

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## YOĞUNLUKLU OFFSET REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan ULUCAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK  
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ  
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT

Mayıs 2019

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YOĞUNLUKLU OFFSET REGLE YÜZEYLER

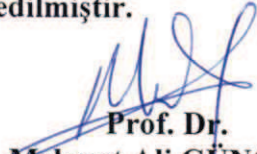
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan ULUCAN


Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

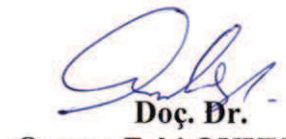
Bu tez 31.05.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

  
Prof. Dr.  
Mehmet Ali GÜNGÖR

Jüri Başkanı

  
Doç. Dr.  
Mahmut AKYİĞİT

Üye

  
Doç. Dr.  
Osman Zeki OKUYUCU

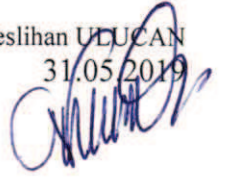
Üye

## BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Neslihan ULUCAN

31.05.2019



## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aőamasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araőtırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aőamalarında yardımlarını esirgemeyen, teővik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danıőman hocam Doç. Dr. Mahmut AKYİğİT'e en içten saygı ve teőekkürlerimi sunarım.

Çalıőmam esnasında bana vakit ayıran ve her konuda yardımını esirgemeyen Prof. Dr. Murat TOSUN'a, Prof. Dr. Soley ERSOY'a ve Dr. Öęr. Üyesi Hidayet Hda KSAL'a teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman her konuda yanımda olan ve desteğini esirgemeyen aileme teőekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
ÖZET.....	vii
SUMMARY.....	viii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler.....	3
2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerin Karakteristik Özellikleri.....	9
2.3. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Regle Yüzeyler.....	13
BÖLÜM 3.	
YOĞUNLUKLU YÜZEYLER.....	19
BÖLÜM 4.	
YOĞUNLUKLU OFFSET REGLE YÜZEYLER.....	25
4.1. $e^z$ Yoğunluklu Offset Regle Yüzeyler.....	29
4.2. $e^{-x^2-y^2}$ Yoğunluklu Offset Regle Yüzeyler.....	33

KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$c$	: Striksiyon eğrisi
$e$	: Küresel eğri
$e^\phi$	: Pozitif yoğunluk fonksiyonu
$\varphi(u, v)$	: Regle yüzey
$\varphi^*(u, v)$	: Offset regle yüzey
$H$	: Ortalama eğriliği
$H^*$	: Offset regle yüzeyin ortalama eğriliği
$H_\phi$	: Yoğunluklu ortalama eğriliği
$H_\phi^*$	: Yoğunluklu offset regle yüzeyin ortalama eğriliği
$K$	: Gauss eğriliği
$K^*$	: Offset regle yüzeyin Gauss eğriliği
$K_\phi$	: Yoğunluklu Gauss eğriliği
$K_\phi^*$	: Yoğunluklu offset regle yüzeyin Gauss eğriliği
$\kappa_g$	: Geodezik eğrilik
$s$	: Yay parametresi
$u$	: $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin birim normali
$u^*$	: $\varphi^*(u, v)$ offset regle yüzeyinin birim normali

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $K$ Gauss eğriliği .....	38
Şekil 4.2. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $H$ ortalama eğriliği.....	39
Şekil 4.3. $\varphi^*(s, v)$ evolüt offsetinin $K^*$ Gauss eğriliği.....	39
Şekil 4.4. $\varphi^*(s, v)$ evolüt offsetinin $H^*$ ortalama eğriliği.....	40
Şekil 4.5. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $e^z$ yoğunluklu $H_\phi$ ortalama eğriliği.....	41
Şekil 4.6. $\varphi^*(s, v)$ evolüt offsetinin $e^z$ yoğunluklu $H_\phi^*$ ortalama eğriliği.....	42
Şekil 4.7. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $H$ ortalama eğriliği ile $e^z$ yoğunluklu $H_\phi$ ortalama eğriliğinin ilişkisi.....	42
Şekil 4.8. $\varphi^*(s, v)$ evolüt offsetinin $H^*$ ortalama eğriliği ile $e^z$ yoğunluklu $H_\phi^*$ ortalama eğriliğinin ilişkisi.....	43
Şekil 4.9. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu $K_\phi$ Gauss eğriliği.....	44
Şekil 4.10. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu $H_\phi$ ortalama eğriliği.....	45
Şekil 4.11. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $K$ Gauss eğriliği ile $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu $K_\phi$ Gauss eğriliği arasındaki ilişki.....	45
Şekil 4.12. $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $H$ ortalama eğriliği ile $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu $H_\phi$ ortalama eğriliği arasındaki ilişki.....	46
Şekil 4.13. $\varphi^*(s, v)$ evolüt offsetinin $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu $K_\phi^*$ Gauss eğriliği.....	46
Şekil 4.14. $\varphi^*(s, v)$ evolüt offsetinin $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu $H_\phi^*$ ortalama eğriliği... 47	
Şekil 4.15. $\varphi^*(s, v)$ evolüt offsetinin $K^*$ Gauss eğriliği ile $e^{-x^2-y^2}$ yoğunluklu $K_\phi^*$ Gauss eğriliğinin ilişkisi.....	47



Şekil 4.16.  $\varphi^*(s, \nu)$  evolüt offsetinin  $H_\phi^*$  ortalama eğriliği ile  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $H_\phi^*$  ortalama eğriliğinin ilişkisi..... 48

## ÖZET

Anahtar kelimeler: Regle yüzeyler, offset regle yüzeyler, Yoğunluklu yüzeyler, Yoğunluklu offset regle yüzeyler

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde üç boyutlu Öklid uzayında eğriler teorisi, yüzeylerin karakteristik özellikleri ve yüzeyler ile ilgili temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde yoğunluklu yüzeylerin ortalama ve Gauss eğriliğinin hesaplanması verilmiştir. Ayrıca yoğunluklu yüzeylerin karakteristik özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır ve iki alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Dördüncü bölümün birinci alt bölümünde  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeylerin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği arasındaki ilişkiler verilmiştir. İkinci alt bölümde ise  $e^z$  yoğunluğu yerine  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu regle yüzeylerin ortalama eğriliği ile yoğunluklu ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği ile yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca yoğunluklu offset regle yüzeyinin ortalama eğriliği ile yoğunluklu ortalama eğriliği, Gauss eğriliği ile yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişkiler verilmiştir.

# OFFSET RULED SURFACES WITH DENSITY

## SUMMARY

Keywords: Ruled surface, offset ruled surface, surface with density, offset ruled surface with density

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction part. In the second chapter, curves theory, characteristics of surfaces and the basic definitions of ruled surface and necessary theorems in three-dimensional Euclidean surface are introduced.

The calculation of mean and Gaussian curvature of surfaces with density are given in the third chapter. In addition, the characteristics of surfaces with density are given.

The fourth chapter generates the original part of this study and it is organized as two subsections. In the first subsection of this chapter, the relations between the mean curvature and Gaussian curvature of offset ruled surfaces with density are given. In the second subsection, the relationships between the mean curvature of the ruled surfaces with  $e^{-x^2-y^2}$  density, and the mean curvature with density is given instead of the  $e^z$  density. In addition, the relations between the mean curvature of the ruled offset surface with density and the mean curvature with density are given. The same relations are also given between Gaussian curvature and density Gaussian curvature.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yüzeyler konusunun bilgisayar grafikleri, mühendislik, fizik gibi birçok disiplinde önemli kullanım alanları vardır. Yüzey konularının içinde kendine çok fazla kullanım ve uygulama alanı bulan regle yüzeyler konusu ilk olarak G. Monge tarafından çalışılmıştır. Bu yüzey, 3-boyutlu Öklid uzayında bir doğrunun dayanak eğrisi olarak adlandırılan uzay eğrisi boyunca yaptığı sürekli hareket sonucu oluşur. Regle yüzeylerin sınıflandırılması, dayanak eğrisi ile ilgili özellikler, geodezikler, yüzeyin şekil operatörü, yüzeylerin açılabilirliği, açılmaz regle yüzeylerin incelenmesi gibi konular regle yüzeyler üzerine yapılan çalışmaların başında yer almaktadır.

Son yıllarda yeni bir çalışma alanı olan yoğunluklu yüzeyler de birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Yoğunluklu yüzeyler ile ilgili ilk çalışmalar F. Morgan tarafından yapılmıştır. Bir Riemann manifoldundaki yoğunluk hem hacmi hem de yüzey alanını ağırlıklandıran pozitif bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Konuyla ilgili pek çok çalışması olan F. Morgan sırasıyla [1], [2], [3] çalışmalarında yoğunluklu manifoldların ortalama ve Gauss eğriliklerini tanımlamış, yoğunluklu yüzeyler ile Poincare hipotezinin Perelman ispatını incelemiş ve Myers teoremini yoğunluklu Riemann manifoldlarına genelleştirmiştir.

F. Morgan'ın tanımlamalarından yararlanarak yoğunluklu yüzeyler ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. C. Rosales, sürekli yoğunluğa sahip Öklid uzayının izoperimetrik problemini incelemiş ve bir boyutta tek biçimli yoğunluk için izoperimetrik bölgeleri karakterize etmiştir, [4].

I. Corwin, yoğunluklu manifoldların Gauss-Bonnet teoremi ve formülünü, geodezikler ve sabit yüzey eğriliğini tanımlamıştır, [5].

Yoğunluk fonksiyonu minimal yüzeyler üzerinde de oldukça çalışılmıştır. L. Belarbi, Öklid uzayında lineer yoğunluklu minimal yüzeylerle ilgili eşitlikleri ifade etmiş ve bazı minimal grafiklerin eşitliklerin çözümlerini karakterize etmiştir. Ayrıca radyal yoğunluklu yüzeyler için yoğunluklu Gauss ve Ortalama eğriliklerini incelemiştir, [6].

R. Lopez, logaritmik lineer yoğunluklu Öklid uzayında tüm minimal yüzeyleri sınıflandırmıştır [7]. D. S. Kim, yoğunluklu yüzeylerde ağırlıklı minimal helikodial yüzeyleri , helikodial yüzeyler için örneklendirerek ortalama ve Gauss eğriliklerini sınıflandırmıştır, [8].

D. T. Hieu,  $e^z$  yoğunluklu regle minimal yüzeyleri sınıflandırarak,  $e^z$  yoğunluklu silindirik ve silindirik olmayan regle minimal yüzey ailesinin varlığını göstermiştir, [9].

Bu çalışma da ise ilk olarak  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeylerin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra  $e^z$  yoğunluğu yerine  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu regle yüzeylerin ortalama eğriliği ile yoğunluklu ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği ile yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişki gösterilmiştir. Ayrıca yoğunluklu offset regle yüzeyinin ortalama eğriliği ile yoğunluklu ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği ile yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişki incelenmiştir.

## BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde 3- boyutlu Öklid uzayında bulunan temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

### 2.1. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler

**Tanım 2.1.1.**  $A$  boş olmayan bir cümle ve bir  $K$  cismi üzerindeki vektör uzayı  $V$  olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir  $f : A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu varsa,  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş afin uzay denir.

- i.  $\forall P, Q, R \in A$  için  $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ ,
- ii.  $\forall P \in A$  ve  $\alpha \in V$  için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır, [10].

