T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARI VE BAZI UYGULAMALARI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Nazim TOPAL**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Tez Danışmanı : Dr. Öğrt. Üyesi Bahar DEMİRTÜRK BİTİM**

**Nisan 2018**

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARI VE BAZI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazim TOPAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 13.04.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| Prof. Dr.<br>Refik KESKİN<br>Jüri Başkanı | Doç. Dr.<br>Arzu ÖZKOÇ<br>ÖZTÜRK<br>Üye | Dr. Öğrt. Üy.<br>Bahar DEMİRTÜRK<br>BİTİM<br>Üye |

# BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Nazim TOPAL
13.04.2018

# TEŞEKKÜR

Bu tez konusunda bana yardımlarını esirgemeyen ve birlikte bu teze konu olan makalelerin yazılmasında yardımcı olan danışman hocam Dr. Öğrt. Üyesi Bahar DEMİRTÜRK BİTİM'e, tüm Sakarya Üniversitesi matematik bölümüne, eşime, aileme teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $F_n$ | : $n.$ Fibonacci sayısı |
| $F(x)$ | : Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu |
| $G(x)$ | : Genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu |
| $J(x)$ | : Genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu |
| $K_n$ | : $n.$ Genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonu |
| $L_n$ | : $n.$ Lucas sayısı |
| $L(x)$ | : Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $Q_n$ | : Genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonu |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $U_n$ | : $n.$ genelleştirilmiş Fibonacci sayısı |
| $U(x)$ | : Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu |
| $V_n$ | : $n.$ genelleştirilmiş Lucas sayısı |
| $V(x)$ | : Genelleştirilmiş Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu |
| $\mathbb{Z}$ | : Tam sayılar kümesi |

# ÖZET

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Lucas sayıları, Fibonacci kuaterniyonları, Lucas kuaterniyonları, genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları, genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonları, üreteç fonksiyonlar.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci ve Lucas sayıları, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ve $(p, q)$ genelleştirmeleri ile ilgili genel literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özellikler, Cassini ve Catalan özdeşlikleri ile bazı kombinatorik özellikler ispatlanacaktır.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının özellikleri anlatılacaktır.

Dördüncü bölümde makalemize konu olan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ile ilgili tanım ve teoremler verilerek, kuaterniyonlardaki Catalan özdeşliği ile bazı kombinatoryel özellikler ve üreteç fonksiyonlar ele alınacaktır.

Beşinci bölüm, sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

# GENERALIZED FIBONACCI AND LUCAS QUATERNIONS AND SOME APPLICATIONS

## SUMMARY

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, generalized Fibonacci numbers, generalized Lucas numbers, Fibonacci quaternions, Lucas quaternions, generalized Fibonacci quaternions, generalized Lucas quaternions, generating functions.



This thesis consists of four parts. In the first part, general literature on Fibonacci and Lucas numbers, Fibonacci and Lucas quaternions, and $(p, q)$ generalizations are given.

In the second part, properties related to Fibonacci and Lucas numbers, Cassini and Catalan identities and some combinatorial properties will be proved.

In the third part, some properties of generalized Fibonacci and Lucas numbers will be explained.

In the fourth part, the definitions and theorems related to the generalized Fibonacci and Lucas quaternions which are subject to our article will be given and the Catalan identity in quaternions and some combinatorial properties and generating functions will be discussed.

The fifth part consists of conclusions and recommendations.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

İtalyan matematikçi Fibonacci, 13. yüzyılda Liber Abaci adlı kitapta bir çift tavşan sorusundan bahsetmiştir. "Bir çift tavşanın her ay yeni bir çift tavşan doğurması ve yeni doğan çiftin ergenleşmesi bir ay sürerse 100 ay sonunda kaç tane tavşan olacağını bulunuz" sorusunun cevabı olarak 1, 1, 2, 3, 5, … sayıları olan Fibonacci sayıları olmuştur. Doğada pek çok yerde Fibonacci sayılarına uygun dizilimler bulunur. Örneğin; çam kozalağı ve ayçekirdeğinin dizilimleri Fibonacci sayılarına örnektir [1].

Birçok matematikçi Fibonacci sayıları üzerine çalışmıştır. Bunlardan İtalyan matematikçi Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) kendi adıyla anılan özdeşliği bulmuştur. Daha sonra bu özdeşliğin daha genel biçimi Eugene Catalan (1814-1894) tarafından verilmiştir [1].

Fibonacci sayılarıyla ilgili pek çok özdeşliği bulmamızı sağlayan Binet formüllerini, Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısını kullanarak ilk olarak De Moivre (1718) ve sonrasında da Jacques-Philippe-Marie Binet (1786-1856) ispatlamıştır. Binet formüllerini kullanmanın avantajı, Fibonacci sayılarını her terimi kendinden önceki iki terimin toplamı olarak yazarak istediğimiz $n$. Fibonacci sayısını bulmak yerine, indirgeme bağıntısıyla direkt olarak hesaplamamızı sağlamasıdır [1, 2].

Daha sonra Fibonacci sayılarına benzer şekilde fakat farklı başlangıç koşulları ile, kendisinden önceki iki terimin toplamı şeklinde yazılan sayılar olarak Lucas sayıları, Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları gibi sayı dizileri de tanımlanmıştır [1].

Fibonacci ve Lucas sayılarının arasındaki özdeşliklerin ispatında pek çok yöntem kullanılmıştır. Matrisler kullanılarak Demirtürk [3] tarafından Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki özellikler, Şiar ve Keskin [4] ise genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bazı özdeşlikleri bulmuşlardır. C. A. Church ve Bicknell ise üstel fonksiyonları kullanarak Fibonacci ve Lucas sayıları arasında toplamsal eşitlikleri bulmuştur [5].

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ise Horadam [6,7] tarafından tanımlanmıştır. Burada genelleştirilmiş Fibonacci sayıları $U_0 = 0, U_1 = 1$ başlangıç şartları ve $p, q \in \mathbb{R}$ ve her $n \geq 2$ olmak üzere, $U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$ biçiminde tanımlanır. Aynı şekilde genelleştirilmiş Lucas sayıları ise $V_0 = 2, V_1 = p$ başlangıç şartları ve $p, q \in \mathbb{R}$ ve her $n \geq 2$ olmak üzere, $V_n = pV_{n-1} + qV_{n-2}$ biçiminde tanımlanır.

Eşiyle birlikte Brougham köprüsünde yürürken kuaterniyonların temel bileşenlerini bulan Sir William Hamilton kuaterniyonların kuantum fiziğinden, mekanik kuramlarına, üç boyutlu uzayda dönme hareketlerine ve uzay kinematiğine kadar pek çok alanda olmak üzere bu kadar geniş bir kullanım alanı olacağını tahmin etmemiştir. Genel olarak kuaterniyonlar karmaşık sayılara benzeyen üç boyutlu bir matematiksel yapı oluşturma çalışmalarında ortaya çıkan çarpma ve bölme sorunlarını, 4. boyut ekleyerek yok etmiştir [8, 9, 10].

Fibonacci ve Lucas kuaterniyonu kavramları ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları ilk olarak Horadam tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra birçok matematikçi tarafından Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları üzerine çeşitli genelleştirmeler ve özellikler elde edilmiştir. Kuaterniyonlar için indirgeme bağıntıları ilk defa Horadam tarafından tanımlanmıştır [11, 12].

Halıcı tarafından Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları ve bazı kombinatoryel özellikleri verilmiştir. Ramirez tarafından ise $p = k$ ve $q = 1$ için Cassini ve Catalan özdeşliği, kuaterniyonların üreteç fonksiyonları ve bazı özdeşlikler verilmiştir. Polatlı ve Kesim ise $p = k \ ve \ q = 1$ için Catalan özdeşliğinin ispatını yapmışlardır [13, 14, 15, 16, 17].

Demirtürk Bitim ve Topal, [18] de öncelikle $(p, q)$-Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için Cassini ve Catalan özdeşliklerinde kullanılan $\hat{\alpha}\hat{\beta}$, $\hat{\beta}\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}\hat{\beta}$ çarpımlarının eşitlerini bularak daha sonra bu çarpımları kullanarak Cassini özdeşliğine göre daha genel bir özdeşlik olan Catalan özdeşliğinin ispatını yapmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonları ve bazı kombinatoryel özelliklerin ispatları verilmiştir.

Ayrıca Demirtürk Bitim ve Topal üstel fonksiyonları kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için toplamsal ifadeler elde etmişlerdir [19].

# BÖLÜM 2. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

**Tanım 2.1**. Her $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olan $(F_n)$ dizisi, Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. Burada $F_n$ sayısına $n.$ Fibonacci sayısı denir. Bu sayılar Leonardo Fibonacci tarafından tanımlanmıştır [1].

Her $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olan $(L_n)$ dizisi, Lucas dizisi olarak adlandırılır. Burada $L_n$ sayısına $n.$ Lucas sayısı denir. Bu sayılar François Edouard Anatole Lucas (1842-1891) tarafından 1878 tarihinde tanımlanmıştır [1].

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^2 = x + 1$ biçimindedir. Bu karakteristik denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\alpha + \beta = 1$ ve $\alpha\beta = -1$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ olduğu görülür. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ ve $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ olduğu tümevarımla gösterilebilir. Benzer şekilde Lucas dizisinin elemanları arasında her $n \in \mathbb{N}$ için
$\sqrt{5}\alpha^n = \alpha L_n + L_{n-1}, -\sqrt{5}\beta^n = \beta L_n + L_{n-1}$ , $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}, \beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ özdeşliklerinin sağlandığı tümevarımla gösterilebilir.

**Tanım 2.2.** Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $L_n = \alpha^n + \beta^n$ biçimindeki gösterime $(F_n)$ ve $(L_n)$ dizilerinin Binet formülü denir. Bu formüller De Moivre tarafından 1718'de, daha sonra da Jacques-Philippe-Marie Binet tarafından 1843 yılında ispatlanmıştır [1, 2].

$\forall\, n \geq 1$ için $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ ve $L_{-n} = (-1)^n L_n$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla $\forall\, n \epsilon \mathbb{Z}$ için Binet formülleri $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $L_n = \alpha^n + \beta^n$ biçimindedir. Fibonacci ve Lucas sayıları için pek çok özelliğin ispatı Binet formülleri kullanılarak yapılabilir.

Koshy, Vajda, Hoggat, Ribenboim [1, 20, 251, 22, 25] numaralı kaynaklarda pek çok özdeşliği vermiştir.

Ayrıca Fibonacci ve Lucas sayıları arasında da

$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$

$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

$F_n + L_n = 2F_{n+1}$

$2F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$

$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$

$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2}$

$F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_nL_n$

$F_{n+1}L_{n+1} - F_nL_n = F_{2n+1}$

$F_n^2 - 3F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 = 2(-1)^{n+1}$

$F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m} = F_mL_n$

$L_mF_n + L_nF_m = 2F_{n+m}$

$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$

$(F_{n-1}F_{n+2})^2 + (2F_nF_{n+1})^2 = (F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n)^2$

$q^nF_0^2 + q^{n-1}F_1^2 + q^{n-2}F_2^2 + \cdots + qF_{n-1}^2 + F_n^2 = \dfrac{F_nF_{n+1}}{p}$

$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \binom{n-4}{4} + \cdots = F_n$

gibi pek çok özellik vardır [1, 20, 22, 23].

Rabinowitz [25] aşağıdaki özdeşlikleri ispatlamıştır.

$$F_{kn} = \frac{F_{(k-1)n}L_n + L_{(k-1)n}F_n}{2}$$

$$L_{kn} = \frac{5F_{(k-1)n}L_n + L_{(k-1)n}F_n}{2}$$

$$F_m F_n = \frac{L_{m+n} - (-1)^n L_{m-n}}{5}$$

$$L_m L_n = L_{m+n} + (-1)^n L_{m-n}$$

$$F_m L_n = F_{m+n} + (-1)^n F_{m-n}$$

$$F_n^2 = \frac{L_{2n} - 2(-1)^n}{5}$$

$$L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n$$

$$F_{m-n} = (-1)^n \frac{F_m L_n - F_n L_m}{2}$$

$$L_{m-n} = (-1)^n \frac{L_m L_n - 5F_m F_n}{2}$$

Matrisler kullanılarak da Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki özellikler bulunabilir. Demirtürk [3] te,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ ve

$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ olmak üzere, $S^n = \begin{bmatrix} \frac{L_n}{2} & \frac{5F_n}{2} \\ \frac{F_n}{2} & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$ matrislerini kullanarak

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

$$2L_{n+m} = L_n L_m + 5F_n F_m$$

$$2F_{n+m} = F_n L_m + L_n F_m$$

$$2(-1)^m L_{n-m} = L_m L_n - 5F_m F_n$$

$$2(-1)^m F_{n-m} = F_n L_m - L_n F_m$$

$$L_m L_n = L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m}$$

$$L_m F_n = F_{n+m} + (-1)^m F_{n-m}$$

$$\sum_{j=0}^{n} F_{mj+k} = \frac{F_k - F_{mn+m+k} + (-1)^m (F_{mn+k} - F_{k-m})}{1 + (-1)^m - L_m}$$

$$\sum_{j=0}^{n} L_{mj+k} = \frac{L_k - L_{mn+m+k} + (-1)^m (L_{mn+k} - L_{k-m})}{1 + (-1)^m - L_m}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j F_{mj+k} = \frac{F_k + F_{mn+m+k} + (-1)^m (F_{mn+k} + F_{k-m})}{1 + (-1)^m + L_m}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L_{mj+k} = \frac{L_k + L_{mn+m+k} + (-1)^m(L_{mn+k} + L_{k-m})}{1 + (-1)^m + L_m}$$

özdeşliklerini ve toplam formüllerini ispatlamıştır.

Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) tarafından bulunan ve Cassini özdeşliği olarak adlandırılan özdeşlik aşağıdaki teoremde verilsin.

**Teorem 2.1.** (Cassini Özdeşliği)
Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ dir [1].

**İspat.** Binet formülü, $\alpha\beta = -1$ ve $F_1 = 1$ olduğu kullanılırsa,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1}}{5}\right) - \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n}{5}\right)$$

$$= \frac{-\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + 2\alpha^n\beta^n}{5}$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2 - 2\alpha\beta}{5}\right)$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-1}(F_1)^2$$

$$= (-1)^n$$

bulunur.

Lucas sayıları için Cassini özdeşliğine benzer özdeşlik de aşağıdaki gibidir.

**Teorem 2.2.** Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$ dir [1].

**İspat.** Binet formülü, $\alpha\beta = -1$ ve $F_1 = 1$ olduğu kullanılırsa

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)^2$$

$$= (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n)$$

$= \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - 2\alpha^n\beta^n$

$= (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$

$= (\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}\right)^2 5 = 5(\alpha\beta)^{n-1}(F_1)^2 = 5(-1)^{n-1}$

bulunur.

Fibonacci sayıları için Cassini özdeşliğinin daha genel hali aşağıdaki teoremde Eugene Catalan tarafından verilmiştir.

**Teorem 2.3.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için $F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n-r+1}F_r^2$ dir [1].

**İspat.** Binet formülü ve $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa,

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - \alpha^{n-r}\beta^{n+r} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r}}{5}\right) - \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n}{5}\right)$$

$$= \frac{-\alpha^{n+r}\beta^{n-r} - \alpha^{n-r}\beta^{n+r} + 2\alpha^n\beta^n}{5}$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^{2r} + \beta^{2r} - 2\alpha^r\beta^r}{5}\right)$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$= -(\alpha\beta)^{n-r}(F_r)^2$

$= (-1)^{n-r+1}(F_r)^2$

bulunur.

Ayrıca Catalan özdeşliği Lucas sayıları için aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem 2.4.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için $L_{n-r}L_{n+r} - L_n^2 = 5(-1)^{n-r}(F_r)^2$ dir [1].

**İspat.** Binet formülü ve $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa,

$L_{n-r}L_{n+r} - L_n^2 = (\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) - (\alpha^n + \beta^n)^2$

$= (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r} + \alpha^{n+r}\beta^{n-r}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n)$

$$= \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r} - 2\alpha^n\beta^n$$
$$= (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^{2r}+\beta^{2r} - 2\alpha^r\beta^r)$$
$$= (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^r - \beta^r)^2$$
$$= 5(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= 5(\alpha\beta)^{n-r}(F_r)^2$$
$$= 5(-1)^{n-r}(F_r)^2$$
elde edilir.

Teorem 2.3 ve Teorem 2.4’ten aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 2.1.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için $L_{n-r}L_{n+r} - L_n^2 = -5(F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2)$ dir.

Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili pek çok özelliğin ispatı yapılmıştır. Fibonacci sayılarının toplamları ile ilgili olarak teleskopik toplam, Binet formülü, tümevarım, matrisler gibi yöntemler kullanılmıştır.

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$
$$\sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$$
$$\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{n+1}$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i+1} = F_{2n} - 1$$
$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}$$
$$\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_nL_{n+1} - 2$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

$$F_n + F_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} F_k 2^{n-2-k} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{mi} = \frac{F_{mn+m} - (-1)^m F_{mn} - F_m}{L_m - (-1)^m - 1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} L_{mi} = \frac{L_{mn+m} - (-1)^m F_{mn} - F_m}{L_m - (-1)^m - 1}$$

toplam formüllerine [1, 5, 20, 21, 22, 24] kaynaklarında rastlamak mümkündür. Aşağıda Binet formülleri kullanılarak daha genel toplam formülleri verilecektir.

**Teorem 2.5.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} F_{mi+r} = \frac{F_{mn+m+r} - (-1)^m F_{mn+r} - (-1)^r F_{m-r} - F_r}{L_m - (-1)^m - 1}$$

dir [1].

**İspat.** Binet formülü ve geometrik dizi toplamı kullanılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} F_{mi+r} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^{mi+r} - \beta^{mi+r}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}} \sum_{i=0}^{n} (\alpha^m)^i - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}} \sum_{i=0}^{n} (\beta^m)^i$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}} \left[\frac{(\alpha^m)^{n+1} - 1}{\alpha^m - 1}\right] - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}} \left[\frac{(\beta^m)^{n+1} - 1}{\beta^m - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r}{\alpha^m - 1}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\beta^{mn+m+r} - \beta^r}{\beta^m - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r)(\beta^m - 1) - (\alpha^m - 1)(\beta^{mn+m+r} - \beta^r)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^{mn+m+r}\beta^m - \alpha^r\beta^m - \alpha^{mn+m+r} + \alpha^r}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^m\beta^{mn+m+r} - \beta^{mn+m+r} - \alpha^m\beta^r + \beta^r}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(\alpha\beta)^m(\alpha^{mn+r} - \beta^{mn+r}) - (\alpha^{mn+m+r} - \beta^{mn+m+r})}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(\alpha\beta)^r(\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}) + (\alpha^r - \beta^r)}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}\right)$$

$$= \frac{(-1)^m F_{mn+r} - F_{mn+m+r} + (-1)^r F_{m-r} + F_r}{(-1)^m - L_m + 1}$$

$$= \frac{F_{mn+m+r} - (-1)^m F_{mn+r} - (-1)^r F_{m-r} - F_r}{L_m - (-1)^m - 1}$$

bulunur.

**Teorem 2.6.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} L_{mi+r} = \frac{L_{mn+m+r} - (-1)^m L_{mn+r} + (-1)^r L_{m-r} - L_r}{L_m - (-1)^m - 1}$$

dir [1].

**İspat.** Binet formülü ve geometrik dizi toplamı kullanılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} L_{mi+r} = \sum_{i=0}^{n}\left(\alpha^{mi+r} + \beta^{mi+r}\right)$$

$$= \alpha^r \sum_{i=0}^{n} (\alpha^m)^i + \beta^r \sum_{i=0}^{n} (\beta^m)^i$$

$$= \alpha^r \left[\frac{(\alpha^m)^{n+1} - 1}{\alpha^m - 1}\right] + \beta^r \left[\frac{(\beta^m)^{n+1} - 1}{\beta^m - 1}\right]$$

$$= \left[\frac{\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r}{\alpha^m - 1}\right] + \left[\frac{\beta^{mn+m+r} - \beta^r}{\beta^m - 1}\right]$$

$$= \left[\frac{(\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r)(\beta^m - 1) + (\alpha^m - 1)(\beta^{mn+m+r} - \beta^r)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)}\right]$$

$$= \left(\frac{\alpha^{mn+m+r}\beta^m - \alpha^r\beta^m - \alpha^{mn+m+r} + \alpha^r}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}\right)$$

$$+ \left(\frac{\alpha^m\beta^{mn+m+r} - \beta^{mn+m+r} - \alpha^m\beta^r + \beta^r}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{(\alpha\beta)^m(\alpha^{mn+r} + \beta^{mn+r}) - (\alpha^{mn+m+r} + \beta^{mn+m+r})}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}\right)$$

$$+\left(\frac{-(\alpha\beta)^r(\alpha^{m-r}+\beta^{m-r})+(\alpha^r+\beta^r)}{(\alpha\beta)^m-(\alpha^m+\beta^m)+1}\right)$$

$$=\frac{(-1)^m L_{mn+r}-L_{mn+m+r}-(-1)^r L_{m-r}+L_r}{(-1)^m-L_m+1}$$

$$=\frac{L_{mn+m+r}-(-1)^m L_{mn+r}+(-1)^r L_{m-r}-L_r}{L_m-(-1)^m-1}$$

bulunur.

Ayrıca Binom formüllerinden faydalanarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_i=F_{2n}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_i=L_{2n}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{i+j}=F_{2n+j}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{i+j}=L_{2n+j}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{m-i}=F_{m+n}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i F_{i+j}=(-1)^{j+1}F_{n-j}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i F_{2i+j}=(-1)^n F_{n+j}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}F_{i-1}=F_{2n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_m^i F_{m-1}^{n-1}F_i=F_{mn}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_m^i F_{m-1}^{n-1}L_i=L_{mn}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir [23, 25]. Daha genel toplam formülleri Teorem 2.7 ve

Teorem 2.8' de verilecektir

**Teorem 2.7.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} F_{i+r} = F_{mn+r}$$

dir [1].

**İspat.** Binom açılımı ve Binet formülü kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} F_{i+r} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} \left(\frac{\alpha^{i+r} - \beta^{i+r}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} \alpha^i - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} \beta^i$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}} (F_m \alpha + F_{m-1})^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}} (F_m \beta + F_{m-1})^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}} (\alpha^m)^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}} (\beta^m)^n$$

$$= \frac{\alpha^{mn+r} - \beta^{mn+r}}{\sqrt{5}}$$

$$= F_{mn+r}$$

elde edilir.

**Teorem 2.8.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} L_{i+r} = L_{mn+r}$$

dir [1].

**İspat.** Binet formülü ve $\alpha^m = \alpha F_m + F_{m-1}$, $\beta^m = \beta F_m + F_{m-1}$ olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} L_{i+r} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} \left(\alpha^{i+r} + \beta^{i+r}\right)$$

$$= \alpha^r \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} \alpha^i + \beta^r \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_m^i F_{m-1}^{n-i} \beta^i$$

$= \alpha^r (F_m \alpha + F_{m-1})^n + \beta^r (F_m \beta + F_{m-1})^n$
$= \alpha^r (\alpha^m)^n + \beta^r (\beta^m)^n$
$= \alpha^{mn+r} + \beta^{mn+r}$
$= L_{mn+r}$
bulunur.

**Tanım 2.3.** Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ biçimindeki kuvvet serileri üreteç fonksiyon olarak tanımlanır. Burada $f(x)$'e $(a_n)$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Fibonacci dizisi $(F_n)$ ve Lucas dizisi $(L_n)$'nin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \tag{2.1}$$

ve

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n \tag{2.2}$$

biçiminde gösterilmek üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1} x^n = \frac{1 + 2x}{1 - x - x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n = \frac{x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^2 x^n = \frac{1 - x}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2}^2 x^n = \frac{1 + 2x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} x^n = \frac{x}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^2 x^n = \frac{4-7x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1}^2 x^n = \frac{1+7x-4x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+2}^2 x^n = \frac{9-2x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} x^n = \frac{x}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^3 x^n = \frac{x-2x^2-x^3}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^3 x^n = \frac{1-2x-x^2}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2}^3 x^n = \frac{1+5x-3x^2-x^3}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} F_{n+2} x^n = \frac{2x}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} x^n = \frac{F_k x}{1-L_k x+(-1)^k x^2}$$

üreteç fonksiyonları Hoggatt ve Lind tarafından 1967 yılında bulunmuştur [26].

Şimdi Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için üreteç fonksiyonlarının daha genel ifadeleri ispatlanacaktır.

**Teorem 2.9.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+r} x^n = \frac{F_r + (-1)^r F_{m-r} x}{1-L_m x+(-1)^m x^2}$$

dir [26].

**İspat.** Binet formülleri ve $(2.1)$ kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn+r}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{mn+r}-\beta^{mn+r}}{\sqrt{5}}\right)x^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{mn}x^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{mn}x^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^m x)^n - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta^m x)^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha^m x}\right) - \frac{\beta^r}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\beta^m x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r}{1-\alpha^m x} - \frac{\beta^r}{1-\beta^m x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r(1-\beta^m x) - \beta^r(1-\alpha^m x)}{(1-\alpha^m x)(1-\beta^m x)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r+(\alpha^m\beta^r-\alpha^r\beta^m)x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(\alpha\beta)^m x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r+(\alpha\beta)^r(\alpha^{m-r}-\beta^{m-r})x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(\alpha\beta)^m x^2}\right)$$

$$= \frac{F_r+(-1)^r F_{m-r}x}{1-L_m x+(-1)^m x^2}$$

elde edilir.

**Teorem 2.10.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{mn+r}x^n = \frac{L_r-(-1)^r L_{m-r}x}{1-L_m x+(-1)^m x^2}$$

dir [26].

**İspat.** Binet formülleri ve $(2.2)$ kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{mn+r}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{mn+r}+\beta^{mn+r})x^n$$

$$= \alpha^r\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{mn}x^n + \beta^r\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{mn}x^n$$

$$= \alpha^r \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^m x)^n + \beta^r \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^m x)^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{1 - \alpha^m x} + \frac{\beta^r}{1 - \beta^m x}$$

$$= \frac{\alpha^r (1 - \beta^m x) + \beta^r (1 - \alpha^m x)}{(1 - \alpha^m x)(1 - \beta^m x)}$$

$$= \frac{\alpha^r + \beta^r - (\alpha^m \beta^r + \alpha^r \beta^m) x}{1 - (\alpha^m + \beta^m) x + (\alpha\beta)^m x^2}$$

$$= \frac{\alpha^r + \beta^r - (\alpha\beta)^r (\alpha^{m-r} + \beta^{m-r}) x}{1 - (\alpha^m + \beta^m) x + (\alpha\beta)^m x^2}$$

$$= \frac{L_r - (-1)^r L_{m-r} x}{1 - L_m x + (-1)^m x^2}$$

bulunur.

