T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ BİR KÜBİK VE BİR KUADRATİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMİNİN KUADRATİKLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burak Tufan GÖKMEN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Mayıs 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ BİR KÜBİK VE BİR KUADRATİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMİNİN KUADRATİKLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burak Tufan GÖKMEN

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 14/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Doç. Dr.**	**Dr. Öğr. Üyesi**
Halim ÖZDEMİR	**Murat SARDUVAN**	**Sinem ŞİMŞEK**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Burak Tufan GÖKMEN
14/05/2018

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR’e ve bu çalışmada bana her türlü yardımı sağlayan Sayın Arş.Gör. Dr. Tuğba PETİK’e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Özellikle, eğitimim ve öğrenimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Fatma GÖKMEN ve babam Mustafa GÖKMEN’e sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim. Lisansüstü öğrenimim boyunca her türlü manevi destek veren sevgili eşim Begüm GÜREL GÖKMEN’e de bir teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

C	: Karmaşık sayılar kümesi
C^{*}	: Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesi
$C_{m\times n}$	: mxn boyutlu karmaşık matrisler kümesi
C_{n}	: $n\times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
□ ^{n}	: n boyutlu karmaşık vektörler kümesi
□ ^{n}	: n boyutlu reel vektörler kümesi
I_n	: $n\times n$ boyutlu birim matris
I	: Uygun boyutlu birim matris
P_n	: İdempotent matrisler kümesi
0	: Uygun boyutlu sıfır matrisi
i	: $\sqrt{-1}$
M^T	: M matrisinin devriği
$\det(M)$	: M matrisinin determinantı
$p(M)$	: M matrisinin p polinomu altındaki resmi
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\subset$	: Alt kümesidir
$(a,\ b)$	: a , b sıralı ikilisi
$\Rightarrow$	: Gerektirir
$\sum$	: Toplam
$\oplus$	: Direkt toplam
□	: Benzer
bkz.	: Bakınız
■	: İspat sonu

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Kuadratik matris, genelleştirilmiş kuadratik matris, kübik matris, idempotent matris, köşegenleştirme, lineer bileşim.

İlk bölümde çalışmaya ilişkin bazı önbilgiler verilmekte ve literatürdeki bazı çalışmalardan bahsedilmektedir.

Sonraki bölümde çalışmada zaman zaman kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmektedir.

3. Bölüm'de köşegenleştirilebilen bir kübik matrisin spektral karakterizasyonu ortaya konulmakta ve bu matrisin idempotent matrisler ve genelleştirilmiş kuadratik matrisler türünden birer karakterizasyonu ayrı ayrı verilmektedir.

Sonraki bölümde çalışmanın esas amacı olan değişmeli bir kübik ve bir kuadratik matrisin lineer bileşiminin kuadratikliğinin karakterizasyonu ile ilgili ana sonuç verilmekte, daha sonra literatürdeki benzer çalışma ve bu çalışma birbirleriyle kıyaslanmaktadır. Böylece çalışmada ortaya koyulan ana sonucun, literatürdeki pek çok sonucu kapsadığı görülmektedir.

Son kısımda çalışma ile ilgili bazı tartışma ve öneriler bulunmaktadır.

THE QUADRACITY OF LINEAR COMBINATIONS OF A QUADRATIC AND A CUBIC MATRIX THAT COMMUTE

SUMMARY

Keywords: Quadratic matrix, generalized quadratic matrix, cubic matrix, idempotent matrix, diagonalization, linear combination.

In the first chapter, some premilinary information are given and it is mentioned from some studies in the literatüre.

In the next chapter, some basic definitions and theorems which will be used from time to time in the study are given.

In Chapter 3, the spectral characterization of a cubic matrix which can be diagonalized is presented, and the characterization of this matrix with respect to idempotent matrices and generalized quadratic matrices are given seperately.