**Tanım 2.1.2.** Bir reel afin uzay  $A$  ve  $A$  ile birleşen bir vektör uzayı  $V$  olsun.  $V$  de;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa,  $A$  afin uzayına Öklid uzayı denir. Eğer  $A = \mathbb{R}^n$  (noktalar cümlesi) ve  $V = \mathbb{R}^n$  (n-boyutlu standart reel vektör uzayı) olarak seçilirse,  $A$  standart reel Öklid Uzayı adını alır ve  $E^n$  ile gösterilir, [10].

**Tanım 2.1.3.**

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonsiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonsiyonu ve  $d(X, Y)$  reel sayısına da  $X, Y \in E^n$  noktaları arasındaki uzaklık denir, [10].

**Tanım 2.1.4.**

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overline{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan  $d$  fonsiyonuna  $E^n$  de Öklid metriği denir, [10].

**Tanım 2.1.5.**  $E^n$ , n- boyutlu Öklid uzayında  $x \in E^n$  için  $\vec{x}$  vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

biçiminde tanımlanır, [10].

**Tanım2.1.6.**  $E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayı ve  $I \subseteq R$  bir açık alt aralık olsun.

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

fonsiyonu diferensiyellenebilir ise  $E^3$  de bir  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluklu eğri adını alır, [11].

**Tanım 2.1.7.**  $\alpha$ ,  $E^3$  de bir eğri olsun.  $\forall s \in I$  için

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(s+h) - \alpha(s)}{h}$$

hız vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki teğet vektörü denir, [12].

**Tanım 2.1.8.**  $\alpha, E^3$  de bir eğri olsun.  $\forall s \in I$  için  $\alpha'(s) \neq 0$  ise yani  $E^3$  de her noktadaki hız vektörü sıfırdan farklı ise  $\alpha$  eğrisine regüler bir eğri denir, [16].

**Tanım 2.1.9.**  $\alpha, I \subset \mathbb{R}$  de tanımlı bir eğri olsun. Eğer  $h: J \rightarrow I$ ,  $J$  açık aralığı üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\beta = \alpha(h): J \rightarrow I$$

bileşke fonksiyonu bir diferensiyellenebilir eğridir ve  $\beta$  ya  $h$  ile  $\alpha$  nın yeniden parametrizasyonu denir, [16].

**Tanım 2.1.10.**  $E^3$  de  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer  $\forall s \in I$  için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise  $M$  eğrisi,  $(I, \alpha)$  ya göre birim hızlı eğri,  $s \in I$  da yay parametresi olarak adlandırılır, [11].

**Tanım 2.1.11.**  $\alpha, I \subset \mathbb{R}$  de tanımlı  $E^3$  Öklid uzayında bir eğri olsun.  $a, b \in I$  olmak üzere

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına  $a$  dan  $b$  ye  $\alpha$  eğrisinin yay- uzunluğu denir, [13].



**Tanım 2.1.12.** 3- boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliği ile belirli  $T(s)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasında birim teğet vektörü denir, [14].

$T$ ,  $\alpha$  eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına birim teğet vektör alanı denir, [14].

**Tanım 2.1.13.** 3- boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi için

$$\begin{aligned} \kappa : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği denir, [14].

**Tanım 2.1.14.** 3- boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliği ile belirli  $N(s)$  vektörüne, eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki asli normali denir.  $N$ ,  $\alpha$  eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına asli vektör alanı denir, [14].

**Tanım 2.1.15.** 3- boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği tanımlı  $B(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki binormal vektörü denir ve  $B$  vektör alanına da  $\alpha$  eğrisinin binormal vektör alanı denir, [14].

**Tanım 2.1.16.**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları  $T, N, B$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu denir.  $\tau(s)$  sayısına  $\alpha(s)$  noktasındaki burulması denir, [14].

**Tanım 2.1.17.**  $\alpha, \kappa > 0$  eğriliğine sahip  $E^3$  de birim hızlı bir eğri olsun.  $T, N, B$  vektör alanları  $\alpha$  eğrisinin her noktasında ortonormal vektör alanıdır ve  $\alpha$  eğrisi üzerinde Frenet çatı alanı olarak adlandırılır, [16].

**Teorem 2.1.18.**  $\alpha, \kappa > 0$  eğriliğine ve  $\tau$  torsiyonuna sahip  $E^3$  de birim hızlı bir eğri olsun. Böylece Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir, [16].

**Tanım 2.1.19.** Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri denir, [15].

**Tanım 2.1.20.**  $\alpha: I \rightarrow S^2$  birim hızlı küresel eğri olsun.  $s, \alpha$  nın yay parametresi olmak üzere  $\alpha$  nın birim teğet vektörü  $t(s) = \alpha'(s)$  tanımlansın.  $\alpha(s)$  yer vektörü için  $\alpha$  eğrisi boyunca binormal vektörü  $g(s) = \alpha(s) \times \alpha'(s)$  olsun.  $\alpha(s), t(s)$  ve

$g(s)$  yardımıyla  $\{\alpha(s), t(s), g(s)\}$  ortonormal çatı oluşturulur. Bu çatıya  $\alpha$  eğrisinin küre üzerindeki Sabban çatısı denir, [10].

**Tanım 2.1.21.**  $\alpha$ ,  $S^2$  birim hızlı küresel eğri ve  $s$ ,  $\alpha$  nın yay parametresi olsun.  $\alpha$  nın  $S^2$  üzerinde Sabban çatısı  $\{\alpha(s), t(s), g(s)\}$  için

$$\kappa_g = \langle t', g \rangle$$

ifadesine  $\alpha$  nın  $S^2$  üzerinde geodezik eğriliği denir, [10].

Böylece  $\alpha$  eğrisinin küresel Frenet-Serret formülleri

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= t(s) \\ t'(s) &= -\alpha(s) - \kappa_g g(s) \\ g'(s) &= \kappa_g t(s)\end{aligned}$$

biçimindedir, [10].

**Önerme 2.1.22.**  $\alpha(s)$  küresel eğrisinin geodezik eğriliği  $\kappa_g$ , eğriliği  $\kappa(s)$ , torsiyonu  $\tau(s)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \sqrt{1 + \kappa_g^2(s)} \\ \tau(s) &= \frac{\pm \kappa_g'(s)}{\kappa_g^2 + 1}\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır, [17].

**Önerme 2.1.23.**  $E^3$  te  $\alpha(s)$  küresel eğrisinin geodezik eğriliği  $\kappa_g(s)$  sabit ise  $\alpha(s)$  eğrisi bir çemberdir, [17].

**Uyarı 2.1.24.**  $\alpha(s)$  küresel eğrisinin geodezik eğriliği  $\kappa_g(s)$  sıfır ise  $\alpha(s)$  eğrisi birim küre üzerinde büyük çemberdir, [17].

## 2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerin Karakteristik Özellikleri

**Tanım 2.2.1.**  $M$ ,  $E^3$  Öklid uzayının bir alt kümesi olsun.  $M$  nin her  $p$  noktası için  $E^3$  üzerinde bir komşuluğu  $V$  olmak üzere,  $E^3$  Öklid uzayının  $U$  açık kümesinden  $V \cap S$  ye bir  $F$  diffeomorfizmi varsa,  $S$  kümesi  $E^3$  te yüzey adını alır, [10].

$E^n$  Öklid uzayı üzerindeki bir  $M$  yüzeyi üzerinde  $q$ . temel formu tanımlayalım. Bu  $q$ . temel form yardımıyla I. ve II. Temel formların eşitliklerini ifade edelim.

**Tanım 2.2.2:**  $E^n$  in bir hiperyüzeyi  $M$  olsun.  $M$  üzerinde şekil operatörü  $S$  ve  $1 \leq q \leq n$  olmak üzere  $M$  hiperyüzeyi üzerinde  $q$ -uncu temel form

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, IR)$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

olarak tanımlanır.

Buna göre

I. Temel Form:

$$I : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, IR)$$

$$(X, Y) \rightarrow I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

II. Temel Form:

$$\begin{aligned} II : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle \end{aligned}$$

şeklindedir, [18].

**Tanım 2.2.3.**  $M$  bir regle yüzey olsun.  $M$  nin  $M_p$  tanjant uzayındaki vektörleri  $v_p, w_p$  olsun. Birinci temel form;

$$I(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

biçiminde tanjant vektörlerinin iç çarpımıdır.

Birinci temel form

$$I(a\varphi_u + b\varphi_v, a\varphi_u + b\varphi_v) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$$

eşitliğini sağlar. Riemann metriğinden

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

dir. Burada birinci temel formun katsayıları;

$$\begin{aligned} E &= \|\varphi_u\|^2 = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|^2 \\ F &= \varphi_u \cdot \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ G &= \|\varphi_v\|^2 = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|^2 \end{aligned}$$

biçimindedir, [19].

**Tanım 2.2.4.**  $M$  bir yüzey olsun.  $M$  nin  $M_p$  tanjant uzayındaki vektörleri  $v_p$  ve  $w_p$  olsun.  $M \in E^3$  için, ikinci temel form  $M_p$  tanjant uzayında simetrik bilineer formdur.  $S$  şekil operatörü olmak üzere ikinci temel form,

$$II(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

dir.

Sıfırdan farklı her tanjant vektörü için ikinci temel form

$$II(a\varphi_u + b\varphi_v, a\varphi_u + b\varphi_v) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

eşitliğini sağlar.

$N$  normal vektör ve ikinci temel formun katsayıları

$$L = \langle N, \varphi_{uu} \rangle$$

$$M = \langle N, \varphi_{uv} \rangle$$

$$N = \langle N, \varphi_{vv} \rangle$$

biçiminde olmak üzere

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

dir, [19].

**Tanım 2.2.5.**  $E^3$  Öklid uzayındaki bir  $M$  yüzeyinin  $K$  Gauss eğriliği,  $\kappa_1, \kappa_2$  asli eğrilikler olmak üzere

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

biçimindedir, [15].

Birinci temel formun katsayıları  $E, F, G$  ikinci temel formun katsayıları  $L, M, N$  olmak üzere  $K$  Gauss eğriliğinin birinci ve ikinci temel formun katsayıları cinsinden ifadesi

$$\det \left( \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

biçimindedir, [15].

**Tanım 2.2.6.**  $E^3$  Öklid uzayındaki bir  $M$  yüzeyinin  $H$  ortalama eğriliği,  $\kappa_1, \kappa_2$  asli eğrilikler olmak üzere

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

biçimindedir.

Birinci temel formun katsayıları  $E, F, G$ , ikinci temel formun katsayıları  $L, M, N$  olmak üzere  $H$  ortalama eğriliğinin birinci ve ikinci temel formun katsayıları cinsinden ifadesi

$$H = \frac{1}{2} \text{iz} \left( \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}$$

biçimindedir, [15].

**Tanım 2.2.7.**  $M$ ,  $E^3$  de bir yüzey olmak üzere  $M$  yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir, [20].

### 2.3. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

Bu bölümde  $E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyler hakkında bilgi verilmiştir.