C. A. Church and Bicknell [5] fonksiyonlar kullanarak Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili toplamsal ifadeler bulunmuştur. Kuvvet serileri kullanılarak

$$e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$e^{\alpha t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^n t^n}{n!}$$

$$e^{\beta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^n}{n!}$$

özdeşlikleri elde edilir. Bu özdeşlikler kullanılarak aşağıdaki

$$\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!}$$

$$\frac{e^{\alpha^k t} - e^{\beta^k t}}{\alpha - \beta} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha^{kn} - \beta^{kn}}{\alpha - \beta} \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} F_{kn} \frac{t^n}{n!}$$

ve

$$e^{\alpha^k t} + e^{\beta^k t} = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha^n + \beta^n) \frac{t^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} L_n \frac{t^n}{n!}$$

$$e^{\alpha t} + e^{\beta t} = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha^{kn} + \beta^{kn}) \frac{t^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} L_{kn} \frac{t^n}{n!}$$

özdeşlikler kolaylıkla gösterilebilir.

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

ve

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$$

üstel fonksiyonları için

$$A(t)B(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n b_{n-k}\right] \frac{t^n}{n!} \tag{2.3}$$

$$A(t)B(-t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{t^n}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_n b_{n-k}\right] \frac{t^n}{n!} \tag{2.4}$$

özdeşlikleri elde edilir. Bu verilen özdeşlikler kullanılarak aşağıdaki teoremler ispatlanacaktır [1, 5].

**Teorem 2.11.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$$

dir [5].

**İspat.**

$A(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$ ve $B(t) = e^t$ alınırsa,

$$e^t \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k\right] \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$e^t \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = \frac{e^{(\alpha+1)t} - e^{(\beta+1)t}}{\alpha - \beta} = \frac{e^{\alpha^2 t} - e^{\beta^2 t}}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. İki denklemin eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$$

elde edilir.

**Teorem 2.12.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}F_{2k} = F_n$$

dir [5].

**İspat.** (2.3) ve (2.4) te

$A(t) = \frac{e^{\alpha^2 t} - e^{\beta^2 t}}{\alpha-\beta}$ ve $B(t) = e^{-t}$ alınırsa,

$$\frac{e^{\alpha^2 t} - e^{\beta^2 t}}{\alpha - \beta}e^{-t} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}\frac{t^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}F_{2k}\right]\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{e^{\alpha^2 t} - e^{\beta^2 t}}{\alpha - \beta}e^{-t} = \frac{e^{(\alpha^2-1)t} - e^{(\beta^2-1)t}}{\alpha - \beta} = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\frac{t^n}{n!}$$

olup iki denklemin eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}F_{2k} = F_n$$

elde edilir.

Ayrıca $A(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$ ve $B(t) = e^{\alpha t} + e^{\beta t}$ alınırsa, (2.3) ten

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}F_k L_{n-k}\right]\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{2\alpha t} - e^{2\beta t}}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n F_{2n}\frac{t^n}{n!}$$

olur. Buradan da

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k L_{n-k} = 2^n F_{2n}$$

elde edilir. Aynı şekilde aşağıda verilen özdeşlikler de kolaylıkla ispatlanabilir [5].

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k F_{n-k} = \frac{2^n L_n - 2}{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k L_{n-k} = 2^n L_n + 2$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{mk} L_{mn-mk} = 2^n F_{mn}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{mk} F_{mn-mk} = \frac{2^n L_{mn} - 2L_m^n}{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_{mk} L_{mn-mk} = 2^n L_{mn} + 2L_m^n$$

# BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

**Tanım 3.1.** $p, q \in \mathbb{R}$ ve her $n \geq 2$ ve olmak üzere, $U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına ve $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olan $(U_n)$ dizisi, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. Burada $U_n$ sayısına $n$. genelleştirilmiş Fibonacci sayısı denir.

$p, q \in \mathbb{R}$ ve her $n \geq 2$ ve olmak üzere, $V_n = pV_{n-1} + qV_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına ve $V_0 = 2$, $V_1 = p$ başlangıç koşullarına sahip olan $(V_n)$ dizisi, genelleştirilmiş Lucas dizisi olarak adlandırılır. Burada $V_n$ sayısına $n$. genelleştirilmiş Lucas sayısı denir [6, 7].

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^2 = px + q$ biçimindedir. $\Delta = p^2 + 4q > 0$ olmak üzere, bu karakteristik denklemin kökleri $\alpha = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$ ve $\beta = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$ biçiminde olup $\alpha + \beta = p$ ve $\alpha\beta = -q$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $\alpha^2 = p\alpha + q$ ve $\beta^2 = p\beta + q$ olduğu görülür. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha^n = \alpha U_n + qU_{n-1} \tag{3.1}$$

ve

$$\beta^n = \beta U_n + qU_{n-1} \tag{3.2}$$

olduğu tümevarımla gösterilebilir.

Benzer şekilde Lucas dizisinin elemanları arasında her $n \in \mathbb{N}$ için

$\sqrt{\Delta}\alpha^n = \alpha V_n + qV_{n-1}$ ve $-\sqrt{\Delta}\beta^n = \beta V_n + qV_{n-1}$

özdeşliklerinin sağladığı tümevarımla gösterilebilir [20, 22, 23, 24].

**Tanım 3.2.** $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ ve $V_0 = 2$, $V_1 = p$ başlangıç değerleri için genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının tekrarlama bağıntısı $U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$ ve $V_n = pV_{n-1} + qV_{n-2}$ olup $x^2 - px - q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri, $\Delta = p^2 + 4q > 0$ için, $\alpha = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$ ve $\beta = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$ dır. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $V_n = \alpha^n + \beta^n$ dir [20, 22, 24, 27].

Her terim kendisinden önce gelen iki terimin lineer birleşimi şeklinde yazıldığından

$U_{-1} = \frac{1}{q}$, $U_{-2} = -\frac{p}{q^2}$, $U_{-3} = \frac{p^2+q}{q^3}$, $\ldots$

ve

$V_{-1} = -\frac{p}{q}$, $V_{-2} = \frac{p^2+2q}{q^2}$, $V_{-3} = -\frac{p^3+3pq}{q^3}$, $\ldots$

olup buradan negatif indisli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının

$U_{-n} = -(-q)^n U_n$

ve

$V_{-n} = (-q)^n V_n$

eşitliklerini sağladığı Binet formülleri kullanılarak gösterilebilir [20, 22, 23, 25].

Kalman ve Mena tarafından genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını $A_{n+2} = aA_{n+1} + bA_n$ biçiminde tanımlanmış, $A_0$ ve $A_1$ başlangıç şartlarına bağlı olarak $R(a,b)$ sayıları için aşağıdaki sayı dizileri bulunmuştur [24].

$R(1,1)$, $A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ için Fibonacci sayıları $\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots\}$

$R(1,1)$, $A_0 = 2$ ve $A_1 = a$ için Lucas sayıları $\{2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,\ldots\}$

$R(2,1)$, $A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ için Pell sayıları $\{0,1,2,5,12,29,70,169,\ldots\}$

$R(2,1)$, $A_0 = 2$ ve $A_1 = a$ için Pell-Lucas sayıları $\{2,2,6,14,34,82,\ldots\}$

$R(2,-1)$, $A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ için $\{0,1,2,3,4,5,6,\ldots\}$ doğal sayı dizisi

$R(2,-1)$, $A_0 = 2$ ve $A_1 = a$ için $\{2,2,2,2,2,2,2,\ldots\}$ sabit dizi

$R(3,-2)$, $A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ için Mersenne dizisi $2^n - 1 = \{0,1,3,7,15,31,\ldots\}$

$R(3,-2)$, $A_0 = 2$ ve $A_1 = a$ için Fermat dizisi $2^n + 1 = \{2,3,5,9,16,33,\ldots\}$

$R(1,-1)$, $A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ için $\{0,1,1,0,-1,-1,0,1,\ldots\}$ periyodu 6 olan dizi

$R(1,-1)$, $A_0 = 2$ ve $A_1 = a$ için $\{2,1,-1,-2,-1,1,2,1,\ldots\}$ periyodu 6 olan dizi

$R(3,-1)$, $A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ için $\{0, 1, 3, 8, 21, 55, \dots\}$ çift indisli Fibonacci dizisi
$R(3,-1)$, $A_0 = 2$ ve $A_1 = a$ için $\{2, 3, 7, 18, 47, \dots\}$ çift indisli Lucas dizisi bulunur.

Ayrıca Kalman ve Mena genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas matrislerini
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} bF_{n-1} & F_n \\ bF_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$ biçiminde tanımlamıştır [24].

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülleri kullanılarak daha önce verilen Cassini ve Catalan özdeşlikleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için de verilebilir.

**Teorem 3.1.** (Cassini özdeşliği)
Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = -(-q)^{n-1}$ dir [23].

**İspat.** Binet formülünde $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $\alpha\beta = -q$ olduğu kullanılırsa

$$U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1}}{(\alpha - \beta)^2}\right) - \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha - \beta)^2}\right)$$
$$= \frac{-\alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha - \beta)^2}$$
$$= -(\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^2}\right) = -(\alpha\beta)^{n-1} = -(-q)^{n-1}$$

olarak bulunur.

**Teorem 3.2.** Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 = (-q)^{n-1}\Delta$ dir [23].

**İspat.** Binet formülünde $V_n = \alpha^n + \beta^n$, $\alpha\beta = -q$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{\Delta}$ olduğu kullanılırsa

$$V_{n-1}V_{n+1} - V_n^2 = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)^2$$
$$= (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n)$$
$$= \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - 2\alpha^n\beta^n$$

$= (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2+\beta^2 - 2\alpha\beta)$

$= (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha - \beta)^2$

$= (-q)^{n-1}\Delta$

bulunur.

**Teorem 3.3.** (Catalan özdeşliği)

Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için $U_{n-r}U_{n+r} - U_n^2 = -(-q)^{n-r}U_r^2$ dir [23].

**İspat.** Binet formülü ve $\alpha\beta = -q$ olduğu kullanılırsa,

$$U_{n-r}U_{n+r} - U_n^2 = \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - \alpha^{n-r}\beta^{n+r} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r}}{(\alpha - \beta)^2} - \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^{n+r}\beta^{n-r} - \alpha^{n-r}\beta^{n+r} + 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^{2r}+\beta^{2r} - 2\alpha^r\beta^r}{(\alpha - \beta)^2}\right)$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2$$

$= -(\alpha\beta)^{n-r}(U_r)^2$

$= -(-q)^{n-r}U_r^2$

elde edilir.

**Teorem 3.4.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için $V_{n-r}V_{n+r} - V_n^2 = 5(-1)^{n-r}(U_r)^2$ dir [23].

**İspat.** Binet formülü, $\alpha\beta = -q$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{\Delta}$ olduğu göz önüne alınırsa

$V_{n-r}V_{n+r} - V_n^2 = (\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) - (\alpha^n + \beta^n)^2$

$= (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r} + \alpha^{n+r}\beta^{n-r}) - (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n)$

$= \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r} - 2\alpha^n\beta^n$

$= (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^{2r}+\beta^{2r} - 2\alpha^r\beta^r)$

$= (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^r - \beta^r)^2$

$$= (\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2 (\alpha - \beta)^2$$
$$= (\alpha\beta)^{n-r}U_r^2(\alpha - \beta)^2$$
$$= (-q)^{n-r}U_r^2\Delta$$
bulunur.

Teorem 3.3 ve Teorem 3.4'ten aşağıdaki sonuç bulunur.

**Sonuç 3.1.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için $V_{n-r}V_{n+r} - V_n^2 = -\Delta(U_{n-r}U_{n+r} - U_n^2)$ dir.

Horadam 1961'de $H_1 = p$, $H_2 = p + q$ başlangıç şartlarına bağlı olarak her $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ için $H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$ dizisini tanımlamıştır [6, 7]. Koshy 2001'de ise $p, q$ genelleştirilmiş Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Bu çalışmada $p, q$ genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı kombinatoryel özellikleri verilecektir.

Patel ve Ray [28] tarafından genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için
$m, n \epsilon \mathbb{Z}$ olmak üzere
$$U_{m+n} = U_mU_{n+1} + qU_{m-1}U_n\ ,$$
$$(-q)^{n-1}U_{m-n} = U_{m-1}U_n - U_mU_{n-1}\ ,$$
$$V_{m+n} = U_nV_{m+1} + qU_{n-1}V_m\ ,$$
$$(-q)^nV_{m-n} = U_{m+1}V_n - V_{n+1}U_m$$
özdeşlikleri bulunmuştur.

Şiar ve Keskin [4] ise
$\begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} U_{n+1} & qU_n \\ U_n & qU_{n-1} \end{bmatrix}$
matrislerini kullanarak
$$V_n^2 - (p^2 + 4q)U_n^2 = 4(-q)^n$$
$$U_{m+n} = U_mU_{n+1} + qU_{m-1}U_n$$
$$(-q)^{n-1}U_{m-n} = U_{m-1}U_n - U_mU_{n-1}$$
$$V_{m+n} = U_nV_{m+1} + qU_{n-1}V_m$$
$$2(-q)^nV_{m-n} = V_mV_n - \Delta U_mU_n$$

$$2(-q)^n U_{m-n} = U_m V_n - U_n V_m$$
$$V_m V_n = V_{m+n} + (-q)^n V_{m-n}$$
$$\Delta U_m U_n = V_{m+n} - (-q)^n V_{m-n}$$
$$U_m V_n = U_{m+n} + (-q)^n U_{m-n}$$
$$(-q)^n V_{m-n} = U_{m+1} V_n - V_{n+1} U_m$$
$$V_r V_{r+2} - V_{r+1}^2 = (-q)^r \Delta$$
$$U_r U_{m+n+r} = U_{m+r} U_{n+r} - (-q)^r U_m U_n$$
$$U_r U_{m+n-r} = U_m U_n - (-q)^r U_{m-r} U_{n-r}$$
$$U_r U_{m+n} = U_m U_{n+r} - (-q)^r U_{m-r} U_n$$
$$V_r V_{m+n+r} = V_{m+r} V_{n+r} + (-q)^r \Delta U_m U_n$$
$$V_r V_{m+n-r} = (-q)^r V_{m-r} V_{n-r} + \Delta U_m U_n$$
$$V_r U_{m+n} = U_n V_{m+r} + (-q)^r V_{n-r} U_m$$
$$V_{n+r} V_{n-r} - \Delta U_n^2 = (-q)^{n-r} V_r^2$$
$$U_{n+r} U_{n-r} - U_n^2 = -(-q)^{n-r} U_r^2$$

özdeşliklerinin ispatlarını yapmışlardır.

$$\sum_{i=0}^{n} U_i = \frac{U_{n+1} + qU_n - 1}{p}$$
$$\sum_{i=0}^{n} V_i = \frac{V_{n+1} + qV_n + p - 2}{p}$$
$$\sum_{i=0}^{n} U_{mi} = \frac{U_{mn+m} - (-q)^m U_{mn} - U_m}{V_m - (-q)^m - 1}$$
$$\sum_{i=0}^{n} V_{mi} = \frac{V_{mn+m} - (-q)^m V_{mn} + V_m - 2}{V_m - (-q)^m - 1}$$

toplam formüllerine [20, 22] kaynaklarında rastlamak mümkündür. Burada bu toplamların daha genel halleri Binet formülleri kullanılarak elde edilecektir.

