\ &\quad (X_1 Y_3 + X_3 Y_1 - X_2 Y_4 + X_4 Y_2) j + (X_1 Y_4 + X_4 Y_1 + X_2 Y_3 - X_3 Y_2) k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 2.9.12. Her $Q_{\mathbb{D}1}$ ve $Q_{\mathbb{D}2}$ iki dual kuaterniyon olmak üzere kuaterniyonlar cebri üzerinde

$$Q_{\mathbb{D}1} = Q_{\mathbb{D}2} \quad \Leftrightarrow \quad S_{Q_{\mathbb{D}1}} = S_{Q_{\mathbb{D}2}} \quad \text{ve} \quad \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}1}} = \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}2}}$$

eşitlik bağıntısı tanımlanır [9].

Tanım 2.9.13. Her $Q_{\mathbb{D}} \in \mathbb{D}$ için $Q_{\mathbb{D}} = X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k = S_{Q_{\mathbb{D}}} + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$ dual kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\to \mathbb{D} \\ Q_{\mathbb{D}} &\to K\left(Q_{\mathbb{D}} \right) = \overline{Q_{\mathbb{D}}} \end{aligned}$$

$$Q_{\mathbb{D}} = S_{Q_{\mathbb{D}}} + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \to \overline{Q_{\mathbb{D}}} = S_{Q_{\mathbb{D}}} - \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$$

işlemi ile eşlenik tanımlanır. $Q_{\mathbb{D}} = S_{Q_{\mathbb{D}}} + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$ dual kuaterniyonunun eşleniği $\overline{Q_{\mathbb{D}}} = S_{Q_{\mathbb{D}}} - \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$ olarak gösterilir [9].

Tanım 2.9.14. Eğer $Q_{\mathbb{D}} = S_{Q_{\mathbb{D}}} + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$ dual kuaterniyonu için skaler kısmı $S_{Q_{\mathbb{D}}} = 0$ ise $Q_{\mathbb{D}} = \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} = X_2 i + X_3 j + X_4 k$ olur. Bu ifadeye vektör kuaterniyonu denir.

Dolayısıyla vektör kuaterniyonun eşleniği

$$\overline{Q_{\mathbb{D}}} = -Q_{\mathbb{D}}$$

olur [9].

Tanım 2.9.15. Her $Q_{\mathbb{D}} = X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k$ bir dual kuaterniyon olmak üzere

$$N : \mathbb{D} \to D$$
$$Q_{\mathbb{D}} \to N\left(Q_{\mathbb{D}}\right) = N_{Q_{\mathbb{D}}} = Q_{\mathbb{D}} \times \overline{Q_{\mathbb{D}}} = \overline{Q_{\mathbb{D}}} \times Q_{\mathbb{D}}$$

ile tanımlanan işleme $Q_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun normu denir veya

$$N_{Q_{\mathbb{D}}} = Q_{\mathbb{D}} \times \overline{Q_{\mathbb{D}}} = \overline{Q_{\mathbb{D}}} \times Q_{\mathbb{D}}$$

işlemini açık şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned} N_{Q_{\mathbb{D}}} = Q_{\mathbb{D}} \times \overline{Q_{\mathbb{D}}} &= \left(X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k\right) \times \left(X_1 - X_2 i - X_3 j - X_4 k\right) \\ &= X_1 X_1 + X_2 X_2 + X_3 X_3 + X_4 X_4 + \left(-X_1 X_2 + X_2 X_1 - X_3 X_4 + X_4 X_3\right) i + \\ &\quad \left(-X_1 X_3 + X_3 X_1 + X_2 X_4 - X_4 X_2\right) j + \left(-X_1 X_4 + X_4 X_1 - X_2 X_3 + X_3 X_2\right) k \\ &= X_1 X_1 + X_2 X_2 + X_3 X_3 + X_4 X_4 \end{aligned}$$

Buradan norm

$$N_{Q_{\mathbb{D}}} = X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 + X_4{}^2$$

olur. Bu dual sayıya $Q_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun normu denir [9].

2.10. Dual Kuaterniyonların Kutupsal Formu

Tanım 2.10.1. $Q_{\mathbb{D}} = X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k$ dual kuaterniyonu olmak üzere, $\varphi = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açı olsun,

$$Q_{\mathbb{D}} = \sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}\left(\cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi\right)$$

ifadesine $Q_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonunun kutupsal gösterimi denir.

Burada ki $\vec{e}$ birim vektörü ve φ dual açısı,

$$e=(e_1,e_2,e_3)=\left(\frac{X_2}{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}+X_4^{\,2}}},\frac{X_3}{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}+X_4^{\,2}}},\frac{X_4}{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}+X_4^{\,2}}}\right)$$

$$\cos\varphi=\frac{X_1}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}},\quad \sin\,\varphi=\frac{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{2}+X_4^{\,2}}}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}}$$

olacak şekildedir. Gerçektende bu kutupsal gösterim,

$$\begin{aligned}
Q_{\mathbb{D}}&=X_1+X_2i+X_3j+X_4k\\
&=\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}\left(\frac{X_1}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}}+\frac{1}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}}\left(X_2i+X_3j+X_4k\right)\right)\\
&=\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}\left(\frac{X_1}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}}+\frac{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}+X_4^{\,2}}}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}}\left(i\frac{X_2}{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}+X_4^{\,2}}}+j\frac{X_3}{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}+X_4^{\,2}}}+k\frac{X_4}{\sqrt{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}+X_4^{\,2}}}\right)\right)\\
&=\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}\left(\cos\varphi+\sin\varphi(e_1,e_2,e_3)\right)\\
&=\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}\left(\cos\varphi+\vec{e}\sin\varphi\right)
\end{aligned}$$

işlemlerini yaparak $Q_{\mathbb{D}}=\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}\left(\cos\varphi+\vec{e}\sin\varphi\right)$ şeklinde gösterilebilir. Bu işlemlerde $\vec{e}$ vektörünün birim vektör olduğu bilindiğinden

$$N_{\vec{e}} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

$$= \frac{X_2^2}{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2} + \frac{X_3^2}{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2} + \frac{X_4^2}{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}$$

$$= \frac{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}$$

$$= 1$$

ifadesi açık bir şekilde görülebilir.