$M \subset E^3$  yüzeyi verilsin.  $\forall P \in M$  noktasında,  $E^3$  uzayının  $M$  yüzeyinde kalan doğrusu varsa  $M$  ye bir regle yüzey denir.  $P \in M$  noktasından geçen ve  $M$  de kalan doğruya ise  $M$  yüzeyinin doğrultmanı denir. Yani,  $u \in I_1 \subset \mathbb{R}$ ,  $v \in I_2 \subset \mathbb{R}$  ve  $\alpha = \alpha(u)$ ,  $I_1$  aralığı üzerinde tanımlanan  $E^3$  Öklid uzayında bir eğri ve  $\beta = \beta(u)$  de  $\alpha$  boyunca bir vektör alanı olmak üzere  $M$  regle yüzeyi

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

olarak tanımlar. Burada  $\alpha$  dayanak eğrisi ve  $\beta$  da doğrultman vektörüdür.

**Teorem 2.3.1.**  $M \subset E^3$  bir regle yüzey olsun. O zaman,  $M$  'nin doğrultmanları  $M$  de hem asimptotik hem de geodezik çizgilerdir, [13].

**Tanım 2.3.2.** Bir  $M \subset E^3$  regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (striksiyon) noktası denir, [15].

**Tanım 2.3.3.** Bir  $M \subset E^3$  regle yüzeyinin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir, [15].

**Tanım 2.3.4.** Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu doğrular arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir, [15].

Ana doğruların birim doğrultman vektörü  $e$  olan bir regle yüzeyin dağılma parametresi  $P_\beta$  olmak üzere



$$P_{\beta} = \frac{\det(\alpha', \beta, \beta')}{\|\beta'\|^2}$$

şeklinde hesaplanır. Regle yüzeyler için dağılma parametresi koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır, [21].

**Teorem 2.3.5.** Bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır, [21].

**Teorem 2.3.6.**  $M \subset E^3$  bir regle yüzey ve  $M$  nin Gauss eğrilik fonksiyonu  $K$  olsun. O zaman,  $\forall p \in M$  için  $K(p) \leq 0$  dır, [13].

**Tanım 2.3.7.** Bir  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin bir ana doğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme, teğet düzlem denir, [21].

**Tanım 2.3.8.** Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir, [13].

$\varphi$  yüzeyin bir noktasındaki normal doğrultu vektörü

$$\begin{aligned} \varphi_u \times \varphi_v &= (\alpha'(u) + v\beta'(u)) \times \beta(u) \\ &= \alpha'(u) \times \beta(u) + v\beta'(u) \times \beta(u) \\ &= \frac{1}{v} \alpha'(u) \times \beta(u) + \beta'(u) \times \beta(u) \end{aligned}$$

dir. Yüzeyin bir  $\beta$  ana doğrusu boyunca normal doğrultusunun aynı kalması şartı, normal doğrultu vektörünün  $v$  ye bağlı olmaması ve bunun neticesinde

$$\alpha'(u) \times \beta(u) \text{ ve } \beta'(u) \times \beta(u)$$

vektörlerinin aynı doğrultuya sahip olmaları gerekir. Bu taktirde  $\alpha'(u), \beta(u), \beta'(u)$  vektörlerinin bir düzlemde paralel olması gerekir. O zaman bir  $\beta$  ana doğrusu boyunca yüzeyin normal doğrultusunun aynı kalması şartı,

$$\det(\alpha'(u), \beta(u), \beta'(u)) = 0$$

bağıntısı ile ifade edilir. Bu bağıntı gerçekleştiği durumda regle yüzeye açılabilir yüzey denir. Yani uzay eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu yüzeye açılabilir yüzey denir, [22].

Spivak [24] nolu çalışmasında açılabilir regle yüzeylerin sadece üç tipinin var olduğunu; silindirler(düzlemlerde dahil), koniler ve uzay eğrisinin teğetleri tarafından oluşturulan teğet yüzeyleri olduğunu söylemiştir.

**Tanım 2.3.9.**  $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$  bir regle yüzey olmak üzere, eğer  $\beta(u) \times \beta'(u) = 0$  ise bu regle yüzeyine bir silindirik yüzey denir. Eğer  $\beta(u) \times \beta'(u) \neq 0$  ise  $\varphi$  yüzeyine silindirik olmayan regle yüzey denir, [15].

**Tanım 2.3.10.**

$$\begin{aligned} \varphi: I \times R &\rightarrow E^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u) \end{aligned}$$

regle yüzeyi  $\forall u \in I$  için

$$\varphi(u + 2\pi, v) = \varphi(u, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir, [13].

**Tanım 2.3.11.** Bir  $\varphi(u, v) = c(u) + ve(u)$  kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu (adımı)

$$L_e = I \rightarrow R$$

$$v \rightarrow L_e(v) = \oint_e dv$$

şeklinde tanımlanır, [21].

Açılım uzunluğu regle yüzeyin integral invaryantıdır. Açılabilir regle yüzeyin açılım uzunluğu sıfır ise striksiyon eğrisi bir nokta, regle yüzey ise bir koni olur, [21].

Şimdi de bu çalışmanın orijinal kısmında kullanacağımız küresel Frenet çatısı yardımıyla oluşturulan regle yüzey yapısından bahsedelim.

$M$ , 3-boyutlu Öklid uzayında açılmaz bir regle yüzey olsun.  $M$  yüzeyinin parametrizasyonu

$$\varphi(u, v) = c(u) + ve(u)$$

ile gösterilir. Burada  $\langle e(u), e(u) \rangle = 1$ ,  $\langle e'(u), e'(u) \rangle = 1$  ve  $c(u)$  doğrultmanı  $\varphi$  yüzeyinin boğaz (striksiyon) eğrisidir.  $M$  yüzeyinin böyle bir parametrizasyonu 3-boyutlu Öklid uzayında açılmaz regle yüzeylerin standart denklemi olarak adlandırılır. Bu durumda  $E^3$  de bir küresel eğri için  $u$  parametresi  $e(u)$  nun yay uzunluğu parametresidir. Böylece  $e(u)$  ye bir vektör olarak alınabilir ve  $e(u)$ ,  $\varphi$  nin küresel gösterge vektörü olarak isimlendirilir. Ayrıca,  $e(u)$  bir vektör olarak kabul edilebilir ve  $\varphi(u, v)$  nin küresel indikatör vektörü olarak adlandırılabilir.  $c(u)$ ,  $\varphi(u, v)$  nin striksiyon eğrisi olduğu için  $\langle c'(u), e'(u) \rangle = 0$  dir, [17].

Bundan sonra gösterim kolaylığı için  $u$  parametresi yazılmayacaktır.

$t = e'$  ve  $g = e \times e'$  olsun. Bu durumda  $\{e, t, g\}$  kümesi  $e$  vektörünün küresel Frenet çatısı olarak isimlendirilebilir. Burada  $t$  ve  $g$ , sırasıyla,  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin merkez normal ve asimptotik normal vektörleridir.

$\{e, t, g\}$  küresel Frenet çatısı için türev vektörleri

$$\begin{aligned} e' &= t \\ t' &= -e - Jg \\ g' &= Jt \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada  $J = \langle e'', e' \times e \rangle$ ,  $e$  küresel eğrisinin  $\kappa_g$  geodezik eğriliğini tanımlar, [17].

Ayrıca,  $c$  striksiyon eğrisinin türevi

$$c' = Fe + Qg$$

dir. Burada  $F = \langle c', e \rangle$  ve  $Q = \langle c', e \times e' \rangle$  dir.

$J, F$  ve  $Q$  fonksiyonları  $\varphi$  açılmaz regle yüzeyinin yapı fonksiyonları olarak isimlendirilir, [17].

**Tanım 2.3.12.**  $\varphi$  ve  $\varphi^*$ ,  $E^3$  de yoğunluklu regle yüzeyler olsun.  $\varphi$  ve  $\varphi^*$  yüzeylerinin karşılıklı doğrultmanlarının striksiyon noktalarında  $\varphi$  yüzeyinin merkez normali ile  $\varphi^*$  yüzeyinin küresel doğrultman vektörü lineer bağımlı olacak şekilde doğrultmanları arasında bire-bir eşleme varsa  $\varphi^*$  yoğunluklu yüzeyine  $\varphi$  yoğunluklu yüzeyinin evolüt offset yüzeyi denir, [17].

$\varphi$  regle yüzeyi ile  $\varphi^*$  offset regle yüzeyinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık  $R$  olmak üzere

$$\varphi^*(u, v) = c^*(u) + ve^*(u) = [c(u) + R(u)t(u)] + vt(u)$$

şeklindedir. Ayrıca,  $\varphi^*$  in striksiyon eğrisi onun temel eğrisi olduğu için

$$R(u) = -\frac{\langle c_u, t_u \rangle}{\langle t_u, t_u \rangle}$$

dır, [23].

$\varphi$  regle yüzeyinin  $e$  vektörü ile  $\varphi^*$  evolüt offset regle yüzeyinin  $g^*$  vektörü arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} e^* \\ t^* \\ g^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ t \\ g \end{bmatrix}$$

ilişkisi mevcuttur, [23].

$\varphi^*$  evolüt offset yüzeyinin I. Temel formunun katsayıları  $E^*$ ,  $F^*$ ,  $G^*$  ve II. Temel formunun katsayıları  $L^*$ ,  $M^*$ ,  $N^*$  olmak üzere ortalama ve Gauss eğriliği sırasıyla,

$$H^* = \frac{L^*G^* - 2M^*F^* + N^*E^*}{2(E^*G^* - F^{*2})}$$

$$K^* = \frac{L^*N^* - M^{*2}}{E^*G^* - F^{*2}}$$

biçimindedir, [17].

### BÖLÜM 3. YOĞUNLUKLU YÜZEYLER

Farklı fiziksel yoğunluğa sahip yüzeyler veya bölgeler dikkate alındığında; fizikte yoğunluklu manifoldlar ortaya çıkar. Yoğunluğu olan iki boyutlu yüzey örneği Gauss düzlemidir. Gauss düzlemi,  $r$  orijinden uzaklık olmak üzere;  $(2\pi)^{-1}e^{-r^2/2}$  tarafından ağırlıklandırılan hacim ve uzunluklu Öklid düzlemidir. Hacim, çevre ve alan için kullanılan  $e^\phi$  pozitif yoğunluklu bir diferensiyellenebilir manifold için Riemann hacmi  $dV$ , çevre uzunluğu  $dP$  ve alan  $dA$  olmak üzere, yoğunluklu hacim, çevre uzunluğu ve alan, sırasıyla

$$dV\phi = e^\phi .dV$$

$$dP\phi = e^\phi .dP$$

$$dA\phi = e^\phi .dA$$

biçimindedir, [5].

Bir eğrinin eğriliğini veya bir yüzeyin ortalama eğriliğini, yoğunluğu olan manifoldlara genelleyebiliriz. Genellemeler, manifoldların standart eğrilik kavramına uyacak biçimde tanımlanmıştır, [5].

**Tanım 3.1.** 2- boyutlu yoğunluklu Riemann manifoldları için  $N$  birim normal vektörü,  $\kappa$  Riemann eğriliği olmak üzere,  $\kappa_\phi$  yoğunluklu Riemann eğriliği,

$$\kappa_\phi = \kappa - \frac{d\phi}{dN}$$

biçimindedir, [5].

$\phi$  eğriliğinin formülünden  $\frac{d\phi}{dN}$  'nin minimal yüzeyler için geometrik yorumu aşağıda verilmiştir.

Gauss uzayında  $\frac{d\phi}{dN}$ , yüzey üzerindeki bir noktanın tanjant hiperdüzlemine orijinden olan uzaklığıdır.  $G^3$  Gauss uzayında;

- Düzlemler sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve orijin boyunca geçen düzlem minimaldir.
- Orijindeki küreler sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  yarıçaplı olan küreler minimaldir.
- Eksenleri orijinden geçen dairesel silindir sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve 1 yarıçaplı olan dairesel silindirler minimaldir, [9].