**Teorem 3.5.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} U_{mi+r} = \frac{U_{mn+m+r} - (-q)^m U_{mn+r} - (-q)^r U_{m-r} - U_r}{V_m - (-q)^m - 1}$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ve geometrik dizi toplamı kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} U_{mi+r} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^{mi+r} - \beta^{mi+r}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^r}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{n} (\alpha^m)^i - \frac{\beta^r}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{n} (\beta^m)^i$$

$$= \frac{\alpha^r}{\alpha - \beta}\left(\frac{(\alpha^m)^{n+1} - 1}{\alpha^m - 1}\right) - \frac{\beta^r}{\alpha - \beta}\left(\frac{(\beta^m)^{n+1} - 1}{\beta^m - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r}{\alpha^m - 1}\right) - \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\beta^{mn+m+r} - \beta^r}{\beta^m - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{(\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r)(\beta^m - 1) - (\alpha^m - 1)(\beta^{mn+m+r} - \beta^r)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha^{mn+m+r}\beta^m - \alpha^r\beta^m - \alpha^{mn+m+r} + \alpha^r}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}\right)$$

$$- \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha^m\beta^{mn+m+r} - \beta^{mn+m+r} - \alpha^m\beta^r + \beta^r}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{(\alpha\beta)^m(\alpha^{mn+r} - \beta^{mn+r}) - (\alpha^{mn+m+r} - \beta^{mn+m+r})}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}\right)$$

$$+ \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{(\alpha\beta)^r(\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}) + (\alpha^r - \beta^r)}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}\right)$$

$$= \frac{(-q)^m U_{mn+r} - U_{mn+m+r} + (-q)^r U_{m-r} + U_r}{(-q)^m - V_m + 1}$$

$$= \frac{U_{mn+m+r} - (-q)^m U_{mn+r} - (-q)^r U_{m-r} - U_r}{V_m - (-q)^m - 1}$$

elde edilir.

**Teorem 3.6.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} V_{mi+r} = \frac{V_{mn+m+r} - (-q)^m V_{mn+r} + (-q)^r V_{m-r} - V_r}{V_m - (-q)^m - 1}$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ve geometrik dizi toplamı kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} V_{mi+r} = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha^{mi+r} + \beta^{mi+r}\right)$$
$$= \alpha^r \sum_{i=0}^{n} (\alpha^m)^i + \beta^r \sum_{i=0}^{n} (\beta^m)^i$$
$$= \alpha^r \frac{(\alpha^m)^{n+1} - 1}{\alpha^m - 1} + \beta^r \frac{(\beta^m)^{n+1} - 1}{\beta^m - 1}$$
$$= \frac{(\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r)}{\alpha^m - 1} + \frac{(\beta^{mn+m+r} - \beta^r)}{\beta^m - 1}$$
$$= \frac{(\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r)(\beta^m - 1) + (\alpha^m - 1)(\beta^{mn+m+r} - \beta^r)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)}$$
$$= \frac{(\alpha^{mn+m+r}\beta^m - \alpha^r\beta^m - \alpha^{mn+m+r} + \alpha^r)}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}$$
$$+ \frac{(\alpha^m\beta^{mn+m+r} - \beta^{mn+m+r} - \alpha^m\beta^r + \beta^r)}{\alpha^m\beta^m - \beta^m - \alpha^m + 1}$$
$$= \frac{(\alpha\beta)^m(\alpha^{mn+r} + \beta^{mn+r}) - (\alpha^{mn+m+r} + \beta^{mn+m+r})}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}$$
$$+ \frac{-(\alpha\beta)^r(\alpha^{m-r} + \beta^{m-r}) + (\alpha^r + \beta^r)}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}$$
$$= \frac{(-q)^m V_{mn+r} - V_{mn+m+r} - (-q)^r V_{m-r} + V_r}{(-q)^m - V_m + 1}$$
$$= \frac{V_{mn+m+r} - (-q)^m V_{mn+r} + (-q)^r V_{m-r} - V_r}{V_m - (-q)^m - 1}$$

bulunur.

Binom açılımı kullanılarak da genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili bazı toplam formülleri elde edilebilir.

**Teorem 3.7.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} U_m^i U_{m-1}^{n-i} q^{n-i} U_{i+r} = U_{mn+r}$$

dir [28].

**İspat.** Binet formülü, (3.1) ve (3.2) kullanılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}U_{i+r}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}\left(\frac{\alpha^{i+r}-\beta^{i+r}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\frac{\alpha^r}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}\alpha^i-\frac{\beta^r}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}\beta^i$$

$$=\frac{\alpha^r}{\alpha-\beta}(U_m\alpha+qU_{m-1})^n-\frac{\beta^r}{\alpha-\beta}(U_m\beta+qU_{m-1})^n$$

$$=\frac{\alpha^r}{\alpha-\beta}(\alpha^m)^n-\frac{\beta^r}{\alpha-\beta}(\beta^m)^n$$

$$=\frac{\alpha^{mn+r}-\beta^{mn+r}}{\alpha-\beta}$$

$$=U_{mn+r}$$

bulunur.

**Teorem 3.8.** Her $n\in\mathbb{N}$ ve $m,r\in\mathbb{Z}$ için

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}V_{i+r}=V_{mn+r}$$

dir [28].

**İspat.** Binet formülü, (3.1) ve (3.2) kullanılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}V_{i+r}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}\left(\alpha^{i+r}+\beta^{i+r}\right)$$

$$=\alpha^r\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}\alpha^i+\beta^r\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_m^iU_{m-1}^{n-i}q^{n-i}\beta^i$$

$$=\alpha^r(U_m\alpha+qU_{m-1})^n+\beta^r(U_m\beta+qU_{m-1})^n$$

$$=\alpha^r(\alpha^m)^n+\beta^r(\beta^m)^n$$

$$=\alpha^{mn+r}+\beta^{mn+r}$$

$$=V_{mn+r}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = \frac{x}{1 - px - qx^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n = \frac{2 - px}{1 - px - qx^2}$$

biçimindedir [22].

Aşağıda genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları için daha genel ifadeleri ispatlanacaktır.

**Teorem 3.9**. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{mn+r} x^n = \frac{U_r + (-q)^r U_{m-r} x}{1 - V_m x + (-q)^m x^2}$$

dir.

**İspat.** Binet formülleri ve $\alpha\beta = -q$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{mn+r} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha^{mn+r} - \beta^{mn+r}}{\alpha - \beta} \right) x^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{mn} x^n - \frac{\beta^r}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{mn} x^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^m x)^n - \frac{\beta^r}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^m x)^n$$

$$= \frac{\alpha^r}{\alpha - \beta} \left( \frac{1}{1 - \alpha^m x} \right) - \frac{\beta^r}{\alpha - \beta} \left( \frac{1}{1 - \beta^m x} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{\alpha^r}{1 - \alpha^m x} - \frac{\beta^r}{1 - \beta^m x} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \frac{\alpha^r (1 - \beta^m x) - \beta^r (1 - \alpha^m x)}{(1 - \alpha^m x)(1 - \beta^m x)} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \frac{\alpha^r - \beta^r + (\alpha^m \beta^r - \alpha^r \beta^m) x}{1 - (\alpha^m + \beta^m) x + (\alpha\beta)^m x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \frac{\alpha^r - \beta^r + (\alpha\beta)^r (\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}) x}{1 - (\alpha^m + \beta^m) x + (\alpha\beta)^m x^2} \right]$$

$$= \frac{U_r + (-q)^r U_{m-r} x}{1 - V_m x + (-q)^m x^2}$$

bulunur.

**Teorem 3.10.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \ \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{mn+r} x^n = \frac{V_r - (-q)^r V_{m-r} x^n}{1 - V_m x + (-q)^m x^2}$$

dir.

**İspat.** Binet formülleri ve $\alpha\beta = -q$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{mn+r} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{mn+r} + \beta^{mn+r}) x^n$$

$$= \alpha^r \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{mn} x^n + \beta^r \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{mn} x^n$$

$$= \alpha^r \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^m x)^n + \beta^r \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^m x)^n$$

$$= \left(\frac{\alpha^r}{1 - \alpha^m x}\right) + \left(\frac{\beta^r}{1 - \beta^m x}\right)$$

$$= \frac{\alpha^r (1 - \beta^m x) + \beta^r (1 - \alpha^m x)}{(1 - \alpha^m x)(1 - \beta^m x)}$$

$$= \frac{\alpha^r + \beta^r - (\alpha^m \beta^r + \alpha^r \beta^m) x^n}{1 - (\alpha^m + \beta^m) x + (\alpha\beta)^m x^2}$$

$$= \frac{\alpha^r + \beta^r - (\alpha\beta)^r (\alpha^{m-r} + \beta^{m-r}) x^n}{1 - (\alpha^m + \beta^m) x + (\alpha\beta)^m x^2}$$

$$= \frac{V_r - (-q)^r V_{m-r} x^n}{1 - V_m x + (-q)^m x^2}$$

elde edilir.

# BÖLÜM 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARI

İrlandali matematikçi Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından 1843 yılında kuaterniyonlar şu şekilde tanımlanmıştır [8].

**Tanım 4.1.** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ij = k = -ki, jk = i = -kj,\ ki = j = -ik$ olmak üzere $q = a + bi + cj + dk$ formunda yazılabilen hiper kompleks sayılara kuaterniyon denir. $1, i, j, k$ ifadelerine kuaterniyonun tabanı (karakteristik elemanları) denir.

**Tanım 4.2.** $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ için $a = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ ve $b = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k$ iki kuaterniyon olmak üzere kuaterniyonlarda toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibidir.

$$a + b = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) + (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)$$
$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) i + (a_3 + b_3) j + (a_4 + b_4)\, k$$

$$ab = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)$$
$$= (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)$$
$$+ j(a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 + a_4 b_2) + k(a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$ kuaterniyonuna $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonunun eşleniği denir ve $q$ kuaterniyonunun normu $N(q) = \|q\|$ biçiminde gösterilir. Ayrıca $N(q) = \|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ eşitliği sağlanır [9, 10, 31].

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları tanımlanarak, bu kuaterniyonların özellikleri incelenecektir.

**Tanım 4.3.** $U_n$, $n$. genelleştirilmiş Fibonacci sayısı ve her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $Q_n = U_n + U_{n+1}i + U_{n+2}j + U_{n+3}k$ biçiminde tanımlanan kuaterniyonlara genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonu denir.

Benzer şekilde $V_n$, $n$. genelleştirilmiş Lucas sayısı ve her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $K_n = V_n + V_{n+1}i + V_{n+2}j + V_{n+3}k$ biçiminde tanımlanan kuaterniyonlara genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonu denir [8, 9, 10, 30].

**Teorem 4.1.** Her $n \in \mathbb{N}$ için
$\hat{\alpha} = 1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k$ ve $\hat{\beta} = 1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k$ olmak üzere, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları

$$Q_n = \frac{\alpha^n \hat{\alpha} - \beta^n \hat{\beta}}{\alpha - \beta}$$

ve

$$K_n = \alpha^n \hat{\alpha} + \beta^n \hat{\beta}$$

biçimindedir [30].

**İspat.** $Q_n = U_n + U_{n+1}i + U_{n+2}j + U_{n+3}k$ eşitliğinde Binet formülü kullanılarak

$$Q_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} i + \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} j + \frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta} k$$

$$= \frac{(\alpha^n + \alpha^{n+1}i + \alpha^{n+2}j + \alpha^{n+3}k) - (\beta^n + \beta^{n+1}i + \beta^{n+2}j + \beta^{n+3}k)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^n(1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k) - \beta^n(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k)}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. Burada $\hat{\alpha} = 1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k$ ve $\hat{\beta} = 1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$Q_n = \frac{\alpha^n \hat{\alpha} - \beta^n \hat{\beta}}{\alpha - \beta}$$

bulunur.

Benzer şekilde $K_n = V_n + V_{n+1}i + V_{n+2}j + V_{n+3}k$ eşitliğinde Binet formülü kullanılırsa

$$K_n = (\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})i + (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2})j + (\alpha^{n+3} + \beta^{n+3})k$$

$= (\alpha^n + \alpha^{n+1}i + \alpha^{n+2}j + \alpha^{n+3}k) + (\beta^n + \beta^{n+1}i + \beta^{n+2}j + \beta^{n+3}k)$

$= \alpha^n(1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k) + \beta^n(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k)$

bulunur. Ayrıca $\hat{\alpha} = 1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k$ ve $\hat{\beta} = 1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k$ olduğu göz önüne alınırsa,

$K_n = \alpha^n\hat{\alpha} + \beta^n\hat{\beta}$

olarak bulunur.