Eğer dual kuaterniyonun normu $N_{Q_{\mathbb{D}}} = 1$ ise dual birim kuaterniyon olarak adlandırılır.

$Q_{\mathbb{D}}$ dual birim kuaterniyon olsun, kutupsal formda yazılacak olursa

$$\cos\varphi = \frac{X_1}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}}{\sqrt{N_{Q_{\mathbb{D}}}}} \quad \left(N_{Q_{\mathbb{D}}} = 1\right)$$

bağıntıları göz önüne alınırsa

$$\cos\varphi = X_1 \quad \text{ve} \quad \sin\varphi = \sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}$$

olacak şekilde

$$Q_{\mathbb{D}} = \cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi$$

biçiminde yazılır [12].

2.11. Dual Kuaterniyonlar için De-Moivre Formülü

Öklid çarpımını $(\ \cdot\ )$ işlemi, $(\times)$ işlemi dual kuaterniyon için kuaterniyon çarpımını

ve $(\wedge)$ işlemi vektörel çarpımı göstersin.

Birim vektör dual kuaterniyonlar kümesi $S_{\mathbb{D}}^{2}=\left\{\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\in\mathbb{D}^{3}:N_{\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}}=1,\overline{\vec{V}}_{Q_{\mathbb{D}}}=-\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\right\}$ ve

birim kompleks kuaterniyonlar kümesi $S_{\mathbb{D}}^{3}=\left\{Q_{\mathbb{D}}\in\mathbb{D}^{4}:N_{Q_{\mathbb{D}}}=1\right\}$ olmak üzere,

$$\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}.\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}=1,\ \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\times\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}=0 \text{ ve } \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\wedge\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}=\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}^{\,2}=-1 \qquad (2.3)$$

bağıntıları sağlanır [12]. Dolayısıyla aşağıdaki Lemma ve Teoremler verilebilir.

Lemma 2.11.1. $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\in S_{\mathbb{D}}^{2}$ birim vektör dual kuaterniyonu $\varphi=\theta+\varepsilon\theta^{*}$ ve $\delta=\beta+\beta^{*}$ dual açılar olmak üzere,

$$\left(\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\right)\left(\cos\delta+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\delta\right)=\cos(\varphi+\delta)+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin(\varphi+\delta)$$

olur.

İspat. $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\in S_{\mathbb{D}}^{2}$ için (2.3) denkleminden

$$\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\wedge\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}=\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}^{\,2}=-1$$

ve

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

trigonometrik özdeşlikleri gözönüne alınırsa

$$\left(\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\right)\left(\cos\delta+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\delta\right)=\cos\varphi\cos\delta+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\cos\varphi\sin\delta+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\cos\delta+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\wedge\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\sin\delta$$

$$=\cos\varphi\cos\delta-\sin\varphi\sin\delta+\left(\sin\varphi\cos\delta+\cos\varphi\sin\delta\right)\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$$

$$=\cos\left(\varphi+\delta\right)+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\left(\varphi+\delta\right)$$

eşitliği elde edilir [3].

Teorem 2.11.2. (De-Moivre Formülü) Kutupsal gösterimi $Q_{\mathbb{D}}=\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi$ biçiminde olan dual kuateriyon, $Q_{\mathbb{D}}\in S^3_{\mathbb{D}}$ ve $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\in S^2_{\mathbb{D}}$ olmak üzere, $n\in\mathbb{Z}$ için

$$Q_{\mathbb{D}}^n=\left(\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\right)^n=\cos\left(n\varphi\right)+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\left(n\varphi\right)$$

dir

İspat. $Q_{\mathbb{D}}\in S^3_{\mathbb{D}}$ ve $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\in S^2_{\mathbb{D}}$ olmak üzere kutupsal gösterimi $Q_{\mathbb{D}}=\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi$ olan dual kuaterniyonun De-Moivre formülünü sağladığını tümevarım yöntemi ile gösterelim.

n negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$n=2$ için teoremin doğru olduğu Lemma 2.11.1 kullanılarak,

$$\left(\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\right)$$

$$=\cos\varphi\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\cos\varphi\sin\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\cos\varphi+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\wedge\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\varphi\sin\varphi$$

$$=\cos\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\varphi+\left(\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi\right)\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}$$

$$=\cos\left(\varphi+\varphi\right)+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\left(\varphi+\varphi\right)$$

$$=\cos\left(2\varphi\right)+\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\sin\left(2\varphi\right)$$

şeklinde gösterilir.

$n = k$ için

$$Q_{\mathbb{D}}^{\,k} = \left(\cos\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi\right)^{k} = \cos(k\varphi) + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin(k\varphi)$$

olduğunu varsayalım,

$n = k+1$ için

$$Q_{\mathbb{D}}^{\,k+1} = \left(\cos\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi\right)^{k+1} = \cos(k+1)\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin(k+1)\varphi$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\left(\cos\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi\right)^{k+1} &= \left(\cos\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi\right)^{k} \left(\cos\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi\right) \\
&= \left(\cos(k\varphi) + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin(k\varphi)\right)\left(\cos\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi\right) \\
&= \cos(k\varphi + \varphi) + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin(k\varphi + \varphi) \\
&= \cos\left((k+1)\varphi\right) + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\left((k+1)\varphi\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür..

n negatif bir tamsayı olsun.

$$\begin{aligned}
Q_{\mathbb{D}}^{-1} &= \cos\varphi - \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi \\
Q_{\mathbb{D}}^{-n} &= \cos(n\varphi) - \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin(n\varphi) \\
&= \cos(-n\varphi) + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin(-n\varphi)
\end{aligned}$$

olduğu aşikardır. Böylelikle pozitif ve negatif tamsayılar için dual kuaterniyonlarda De-Moivre formülü ispatı tamamlanmış oldu [12].