In the next chapter, the main result related to quadraticity of the linear combination of a cubic and a quadratic matrix, which is the main aim of the study, is given, and then the similar studies and this study are compared with each other. Thus, it is seen that the main result established in the study covers many of the results in the literature.

In the last part, there are some discussions and suggestions about the study.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın İçeriği ve Önemi

Uygulamalı bilimlerin hemen hemen tüm alanlarında matematiğin öneminin yanı sıra, özellikle matrislerin de bir hayli önemi vardır. Örneğin; karşılaşılan çok değişkenli bir lineer denklem sisteminin çözümü, denklem sisteminin matris biçimi oluşturularak bulunabilir. Yine bazı uygulamalı bilimlerde (matematik, fizik, bilgisayar mühendisliği, makine mühendisliği vs.) kullanılan Matlab, Mathematica gibi paket programların temelinde matris kavramı vardır. Bunun yanı sıra matematiksel veya fiziksel problemlerin birçoğunda özel tipli matrisler yardımıyla birçok problem temsil edilebilmektedir veya çözülebilmektedir. Örneğin; idempotent matrislerin istatistik teorisiyle doğrudan ilişkisi vardır. Şöyle ki, C $n\times n$ boyutlu bir reel simetrik matris ve x $n\times 1$ boyutlu $N_n(0,I)$ normal dağılımına sahip çok değişkenli rastgele bir reel vektör olmak üzere $x^T Cx$ kuadratik formunun $ki-kare$ dağılımına sahip olması için gerek ve yeter koşul C matrisinin idempotent matris (yani $C^2=C$) olmasıdır [1]. Diğer yandan involutif tipinde matris olan Pauli spin ve Dirac spin matrisleri ise kuantum mekaniğinde kullanılmaktadır [2].

Çalışmayı oluşturan kuadratik matrisler ailesi idempotent, involutif matris ailelerini ve kübik matrisler ailesi tripotent matris gibi özel tipli matrisler ailesini kapsayan oldukça geniş bir matris ailesidir. Bununla beraber idempotent ve involutif matrisler aynı zamanda kuadratik matrisler iken tripotent matrisler ise kübik matrislerdir.

İdempotent matrislerin istatistik teorisiyle olan ilişkisine benzer biçimde kuadratik matrislerin de istatistik teorisiyle doğrudan bir ilişkisi vardır. Öyle ki, C $n\times n$ boyutlu bir reel simetrik kuadratik matris olmak üzere, kuadratik matrislerin iki idempotent matrisin lineer bileşimi şeklinde yazılabildiği göz önüne alınarak x $n \times 1$ boyutlu $N_n(0, I)$ normal dağılımına sahip çok değişkenli rastgele bir vektör ise $x^T Cx$ kuadratik formu iki $ki - kare$ değişkeninin toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Buradan anlaşılacağı üzere kuadratik matrisler ile ilgili yapılan çalışmalar idempotent matrisler ile ilgili yapılan çalışmaları kapsayıcı nitelikte olup, bu çalışmaların daha genel halidir. Bu sebeple kübik matrisler ile ilgili yapılacak çalışmalar ise kuadratik matrisler ile ilgili yapılacak çalışmaları kapsayacaktır. Bunun neticesi olarak ise daha da genel sonuçlar elde edilecektir.

Bu çalışmada $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ ve A_1 matrisi kübik matris, A_2 matrisi ise kuadratik matris olmak üzere

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2 \tag{1.1}$$

lineer bileşiminin kuadratik matris olmasının karakterizasyonu problemi ele alınacaktır. Elde edilecek olan sonuçlar ise literatürde mevcut olan iki özel tipli matrisin (idempotent, involutif, tripotent) lineer bileşiminin yine bir özel tipli matris olma problemlerinin pek çoğunu kapsayacaktır. Hatta literatürde bulunmayan farklı özel sonuçlar da ortaya koyulacaktır.