Iakin tarafından negatif indisli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları da

$Q_{-n} = U_{-n} + U_{-n+1}i + U_{-n+2}j + U_{-n+3}k$

ve

$K_{-n} = V_{-n} + V_{-n+1}i + V_{-n+2}j + V_{-n+3}k$

biçiminde tanımlanmıştır [31].

Örneğin;

$Q_{-1} = U_{-1} + U_0 i + U_1 j + U_2 k = \dfrac{1}{q} + 0i + j + pk$

$K_{-1} = V_{-1} + V_0 i + V_1 j + V_2 k = -\dfrac{p}{q} + 2i + pj + (p^2 + 2q)k$

dir.

Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ise $Q_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k$ ve $K_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}k$ olarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde negatif Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları da $Q_{-n} = F_{-n} + F_{-n+1}i + F_{-n+2}j + F_{-n+3}k$ ve $K_{-n} = L_{-n} + L_{-n+1}i + L_{-n+2}j + L_{-n+3}k$ biçiminde tanımlanmıştır.

Ayrıca Iyer tarafından Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ile ilgili aşağıdaki özellikler verilmiştir [32].

$Q_n - iQ_{n+1} - jQ_{n+2} - kQ_{n+3} = L_{n+3}$

$Q_{n-1}^2 + Q_n^2 = 2Q_{2n-1} - 3L_{2n+2}$

$Q_{n+1}^2 - Q_{n-1}^2 = Q_nK_n = (2Q_{2n} - 3L_{2n+3}) + 2(-1)^{n+1}(Q_0 - 3k)$

$Q_{n-2}Q_{n-1} + Q_nQ_{n+1} = 6F_nQ_{n-1} - 9F_{2n+2} + 2(-1)^{n+1}(Q_{-1} - 3k)$

$Q_{n-1}Q_{n+3} - Q_{n+1}^2 = (-1)^n[2 + 4i + 3j + k]$

$Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_{n-2}Q_{n+2} = (-1)^n[2K_0 - k] + 4(-1)^{n+1}[Q_0 - 2k]$

$$Q_{n-3}Q_{n-2} + Q_nQ_{n+1} = 4Q_{2n-2} - 6L_{2n+1}$$
$$Q_{n-1}^2 + Q_{n+1}^2 = 6F_{n+1}Q_{n-1} - 9F_{2n+3} + 2(-1)^nQ_{-2}$$
$$Q_{n+r} + (-1)^rQ_{n-r} = Q_nL_r$$
$$Q_{n+1-r}Q_{n+1+r} - Q_{n+1}^2 = (-1)^{n-r}[F_r^2K_0 + F_{2r}(Q_0 - 3r)]$$
$$Q_{n+r}L_{n+r} = Q_{2n+2r} + (-1)^{n+r}Q_0$$
$$Q_{n-r}L_{n-r} = Q_{2n-2r} + (-1)^{n+r}Q_0$$
$$Q_{n+r}L_{n+r} + Q_{n-r}L_{n-r} = Q_{2n}L_{2r} + 2(-1)^{n+r}Q_0$$
$$Q_{n+r}L_{n+r} - Q_{n-r}L_{n-r} = F_{2r}K_{2n}$$
$$Q_{n+r}L_{n-r} = Q_{2n} + (-1)^{n-r}Q_{2r}$$

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için Catalan özdeşliğini vermeden önce ön ispat niteliğindeki lemmalar ispatlanacaktır.

**Lemma 4.1.** $\hat{\alpha} = 1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k$, $\hat{\beta} = 1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k$ ve $A = K_0 - (1-q)(1+q^2)$, $B = (-q)i + (-p)j + k$ olmak üzere,

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = A + qB\sqrt{\Delta} \tag{4.1}$$

ve

$$\hat{\beta}\hat{\alpha} = A - qB\sqrt{\Delta} \tag{4.2}$$

dir.

**İspat.** Kuaterniyon çarpımı ve $\alpha\beta = -q$ olduğu kullanılırsa,

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = (1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k)(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k)$$
$$= (1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k) + \alpha i(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k)$$
$$+\alpha^2 j(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k) + \alpha^3 k(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k)$$
$$= (1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k) + (\alpha i + \alpha\beta i^2 + \alpha\beta^2 ij + \alpha\beta^3 ik)$$
$$+(\alpha^2 j + \alpha^2\beta ji + \alpha^2\beta^2 j^2 + \alpha^2\beta^3 jk) + (\alpha^3 k + \alpha^3\beta ki + \alpha^3\beta^2 kj + \alpha^3\beta^3 k^2)$$
$$= (1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k) + (\alpha i - \alpha\beta + \alpha\beta^2 k - \alpha\beta^3 j)$$
$$+(\alpha^2 j - \alpha^2\beta k - \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^3 i) + (\alpha^3 k + \alpha^3\beta j - \alpha^3\beta^2 i - \alpha^3\beta^3)$$
$$= (1 - \alpha\beta - \alpha^2\beta^2 - \alpha^3\beta^3) + (\alpha + \beta + \alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2)i$$
$$+(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta^3 + \alpha^3\beta)j + (\alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta)k$$
$$= [2 + (\alpha + \beta)i + (\alpha^2 + \beta^2)j + (\alpha^3 + \beta^3)k] - [1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3]$$

$-\alpha\beta(\alpha-\beta)[\alpha\beta i-(\alpha+\beta)j+k]$

$=K_0-(1+\alpha\beta)(1+\alpha^2\beta^2)-\alpha\beta(\alpha-\beta)[\alpha\beta i-(\alpha+\beta)j+k]$

$=K_0-(1-q)(1+q^2)+q\sqrt{\Delta}[-qi-pj+k]$

$=K_0-(1-q)(1+q^2)+q\sqrt{\Delta}[(-q)i+(-p)j+k]$

$=A+qB\sqrt{\Delta}$

elde edilir.

$\hat{\beta}\hat{\alpha}=(1+\beta i+\beta^2 j+\beta^3 k)(1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k)$

$=(1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k)+\beta i(1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k)$

$+\beta^2 j(1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k)+\beta^3 k(1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k)$

$=(1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k)+(\beta i+\alpha\beta i^2+\alpha^2\beta ij+\alpha^3\beta ik)$

$+(\beta^2 j+\alpha\beta^2 ji+\alpha^2\beta^2 j^2+\alpha^3\beta^2 jk)+(\beta^3 k+\alpha\beta^3 ki+\alpha^2\beta^3 kj+\alpha^3\beta^3 k^2)$

$=(1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k)+(\beta i-\alpha\beta+\alpha^2\beta k-\alpha^3\beta j)$

$+(\beta^2 j-\alpha\beta^2 k-\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^2 i)+(\beta^3 k+\alpha\beta^3 j-\alpha^2\beta^3 i-\alpha^3\beta^3)$

$=(1-\alpha\beta-\alpha^2\beta^2-\alpha^3\beta^3)+(\alpha+\beta+\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3)i$

$+(\alpha^2+\beta^2-\alpha^3\beta+\alpha\beta^3)j+(\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)k$

$=[2+(\alpha+\beta)i+(\alpha^2+\beta^2)j+(\alpha^3+\beta^3)k]-(1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3)$

$+[(\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3)i+(-\alpha^3\beta+\alpha\beta^3)j+(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)k]$

$=K_0-(1+\alpha\beta)(1+\alpha^2\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)[(\alpha\beta)i-(\alpha+\beta)j+k]$

$=K_0-(1-q)(1+q^2)-q\sqrt{\Delta}[(-q)i-(p)j+k]$

$=A-qB\sqrt{\Delta}$

bulunur.

**Lemma 4.2.** $\hat{\alpha}=1+\alpha i+\alpha^2 j+\alpha^3 k$, $\hat{\beta}=1+\beta i+\beta^2 j+\beta^3 k$ ve $r\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r-\hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^r}{\alpha-\beta}=qBV_r-AU_r \tag{4.3}$$

ve

$$\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r+\hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^r=AV_r-q\Delta BU_r \tag{4.4}$$

dir.

**İspat.** (4.1) ve (4.2) kullanılırsa,

$$\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r - \hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^r}{\alpha-\beta} = \frac{\left(A + qB\sqrt{\Delta}\right)\beta^r - \left(A - qB\sqrt{\Delta}\right)\alpha^r}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{qB\sqrt{\Delta}(\alpha^r+\beta^r) - A(\alpha^r-\beta^r)}{\alpha-\beta}$$

$$= qBV_r - AU_r$$

bulunur.

$$\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r + \hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^r = \left(A + qB\sqrt{\Delta}\right)\beta^r + \left(A - qB\sqrt{\Delta}\right)\alpha^r$$

$$= A(\alpha^r+\beta^r) - qB\sqrt{\Delta}(\alpha^r-\beta^r)$$

$$= A(\alpha^r+\beta^r) - qB\Delta\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)(\alpha-\beta)$$

$$= \ AV_r - q\Delta BU_r$$

elde edilir.

**Lemma 4.3.** $\hat{\alpha} = 1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k$ ve $\hat{\beta} = 1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k$ için

$$\hat{\alpha}\beta - \hat{\beta}\alpha = (-q)\sqrt{\Delta}Q_{-1} \tag{4.5}$$

ve

$$\hat{\alpha}\beta^r - \hat{\beta}\alpha^r = \sqrt{\Delta}(-q)^r Q_{-r} \tag{4.6}$$

dir.

**İspat.** Binet formülü kullanılırsa

$$\hat{\alpha}\beta - \hat{\beta}\alpha = (\alpha\beta)\left(\hat{\alpha}\alpha^{-1} - \hat{\beta}\beta^{-1}\right)$$

$$= (\alpha\beta)(\alpha-\beta)\left(\frac{\hat{\alpha}\alpha^{-1} - \hat{\beta}\beta^{-1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= (-q)\sqrt{\Delta}Q_{-1}$$

elde edilir.

$$\hat{\alpha}\beta^r - \hat{\beta}\alpha^r = (\alpha\beta)^r\left(\hat{\alpha}\alpha^{-r} - \hat{\beta}\beta^{-r}\right)$$

$$= (\alpha\beta)^r(\alpha-\beta)\left(\frac{\hat{\alpha}\alpha^{-r} - \hat{\beta}\beta^{-r}}{\alpha-\beta}\right) = \sqrt{\Delta}(-q)^r Q_{-r}$$

bulunur.

Iyer [32] de Fibonacci sayıları için Cassini özdeşliğini, kuaterniyon matrislerini kullanarak $Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = (-1)^n(2Q_1 - 3k)$ biçiminde bulmuştur.

Ramirez [14] de $p = k$ ve $q = 1$ olarak alarak $k$-Fibonacci kuaterniyonları için Cassini özdeşliğini $Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = (-1)^n[2Q_1 - (k^2 + 2k)k]$ şeklinde olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Polatlı ve Kesim [16] da $k$-Fibonacci kuaterniyonları için Catalan özdeşliğini $Q_{n-r}Q_{n+r} - Q_n^2 = (-1)^{n-r+1}[2U_rQ_r - V_2U_{2r}k]$ biçiminde elde etmiştir.

Daha genel olarak yukarıda tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları için Catalan özdeşliği ispatlanacaktır.

**Teorem 4.2.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için
$Q_{n-r}Q_{n+r} - Q_n^2 = (-q)^{n-r}U_r[qBV_r - AU_r]$
dir.

**İspat**. Binet formülü ve (4.3) kullanılırsa

$$Q_{n-r}Q_{n+r} - Q_n^2 = \left(\frac{\hat{\alpha}\alpha^{n-r} - \hat{\beta}\beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\hat{\alpha}\alpha^{n+r} - \hat{\beta}\beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\hat{\alpha}\alpha^{n} - \hat{\beta}\beta^{n}}{\alpha - \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\hat{\alpha}\alpha^{2n} + \hat{\beta}\hat{\beta}\beta^{2n} - \hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n-r}\beta^{n+r} - \hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^{n+r}\beta^{n-r}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$- \frac{\hat{\alpha}\hat{\alpha}\alpha^{2n} + \hat{\beta}\hat{\beta}\beta^{2n} - \hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n}\beta^{n} - \hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^{n}\beta^{n}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{-\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n-r}\beta^{n+r} - \hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n}\beta^{n} + \hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^{n}\beta^{n}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\left[\hat{\alpha}\hat{\beta}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha^r}\right) + \hat{\beta}\hat{\alpha}\left(\frac{\beta^r - \alpha^r}{\beta^r}\right)\right]$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^n(\alpha^r - \beta^r)}{(\alpha - \beta)^2}\left[\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{\alpha^r} - \frac{\hat{\beta}\hat{\alpha}}{\beta^r}\right]$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^n(\alpha^r - \beta^r)}{(\alpha - \beta)^2}\left[\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r - \hat{\beta}\hat{\alpha}\beta^r}{(\alpha\beta)^r}\right]$$

$$= (\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)\left[\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r-\hat{\beta}\hat{\alpha}\beta^r}{\alpha-\beta}\right]$$

$$= (\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)[qBV_r-AU_r]$$

$$= (-q)^{n-r}U_r[qBV_r-AU_r]$$

elde edilir.