2.12. Dual Kuaterniyonlar için Euler Formülü

Teorem 2.8.1. (Euler Formülü) Her $Q_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonu için $Q_{\mathbb{D}} \in S_{Q_{\mathbb{D}}}^{3}$ ve $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \in S_{Q_{\mathbb{D}}}^{2}$ olmak üzere

$$e^{\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi} = \cos\varphi + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \sin\varphi$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.3) denkleminden $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \in S_{Q_{\mathbb{D}}}^{2}$ ve $\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} \wedge \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}} = \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}^{2} = -1$ bilinen eşitlikleri gözönüne alalım. Buradan

$$\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}^{3} = -\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}},\ \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}^{4} = -1,\ \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}^{5} = \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}},\ldots$$

şeklide kuvvetleri yorumlanabilir. Herhangi bir θ açısı için

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \ldots$$

$$\sin\theta = \theta \quad \frac{\theta^3}{3!} \quad \frac{\theta^5}{5!} \quad \frac{\theta^7}{7!} \quad \frac{\theta^9}{9!} - \ldots$$

bilinen eşitlikleride ispat içerisinde kullanılırsa,

$$e^{\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi} = 1 + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi + \frac{\left(\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi\right)^2}{2!} + \frac{\left(\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi\right)^3}{3!} + \frac{\left(\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi\right)^4}{4!} + \frac{\left(\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi\right)^5}{5!} + \frac{\left(\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi\right)^6}{6!} + \frac{\left(\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi\right)^7}{7!} + \frac{\left(\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi\right)^8}{8!} + \ldots$$

$$= 1 + \vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{\vec{V}_{Q_{\mathbb{D}}}\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \cdots\right) + \vec{V}_Q \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos\varphi + \vec{V}_Q \sin\varphi$$

eşitliği yazılabilir . Dolayısıyla dual kuaterniyonlar için Euler formülü gösterilmiş olur [12].

BÖLÜM 3. DUAL-KOMPLEKS SAYILAR

Majernik çok bileşenli sayı sistemi üzerinde çalışmıştır. Dört bileşenli sayı sisteminin üzerinde kompleks, dual ve ikili (binary) kuaterniyonları ile çalışmalar yapmıştır [12]. Daha sonra Ferid Messelmi bu çalışmaların ışığında dual-kompleks sayıların cebirsel özelliklerini tanımlamıştır [13].

3.1. Dual-Kompleks Sayıların Yapısı

Tanım 3.1.1. Dual sayılar cümlesi $\mathrm{D}=\left\{ d=x+\varepsilon y:\varepsilon\neq 0,\varepsilon^2=0,x,y\in\mathbb{R}\right\}$ şeklinde gösterilir. Bu cümle birimli, değişmeli bir halkadır. $i^2=-1$ olmak üzere, bilinen kompleks sayılar gösterimi $z=x+iy$ şeklindedir. Kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}=\left\{ z=x+iy:i^2=-1,x,y\in\mathbb{R}\right\}$ olarak gösterilir.

Eğer, $z=x_1+iy_1$ ve $t=x_3+ix_4$ kompleks sayıları alınıp

$$w=(z,t)=z+t\varepsilon \quad \left(\varepsilon^2=\varepsilon^3=\varepsilon^4=\varepsilon^5=.....=0\right)$$

olacak şekilde tek türlü yazılırsa, (z,t) ikilileri dual-kompleks sayı olarak tanımlanır. Buna göre dual-kompleks sayılar kümesi

$$\mathbb{DC}=\left\{ w=z+t\varepsilon:z,t\in\mathbb{C},\varepsilon^2=0,\varepsilon\neq 0\right\}$$

olarak gösterilir. Dual-kompleks sayıların cebirsel şekli,

$$w=x_1+x_2i+x_3\varepsilon+x_4\varepsilon i$$

biçiminde ifade edilir [13].

Burada i kompleks sayı birimi, ε dual birim ve εi dual-kompleks birimi olarak i,ε ve εi üç boyutlu vectör uzayında birim vektörlerdir. Dolayısıyla dual-kompleks sayının baz elemanları $\{1, i, \varepsilon, \varepsilon i\}$,

$$1i = i \ , \ 1\varepsilon = \varepsilon \ , \ 1\varepsilon i = \varepsilon i \ , \ ii = -1$$

$$\varepsilon\varepsilon = 0 \ , \ \varepsilon i = i\varepsilon \ , \ \varepsilon\varepsilon i = 0 \ , \ i(\varepsilon i) = -\varepsilon$$

özelliklerini sağlar.

Tanım 3.1.2. $w = x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i$ dual-kompleks sayısı için

$$\mathrm{Reel}(w) = x_1$$

sayısına dual-kompleks sayının reel kısmı denir [13].

Tanım 3.1.3. w_1 ve w_2 dual-kompleks sayıları olmak üzere $\mathbb{DC}$ kümesi üzerinde tanımlanan toplama işlemi

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{DC} \times \mathbb{DC} &\to \mathbb{DC} \\ w_1, w_2 \to w_1 \oplus w_2 &= (z_1 + t_1) \oplus (z_2 + t_2) \\ &= (z_1 + z_2, t_1 + t_2) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Buradaki toplama işlemini cebirsel şeklinde yazacak olursak
$w_1 = x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i$ ve $w_2 = y_1 + y_2 i + y_3\varepsilon + y_4\varepsilon i$ dual-kompleks sayıları için

$$w_1 + w_2 = \left(x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i\right) + \left(y_1 + y_2 i + y_3\varepsilon + y_4\varepsilon i\right)$$
$$= \left(x_1 + y_1\right) + \left(x_2 + y_2\right)i + \left(x_3 + y_3\right)\varepsilon + \left(x_4 + y_4\right)\varepsilon i$$

ifadesi yazılabilir.