$\phi(x)$ ,  $E^n$  Öklid uzayında  $\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  biçiminde lineer bir fonksiyon ve  $e^{\phi(x)}$  log-linear yoğunluk olsun. Sabit yoğunluklu  $E^n$  Öklid uzayında her bir noktalar kümesine bir hiperdüzlem denir. Uygun koordinatlar seçilerek  $e^{x_n}$  formunda yoğunluk varsayabiliriz. Böylece  $E^{n-1}$ ,  $(n-1)$  Öklid uzayı ve  $E_\phi$ ,  $e^{x_n}$  yoğunluklu reel doğrular olmak üzere,  $E^{n-1} \oplus E_\phi$  üretiliyor iken  $e^{\phi(x)}$  yoğunluklu  $E^n$  uzayını inceleyebiliriz. O halde  $\nabla\phi = (0,0,\dots,1)$  olmak üzere ,

$$\frac{d\phi}{dN} = \langle \nabla\phi, N \rangle = \|\nabla\phi\| \cdot \|N\| \cdot \cos\theta(\nabla\phi, N) = \cos\theta(\nabla\phi, N)$$

dir, [9].

Yani  $\frac{d\phi}{dN} = \langle \nabla \phi, N \rangle$ ,  $z$  eksenine ile  $N$  aralarındaki açının kosinüsüdür, [9].

**Tanım 3.2.**  $e^\phi$  yoğunluklu  $n$ - boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde,  $H$  Riemann ortalama eğriliği,  $N$  birim normal vektör olmak üzere, bir hiperyüzeyin  $H_\phi$  yoğunluklu ortalama eğriliği;

$$H_\phi = H - \frac{1}{n-1} \frac{d\phi}{dN}$$

şeklindedir, [9].

Ayrıca,  $e^\phi$  yoğunluklu  $E^3$  Öklid uzayındaki bir yüzeyin ortalama eğriliği;

$$H_\phi = H - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dN} \quad (3.1)$$

biçimindedir, [9].

Burada,  $H$  ortalama eğrilik ve  $N$  yüzeyin normal vektör alanıdır.  $H_\phi$  ortalama eğriliğine,  $\phi$ - ortalama eğriliği ya da yoğunluklu ortalama eğrilik denir, [5].

**Tanım 3.3.**  $e^\phi$  yoğunluklu  $n$ - boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde  $K$ , Riemann Gauss eğriliği olmak üzere,  $K_\phi$  yoğunluklu Gauss eğriliği,

$$K_\phi = K - \Delta\phi \quad (3.2)$$

şeklindedir, [5].

Genelliği bozmadan yoğunluğu  $e^z$  olarak alalım.  $(u, v) \in (a, b)$  ve  $v \in (c, d)$  olmak üzere yoğunluklu regle yüzeyin parametrik denklemi



$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

biçimindedir, [9].

Kabul edelim ki  $\|\alpha'\| = 1$ ,  $\|\beta'\| = 1$ ,  $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$  olsun. Burada silindirik regle yüzeyler ( $\beta$  sabit) ve non-silindirik yüzeyler ( $\forall u \in (a, b)$  için  $\beta' \neq 0$ ) durumları üzerinde duralım ve yoğunluklu minimal yüzey olması için gerek ve yeter şartları gösterelim.

$H$  Riemann ortalama eğriliği olmak üzere, birinci ve ikinci temel formun katsayılarının hesaplanışından yararlanarak  $H_\phi$  yoğunluklu ortalama eğriliği;

$$H_\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{\langle N, \alpha'' + v\beta'' \rangle}{1 + 2v\langle \alpha', \beta' \rangle + v^2|\beta'|^2} - \langle N, \nabla_\phi \rangle \right)$$

biçimindedir, [9].

**Önerme 3.4.**  $H_\phi = 0$  olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle &= \langle \alpha' \wedge \beta, \nabla_\phi \rangle, \\ \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle + \langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle &= \langle \beta' \wedge \beta, \nabla_\phi \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta, 2\langle \alpha', \beta' \rangle \nabla_\phi \rangle, \\ \langle \beta' \wedge \beta, \beta'' \rangle &= \langle \beta' \wedge \beta, 2\langle \alpha', \beta' \rangle \nabla_\phi \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta, |\beta'|^2 \nabla_\phi \rangle, \\ \langle \beta' \wedge \beta, |\beta'|^2 \nabla_\phi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olmasıdır, [9].

$M$ ,  $e^z$  yoğunluklu açılmaz regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi(u, v) = c(u) + ve(u)$$

biçimindedir.

Yoğunluklu regle yüzeyin ortalama eğriliği  $H$  ve birim normal vektörü  $\mathbf{u}$  olmak üzere yoğunluklu ortalama eğriliği

$$H_\varphi = H - \frac{1}{2} \langle \nabla \varphi, \mathbf{u} \rangle$$

biçiminde hesaplanır. Bu eşitliği kullanarak  $e^z$  yoğunluklu açılmaz regle yüzeyin ortalama eğriliğini hesaplayalım. Burada

$$\varphi(u, v) = c(u) + ve(u)$$

açılmaz regle yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) \quad (3.3)$$

olarak bulunur, [17].

Ayrıca  $\varphi$  regle yüzeyinin birim normali  $\mathbf{u}$  olmak üzere;

$$\frac{1}{D} (Qt - vg) \quad (3.4)$$

$$D = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{Q^2 + v^2}$$

biçimindedir.

(3.3) ve (3.4) eşitliklerinden yararlanarak  $e^z$  yoğunluklu regle yüzeyin ortalama eğriliği

$$H_\phi = \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) - \frac{1}{2D} \langle \nabla \phi, Qt - v\mathbf{g} \rangle$$

olarak yazılır.  $\nabla \phi = (0, 0, 1)$  olduğundan dolayı son eşitlik

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) - \frac{1}{2D} \langle (0, 0, 1), Qt - v\mathbf{g} \rangle \\ &= \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) - \frac{1}{2D} \langle (0, 0, 1), Q(t_1, t_2, t_3) - v(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \rangle \end{aligned}$$

halini alır. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında  $e^z$  yoğunluklu açılamaz regle yüzeyin yoğunluklu ortalama eğriliği

$$H_\phi = \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) - \frac{1}{2D} \langle Qt_3 - v\mathbf{g}_3 \rangle \quad (3.5)$$

elde edilir.

$E^3$  Öklid uzayında  $e^z$  yoğunluklu açılamaz regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{Q^2}{D^4} \quad (3.6)$$

biçimindedir, [17].

Ayrıca  $\nabla \phi = (0, 0, 1)$  olduğundan  $\Delta \phi = 0$  dır. O halde  $e^z$  yoğunluklu açılamaz regle yüzeyinin yoğunluklu Gauss eğriliği

$$K_\phi = K = -\frac{Q^2}{D^4} \quad (3.7)$$

biçimindedir, [17].

## BÖLÜM 4. YOĞUNLUKLU OFFSET REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde yoğunluklu regle yüzeylerin evolüt offset yüzeyleri tanımlandı. Daha sonra yoğunluklu yüzey ve yoğunluklu offset yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri farklı yoğunluklara göre hesaplandı ve aralarındaki ilişkiler verildi.

**Tanım 4.1.**  $\varphi$  ve  $\varphi^*$ ,  $E^3$  Öklid uzayında yoğunluklu regle yüzeyler olsun.  $\varphi$  ve  $\varphi^*$  yoğunluklu regle yüzeylerinin karşılıklı doğrultmanlarının striksiyon noktalarında  $\varphi$  yoğunluklu regle yüzeyinin merkez normalisi ile  $\varphi^*$  yoğunluklu regle yüzeyinin küresel doğrultman vektörü lineer bağımlı olacak şekilde doğrultmanları arasında bire-bir eşleme varsa  $\varphi^*$  yoğunluklu regle yüzeyine  $\varphi$  yoğunluklu regle yüzeyinin evolüt offset yüzeyi denir, [17].

Yukarıdaki tanımda belirtilen  $\varphi$  yoğunluklu regle yüzeyinin striksiyon eğrisi  $c(u)$  ve striksiyon eğrisi boyunca yay uzunluğu  $u$  olmak üzere denklemi

$$\varphi(u, v) = c(u) + ve(u)$$

şeklindedir.  $\varphi$  yoğunluklu regle yüzeyinin  $\varphi^*$  yoğunluklu offset yüzeyinin denklemi de

$$\varphi^*(u, v) = c^*(u) + ve^*(u) = c(u) + R(u)t(u) + vt(u)$$

şeklindedir. Burada  $R$ ,  $\varphi$  ve  $\varphi^*$  yoğunluklu yüzeylerinin karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki uzaklıktır, [17].

Yazım bakımından kısa olması için bundan sonra  $\varphi$  yoğunluklu açılamaz regle yüzeyini;  $\varphi$  yüzeyi ve  $\varphi^*$  yoğunluklu açılamaz offset regle yüzeyini;  $\varphi^*$  yüzeyi olarak isimlendireceğiz.

$\varphi^*$  yüzeyinin yoğunluklu ortalama eğriliğini ve yoğunluklu Gauss eğriliğini hesaplayabilmek için öncelikle  $\varphi^*$  yüzeyinin I. temel formunun  $E^*, F^*, G^*$  katsayılarını ve II. temel formunun  $L^*, M^*, N^*$  katsayılarını hesaplayalım.

İlk olarak I. temel formun  $E^*, F^*, G^*$  katsayılarını hesaplayalım.

$\varphi_u^* = c' + R't + Rt' + vt'$  olmak üzere

$$E^* = \langle \varphi_u^*, \varphi_u^* \rangle$$

biçimindedir.

Küresel Frenet çatısının denklemlerinden  $e' = t$  ve  $t' = -e - Jg$  eşitlikleri ile  $c' = Fe + Qg$  eşitlikleri  $\varphi_u^* = c' + R't + Rt' + vt'$  eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi_u^* &= Fe + Qg + R'e' + R(-e - Jg) + v(-e - Jg) \\ &= e(F - R - v) + (Q - RJ - vJ)g + R'e' \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \varphi_u^*, \varphi_u^* \rangle &= (F - R - v)^2 + (Q - RJ - vJ)^2 + R^2 \\ &= F^2 + Q^2 - 2(F + JQ)(R + v) + (R + v)^2(1 + J^2) + R^2 \end{aligned}$$

eşitliği düzenlenirse

$$E^* = \langle \varphi_u^*, \varphi_u^* \rangle = F^2 + Q^2 - 2(F + JQ)(R + v) + (R + v)^2(1 + J^2) + R^2$$

elde edilir.  $\varphi_v^* = t = e'$  olmak üzere

$$F^* = \langle \varphi_v^*, \varphi_v^* \rangle = \langle e(F - R - v) + (Q - RJ - vJ)g + R'e', e' \rangle$$

elde edilir. Son ifadede gerekli işlemler yapılnca

$$F^* = \langle \varphi_u^*, \varphi_v^* \rangle = R'$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$G^* = \langle \varphi_v^*, \varphi_v^* \rangle = \langle e'(u), e'(u) \rangle = 1$$

dir.