**Teorem 4.3.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için

$$K_{n-r}K_{n+r}-K_n^2 = -(-q)^{n-r}U_r\Delta[qBV_r-AU_r]$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ve (4.5) kullanılırsa

$$K_{n-r}K_{n+r}-K_n^2 = \left(\hat{\alpha}\alpha^{n-r}+\hat{\beta}\beta^{n-r}\right)\left(\hat{\alpha}\alpha^{n+r}+\hat{\beta}\beta^{n+r}\right)-\left(\hat{\alpha}\alpha^n+\hat{\beta}\beta^n\right)^2$$

$$= \left(\hat{\alpha}\hat{\alpha}\alpha^{2n}+\hat{\beta}\hat{\beta}\beta^{2n}-\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n-r}\beta^{n+r}-\hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^{n+r}\beta^{n-r}\right)$$

$$-\left(\hat{\alpha}\hat{\alpha}\alpha^{2n}+\hat{\beta}\hat{\beta}\beta^{2n}-\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^n\beta^n-\hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^n\beta^n\right)$$

$$= -\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n-r}\beta^{n+r}-\hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^{n+r}\beta^{n-r}+\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^n\beta^n+\hat{\beta}\hat{\alpha}\alpha^n\beta^n$$

$$= (\alpha\beta)^n\left[-\hat{\alpha}\hat{\beta}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha^r}\right)-\hat{\beta}\hat{\alpha}\left(\frac{\beta^r-\alpha^r}{\beta^r}\right)\right]$$

$$= -(\alpha\beta)^n(\alpha^r-\beta^r)\left[\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{\alpha^r}-\frac{\hat{\beta}\hat{\alpha}}{\beta^r}\right]$$

$$= -(\alpha\beta)^n(\alpha^r-\beta^r)\left(\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r-\hat{\beta}\hat{\alpha}\beta^r}{(\alpha\beta)^r}\right)$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}\beta^r-\hat{\beta}\hat{\alpha}\beta^r}{\alpha-\beta}\right)(\alpha-\beta)^2$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\Delta\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)[qBV_r-AU_r]$$

$$= -(-q)^{n-r}U_r\Delta[qBV_r-AU_r]$$

bulunur.

Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'ten aşağıdaki sonuç bulunur.

**Sonuç 4.1.** Her $n, r \in \mathbb{Z}$ için $K_{n-r}K_{n+r}-K_n^2 = -\Delta[Q_{n-r}Q_{n+r}-Q_n^2]$ dir.

Halıcı [13] de Fibonacci kuaterniyonlarının toplam ifadelerini

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = Q_{n+2} - 1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{2i} = Q_{2n+1} - (1,0,1,1),$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{2i+1} = Q_{2n} - Q_0$$

olarak bulmuştur. Bu toplamlar tümevarım yoluyla ispatlanabilir.

Ramirez [14] de $k$-Fibonacci kuaterniyonları için toplam ifadelerini

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = \frac{1}{k}(Q_n + Q_{n+1} - Q_1 - Q_0),$$

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{mi} = \frac{(-1)^m Q_{nm} - Q_{nm+m} + Q_m + Q_0}{(-1)^m - V_m + 1},$$

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{mi+j} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m Q_{mn+j} - Q_{mn+m+j} + (-1)^j Q_{m-j} + Q_j}{(-1)^m - V_m + 1} & ,j < m \\ \dfrac{(-1)^m Q_{mn+j} - Q_{mn+m+j} - (-1)^m Q_{m-j} + Q_j}{(-1)^m - V_m + 1} & ,j \geq m \end{cases}$$

olarak ispatlamıştır.

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = \frac{(-q)[Q_n - Q_{-1}] - Q_{n+1} + Q_0}{1 - p - q},$$

$$\sum_{i=0}^{n} K_i = \frac{(-q)[K_n - K_{-1}] - K_{n+1} + K_0}{1 - p - q},$$

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{mi} = \frac{(-q)^m[Q_{mn} - Q_{-m}] - Q_{mn+m} + Q_0}{1 - V_m + (-q)^m},$$

$$\sum_{i=0}^{n} K_{mi} = \frac{(-q)^m[K_{mn} - K_{-m}] - K_{mn+m} + K_0}{1 - V_m + (-q)^m}$$

dir.

Bu toplam formülleri tümevarım ya da Binet formülleri yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir. Burada bu toplamların daha genel halleri ispatlarıyla verilecektir.

**Teorem 4.4.** Her $n \in \mathbb{N}$, ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{mi+r} = \frac{(-q)^m [Q_{mn+r} - Q_{r-m}] - Q_{mn+m+r} + Q_r}{1 - V_m + (-q)^m}$$

dir.

**İspat.** Binet formülleri ve (4.4) kullanılarak,

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{mi+r} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\hat{\alpha}\alpha^{mi+r} - \hat{\beta}\beta^{mi+r}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{n} (\alpha^m)^i - \frac{\hat{\beta}\beta^r}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{n} (\beta^m)^i$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r}{\alpha - \beta} \left( \frac{\alpha^{mn+m} - 1}{\alpha^m - 1} \right) - \frac{\hat{\beta}\beta^r}{\alpha - \beta} \left( \frac{\beta^{mn+m} - 1}{\beta^m - 1} \right)$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r (\alpha^{mn+m} - 1)(\beta^m - 1) - \hat{\beta}\beta^r (\beta^{mn+m} - 1)(\alpha^m - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r (\alpha^{mn+m} - 1)(\beta^m - 1) - \hat{\beta}\beta^r (\beta^{mn+m} - 1)(\alpha^m - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m \beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}(\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r)(\beta^m - 1) - \hat{\beta}(\beta^{mn+m+r} - \beta^r)(\alpha^m - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m \beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}(\alpha^{mn+r}\alpha^m \beta^m - \alpha^{mn+m+r} - \alpha^r \beta^m + \alpha^r)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m \beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$- \frac{\hat{\beta}(\beta^{mn+r}\alpha^m \beta^m - \beta^{mn+m+r} - \alpha^m \beta^r + \beta^r)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m \beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{\alpha^m \beta^m \left( \hat{\alpha}\alpha^{mn+r} - \hat{\beta}\beta^{mn+r} \right) - \left( \hat{\alpha}\alpha^{mn+m+r} - \hat{\beta}\beta^{mn+m+r} \right)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m \beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$+ \frac{-(\alpha\beta)^m \left( \hat{\alpha}\alpha^{r-m} - \hat{\beta}\beta^{r-m} \right) + \left( \hat{\alpha}\alpha^r - \hat{\beta}\beta^r \right)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m \beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{(-q)^m Q_{mn+r} - Q_{mn+m+r} - (-q)^m Q_{r-m} + Q_r}{(-q)^m - V_m + 1}$$

$$= \frac{(-q)^m [Q_{mn+r} - Q_{r-m}] - Q_{mn+m+r} + Q_r}{(-q)^m - V_m + 1}$$

elde edilir.

**Teorem 4.5.** Her $n \in \mathbb{N}$, ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} K_{mi+r} = \frac{(-q)^m[K_{mn+r} - K_{r-m}] - K_{mn+m+r} + K_r}{1 - V_m + (-q)^m}$$

dir.

**İspat.** Binet formülleri ve (4.4) kullanılarak,

$$\sum_{i=0}^{n} K_{mi+r} = \sum_{i=0}^{n} \left(\hat{\alpha}\alpha^{mi+r} + \hat{\beta}\beta^{mi+r}\right)$$

$$= \hat{\alpha}\alpha^r \sum_{i=0}^{n} (\alpha^m)^i - \hat{\beta}\beta^r \sum_{i=0}^{n} (\beta^m)^i$$

$$= \hat{\alpha}\alpha^r \left(\frac{\alpha^{mn+m} - 1}{\alpha^m - 1}\right) + \hat{\beta}\beta^r \left(\frac{\beta^{mn+m} - 1}{\beta^m - 1}\right)$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r(\alpha^{mn+m} - 1)(\beta^m - 1) + \hat{\beta}\beta^r(\beta^{mn+m} - 1)(\alpha^m - 1)}{(\alpha^m - 1)(\beta^m - 1)}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r(\alpha^{mn+m} - 1)(\beta^m - 1) + \hat{\beta}\beta^r(\beta^{mn+m} - 1)(\alpha^m - 1)}{(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}(\alpha^{mn+m+r} - \alpha^r)(\beta^m - 1) + \hat{\beta}(\beta^{mn+m+r} - \beta^r)(\alpha^m - 1)}{(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}(\alpha^{mn+r}\alpha^m\beta^m - \alpha^{mn+m+r} - \alpha^r\beta^m + \alpha^r)}{(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$+ \frac{\hat{\beta}(\beta^{mn+r}\alpha^m\beta^m - \beta^{mn+m+r} - \alpha^m\beta^r + \beta^r)}{(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{\alpha^m\beta^m\left(\hat{\alpha}\alpha^{mn+r} + \hat{\beta}\beta^{mn+r}\right) - \left(\hat{\alpha}\alpha^{mn+m+r} + \hat{\beta}\beta^{mn+m+r}\right)}{(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$+ \frac{-(\alpha\beta)^m\left(\hat{\alpha}\alpha^{r-m} + \hat{\beta}\beta^{r-m}\right) + \left(\hat{\alpha}\alpha^r + \hat{\beta}\beta^r\right)}{(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)}$$

$$= \frac{(-q)^m K_{mn+r} - K_{mn+m+r} - (-q)^m K_{r-m} + K_r}{(-q)^m - V_m + 1}$$

$$= \frac{(-q)^m[K_{mn+r} - K_{r-m}] - K_{mn+m+r} + K_r}{(-q)^m - V_m + 1}$$

bulunur.

Binom açılımı kullanılarak bazı genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler verilebilir. Halıcı [13] de Fibonacci kuaterniyonları için

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} Q_i = Q_{2n}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i Q_i = (-1)^n Q_{-n}$$

toplam formüllerini bulmuştur.

Ramirez [14] de $k$-Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için Binom açılımı kullanarak

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i Q_i = Q_{2n}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i K_i = K_{2n}$$

toplam ifadelerini elde etmiştir.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının toplam formülleri binom açılımı kullanılarak aşağıda ispatlanacaktır.

**Teorem 4.6.** Her $n \epsilon \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} Q_i = Q_{2n}$$

dir [28].

**İspat.** Binet formülü, binom açılımı, (3.1) ve (3.2) kullanılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} Q_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \frac{\hat{\alpha}\alpha^i - \hat{\beta}\beta^i}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \alpha^i - \frac{\hat{\beta}}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \beta^i$$

$$= \frac{\hat{\alpha}}{\alpha - \beta} (q + p\alpha)^n - \frac{\hat{\beta}}{\alpha - \beta} (q + p\beta)^n$$

$$= \frac{\hat{\alpha}(\alpha^2)^n}{\alpha - \beta} - \frac{\hat{\beta}(\beta^2)^n}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^{2n} - \hat{\beta}\beta^{2n}}{\alpha - \beta}$$

$$= Q_{2n}$$

elde edilir.

**Teorem 4.7.** Her $n \epsilon \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} K_i = K_{2n}$$

dir [28].

**İspat.** Binet formülü, binom açılımı, (3.1) ve (3.2) kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} K_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \left(\hat{\alpha}\alpha^i + \hat{\beta}\beta^i\right)$$

$$= \hat{\alpha} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \alpha^i + \hat{\beta} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \beta^i$$

$$= \hat{\alpha}(q + p\alpha)^n + \hat{\beta}(q + p\beta)^n$$

$$= \hat{\alpha}(\alpha^2)^n + \hat{\beta}(\beta^2)^n$$

$$= \hat{\alpha}\alpha^{2n} + \hat{\beta}\beta^{2n}$$

$$= K_{2n}$$

bulunur.

Fibonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu Serpil Halıcı [13] ve Patel, Ray tarafından [28] de

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$$

olmak üzere,

$$G(x) = \frac{Q_0 + (Q_1 - Q_0)x}{1 - x - x^2} = \frac{x + i + (x + 1)j + (x + 2)k}{1 - x - x^2}$$

olarak verilmiştir. Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{m+n}x^n = \frac{Q_m + Q_{m-1}x}{1 - x - x^2}$$

özdeşliğinin ispatı yapılmıştır.

Yine benzer şekilde $k$-Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için Ramirez [14] de

$$G(x) = \frac{x + i + (k + x)j + (k^2 + 1 + kx)k}{1 - kx - x^2} = \frac{Q_0 + (Q_1 - kQ_0)x}{1 - kx - x^2}$$

ve

$$J(x) = \frac{(2 - kx) + (k + 2x)i + (k^2 + 2 + kx)j + (k^2 + 1 + (k^2 + 2)x)k}{1 - kx - x^2}$$

$$= \frac{K_0 + (K_1 - kK_0)x}{1 - kx - x^2}$$

olduğunu göstermiştir. Ayrıca,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{m+n}x^n = \frac{Q_m + Q_{m-1}x}{1 - kx - x^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_{m+n}x^n = \frac{K_m + K_{m-1}x}{1 - kx - x^2}$$

eşitliklerini elde etmiştir.

Demirtürk Bitim ve Topal [18] tarafından genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonları ve bazı toplamsal ifadeleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

**Teorem 4.8.** $G(x)$ genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu olmak üzere,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{x + i + [p + xq]j + [(p^2 + q) + pqx]k}{1 - px - qx^2}$$

dir.

**İspat.** $Q_n$ kuaterniyonu için kuvvet serisi açılımı

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + Q_3 x^3 + Q_4 x^4 + \cdots$$

biçimindedir. Buradan

$$-pG(x)x = -pQ_0 x - pQ_1 x^2 - pQ_2 x^3 - pQ_3 x^4 - pQ_4 x^5 + \cdots$$

ve

$$-qG(x)x^2 = -qQ_0 x^2 - qQ_1 x^3 - qQ_2 x^4 - qQ_3 x^5 - qQ_4 x^6 + \cdots$$

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - px - qx^2)G(x) = Q_0 + (Q_1 - pQ_0)x + (Q_2 - pQ_1 - qQ_0)x^2 + \cdots$$

olur. Ayrıca $Q_n = pQ_{n-1} + qQ_{n-2}$ olduğundan

$$(1 - px - qx^2)G(x) = Q_0 + (Q_1 - pQ_0)x$$

elde edilir. O halde

$$G(x) = \frac{Q_0 + (Q_1 - pQ_0)x}{1 - px - qx^2}$$

yani

$$G(x) = \frac{Q_0 + qQ_{-1}x}{1 - px - qx^2}$$

dir. Burada,

$$Q_0 = U_0 + U_1 i + U_2 j + U_3 k = 0 + i + pj + (p^2 + q)k$$

ve

$$Q_{-1} = U_{-1} + U_0 i + U_1 j + U_2 k = \tfrac{1}{q} + 0i + j + pk$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$G(x) = \frac{Q_0 + qQ_{-1}x}{1 - px - qx^2} = \frac{[0 + i + pj + (p^2 + q)k] + q\left[\frac{1}{q} + 0i + j + pk\right]x}{1 - px - qx^2}$$

$$= \frac{[i + pj + (p^2 + q)k] + [1 + qj + pqk\,]x}{1 - px - qx^2}$$

$$= \frac{x + i + (p + qx)j + (p^2 + q + pqx)k}{1 - px - qx^2}$$

bulunur.