Tanım 3.1.4. λ reel sayısını ve w dual-kompleks sayısını ele alalım. Buna göre

$$\odot : \mathbb{R}\times\mathbb{DC} \to \mathbb{DC}$$
$$\left(\lambda, w\right) \to \lambda \odot w = \lambda w$$

şeklinde tanımlanan işleme skaler ile dual-kompleks sayının çarpımı denir.

Teorem 3.1.5. $\left\{\mathbb{DC},\oplus,\mathbb{R},+,.,\odot\right\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

İspat. $\mathbb{DC}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\oplus$ toplama işlemine göre $w_1 = x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i$ ve $w_2 = y_1 + y_2 i + y_3\varepsilon + y_4\varepsilon i$ dual-kompleks sayılar olmak üzere;

i-) $w_1 \oplus w_2 = \left(x_1 + y_1\right) + \left(x_2 + y_2\right)i + \left(x_3 + y_3\right)\varepsilon + \left(x_4 + y_4\right)\varepsilon i \in \mathbb{DC}$

olduğundan kapalılık özelliğini sağlar.

ii-) $w_1 \oplus w_2 = w_2 \oplus w_1$

reel sayıların değişme özelliğinden,dual-kompleks sayıları toplama işlemine göre değişmelidir.

iii-) $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{DC}$ olmak üzere

$$w_1 \oplus \left(w_2 \oplus w_3\right) = \left(w_1 \oplus w_2\right) \oplus w_3$$

olduğundan birleşme özelliğini sağlar.

iv-) $\exists e \in \mathbb{DC}$ öyle ki $e \oplus w_1 = w_1 \oplus e = w_1$ olacak şekilde

$$e = 0 + 0i + 0\varepsilon + 0\varepsilon i$$

birim elemanı vardır. Bu birim eleman $e = 0 + 0i + 0 + 0$ dır.

v-) $w_1 \oplus w_1^{-1} = w_1^{-1} \oplus w_1 = e$ şartını sağlayan

$$w_1^{-1} = -x_1 - x_2 i - x_3 \varepsilon - x_4 \varepsilon i$$

olacak şekilde $w_1^{-1} \in \mathbb{DC}$ mevcut olduğundan ters eleman özelliğini sağlar. Ters eleman toplama işlemine göre $w_1^{-1} = -x_1 - x_2 i - x_3 \varepsilon - x_4 \varepsilon i$ dir.

Dolayısıyla i,ii,iii,iv ve v maddeleri sonucu $(\mathbb{DC}, \oplus)$ ikilisi bir abel grubudur.

$\mathbb{DC}$ kümesi üzerinde tanımlana $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{DC} \to \mathbb{DC}$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar

i-) $\lambda \odot (w_1 \oplus w_2) = (\lambda \odot w_1) \oplus (\lambda \odot w_2)$

ii-) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot w_1 = (\lambda \odot w_1) \oplus (\lambda \odot w_1)$

iii-) $(\lambda_1 . \lambda_2) \odot \mathrm{w}_1 = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot w_1)$

iv-) $1 \odot \mathrm{w}_1 = w_1$

O halde $\{\mathbb{DC}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. $\mathbb{DC} = S_p\{1, i, \varepsilon, \varepsilon i\}$ olduğundan $boy(\mathbb{DC}) = 4$ tür.

Tanım 3.1.6. $w_1 = z_1 + t_1\varepsilon$ ve $w_2 = z_2 + t_2\varepsilon$ dual-kompleks sayılar $\mathrm{Reel}(w_2) \neq 0$

olmak üzere dual kompleks sayılarda bölme işlemi

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{\left(z_1+t_1\varepsilon\right)}{\left(z_2+t_2\varepsilon\right)}=\frac{\left(z_1+t_1\varepsilon\right)\left(z_2-t_2\varepsilon\right)}{\left(z_2+t_2\varepsilon\right)\left(z_2-t_2\varepsilon\right)}$$

$$=\frac{z_1z_2+\left(z_2t_1-z_1t_2\right)\varepsilon}{z_2^{2}-z_2t_2\varepsilon+z_2t_2\varepsilon-t_2t_2\varepsilon}=\frac{z_1z_2}{z_2^{2}}+\frac{z_2t_1+z_1t_2}{z_2^{2}}\varepsilon$$

$$=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2t_1-z_1t_2}{z_2^{2}}\varepsilon \qquad \left(z_2\neq 0\right)$$

biçiminde tanımlanır [13].

Tanım 3.1.7. $w_1=z_1+t_1\varepsilon$ ve $w_2=z_2+t_2\varepsilon$ dual-kompleks sayılar olmak üzere dual kompleks sayılarda çıkarma işlemi

$$w_1-w_2=\left(z_1+t_1\varepsilon\right)-\left(z_2+t_2\varepsilon\right)=\left(z_1-z_2\right)+\left(t_1-t_2\right)\varepsilon$$

olarak tanımlanır [13].

Tanım 3.1.8. $w_1=z_1+t_1\varepsilon$ ve $w_2=z_2+t_2\varepsilon$ dual-kompleks sayılar olmak üzere dual kompleks sayılarda çarpma işlemi

$$w_1\times w_2=\left(z_1+t_1\varepsilon\right)\times\left(z_2+t_2\varepsilon\right)=z_1z_2+\left(z_1t_2+t_1z_2\right)\varepsilon$$

biçiminde tanımlanır [13].

3.2. Dual-Kompleks Sayıların Eşlenik ve Modülü

Tanım 3.2.1. Kompleks sayıların ve dual sayıların hem cebirsel hem de geometrik özelliklerine göre dual-kompleks sayıların beş olası eşleniği tanımlanır [13]. $w=z+t\varepsilon$ bir dual-kompleks sayı olmak üzere

$$w^{\dagger_1} = \bar{z} + \bar{t}\varepsilon \qquad \text{(kompleks eşlenik)}$$
$$w^{\dagger_2} = z - t\varepsilon \qquad \text{(dual eşlenik)}$$
$$w^{\dagger_3} = \bar{z} - \bar{t}\varepsilon \qquad \text{(çift eşlenik)}$$
$$w^{\dagger_4} = z\left(1 - \frac{t}{z}\varepsilon\right) \qquad \text{(dual-kompleks eşlenik)}$$
$$w^{\dagger_5} = t - z\varepsilon \qquad \text{(ters dual eşlenik)}$$

tanımlanan eşleniklerdir.