$u^*$ ,  $\varphi^*$  yüzeyinin birim normal vektörü olmak üzere

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{\varphi_u^* \times \varphi_v^*}{\|\varphi_u^* \times \varphi_v^*\|} = \frac{[e(u)(F - R - v) + (Q - RJ - vJ)g + R'e'(u)] \times e'(u)}{\|[e(u)(F - R - v) + (Q - RJ - vJ)g + R'e'(u)] \times e'(u)\|} \\ &= \frac{(e(u) \times e'(u))(F - R - v) + g \times e'(Q - RJ - vJ) + (R'(e'(u) \times e'(u)))}{\|(e(u) \times e'(u))(F - R - v) + g \times e'(Q - RJ - vJ) + (R'(e'(u) \times e'(u)))\|} \\ &= \frac{[(-Q + RJ + vJ)e + (F - R - v)g]}{\sqrt{(-Q + RJ + vJ)^2 + (F - R - v)^2}} \end{aligned}$$

şeklindedir.  $D^* = \sqrt{(-Q + RJ + vJ)^2 + (F - R - v)^2}$  olmak üzere  $\varphi^*$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$u^* = \frac{1}{D^*} [(-Q + RJ + vJ)e + (F - R - v)g] \quad (4.1)$$

olarak ifade edilir, [17].

Şimdi de II. Temel formun  $L^*$ ,  $M^*$ ,  $N^*$  katsayılarını hesaplayalım.

$\varphi_u^* = c' + R't + Rt' + vt'$  ve  $\varphi_v^* = t = e'$  eşitliklerinin  $u$  ve  $v$  parametrelerine göre türevleri

$$\begin{aligned}\varphi_{uu}^* &= c'' + R''t + R't' + R't' + Rt'' + vt'' \\ &= c'' + R''t + 2R't' + Rt'' + vt'' \\ &= F'e + Ft + Q'g + Qg' + R''t + 2R't' + Rt'' + vt'' \\ &= \left[ \begin{array}{l} F'e + Fe' + Qg + QJt + R''e' + 2R'(-e - Jg) \\ + R(-t - J'g - J^2t) + v(-t - J'g - J^2t) \end{array} \right],\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$\varphi_{uv}^* = t' = -e - Jg \quad (4.3)$$

ve

$$\varphi_{vv}^* = 0 \quad (4.4)$$

dir. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) ifadelerinden II. temel formun  $L^*$ ,  $M^*$ ,  $N^*$  katsayıları

$$L^* = \langle \varphi_{uu}^*, \mathbf{u}^* \rangle = \frac{1}{D^*} \left[ (F - 2R')(-Q + RJ + JV) + (Q - 2RJ - J'(R + V))(F - R - v) \right]$$

$$M^* = \langle \varphi_{uv}^*, \mathbf{u}^* \rangle = \frac{1}{D^*} (Q - FJ)$$

$$N^* = 0$$

elde edilir, [17].

$\varphi^*$  yüzeyin ortalama eğriliği, I. ve II. temel formunun katsayıları yardımıyla

$$H^* = \frac{L^*G^* - 2M^*F^* + N^*E^*}{2(E^*G^* - F^{*2})} \quad (4.5)$$

olarak yazılır.

(4.5) denklemini  $J$ ,  $F$  ve  $Q$  yapı fonksiyonları cinsinden ifade edelim. I. ve II. temel formunun katsayılarının eşitlerini (4.5) ifadesinde yerine yazarsak

$D^* = \sqrt{(-Q + RJ + vJ)^2 + (F - R - v)^2}$  olmak üzere  $\varphi^*$  yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H^* = \frac{\frac{1}{D^*} \left[ (F - 2R)(-Q + JR + Jv) + (F - R - v)(Q' - 2R'J - (R + v)J') \right] - 2 \frac{1}{D^*} (Q - FJ)R'}{2D^{*2}}$$

$$= \frac{J'v^2 + (F'J + 2RJ' - Q' - FJ')v + (-F'Q + FQ' + F'JR - FRJ' - RQ' + R^2J')}{2D^{*3}}$$

elde edilir. Burada

$$H_1^* = J'v^2 + (F'J + 2RJ' - Q' - FJ')v + (-F'Q + FQ' + F'JR - FRJ' - RQ' + R^2J') \quad (4.6)$$

olmak üzere  $\varphi^*$  yüzeyinin ortalama eğriliğini

$$H^* = \frac{1}{2D^{*3}} H_1^* \quad (4.7)$$

biçiminde ifade edilebiliriz, [17].

#### 4.1. $e^z$ Yoğunluklu Offset Regle Yüzeyler

Bu bölümde  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin ortalama eğriliği ile yoğunluklu ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği ile yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişkiler verilecektir. Ayrıca  $\varphi$  ve  $\varphi^*$  yoğunluklu regle yüzeylerin yoğunlukları  $e^z$  olarak alınacaktır.

Şimdi de  $\varphi^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin yoğunluklu ortalama eğriliği

$H_{\varphi^*}$  değerini hesaplayalım.



(3.1) eşitliği yardımıyla  $\varphi^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin ortalama eğriliği  $H^*$  ve yoğunluklu ortalama eğriliği  $H_\phi^*$  arasında

$$H_\phi^* = H^* - \frac{1}{2} \langle \nabla \phi, \mathbf{u}^* \rangle \quad (4.8)$$

ilişkisi vardır. Burada  $\mathbf{u}^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin birim normal vektörüdür.

(4.7) eşitliği yardımıyla (4.8) eşitliğini tekrardan yazarsak

$$H_\phi^* = \frac{1}{2D^{*3}} H_1^* - \frac{1}{2} \langle \nabla \phi, \mathbf{u}^* \rangle \quad (4.9)$$

elde edilir.

Yoğunluk fonksiyonu  $\phi = z$  olduğundan dolayı  $\nabla \phi = (0, 0, 1)$  olur. (4.1) ve (4.6) ifadelerini ve  $\nabla \phi = (0, 0, 1)$  eşitliğini (4.9) eşitliğinde yerine yazarsak  $\varphi^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin yoğunluklu ortalama eğriliğini  $J, F$  ve  $Q$  yapı fonksiyonları cinsinden

$$H_\phi^* = \frac{1}{2D^{*3}} \left[ J'v^2 + (F'J - FJ' + 2RJ' - Q')v \right. \\ \left. + (-F'Q + FQ' + F'JR - FJ'R - RQ' + R^2J') \right] \\ - \frac{1}{2} \left\langle (0, 0, 1), \frac{1}{D^*} [(-Q + JR + Jv)e + (F - R - v)g] \right\rangle$$

olarak ifade edilir.

$\varphi^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin  $g = (g_1, g_2, g_3)$  asimptotik normal ve  $e = (e_1, e_2, e_3)$  olmak üzere yukarıdaki eşitliği düzenlersek

$$H_{\phi}^* = \frac{1}{2D^{*3}} \left[ \begin{array}{l} J'v^2 + (F'J - FJ' + 2RJ' - Q')v \\ + (-F'Q + FQ' + F'JR - FJ'R - RQ' + R^2J') \end{array} \right]$$

$$- \frac{1}{2D^*} \left\langle (0,0,1), \left[ \begin{array}{l} (-Q + JR + Jv)(e_1, e_2, e_3) \\ + (F - R - v)(g_1, g_2, g_3) \end{array} \right] \right\rangle$$

$$H_{\phi}^* = \frac{1}{2D^{*3}} \left[ \begin{array}{l} J'v^2 + (F'J - FJ' + 2RJ' - Q')v \\ + (-F'Q + FQ' + F'JR - FJ'R - RQ' + R^2J') \end{array} \right]$$

$$- \frac{1}{2D^*} \left[ (-Q + JR + Jv)(e_3) + (F - R - v)(g_3) \right]$$

elde edilir.

$\varphi^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin Gauss eğriliği, I. ve II. temel formunun yardımıyla

$$K^* = \frac{L^* N^* - M^{*2}}{E^* G^* - F^{*2}} \quad (4.10)$$

olarak yazılır.

(4.10) denklemini  $J, F$  ve  $Q$  yapı fonksiyonları cinsinden ifade edelim. I. ve II. temel formun katsayılarının eşitlerini (4.10) ifadesinde yerine yazarsak

$\varphi^*$  offset regle yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$K^* = -\frac{1}{D^{*4}} (Q - FJ)^2 \quad (4.11)$$

elde edilir. Burada  $D^* = \sqrt{(-Q + RJ + vJ)^2 + (F - R - v)^2}$  dir, [17].

Şimdi de  $\varphi^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin yoğunluklu Gauss eğriliği  $K_\phi^*$  değerini hesaplayalım.

(3.2) eşitliği yardımıyla  $\varphi^*(u, v)$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin Gauss eğriliği  $K^*$  ve yoğunluklu Gauss eğriliği  $K_\phi^*$  arasında

$$K_\phi^* = K^* - \Delta_\phi \quad (4.12)$$

ilişki vardır. (4.11) eşitliği yardımıyla (4.12) eşitliğini tekrar düzenlersek  $\varphi^*$ ,  $e^z$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin yoğunluklu Gauss eğriliğini  $J, F$  ve  $Q$  yapı fonksiyonları cinsinden ifade etmiş oluruz.

$$K_\phi^* = -\frac{1}{D^{*4}}(Q - FJ)^2 - \Delta_\phi \quad (4.13)$$

Yoğunluk fonksiyonu  $\phi = z$  olduğundan dolayı  $\nabla\phi = (0, 0, 1)$  olur. Dolayısıyla  $\Delta_\phi = 0$  bulunur. Bu değer (4.13) ifadesinde kullanılırsa

$$K_\phi^* = K^* \quad (4.14)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.1.**  $E^3$ , Öklid uzayında  $\varphi$  regle yüzeyinin offset regle yüzeyi  $\varphi^*$  olsun.  $\varphi^*$  offset regle yüzeyin yoğunluğu  $e^z$  olsun.  $K^*$  ve  $K_\phi^*$  sırasıyla  $\varphi^*$  offset regle yüzeyinin Gauss eğriliği ve yoğunluklu Gauss eğriliği olmak üzere, yoğunluklu  $\varphi^*$  offset regle yüzeyinin Gauss eğriliği  $K_\phi^*$  ile yüzeyin Gauss eğriliği  $K^*$  eşittir.

#### 4.2. $e^{-x^2-y^2}$ Yoğunluklu Offset Regle Yüzeyler

Bu başlıkta  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu açılmaz regle yüzeyinin ortalama eğriliği ile yoğunluklu ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği ile yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişkiler verilecektir. Ayrıca  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu offset regle yüzeyinin ortalama eğriliği ile yoğunluklu ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği ile yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişkiler verilecektir.

Burada  $\varphi$  ve  $\varphi^*$  yoğunluklu regle yüzeylerin yoğunlukları  $e^{-x^2-y^2}$  olarak alınacaktır.

İlk olarak,  $\varphi$  regle yüzeyinin ortalama eğriliği ile bu yüzeyin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu ortalama eğriliği arasındaki ilişkiyi araştıralım.

$\varphi$ ,  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu açılmaz regle yüzey olduğundan  $\nabla_\phi = (-2x, -2y, 0)$  dir.