**Teorem 4. 9.** $J(x)$ genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu olmak üzere,

$$J(x)=\sum_{n=0}^{\infty}K_nx^n=\frac{(2-px)+(p+2qx)i+(p^2+2q+pqx)j+(p^3+3pq+p^2qx+2q^2x)k}{1-px-qx^2}$$

dir.

**İspat.** $K_n$ kuaterniyonu için kuvvet serisi açılımı

$$J(x)=\sum_{n=0}^{\infty}K_nx^n=K_0+K_1x+K_2x^2+K_3x^3+K_4x^4+\cdots$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$-pJ(x)x=-pK_0x-pK_1x^2-pK_2x^3-pK_3x^4-pK_4x^5+\cdots$$

ve

$$-qJ(x)x^2=-qK_0x^2-qK_1x^3-qK_2x^4-qK_3x^5-qK_4x^6+\cdots$$

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$(1-px-qx^2)J(x)=K_0+(K_1-pK_0)x+(K_2-pK_1-qK_0)x^2+\cdots$$

bulunur. Ayrıca $K_n=pK_{n-1}+qK_{n-2}$ olduğundan

$$(1-px-qx^2)J(x)=K_0+(K_1-pK_0)x$$

bulunur. O halde

$$J(x)=\frac{K_0+(K_1-pK_0)x}{1-px-qx^2}$$

yani

$$J(x)=\frac{K_0+qK_{-1}x}{1-px-qx^2}$$

dir. Böylece

$$K_0=V_0+V_1i+V_2j+V_3k=2+pi+(p^2+2q)j+(p^3+3pq)k$$

ve

$$K_{-1}=V_{-1}+V_0i+V_1j+V_2k=-\frac{p}{q}+2i+pj+(p^2+2q)k$$

olduğu kullanılırsa,

$$J(x)=\frac{K_0+qK_{-1}x}{1-px-qx^2}$$

$$=\frac{[2+pi+(p^2+2q)j+(p^3+3pq)k]+q\left[-\frac{p}{q}+2i+pj+(p^2+2q)k\right]x}{1-px-qx^2}$$

$$=\frac{[2+pi+(p^2+2q)j+(p^3+3pq)k]+[-p+2qi+pqj+(p^2q+2q^2)k\,]x}{1-px-qx^2}$$

$$= \frac{(2-px)+(p+2qx)i+(p^2+2q+pqx)j+(p^3+3pq+p^2qx+2q^2x)k}{1-px-qx^2}$$

elde edilir.

**Teorem 4.10.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{mn+r}x^n = \frac{Q_r-(-q)^m Q_{r-m}x}{1-V_m x+(-q)^m x^2}$$

dir.

**İspat.** Binom formülü ve (4.4) kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{mn+r}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}\alpha^{mn+r}-\hat{\beta}\beta^{mn+r}}{\alpha-\beta}x^n$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{mn}x^n - \frac{\hat{\beta}\beta^r}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{mn}x^n$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^m x)^n - \frac{\hat{\beta}\beta^r}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta^m x)^n$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha^m x}\right) - \frac{\hat{\beta}\beta^r}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\beta^m x}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\hat{\alpha}\alpha^r(1-\beta^m x)-\hat{\beta}\beta^r(1-\alpha^m x)}{(1-\alpha^m x)(1-\beta^m x)}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\left(\hat{\alpha}\alpha^r-\hat{\beta}\beta^r\right)-\left(\hat{\alpha}\alpha^r\beta^m-\hat{\beta}\beta^r\alpha^m\right)x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(\alpha\beta)^m x^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\left(\hat{\alpha}\alpha^r-\hat{\beta}\beta^r\right)-(\alpha\beta)^m\left(\hat{\alpha}\alpha^{r-m}-\hat{\beta}\beta^{r-m}\right)x}{1-V_m x+(-q)^m x^2}$$

$$= \frac{Q_r-(-q)^m Q_{r-m}x}{1-V_m x+(-q)^m x^2}$$

elde edilir.

**Teorem 4.11**. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_{mn+r}x^n = \frac{K_r-(-q)^m K_{r-m}x}{1-V_m x+(-q)^m x^2}$$

dir.

**İspat.** Binom formülü ve (4.4) kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_{mn+r}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{\alpha}\alpha^{mn+r} + \hat{\beta}\beta^{mn+r}\right)x^n$$

$$= \hat{\alpha}\alpha^r \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{mn}x^n + \hat{\beta}\beta^r \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{mn}x^n$$

$$= \hat{\alpha}\alpha^r \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^m x)^n + \hat{\beta}\beta^r \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^m x)^n$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r}{1-\alpha^m x} + \frac{\hat{\beta}\beta^r}{1-\beta^m x}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}\alpha^r(1-\beta^m x) + \hat{\beta}\beta^r(1-\alpha^m x)}{(1-\alpha^m x)(1-\beta^m x)}$$

$$= \frac{\left(\hat{\alpha}\alpha^r + \hat{\beta}\beta^r\right) - \left(\hat{\alpha}\alpha^r\beta^m + \hat{\beta}\beta^r\alpha^m\right)x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x + (\alpha\beta)^m x^2}$$

$$= \frac{\left(\hat{\alpha}\alpha^r + \hat{\beta}\beta^r\right) - (\alpha\beta)^m\left(\hat{\alpha}\alpha^{r-m} + \hat{\beta}\beta^{r-m}\right)x}{1-V_m x + (-q)^m x^2}$$

$$= \frac{K_r - (-q)^m K_{r-m}x}{1-V_m x + (-q)^m x^2}$$

bulunur.

Ayrıca Patel ve Ray [28] tarafından $m, k, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $m \geq n$ için,

$Q_{kn+m} = U_m Q_{kn+1} + qU_{m-1}Q_{kn}$,

$(-q)^{n-1}Q_{m-kn} = U_{kn}Q_{m-1} - U_{kn-1}Q_m$,

$K_{kn+m} = U_{kn}K_{m+1} + qU_{kn-1}K_m$,

$(-q)^n K_{m-kn} = V_{kn}Q_{m+1} - V_{kn+1}Q_m$

özdeşliklerinin ispatları yapılmıştır.

Ek olarak Polatlı ve Kesim [15], Patel ve Ray [28] üreteç fonksiyonları kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{kn+m}\frac{x^n}{n!} = \frac{\alpha^m e^{\alpha^k x} - \beta^m e^{\beta^k x}}{\alpha-\beta},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_{kn+m}\frac{x^n}{n!} = \alpha^m e^{\alpha^k x} + \beta^m e^{\beta^k x},$$

eşitliklerini ispatlamışlardır.

Aşağıdaki teoremlerde Demirtürk Bitim ve Topal [19] tarafından üstel fonksiyonlar kullanılarak kuaterniyon toplamlarının farklı bir yoldan ispatları verilmiştir.

**Teorem 4.12.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ ve $r\epsilon\mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}q^{n-i}p^{i}Q_{i+r}=Q_{2n+r}$$

dir.

**İspat.** (2.3) ve (2.4) te $A(x)=e^{qx}$ ve $B(x)=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}-\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}$ alınmak üzere, Binet formülü ile $p\alpha+q=\alpha^2$ ve $p\beta+q=\beta^2$ özdeşliklerini kullanarak

$$e^{qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}-\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{(p\alpha+q)x}-\beta^r\hat{\beta}e^{(p\beta+q)x}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^r\hat{\beta}e^{\alpha^2x}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\frac{x^n}{n!}-\frac{\beta^r\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+r}\hat{\alpha}-\beta^{2n+r}\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}-\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_{2n+r} \tag{4.7}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$e^{qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}-\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}q^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\frac{\alpha^r\hat{\alpha}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\alpha^n\frac{x^n}{n!}-\frac{\beta^r\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\beta^n\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}q^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}p^n\frac{\alpha^{n+r}\hat{\alpha}-\beta^{n+r}\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}q^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}p^nQ_{n+r}\frac{x^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}q^{n-i}\,p^nQ_{n+r}\right]\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}-\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}q^{n-i}\,p^nQ_{n+r}\right]\frac{x^n}{n!} \tag{4.8}$$

dir.

(4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^{n-i}\, p^n Q_{i+r} = Q_{2n+r}$$

elde edilir.

**Teorem 4.13.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ ve $r\epsilon\mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^{n-i} p^i K_{i+r} = K_{2n+r}$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ile $p\alpha + q = \alpha^2$ ve $p\beta + q = \beta^2$ özdeşlikleri kullanılarak (2.3) ve (2.4) te

$$A(x) = e^{qx} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{x^n}{n!},$$

$$B(x) = \alpha^r \hat{\alpha} e^{p\alpha x} + \beta^r \hat{\beta} e^{p\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \left(\alpha^r \hat{\alpha} e^{p\alpha x} + \beta^r \hat{\beta} e^{p\beta x}\right) \frac{x^n}{n!}$$

olarak alınırsa,

$$e^{qx}\left(\alpha^r \hat{\alpha} e^{p\alpha x} + \hat{\beta} e^{p\beta x}\right) = \alpha^r \hat{\alpha} e^{(p\alpha+q)x} + \beta^r \hat{\beta} e^{(p\beta+q)x} = \alpha^r \hat{\alpha} e^{\alpha^2 x} + \beta^r \hat{\beta} e^{\beta^2 x}$$

$$= \alpha^r \hat{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} \frac{x^n}{n!} + \beta^r \hat{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^{2n+r} \hat{\alpha} + \beta^{2n+r} \hat{\beta}\right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+r} \;,$$

$$e^{qx}\left(\alpha^r \hat{\alpha} e^{p\alpha x} + \hat{\beta} e^{p\beta x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+r} \tag{4.9}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$e^{qx}\left(\alpha^r \hat{\alpha} e^{p\alpha x} + \beta^r \hat{\beta} e^{p\beta x}\right) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{x^n}{n!}\right] \left[\alpha^r \hat{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} p^n \alpha^n \frac{x^n}{n!} + \beta^r \hat{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} p^n \beta^n \frac{x^n}{n!}\right]$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{x^n}{n!}\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n \left(\alpha^{n+r} \hat{\alpha} + \beta^{n+r} \hat{\beta}\right) \frac{x^n}{n!}\right]$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{x^n}{n!}\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n K_{n+r} \frac{x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^{n-i}\, p^n K_{n+r}\right] \frac{x^n}{n!} \;,$$

$$e^{qx}\left(\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}+\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}q^{n-i}\,p^nK_{n+r}\right]\frac{x^n}{n!} \tag{4.10}$$

dir.

(4.9) ve (4.10) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}q^{n-i}\,p^nK_{i+r}=K_{2n+r}$$

bulunur.

**Teorem 4.14.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ ve $r\epsilon\mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}Q_{2i+r}=p^nQ_{n+r}$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ile $\alpha^2-q=p\alpha$ ve $\beta^2-q=p\beta$ özdeşlikleri kullanılarak (2.3) ve (2.4) te

$A(x)=e^{-qx}$,

$$B(x)=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta}$$

olarak alınırsa,

$$e^{-qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{(\alpha^2-q)x}-\beta^r\hat{\beta}e^{(\beta^2-q)x}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}-\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}}{\alpha-\beta}-\frac{\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^r\hat{\alpha}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\alpha^n\frac{x^n}{n!}-\frac{\beta^r\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\beta^n\frac{x^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\frac{\alpha^{n+r}\hat{\alpha}-\beta^{n+r}\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}p^nQ_{n+r}\,,$$

$$e^{-qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}p^nQ_{n+r} \tag{4.11}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$e^{-qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\frac{\alpha^r\hat{\alpha}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\frac{x^n}{n!}-\frac{\beta^r\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+r}\hat{\alpha}-\beta^{2n+r}\hat{\beta}}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}Q_{2n+r}\frac{x^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}Q_{n+r}\right]\frac{x^n}{n!},$$

$$e^{-qx}\frac{\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}Q_{n+r}\right]\frac{x^n}{n!}\qquad(4.12)$$

dir.

$(4.11)$ ve $(4.12)$ eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}Q_{i+r}=p^nQ_{n+r}$$

elde edilir.

**Teorem 4.15.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ ve $r\epsilon\mathbb{Z}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}K_{2i+r}=p^nK_{n+r}$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ile $\alpha^2-q=p\alpha$ ve $\beta^2-q=p\beta$ özdeşlikleri kullanılarak (2.3) ve (2.4) te

$A(x)=e^{-qx}$,

$B(x)=\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}+\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}$

olarak alınırsa,

$$e^{-qx}\left(\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}+\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}\right)=\alpha^r\hat{\alpha}e^{(\alpha^2-q)x}+\beta^r\hat{\beta}e^{(\beta^2-q)x}$$

$$=\alpha^r\hat{\alpha}e^{p\alpha x}+\beta^r\hat{\beta}e^{p\beta x}=\alpha^r\hat{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\alpha^n\frac{x^n}{n!}+\beta^r\hat{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\beta^n\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\left(\alpha^{n+r}\hat{\alpha}+\beta^{n+r}\hat{\beta}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}p^nK_{n+r}\ ,$$

$$e^{-qx}\left(\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}+\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}p^nK_{n+r} \quad (4.13)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$e^{-qx}\left(\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}\right)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\alpha^r\hat{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\frac{x^n}{n!}-\beta^r\hat{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^{2n+r}\hat{\alpha}+\beta^{2n+r}\hat{\beta}\right)\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}K_{2n+r}\frac{x^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}K_{n+r}\right]\frac{x^n}{n!},$$

$$e^{-qx}\left(\alpha^r\hat{\alpha}e^{\alpha^2x}-\beta^r\hat{\beta}e^{\beta^2x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}K_{n+r}\right]\frac{x^n}{n!} \quad (4.14)$$

dir.