Tanım 3.2.2. $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayısını alalım. w dual kompleks sayısı için beş farklı modül tanımlanır.

Dual-kompleks sayının modülleri $|w|^{\dagger_i}$ $(1 \le i \le 5)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|w|^{\dagger_1} = w \times w^{\dagger_1} = (z + t\varepsilon)(\bar{z} + \bar{t}\varepsilon) &= z\bar{z} + z\bar{t}\varepsilon + \bar{z}t\varepsilon + 0 \\ &= z\bar{z} + \left(z\bar{t} + \bar{z}t\right)\varepsilon \\ &= |z|^2 + 2\mathcal{R}\mathrm{e}\left(z\bar{t}\right)\varepsilon \in \mathbb{D}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|w|^{\dagger_2} = w \times w^{\dagger_2} = (z + t\varepsilon)(z - t\varepsilon) &= zz - zt\varepsilon + zt\varepsilon + 0 \\ &= z^2 \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|w|^{\dagger_3} = w \times w^{\dagger_3} = (z + t\varepsilon)(\bar{z} - \bar{t}\varepsilon) &= z\bar{z} - z\bar{t}\varepsilon + \bar{z}t\varepsilon + 0 \\ &= |z|^2 - \left(z\bar{t} - \bar{z}t\right)\varepsilon \\ &= |z|^2 - 2\,\mathrm{Im}\left(z\bar{t}\right)\varepsilon\, i \in \mathbb{DC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|w|^{\dagger_4} = w \times w^{\dagger_4} = (z + t\varepsilon)\left(\underline{z}\left(1 - \frac{t}{\bar{z}}\varepsilon\right)\right) &= z\underline{z} - z\underline{z}\frac{t}{\bar{z}}\varepsilon + \underline{z}t\varepsilon + 0 \\ &= z\bar{z} - \bar{z}t\varepsilon + \bar{z}t\varepsilon \\ &= z\bar{z} \\ &= |z|^2 \in \mathbb{R} \qquad (z \neq 0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|w|^{\dagger_5} = w \times w^{\dagger_5} &= (z+t\varepsilon)(t-z\varepsilon) \\
&= zt + t^2\varepsilon - z^2\varepsilon + 0 \\
&= zt + \left(t^2 - z^2\right)\varepsilon \in \mathbb{DC}
\end{aligned}
$$

şeklinde beş farklı modül tanımlanır [13].

3.3. Dual-Kompleks Sayıların Üstel Gösterimi

Tanım 3.3.1. $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayısını alalım, dual kompleks sayılar için kuvvet alma işlemi

$$
\begin{aligned}
w^n = (z+t\varepsilon)^n &= \binom{n}{0} z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} (t\varepsilon)^2 + \ldots + \binom{n}{n} (t\varepsilon)^n \\
&= z^n + nz^{n-1} t\varepsilon \qquad \left(\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \ldots = 0\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır [13].

Tanım 3.3.2. $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayı ve $(z \neq 0)$ olmak üzere dual-kompleks sayıların üstel ifadesi

$$
e^w = z e^{\frac{t}{z}\varepsilon}
$$

biçimindedir [13].

Tanım 3.3.3. $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayısının üstel gösterimi $e^w = z e^{\frac{t}{z}\varepsilon}$ olsun. Buradaki $\frac{t}{z}$ dual-kompleks açısı, dual-kompleks sayıların argümentidir ve

$\arg w = \frac{t}{z} = \varphi$ olarak gösterilir [13].

Tanım 3.3.4. Kompleks sayılardaki $|z|$, dual-kompleks sayının modülü $\left(\left|w.w^{\dagger_4}\right| = \sqrt{|z|^2}\right)$ ve $\varphi = \dfrac{t}{z}$ dual-kompleks sayının argümenti olmak üzere

$$\cos g(\varphi) = \frac{z}{z} = 1 \quad , \quad \sin g(\varphi) = \frac{t}{z} = \varphi$$

dir [13]. Burada ki galilean sinüs ve cosinüs için

$$\cos g(x+y) = \cos g(x)\cos g(y) - \varepsilon^2 \sin g(x)\sin g(y) = \cos g(x)\cos g(y)$$

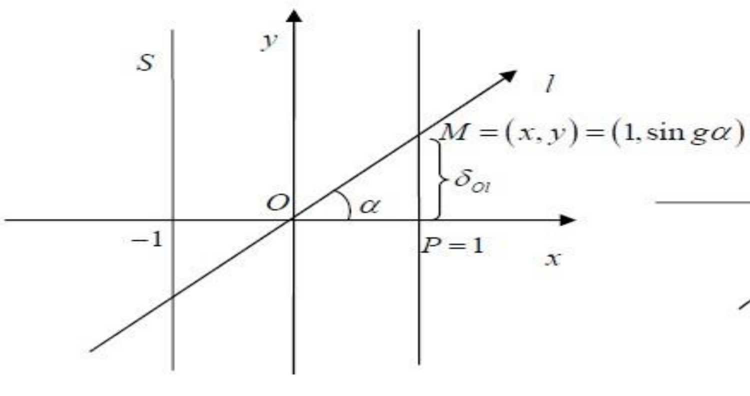
$$\sin g(x+y) = \sin g(x)\cos g(y) + \cos g(x)\sin g(y)$$

$$\cos g^2(x) + \varepsilon^2 \sin g^2(x) = 1$$

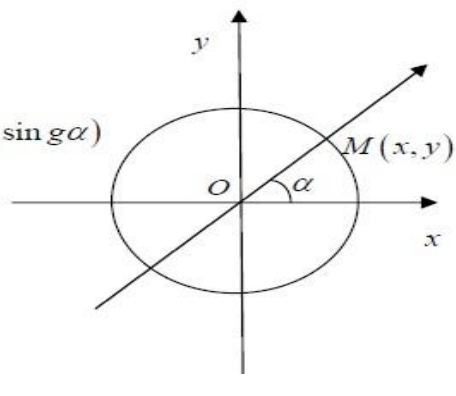
eşitlikleri yazılabilir [14].