$\nabla_\phi = (-2x, -2y, 0)$ , (3.4) ve (3.3) eşitliklerini (3.1) ifadesinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} H_\phi &= H - \frac{1}{2} \langle \nabla \phi, \mathbf{u} \rangle \\ &= \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) - \frac{1}{2} \left\langle \nabla \phi, \frac{1}{D} (Qt - vg) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) - \frac{D^2}{2D^3} \langle (-2x, -2y, 0), (Qt - vg) \rangle \end{aligned}$$

$\varphi$  yoğunluklu regle yüzeyinin merkezi normal ve asimptotik normaleri sırasıyla  $t = (t_1, t_2, t_3)$  ve  $g = (g_1, g_2, g_3)$  vektörleri olmak üzere yukarıdaki eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
H_\phi &= \frac{1}{2D^3} (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) + \frac{2D^2}{2D^3} \langle ((c_1 + ve_1), (c_2 + ve_2), 0), (Q(t_1, t_2, t_3) - v(g_1, g_2, g_3)) \rangle \\
&= \frac{1}{2D^3} \left[ (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) + 2D^2 \langle ((c_1 + ve_1), (c_2 + ve_2), 0), (Q(t_1, t_2, t_3) - v(g_1, g_2, g_3)) \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2D^3} \left[ (Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)) + 2D^2 (Qt_1c_1 + vQe_1t_1 + Qt_2c_2 + vQe_2t_2 - vc_1g_1 - vc_2g_2 - v^2e_1g_1 - v^2e_2g_2) \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 4.2.1.**  $E^3$ , Öklid uzayında  $\phi$  bir regle yüzey ve yüzeyin yoğunluğu  $e^{-x^2-y^2}$  olsun.  $\phi$  regle yüzeyi minimal ise yoğunluklu regle yüzeyin minimal olması için

$$Qt_1c_1 + vQe_1t_1 + Qt_2c_2 + vQe_2t_2 - vc_1g_1 - vc_2g_2 - v^2e_1g_1 - v^2e_2g_2 = 0$$

olmalıdır.

**Teorem 4.2.2.**  $E^3$ , Öklid uzayında  $\phi$  bir regle yüzey ve yüzeyin yoğunluğu  $e^{-x^2-y^2}$  olsun.  $\phi$  regle yüzeyi minimal ise yoğunluklu regle yüzeyin minimal olması için

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{-c_1g_1 - c_2g_2 + Qe_1t_1 + Qe_2t_2 + \sqrt{4(e_1g_1 + e_2g_2)(c_1Qt_1 + Qc_2t_2) + (c_1g_1 + c_2g_2 - Q(e_1t_1 + e_2t_2))^2}}{2(e_1g_1 + e_2g_2)} \\
v_2 &= \frac{-c_1g_1 - c_2g_2 + Qe_1t_1 + Qe_2t_2 - \sqrt{4(e_1g_1 + e_2g_2)(c_1Qt_1 + Qc_2t_2) + (c_1g_1 + c_2g_2 - Q(e_1t_1 + e_2t_2))^2}}{2(e_1g_1 + e_2g_2)}
\end{aligned}$$

olmalıdır.

$\phi$  regle yüzeyinin Gauss eğriliği ile bu yüzeyin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu Gauss eğriliği arasındaki ilişkisini araştıralım.

$\phi$ , yoğunluklu regle yüzeyinin yoğunluk fonksiyonu  $\phi = -x^2 - y^2$  olduğundan dolayı  $\Delta\phi = -4$  olur. (3.6) eşitliğinde ifade edilen  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu regle yüzeyinin Gauss eğriliğini (3.2) eşitliği yardımıyla hesaplırsak, yüzeyin yoğunluklu Gauss eğriliği

$$K_\phi = -\frac{Q^2}{D^4} + 4$$

biçiminde elde edilir.

$\phi^*$  offset regle yüzeyinin ortalama eğriliği ile bu yüzeyin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu ortalama eğriliği arasındaki ilişkiyi verelim.

$\phi^*$ ,  $\phi$  regle yüzeyinin evolüt offseti olmak üzere

$$\phi^*(u, v) = c^*(u) + ve^*(u) = c(u) + R(u)t(u) + vt(u)$$

biçimindedir.

$\phi$  regle yüzeyinin evolüt offseti  $\phi$  ve  $\phi^*$  nin ortalama eğriliği  $H^*$  olmak üzere  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu regle yüzeylerin offsetlerinin ortalama eğriliğini (4.8) eşitliği yardımıyla hesaplayalım. (4.8) eşitliğinde (4.6) ve (4.7) eşitliklerini yerine yazarsak

$$H_\phi^* = \frac{1}{2D^{*3}} H_1^* - \frac{1}{2} \langle \nabla\phi, u^* \rangle \quad (4.15)$$

olur.

$\phi = -x^2 - y^2$  olduğundan  $\nabla\phi = (-2x, -2y, 0)$  dir. (4.15) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$H_{\phi}^* = \frac{1}{2D^{*3}} J'v^2 + (F'J - FJ' + 2RJ' - Q')v \\ + (-F'Q + FQ' + F'JR - FJ'R - RQ' + R^2J') - \frac{1}{2} \langle (-2x, -2y, 0), \mathbf{u}^* \rangle$$

elde edilir. Burada (1.1) eşitliği yerine yazılırsa,

$$H_{\phi}^* = \frac{1}{2D^{*3}} J'v^2 + (F'J - FJ' + 2RJ' - Q')v + (-F'Q + FQ' + F'JR - FJ'R - RQ' + R^2J') \\ - \frac{1}{2} \left\langle (-2x, -2y, 0), \frac{1}{D^*} [(-Q + JR + Jv)e + (F - R - v)g] \right\rangle$$

$$H_{\phi}^* = \frac{1}{2D^{*3}} J'v^2 + (F'J - FJ' + 2RJ' - Q')v + (-F'Q + FQ' + F'JR - FJ'R - RQ' + R^2J') \\ - \frac{1}{2D^*} ((-2x - 2y)[(-Q + JR + Jv)(e_1, e_2, e_3) + (F - R - v)(g_1, g_2, g_3)])$$

bulunur.

Şimdi de  $\varphi^*$  offset regle yüzeyinin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu Gauss eğriliğini (3.2) eşitliği yardımıyla hesaplayalım.

$\phi = -x^2 - y^2$  olduğundan  $\Delta_{\phi} = -4$  olur. Aynı zamanda regle yüzeylerin offsetlerinin Gauss eğriliği olan (4.11) eşitliğinden

$$K_{\phi}^* = -\frac{1}{D^{*4}} (Q - FJ)^2 + 4$$

bulunur.

**Teorem 4.2.3**  $E^3$  Öklid uzayında  $\varphi$  regle yüzey ve bu yüzeyin yoğunluğu  $e^{-x^2-y^2}$  olsun.  $\varphi^*$  yüzeyi açılabilir ise

$$K_{\phi}^* = -\frac{1}{D^{*4}}(Q - FJ)^2 + 4 = 0$$

$$4D^{*4} = (Q - FJ)^2$$

$$2D^{*2} = \mp(Q - FJ)$$

biçimindedir.

**Örnek 4.2.4.**  $E^3$  Öklid uzayında regle yüzey,

$$\varphi(u, v) = \left( \sin u + v \frac{4}{5} \cos u, -\frac{4}{5} \cos u + v \sin u, v \frac{3}{5} \cos u \right) \text{ olsun.}$$

$\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $K$  Gauss eğriliği (Şekil 4.1)

$$K = -\frac{900 \cos^2 u}{(9 + 50v^2 + 9 \cos(2u))^2}, \quad (4.16)$$

$H$  ortalama eğriliği (Şekil 4.2)

$$H = \frac{15\sqrt{2}(4 \cos u - 5v \sin u)}{(9 + 50v^2 + 9 \cos(2u))^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.17)$$

biçimindedir.

$\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin evolüt offseti

$$\varphi^*(u, v) = c^* + ve^* = (c + Rt) + vt$$

olmak üzere  $R = u$  alalım . O halde  $\varphi^*(u, v)$  evolüt ofsetinin parametrik denklemi

$$\varphi^*(u, v) = \left( \sin u - \frac{4}{5}u \sin u - \frac{4}{5}v \sin u, -\frac{4 \cos u}{5} + u \cos u + v \cos u, -\frac{3}{5}v \sin u \right)$$



biçimindedir.

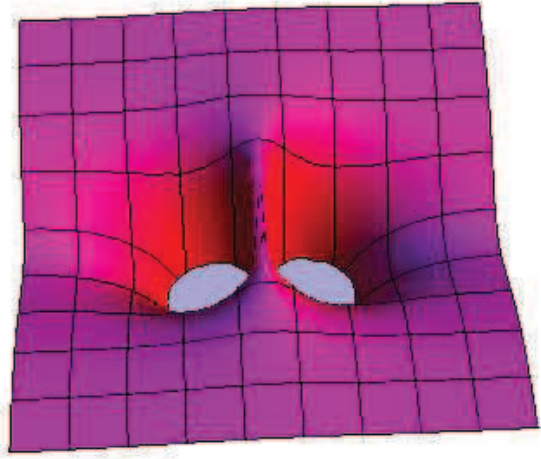
Buradan  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetin  $K^*$  Gauss eğriliği (Şekil 4.3)

$$K^* = -\frac{900 \cos^2 u}{\left(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u)\right)^2}, \quad (4.18)$$

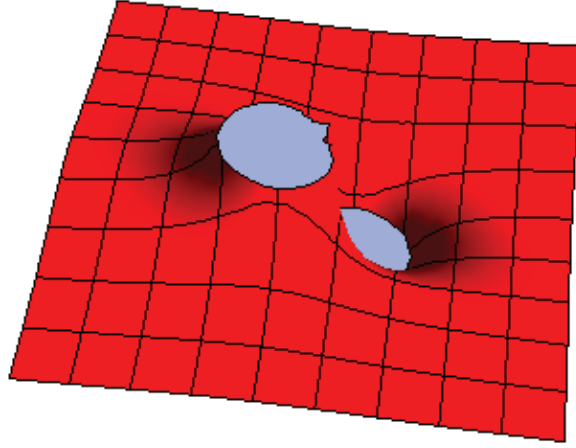
$H^*$  ortalama eğriliği (Şekil 4.4)

$$H^* = -\frac{15\sqrt{2}(-4 + 5u + 5v) \sin u}{\left(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u)\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.19)$$

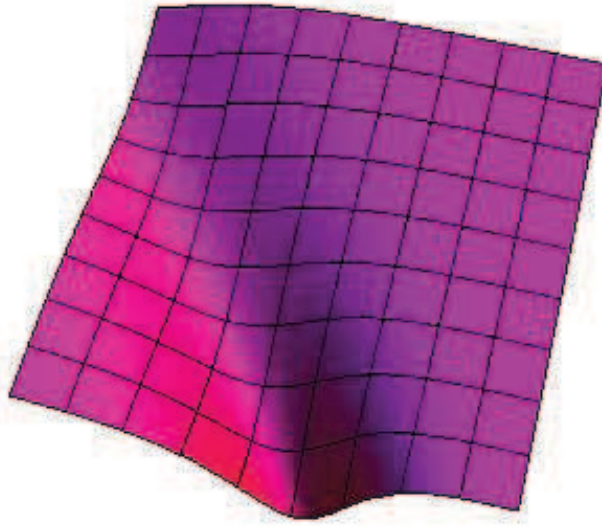
şeklinde bulunur.