(4.12) ve (4.13) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-q)^{n-i}K_{i+r}=p^nK_{n+r}$$

elde edilir.

**Teorem 4.16.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}V_{n-i}Q_i=2^nQ_n+p^nQ_0$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ile $\alpha+\beta=p$ özdeşliği kullanılarak (2.3) ve (2.4) te

$$A(x)=\frac{\hat{\alpha}e^{\alpha x}-\hat{\beta}e^{\beta x}}{\alpha-\beta},$$

$$B(x)=e^{\alpha x}+e^{\beta x}$$

olarak alınırsa,

$$\left(\frac{\hat{\alpha}e^{\alpha x}-\hat{\beta}e^{\beta x}}{\alpha-\beta}\right)\left(e^{\alpha x}+e^{\beta x}\right)=\frac{\hat{\alpha}e^{2\alpha x}-\hat{\beta}e^{2\beta x}}{\alpha-\beta}+\frac{\hat{\alpha}e^{px}-\hat{\beta}e^{px}}{\alpha-\beta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{\hat{\alpha}\alpha^n - \hat{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} p^n \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{\alpha - \beta} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} [2^n Q_n + p^n Q_0] \,,$$

$$\left(\frac{\hat{\alpha}e^{\alpha x} - \hat{\beta}e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{\beta x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} [2^n Q_n + p^n Q_0] \qquad (4.15)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left(\frac{\hat{\alpha}e^{\alpha x} - \hat{\beta}e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{\beta x}\right) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_{n-i} Q_i\right]\frac{x^n}{n!} \,,$$

$$\left(\frac{\hat{\alpha}e^{\alpha x} - \hat{\beta}e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{\beta x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_{n-i} Q_i\right]\frac{x^n}{n!} \qquad (4.16)$$

dir.

(4.15) ve (4.16) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_{n-i} Q_i = 2^n Q_n + p^n Q_0$$

elde edilir.

**Teorem 4.17.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} U_{n-i} K_i = 2^n Q_n - p^n Q_0$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ile $\alpha + \beta = p$ özdeşliği kullanılarak (2.3) ve (2.4) te

$A(x) = \hat{\alpha}e^{\alpha x} + \hat{\beta}e^{\beta x}$,

$$B(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$$

olarak alınırsa,

$$\left(\hat{\alpha}e^{\alpha x} + \hat{\beta}e^{\beta x}\right)\left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right) = \frac{\hat{\alpha}e^{2\alpha x} - \hat{\beta}e^{2\beta x}}{\alpha - \beta} - \frac{\hat{\alpha}e^{px} - \hat{\beta}e^{px}}{\alpha - \beta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{\hat{\alpha}\alpha^n - \hat{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} p^n \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{\alpha - \beta} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} [2^n Q_n - p^n Q_0] \frac{x^n}{n!} \,,$$

$$\left(\hat{\alpha}e^{\alpha x}+\hat{\beta}e^{\beta x}\right)\left(\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}[2^nQ_n-p^nQ_0]\frac{x^n}{n!} \tag{4.17}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left(\hat{\alpha}e^{\alpha x}+\hat{\beta}e^{\beta x}\right)\left(\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta}\right)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}K_n\frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}U_n\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_{n-i}K_i\right]\frac{x^n}{n!}\ ,$$

$$\left(\hat{\alpha}e^{\alpha x}+\hat{\beta}e^{\beta x}\right)\left(\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_{n-i}K_i\right]\frac{x^n}{n!} \tag{4.18}$$

dir.

(4.17) ve (4.18) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}V_{n-i}Q_i=2^nQ_n-p^nQ_0$$

bulunur.

**Teorem 4.18.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}U_{n-i}Q_i=\frac{2^nK_n-p^nK_0}{\Delta}$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ile $\alpha+\beta=p$ özdeşliği kullanılarak (2.3) ve (2.4) te

$$A(x)=\frac{\hat{\alpha}e^{\alpha x}-\hat{\beta}e^{\beta x}}{\alpha-\beta},$$

$$B(x)=\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta}$$

olarak alınırsa,

$$\left(\frac{\hat{\alpha}e^{\alpha x}-\hat{\beta}e^{\beta x}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta}\right)=\frac{\hat{\alpha}e^{2\alpha x}+\hat{\beta}e^{2\beta x}}{(\alpha-\beta)^2}-\frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{(\alpha-\beta)^2}e^{px}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(\hat{\alpha}\alpha^n+\hat{\beta}\beta^n\right)\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n K_n - p^n K_0}{\Delta}\right] \frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\frac{\hat{\alpha} e^{\alpha x} - \hat{\beta} e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n K_n - p^n K_0}{\Delta}\right] \frac{x^n}{n!} \tag{4.19}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left(\frac{\hat{\alpha} e^{\alpha x} - \hat{\beta} e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{x^n}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} U_{n-i} Q_i\right] \frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\frac{\hat{\alpha} e^{\alpha x} - \hat{\beta} e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} U_{n-i} Q_i\right] \frac{x^n}{n!} \tag{4.20}$$

dir.

$(4.19)$ ve $(4.20)$ eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} U_{n-i} Q_i = \frac{2^n K_n - p^n K_0}{\Delta}$$

bulunur.

**Teorem 4.19.** Her $n \epsilon \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_{n-i} K_i = 2^n K_n + p^n K_0$$

dir.

**İspat.** Binet formülü ile $\alpha + \beta = p$ özdeşliği kullanılarak (2.3) ve (2.4) te

$A(x) = \hat{\alpha} e^{\alpha x} + \hat{\beta} e^{\beta x}$,

$B(x) = e^{\alpha x} + e^{\beta x}$

olarak alınırsa,

$$\left(\hat{\alpha} e^{\alpha x} + \hat{\beta} e^{\beta x}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{\beta x}\right) = \hat{\alpha} e^{2\alpha x} + \hat{\beta} e^{2\beta x} + \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\right) e^{px}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\left(\hat{\alpha}\alpha^n + \hat{\beta}\beta^n\right)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} p^n\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}[2^n K_n + p^n K_0]\frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\hat{\alpha}e^{\alpha x} + \hat{\beta}e^{\beta x}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{\beta x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}[2^n K_n + p^n K_0]\frac{x^n}{n!} \tag{4.21}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left(\hat{\alpha}e^{\alpha x} + \hat{\beta}e^{\beta x}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{\beta x}\right) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} K_n \frac{x^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} V_{n-i}K_i\right]\frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\hat{\alpha}e^{\alpha x} + \hat{\beta}e^{\beta x}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{\beta x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} V_{n-i}K_i\right]\frac{x^n}{n!} \tag{4.22}$$

dir.

(4.19) ve (4.20) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} V_{n-i}K_i = 2^n K_n + p^n K_0$$

bulunur.

Teorem 4.16 ve Teorem 4.17 den aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 4.2.** Her $n\epsilon\mathbb{N}$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[V_{n-i}Q_i + U_{n-i}K_i] = 2^{n+1}Q_n,$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[V_{n-i}Q_i - U_{n-i}K_i] = 2p^n Q_0,$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[\Delta U_{n-i}Q_i + V_{n-i}K_i] = 2^{n+1}K_n,$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[V_{n-i}K_i - \Delta U_{n-i}Q_i] = 2p^n K_0,$$

dir.

# BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili temel tanımlar ve özellikler verilmiştir. Daha sonra Cassini ve Catalan özdeşlikleri verilerek bazı toplamsal ifadeler bulundu, Fibonacci ve Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları ispatlandı. Ardından Fibonacci ve Lucas sayıları için verilen tanım ve özellikler genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için elde edildi. Son bölümde ise genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için daha genel olan Catalan özdeşliği elde edildi. Binom ve Binet formülleri kullanılarak bazı kombinatoryel özelliklerin ispatları yapıldı. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonlar elde edildi ve sonuçları ispatlandı. Bu tezin 4. bölümünü oluşturan teorem ve ispatların bir kısmı Sci-Expanded kapsamında taranan bir dergide kabul almış olup [18], diğer bir kısmı ise ESCI tarafından taranan bir dergide yayına sunulmuştur [19]. Ayrıca literatürde bilinmekte olan genelleştirilmiş split-dual Fibonacci-Lucas kuaterniyonları ve oktonyonları ele alınıp incelenebilir. Bunlarla ilgili benzer formüllerin elde edilip edilemeyeceği araştırılabilir.

## KAYNAKLAR


[1] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, New York, 2001.

[2] Emery, J., Fibonacci Numbers and The Golden Ratio Continued Fractions, Emery University Press., 2011.

[3] Demirturk B., Fibonacci and Lucas Sums by matrix Methods, International Mathematical Forum, 5(3), 99-107, 2010.

[4] Şiar, Z., Keskin, R., Some new identities concerning generalized Fibonacci and Lucas numbers, Hacet. J. Math. Stat.42, 211-222, 2013.

[5] Church, C. A., Bicknel, M., Exponential generating functions for Fibonacci identities, The Fibonacci Quaterly, 11(3), 275-281, 1973.

[6] Horadam, A. F., A Generalized Fibonacci sequence, American Mathematical Monthly, 68(5), 455-459, 1961.

[7] Horadam, A. F., Basic properties of certain generalized sequences of numbers, The Fibonacci Quaterly, 3(3), 161-176, 1965.

[8] Hamilton, W. R., Elements of Quaternions, London: Longmans, Green, 1866.

[9] Hardy, G. H., Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, Ely House, London W.1,1960.

[10] Hardy, A. S., Elements of Quaternions, Boston, Published by Ginn, Health & Co. 1881.

[11] Horadam, A. F., Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions, Amer. Math. Monthly,70, 289-291, 1963.

[12] Horadam, A. F., Quaternion recurrence relations, Ulam Quaterly, 2(2), 23-33, 1993.

[13] Halici, S., On Fibonacci quaternions, Adv. Appl. Clifford Algebras, 22, 321–327, 2012.

[14] Ramirez, J. L., Some combinatorial properties of the $k$ −Fibonacci and the k-Lucas Quaternions, An. St. Univ. Ovidius Constanta, Ser. Mat., 23(2), 201-212, 2015.

[15] Polatlı, E., Kesim, S., On Quaternions with generalized Fibonacci and Lucas number components, Advances in Difference Equations, 1, 169, 2015.

[16] Polatlı, E., Kesim, S., A note on Catalan's Identity for the k-Fibonacci Quaternions, Journal of Integer Sequences, 18, 1-4, 2015.

[17] Iyer, M. R., A Note on Fibonacci Quaternions, The Fibonacci Quarterly, 7(3), 225-229, 1969.

[18] Demirtürk Bitim, B., ve Topal, N., Quaternions via generalized Fibonacci and Lucas number components, Mathematical Reports, accepted 24.04.2017.

[19] Demirtürk Bitim, B., Topal, N., Sum Formulas From The Exponential Generating Functions of $(p,q)$ −Fibonacci and Lucas Quaternions, 2017, yayına sunuldu.

[20] Vajda, S., Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section, Ellis Horwood Limited Publ., Chichester, 1989.

[21] Hoggatt, V. E., Fibonacci and Lucas Numbers, Houghton-Mifflin, Boston, 1969.

[22] Ribenboim, P., My numbers, My friends, Springer-Verlag Inc., New York, 2000.

[23] Benjamin, A, T., Quinn, J., Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof, The Mathematical Association of America, USA, 2003.

[24] Kalman, D., Mena, R., The Fibonacci numbers-exposed, Mathematics Magazine, Vol. 76(3), 167-181, 2003.

[25] Rabinowitz,S., Algorithmic Manipulation of Fibonacci Identities, Applications of Fibonacci Numbers, Kluwer Academic Pub., Dordrect, Vol. 6, 389-408, 1996.

[26] Hoggatt, V. E., Lind, D. A., A primer for the Fibonacci Numbers: Part VI, Fibonacci Quarterly, 5(5), 445-460, 1967.

[27] Ribenboim, P., The Little Book of Bigger Primes, Second Edition, Springer-Verlag Inc., New York, 2004.

[28] Patel, B. K. and Ray, P. K., On the properties of $(p,q)-$Fibonacci and $(p,q)-$Lucas quaternions, Mathematical Reports, accepted 2017.

[29] Mezö, I., Several Generating Functions for Second-Order Recurrence Sequences, Journal of Integer Sequences, Vol. 12, 2009.

[30] Iakin, A. L., Extended Binet forms for generalized quaternions of higher order, Fibonacci Quarterly, 19(5), 410-413, 1981.

[31] Iakin, A. L., Generalized quaternions with quaternion components, The Fibonacci Quarterly, 15(4), 350-352, 1977.

[32] Iyer, M. R., Some results on Fibonacci quaternions, The Fibonacci Quarterly, 7(2), 201-210, 1969.

# ÖZGEÇMİŞ

Nazim TOPAL, 10.07.1976'da Horosan'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 1993 yılında Pendik Lisesi'nden mezun oldu. 1994 yılında kazandığı Balıkesir Üniversitesi Matematik Öğretmenliği bölümünden 1999 yılında mezun olmuştur. Evli ve üç çocuk babasıdır.