Tanım 3.3.5. Galilean geometri üzerine birçok çalışmalar yapılmış olup en ömenlisi 1979 yılında Yaglam tarafından yayınlanan Galilean geometriyi tanıtan “A simple non-Euclidean Geometry and its Physical Basis” adlı eseridir.

S , O merkezli birim çember ve M , x ve y koordinatlı S üzerinde bir nokta olsun.



Şekil 3.4 Galilean birim çemberi



Şekil 3.5 Euclid birim çemberi

l, OM doğrusunu ve α , δ_{OD} açısını göstersin.

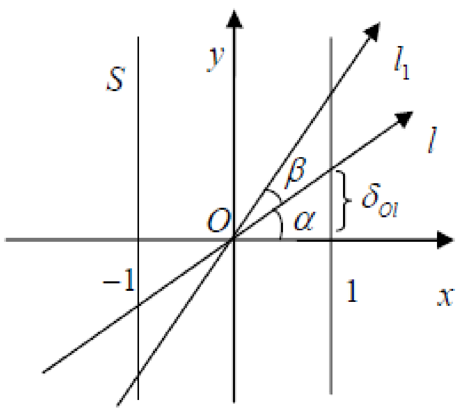
Buradan

$$\cos g\alpha = \frac{|OP|}{|OM|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sin g\alpha = \frac{(MP)}{(OM)} = \frac{\delta_{OD}}{1} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

bulunur.

l doğrusu ile aralarındaki açı β olacak şekilde l_1 doğrusu verilsin. Bu durumda



Şekil 3.6 Galilean Geometride Açı

$$\cos g(\alpha+\beta) = 1$$
$$\sin g(\alpha+\beta) = \alpha+\beta$$
$$= \alpha 1 + \beta 1$$

olduğundan

$$\cos g\,(\alpha+\beta) = \cos g\alpha \cos g\beta$$
$$\sin g\,(\alpha+\beta) = \sin g\alpha \cos g\beta + \cos g\alpha \sin g\beta$$

yazılabilir [14].

$\{\mathbb{DC}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ dual-kompleks sayıların vektör uzayı, $\{G^4, [+], \mathbb{R}, +, ., [.]\}$ galilean vektör uzayına izomorftur. Burada $[+]$ işlemi G^4 uzayında iki vektörün toplama işlemi, $[.]$ işlemi ise bir skalerle G^4 uzayında bir vektörün çarpımı olan dış işlemidir $(\mathbb{DC} \cong G^4)$ [14].

3.4. Dual-Kompleks Sayıların Euler ve De-Moivre Formülleri

Tanım 3.4.1. $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayı ve φ açısı w dual kompleks sayısının esas argümenti olsun. Her dual-kompleks sayı

$$w = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\cos g(\varphi) = 1$ ve $\sin g(\varphi) = \varphi$ olarak tanımlandı.

Teorem 3.4.2. (Euler Formülü) $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayı ve φ açısı w dual kompleks sayısının esas argümenti olmak üzere

$$w = ze^{\varepsilon\varphi} = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$$

dir.

İspat. $w=z+t\varepsilon$ dual-kompleks sayısının üstel gösterimi $e^{w}=ze^{\frac{t}{z}\varepsilon}$ olduğunu ve buradaki $\frac{t}{z}$ dual-kompleks açısının φ esas argümentine karşılık geldiğini Tanım 3.3.3 de ifade edildi. Dolayısıyla

$$w=ze^{\varepsilon\varphi}=z\left(1+\varepsilon\varphi+\frac{(\varepsilon\varphi)^2}{2!}+\frac{(\varepsilon\varphi)^3}{3!}+\dots\right)$$

açılımı yapılırsa dual birimin özelliğinden

$$\begin{aligned} w=ze^{\varepsilon\varphi} &= z\left(1+\varepsilon\varphi\right) \\ &= z\left(\cos g(\varphi)+\varepsilon\sin g(\varphi)\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.3. $w=z+t\varepsilon$ dual-kompleks sayı ve $\varphi=\frac{t}{z}$ olmak üzere $w=ze^{\varepsilon\varphi}$ eşitliğinde $z=1$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}}=e^{\varepsilon(-\varphi)}$$

dir.

İspat. $e^{\varepsilon\varphi}$ ifadesi için Euler formülünü açılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} &= \frac{1}{\left(1+\varepsilon\varphi+\frac{(\varepsilon\varphi)^2}{2!}+\frac{(\varepsilon\varphi)^3}{3!}+\dots\right)} \\ &= \frac{1}{\cos g(\varphi)+\varepsilon\sin g(\varphi)} \end{aligned}$$

ifadesinin payda ve payı $\cos g(\varphi) - \varepsilon \sin g(\varphi)$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} = \frac{1}{\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)} \frac{\left(\cos g(\varphi) - \varepsilon \sin g(\varphi)\right)}{\left(\cos g(\varphi) - \varepsilon \sin g(\varphi)\right)}$$

$$= \frac{\cos g(\varphi) - \varepsilon \sin g(\varphi)}{\cos g^{2}(\varphi)}$$

elde edilir. Burada Tanım 3.3.4 de verilen $\cos g^{2}(\varphi) = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} = \cos g(\varphi) - \varepsilon \sin g(\varphi)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} = \cos g(\varphi) - \varepsilon \sin g(\varphi) = \cos g(-\varphi) + \varepsilon \sin g(-\varphi)$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\frac{1}{e^{\varepsilon\varphi}} = e^{\varepsilon(-\varphi)}$ elde edilir.