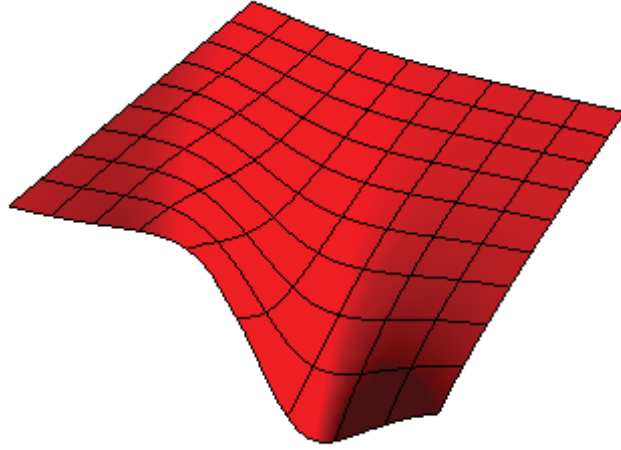
Şekil 4.1.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $K$  Gauss eğriliği



Şekil 4.2.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $H$  Ortalama eğriliği



Şekil 4.3.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt Offsetinin  $K^*$  Gauss eğriliği



Şekil 4.4.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $H^*$  ortalama eğriliği

$\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin yoğunluğu  $e^z$  olsun.  $z = (0, 0, 1)$  olmak üzere, yüzeyin  $K_\phi$  yoğunluklu Gauss eğriliği (3.2) ve (3.7) eşitliğinden,

$$K = K_\phi = -\frac{900 \cos^2 u}{(9 + 50v^2 + 9 \cos(2u))^2}$$

biçimindedir.

$H_\phi$  yoğunluklu ortalama eğriliği (3.1) eşitliğinden yararlanarak,

$$H_\phi = \frac{5 \left( 6(4 \cos u - 5v \sin u) + \frac{1}{25} (9 + 50v^2 + 9 \cos(2u)) (20v - 9 \cos u \sin u) \right)}{\sqrt{2} (9 + 50v^2 + 9 \cos(2u))^{\frac{3}{2}}}$$

bulunur, (Şekil 4.5) .

$$\varphi^*(u, v) = \left( \sin u - \frac{4}{5}u \sin u - \frac{4}{5}v \sin u, -\frac{4 \cos u}{5} + u \cos u + v \cos u, -\frac{3}{5}v \sin u \right) \quad \text{evolüt}$$

ofsetinin  $e^z$  yoğunluklu  $K_\phi^*$  Gauss eğriliği (4.14) eşitliğinden,

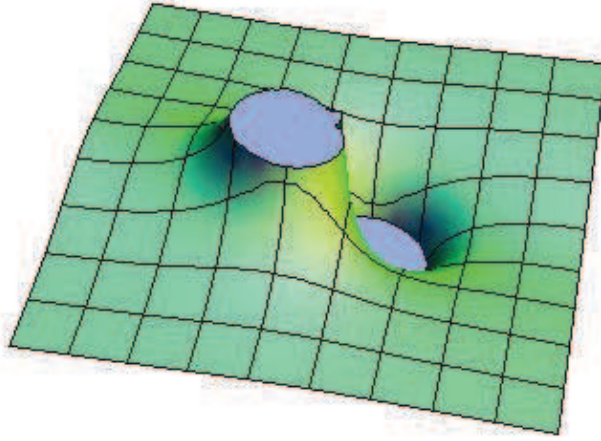
$$K^* = K_\phi^* = -\frac{900 \cos^2 u}{(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u))^2}$$

biçimindedir.

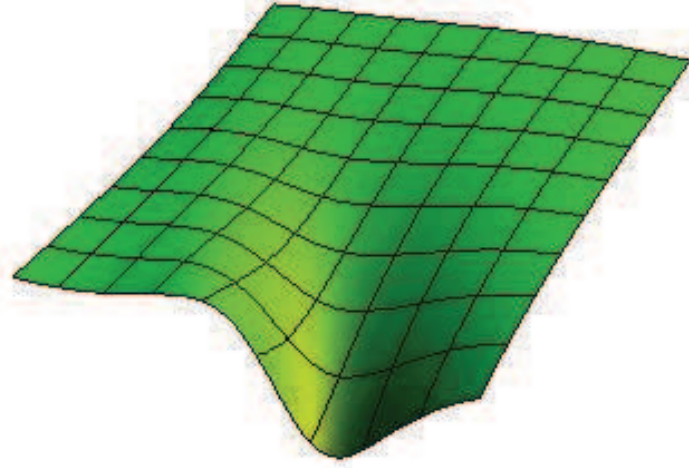
$H_\phi^*$  yoğunluklu ortalama eğriliği,

$$H_\phi^* = \frac{(-41 + 40u + 40v - 9 \cos(2u))(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u)) - 300(-4 + 5u + 5v) \sin u}{10\sqrt{2}(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u))^{\frac{3}{2}}}$$

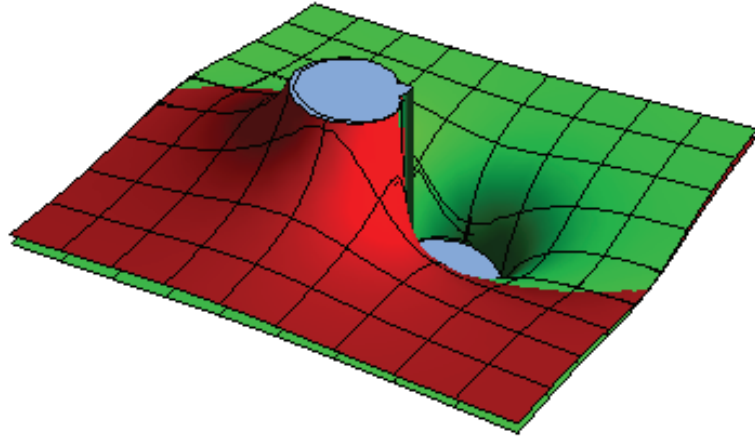
şeklinde bulunur, (Şekil 4.6).



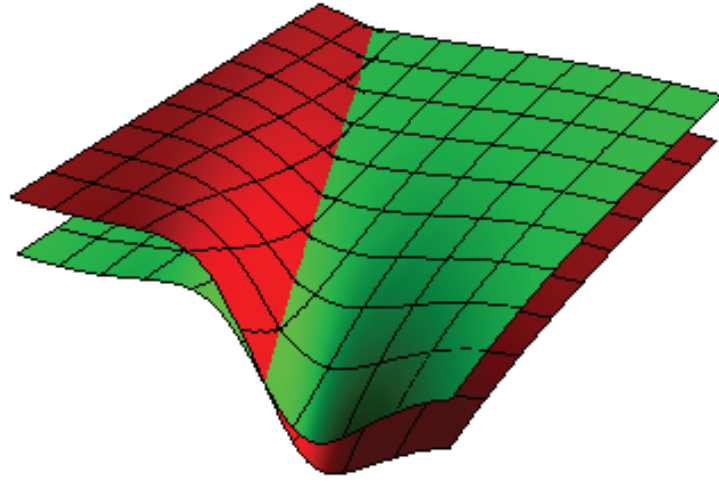
Şekil 4.5.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $e^z$  yoğunluklu  $H_\phi^*$  ortalama eğriliği



Şekil 4.6.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $e^z$  yoğunluklu  $H_\phi^*$  ortalama eğriliği



Şekil 4.7.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $H$  ortalama eğriliği ile  $e^z$  yoğunluklu  $H_\phi$  ortalama eğriliğinin ilişkisi



Şekil 4.8.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $H^*$  ortalama eğriliği ile  $e^z$  yoğunluklu  $H_\phi^*$  ortalama eğriliğinin ilişkisi

$\varphi(u, v) = \left( \sin u + v \frac{4}{5} \cos u, -\frac{4}{5} \cos u + v \sin u, v \frac{3}{5} \cos u \right)$  parametrik şekilde ifade ettiğimiz regle yüzeyinin yoğunluğu  $e^{-x^2-y^2}$  olsun. O halde  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $K_\phi$  yoğunluklu Gauss eğriliği (4.15) eşitliğinden,

$$K_\phi = -\frac{900 \cos^2 u}{(9 + 50v^2 + 9 \cos(2u))^2} + 4$$

biçimindedir, (Şekil 4.9).

$e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $H_\phi$  ortalama eğriliği (4.16) eşitliğinden,

$$H_\phi = -\frac{3(-20(80 + 27v + 100v^3) \cos u - 180v \cos(3u) + 2(27 + 1000v + 100v^2 + 4(9 + 25v^2) \cos(2u) + 9 \cos(4u)) \sin u)}{40\sqrt{2}(9 + 50v^2 + 9 \cos(2u))^{\frac{3}{2}}}$$

bulunur, (Şekil 4.10).

$\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin evolüt offseti

$$\varphi^*(u, v) = \left( \sin u - \frac{4}{5}u \sin u - \frac{4}{5}v \sin u, -\frac{4 \cos u}{5} + u \cos u + v \cos u, -\frac{3}{5}v \sin u \right)$$

ve yoğunluk  $e^{-x^2-y^2}$  olmak üzere,

$\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $K_\phi^*$  Gauss eğriliği,

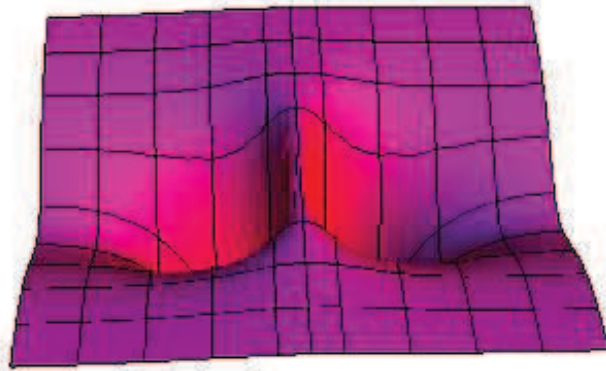
$$K_\phi^* = -\frac{900 \cos^2 u}{(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u))^2} + 4$$

biçimindedir, (Şekil 4.13).

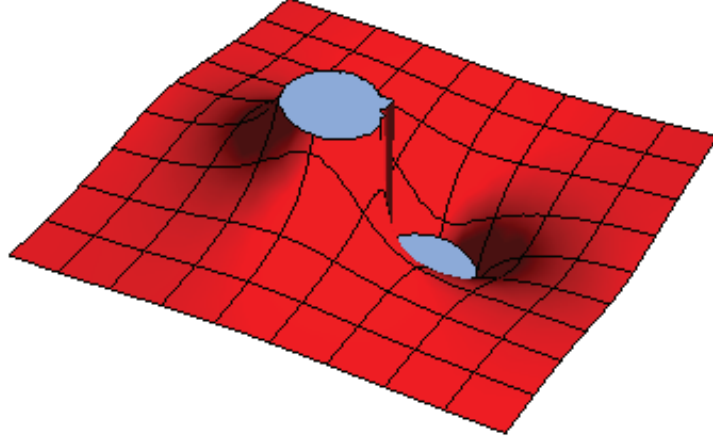
$e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $H_\phi^*$  ortalama eğriliği,

$$H_\phi^* = \frac{3(\cos u(-1 - 10u - 10v + \cos(2u))(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u)) - 100(-4 + 5u + 5v) \sin u)}{10\sqrt{2}(41 + 50u^2 - 80v + 50v^2 + 20u(-4 + 5v) + 9 \cos(2u))^{\frac{3}{2}}}$$

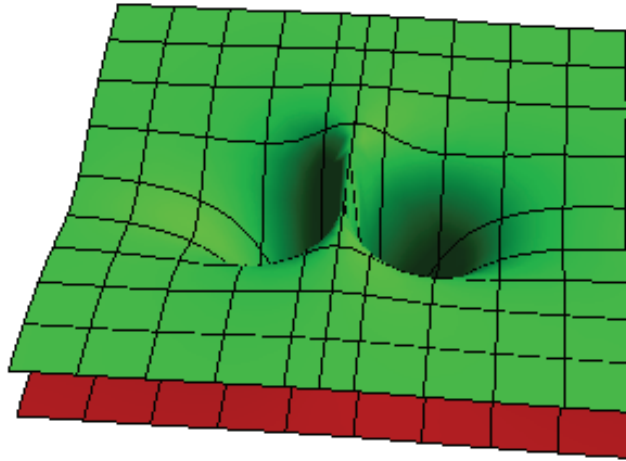
şeklindedir, (Şekil 4.14).