Teorem 3.4.4. (De-Moivre Formülü) $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayı ve

$$w = ze^{\varepsilon\varphi} = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$$

dual-kompleks sayının kutupsal gösterimi olmak üzere,

$$w^{n} = \left(ze^{\varepsilon\varphi}\right)^{n} = \left(z(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^{n} = z^{n}\left(\cos g(n\varphi) + \varepsilon \sin g(n\varphi)\right)$$

eşitliği her n negatif olmayan tamsayı için sağlar.

İspat. Tanım 3.3.4 de verilen galelian trigonometrik özdeşlikler gözönüne alınırsa, $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayısı için

$$w^n = \left(ze^{\varepsilon\varphi}\right)^n = \left(z(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^n = z^n \left(\cos g(n\varphi) + \varepsilon \sin g(n\varphi)\right)$$

ifadesini tümevarım yöntemiyle gösterelim. Öncelikle

$n = 2$ için

$$\left(ze^{\varepsilon\varphi}\right)^2 = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right) z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$$

$$= z^2\left(\cos^2 g(\varphi) + \varepsilon\left(\cos g(\varphi)\sin g(\varphi) + \sin g(\varphi)\cos g(\varphi)\right)\right)$$

$$= z^2\left(\cos g(2\varphi) + \varepsilon \sin g(2\varphi)\right)$$

dir.

$n = k$ negatif olmayan bir tam sayı için

$$\left(z(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^k = z^k \left(\cos g(k\varphi) + \varepsilon \sin g(k\varphi)\right)$$

ifadesi doğru olsun.

$n = k + 1$ için

$$\left(z(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^{k+1} = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^k \left(z(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$$

$$= z^k \left(\cos g(k\varphi) + \varepsilon \sin g(k\varphi)\right) z \left(\cos g(k\varphi) + \varepsilon \sin g(k\varphi)\right)$$

$$= z^k \left(\cos g(k\varphi)\cos g(\varphi) + \varepsilon\left(\cos g(k\varphi)\sin g(\varphi) + \sin g(k\varphi)\cos g(\varphi)\right)\right)$$

$$= z^{k+1}\left(\cos g((k+1)\varphi) + \varepsilon \sin g((k+1)\varphi)\right)$$

olduğundan $n = k + 1$ içinde eşitlik doğrudur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.5. $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayısı için

$$w^n = \left(ze^{\varepsilon\varphi}\right)^n = \left(z(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^n = z^n \left(\cos g(n\varphi) + \varepsilon \sin g(n\varphi)\right)$$

eşitliği her n tam sayısı için sağlar.

İspat. i-) n negatif olmayan tam sayılar için ispat Teorem 3.4.5 de gösterildi.

ii-) $-n$ negatif tam sayı olmak üzere Teorem 3.4.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} (w)^{-1} &= z^{-1}\left(\cos g(\varphi) - \varepsilon \sin g(\varphi)\right) \\ w^{-n} &= z^{-n}\left(\cos g(n\varphi) - \varepsilon \sin g(n\varphi)\right) \\ &= z^{-n}\left(\cos g(-n\varphi) + \varepsilon \sin g(-n\varphi)\right) \end{aligned}$$

eşitliği gösterilir. Dolayısıyla i ve ii'den her tam sayı değeri için

$$w^n = \left(ze^{\varepsilon\varphi}\right)^n = \left(z(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^n = z^n \left(\cos g(n\varphi) + \varepsilon \sin g(n\varphi)\right)$$

eşitliğin sağladığı ispatlandı.

Örnek 3.4.6. $w = 1 + i + \varepsilon + \varepsilon i$ dual-kompleks sayısı için w dual-kompleks sayısının dördüncü kuvvetini $\left(w^4\right)$ göstermeye çalışalım. Burada w dual-kompleks sayısını

$$w = z + t\varepsilon$$

şeklinde yazarsak $z = 1 + i$ ve $t = 1 + i$ kompleks sayıları olur. w dual-kompleks sayısının argümenti $\frac{t}{z} = \varphi$ olarak alınır w dual-kompleks sayısının kutupsal formu

$$w = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$$

olarak yazılır. Buradan Teorem 3.4.5 gereği

$$w^4 = z^4 \left(\cos g(4\varphi) + \varepsilon \sin g(4\varphi)\right)$$

olur. Buradaki galilean trigonometrik fonksiyonlar eşiti Tanım 3.4.1 de verilmişti. Dolayısıyla

$$w^4 = (1+i)^4 (1+\varepsilon 4)$$

$$= -4\,(1+\varepsilon\, 4) = -4 - 16\varepsilon$$

bulunur.

Örnek 3.4.7. $w=1-i+\varepsilon+3\varepsilon i$ dual kompleks sayısı için w^2 vew^{10} değerlerini bulalım. $z,t \in \mathbb{C}$ ve $z=1-i, t=1+3i$ alınsın. $w=z+t\varepsilon$ şeklinde yazılan dual-kompleks sayı için $\frac{t}{z} = \frac{1-i}{1+3i} = \varphi$ argümenti alınır. Doyısıyla w dual-kompleks sayısının kutupsal formu $w = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$ dir. Buradan

$$w^2 = z^2 \left(\cos g(2\varphi) + \varepsilon \sin g(2\varphi)\right)$$
$$= (1-i)^2 \left(1+\varepsilon \frac{2(1+3i)}{(1-i)}\right)$$

$$= -2i + 8\varepsilon + 4\varepsilon i$$

ve

$$w^{10} = z^{10} \left(\cos g(10\varphi) + \varepsilon \sin g(10\varphi)\right)$$

$$= (1-i)^{10} \left(1+\varepsilon 10 \frac{(1+3i)}{(1-i)}\right)$$

$$= -32i + 640\varepsilon + 320i$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4.8. $w = z + t\varepsilon$ bir dual-kompleks sayı olmak üzere, w dual-kompleks sayısının n. dereceden kökü

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{z}\left(\cos g\left(\frac{\varphi}{n}\right) + \varepsilon \sin g\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

şeklindedir.

İspat. $w = z + t\varepsilon$ dual-kompleks sayısının kutupsal gösterimi $w = z\left(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)$ şeklindedir. Burada

$$w^n = \left(z.(\cos g(\varphi) + \varepsilon \sin g(\varphi)\right)^n = z^n \left(\cos g(n\varphi) + \varepsilon \sin g(n\varphi)\right)$$

olduğunu Teorem 3.4.5 de gösterdik. Dolayısıyla

$$\sqrt[n]{w} = w^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{n}}\left(\cos g\left(\frac{1}{n}\varphi\right) + \varepsilon \sin g\left(\frac{1}{n}\varphi\right)\right)$$

$$= \sqrt[n]{z}\left(\cos g\left(\frac{\varphi}{n}\right) + \varepsilon \sin g\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

eşitliği gösterilmiş olur.

3.5. Dual-Kompleks Sayıların Logaritma Fonksiyonu ve Matris Gösterimi

Tanım 3.5.1. Her $w = z + t\varepsilon = ze^{\frac{t}{z}\varepsilon}$ dual-kompleks sayısının logaritma fonksiyonu

$$\ln w = \ln\left(z e^{\frac{t}{z}\varepsilon} \right) = \left(\ln z + \ln e^{\frac{t}{z}\varepsilon} \right)$$

$$= \ln z + \frac{t}{z}\varepsilon = \ln z + \left(\arg_{\mathbb{DC}}\right)\varepsilon$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.5.2 x_1, x_2, x_3 ve x_4 reel sayılar olmak üzere $w = x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i$ dual-kompleks sayısı olsun. Her $r \in \mathbb{DC}$ için sol lineer dönüşüm

$$L_W : \mathbb{DC} \to \mathbb{DC}$$

$$r \to L_W(r) = rw$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm bire bir ve örtendir. $\mathbb{DC}$ dual-kompleks sayılar kümesinin $\{1, i, \varepsilon, \varepsilon i\}$ baz vektörleri kullanılarak;

$$L_W(1) = 1(x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i) = x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i$$

$$L_W(i) = i(x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i) = x_1 i - x_2 + x_3\varepsilon i - x_4\varepsilon$$

$$L_W(\varepsilon) = \varepsilon(x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i) = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon i$$

$$L_W(\varepsilon i) = \varepsilon i(x_1 + x_2 i + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon i) = x_1\varepsilon i - x_2\varepsilon$$

elde edilir. Böylece tanımlanan L_W dönüşümünün temel matris temsili,

$$L_W = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$\det(L_w) = x_1 \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} - (-x_2) \begin{vmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$\det(L_w) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2$$

$$= |z|^2$$

$$= ww^{\dagger_4}$$

olduğu görülür.

Dual-kompleks sayılar değişmeli olduğu için sol ve sağ matris temsili aynıdır.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde "Dual sayıların bileşenleri kompleks sayı olursa ne olur?" sorusu üzerine duruldu. Böylece dual-kompleks sayılar tanımlandı ve cebirsel yapısıyla ilgili teoremler verildi. Daha sonra bilinen De-Moivre ve Euler formüllerinin dual-kompleks sayılardaki karşılıkları araştırıldı. Bu formüller yardımıyla bir dual-kompleks sayının n. mertebeden kuvveti ve kökleri elde edildi. Bulunan denklemlerin doğruluğu örnekler ile desteklendi.

Bu tezde yapılan dual-kompleks sayılar sistemi sayesinde bilinen teoremler daha geniş sayı sistemlerine taşınmış oldu. Ayrıca yapmış olduğumuz çalışma genel nitelikte olup, bundan sonraki çalışmalara temel olacak niteliktedir. Böylece benzer mantıkla dual-hiperbolik sayılarda çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Mandic, D. P. and Goh, V. S. L. Complex valued nonlinear adaptive filters: noncircularity, widely linear and neural models. John Wiley & Sons, 2009.

[2] Hamilton, W. R., Lectures on Quaternions, Hodges Smith & Co., Dublin, 1853.

[3] Cho, E. De-Moivre's formula for quaternions. Appl. Math. Lett. 11(6), 33-35, 1998.

[4] Clifford, W. K. Preliminary sketch of bi-quaternions. Proc. London Math. Soc. 4. 381-395, 1873.

[5] Majernik, V., "Quaternion formulation of the Galilean Space time Transformation", Acta Physica, 56 (1): 9-13, 2006.

[6] Yüce, S. ve Ercan, Z., "On Properties of the Dual Quaternions", European Journal Of Pure and Applied Mathematics, 4 (2): 142-146, 2011.

[7] Soydaş, M. "Bi kuaterniyonların Modern Fiziğe Uygulanması", Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1-10, 2003.

[8] Ward, J. P., Quaternions and Cayley numbers algebra and applications, Kluwer Academic Publishers, London, 1997.

[9] Hacısalihoğlu, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teoerisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2, 1983.

[10] Yaglom I.M., Complex Numbers in Geometry, Academic Press, 1968.

[11] Jafari, M.: On the matrix algebra of complex quaternions. Accepted for publication in TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3565.2321

[12] Kabadayı, H. , Yaylı, Y. De-Moivre's formula for dual quaternions. Kuwait J. Sci. Technol. 38(1), 15-23, 2011.

[13] Messelmi F.: Dual-Complex Numbers and Theır Holomorphic Functions. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114178, 2015.

[14] Yaglom, I. M., A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. Springer-Verlag New York, 1979.

ÖZGEÇMİŞ

Ömer TETİK, 01.01.1991 tarihinde Akyazı'da doğdu. İlköğrenimini Sakarya'nın Akyazı İlçesinde Madanoğlu İlkokulunda, ortaöğrenimini Arifiye Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 2013 yılında tamamladı. 2014 yılında Sakarya'nın Akyazı ilçesinde Başarı Dershanesinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik anabilim dalı Geometri bilim dalında yüksek lisansa başladı. Ayrıca 2017'de Sakarya'nın Hendek ilçesinde Eğitim Fakültesinde Rehberlik ve Psikolojik Danışmanlık okumaya başladı. Halen Özel Akyazı Başarı Temel Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.