Şekil 4.9.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $K_\phi^*$  Gauss eğriliği

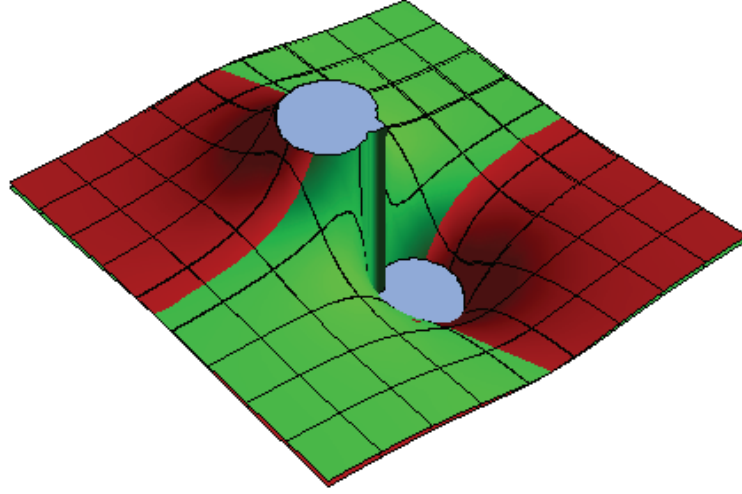


Şekil 4.10.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $H_\phi$  Gauss eğriliği

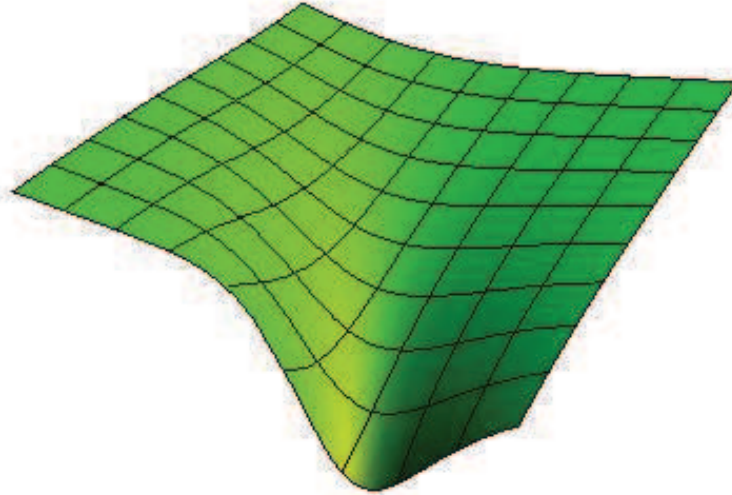


Şekil 4.11.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $K$  Gauss eğriliği ile  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $K_\phi$  Gauss eğriliğinin ilişkisi

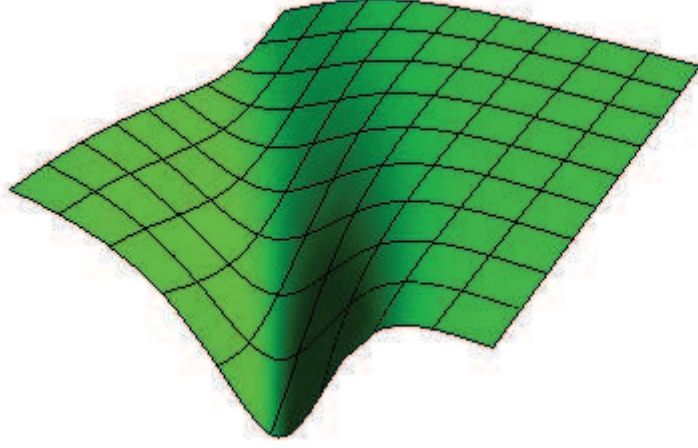




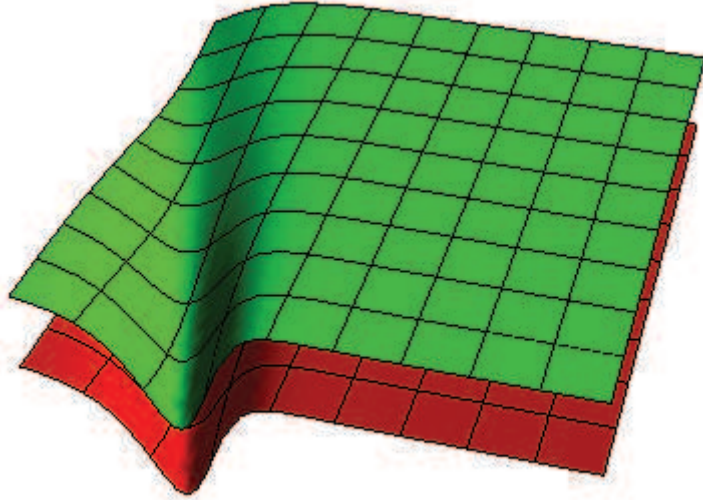
Şekil 4.12.  $\varphi(u, v)$  regle yüzeyinin  $H$  ortalama eğriliği ile  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $H_\phi$  ortalama eğriliğinin ilişkisi



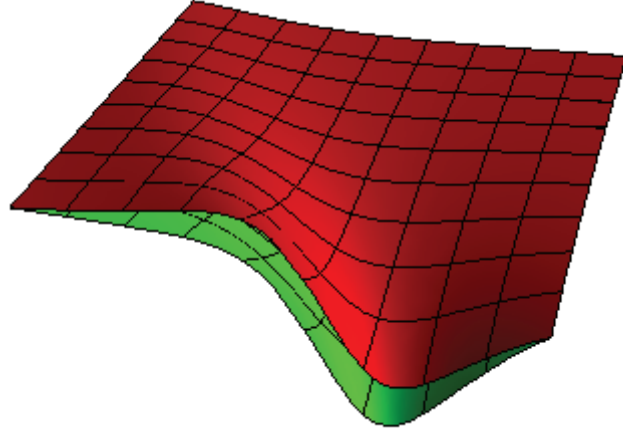
Şekil 4.13.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $K_\phi^*$  Gauss eğriliği



Şekil 4.14.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $H_g^*$  ortalama eğriliği



Şekil 4.15.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $K^*$  Gauss eğriliği ile  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $K_g^*$  Gauss eğriliğinin ilişkisi



Şekil 4.16.  $\varphi^*(u, v)$  evolüt offsetinin  $H^*$  ortalama eğriliği ile  $e^{-x^2-y^2}$  yoğunluklu  $H_\phi^*$  ortalama eğriliğinin ilişkisi

## KAYNAKLAR

- [1] Morgan, F., Manifolds with density, Notices of AMS, vol. 52, No.8. , 2005.
- [2] Morgan, F., Myers' Theorem With Density, Kodai Math. J., vol. 29, 455-461, 2006.
- [3] Morgan F., Manifolds with Density and Perelman's Proof of Poincare Conjecture, The American Mathematical Monthly, Vol.116, No.2, 134-142, 2009.
- [4] Rosales, C., Canete ,A., On the isoperimetric problem in Euclidean Space with Density, Springer Calculus of Variations, Vol.31 ,27-46, 2008.
- [5] Corwin, I., Hoffman,N., Hurder, Sesum, V., Xu, Y., Differential Geometry of Manifolds With Density, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, vol.7, Issue.1, Article.2., 2006.
- [6] Belarbi. L., Belkhelfa, M., Surfaces in  $R^3$  with density, i-manager's Journal on Mathematics, Vol.1, No.1, 2012.
- [7] Lopez, R., Minimal Surfaces in Euclidean Space With a Log-Linear Density, Online ulaşabilirsiniz: <https://arxiv.org/abs/1410.2517> (erişim tarihi 01 Nisan 2019).
- [8] Kim, D. S., Yoon, D.W., Constructions of Helicoidal Surfaces in Euclidean Space with density, Symmetry , Vol.9, No. 173, 2017.
- [9] Hieu, D. T., Hoang, N. M., Ruled Minimal Surfaces in  $R^3$  With Density  $e^z$ , Passific Journal of Mathematics , Vol.243, No.2., 2009.
- [10] Taşköprü, K.,  $E^3$ , 3- Boyutlu Öklid Uzayında Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2013.
- [11] Yıldız, Ö. G., Minkowski Uzayında Yüzey Üzerinde Eğrilerin Elastik Olmayan Hareketleri, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2011.
- [12] Babaarslan, M., Sabit Eğilimli Yüzeyler ve Uygulamaları, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 2013.

- [13] Hacısalihođlu, H. H., Diferansiyel Geometri, Fen Fakóltesi, Ankara, 2000.
- [14] Arık, N., 3-Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Biharmonik eğriler, Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2010.
- [15] Öncü, İ., Özel Eğriler ve Regle Yüzeyle. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2005.
- [16] O'Neill, B., Elementary Differential Geometry, Revised Second Edition Academic Press, Inc., New York, 1997.
- [17] Yoon, D.W., On The Offsets of Ruled Surfaces In Euclidean Space, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.108, No.4, 985-997, 2016.
- [18] Baysal, M., Şekil operatörü ve temel formlar, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2007.
- [19] Gray, A., Modern Differential Geometry of Curves and Surface With Mathematica, Boca Raton, FL:CRC Press, 1997.
- [20] Sabuncuođlu, A., Diferansiyel Geometri, Nobel Basımevi, Ankara, 2004.
- [21] Aydın, S., Dual Uzayda Konoidal Regle Yüzeyleler Üzerine, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2014.
- [22] Güngöz, A., Açılabilir Bezier Yüzeylelerinin İncelenmesi ve Bilgisayar Tasarımı. Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2008.
- [23] Kasap, E.,Yüce, S., Kuruođlu, N., The Involute-Evolute Offsets Of Ruled Surface, Iranian Journal of Science & Technology, Transactions A, Vol.33, No. A2, 2009.
- [24] Spivak, M., Differential Geometry, Publish or Perish Inc., Boston, 1975.

## ÖZGEÇMİŞ

Neslihan Ulucan, 07.09.1991'de İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2009 yılında İbrahim Turhan Lisesi'nden mezun oldu. 2009 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2013 yılında bitirdi. 2013 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2014 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi'nde formasyon eğitimi aldı. 2015 yılında Örfi Çetinkaya Ortaokulu'nda İngilizce öğretmenliği, 2016 yılında İncirlibahçe Ortaokulu'nda Matematik öğretmenliği yaptı. 2017 yılında başladığı Gökkuşağı Koleji'nde Matematik öğretmeni olarak çalışmaya devam etmektedir.