1.2. Literatür Çalışması

Çalışmamıza ilişkin literatür araştırmasına baktığımızda Baksalary ve Baksalary P_1 ve P_2 matrisleri idempotent matrisler olmak üzere $P = c_1 P_1 + c_2 P_2$ lineer bileşim matrisinin idempotentliği üzerine çalışmışlardır [5]. Bu çalışma yürütülürken P_1 ve P_2 matrislerinin birbirleriyle değişmeli olduğu ve olmadığı durumlar ayrı ayrı ele alınmış ve bunlara ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Yöntem olarak ise elementer matris işlemleri kullanılmıştır.

Bu çalışmanın sonrasında ise Baksalary, Baksalary ve Özdemir değişmeli iki tripotent matrisin lineer bileşimlerinin tripotentliği problemini ele alıp bunun üzerine bazı sonuçlar vermişlerdir [6]. Çalışma neticesinde ise değişmeli iki idempotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği de açık bir sonuç olarak verilmiştir. Çalışmanın genelinde ise yöntem olarak elementer matris işlemleri tercih edilmiştir.

2004 yılında ise Özdemir ve Özban idempotent matrislerin lineer bileşimlerinin idempotentliği adlı makale yayınlamışlardır [7]. Yayınlanan bu makalede diğer [5]'teki çalışmadan farklı olarak üç tane idempotent matrisin lineer bileşimi ele alınmıştır. Yapılan bu çalışmada ise yöntem olarak eş zamanlı köşegenleştirme kullanılmıştır.

2008 yılına gelindiğinde, Özdemir ve Sarduvan, iki involutif matrisin lineer bileşiminin tripotentliği, iki involutif matrisin lineer bileşiminin idempotentliği, iki tripotent matrisin lineer bileşiminin involutifliği ve iki involutif matrisin lineer bileşiminin involutifliği problemlerini karakterize etmiş olup oldukça geniş bir çalışma ortaya koymuşlardır [8]. Bu çalışmada ele alınan problemlerin tümü lineer bileşimi oluşturan matrislerin değişmeli olmaları ek koşulu altında irdelenmiştir ve bu irdelemelerde ise yöntem olarak elementer matris işlemleri kullanılmıştır.

Özdemir ve arkadaşları 2009 yılında değişmeli iki tripotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliği ve tripotentliğini elementer matris işlemlerini kullanarak karakterize etmişlerdir [9].

İdempotent ve involutif matrisler ailesini kapsayan kuadratik matrisler ailesi ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında Aleksiejczyk ve Smoktunowicz kuadratik matrislerin Moore-Penrose tersi özelliğini karakterize etmişlerdir [10]. Daha sonra ise Farebrother ve Trenkler kuadratik matrislerin tanımını genelleştirilmiş kuadratik matrislere genişletmiş olup genelleştirilmiş kuadratik matrislerin Moore-Penrose ve grup tersi özelliğini irdelemişlerdir [11].

Bununla beraber yakın dönemde kuadratik veya genelleştirilmiş kuadratik matrislerin lineer bileşiminin tipinin karakterizasyonu üzerine yapılan pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür. Örneğin; 2015 yılında Uç ve arkadaşları, iki kuadratik matrisin lineer bileşiminin kuadratik matris olduğu durumları ele almışlardır [12]. Ele alınan bu çalışmada ilk olarak değişmeli olmayan iki idempotent matrisin ve birim matrisin lineer bileşiminin idempotentliği incelenmiştir. Daha sonra ise değişmeli iki esas kuadratik matrisin lineer bileşiminin kuadratik matris olması için sağlanması gereken matris eşitlikleri ve bunlara ilişkin katsayı eşitlikleri blok matrisler kullanarak ortaya koyulmuştur. Yapılan bu çalışmanın sonuçları ise daha önceden yapılmış idempotent ve/veya involutif matrislerin lineer bileşiminin idempotentliği veya involutifliği problemlerini kapsar niteliktedir.

Petik ve arkadaşları [12]'deki çalışmanın bir üst basamağı olarak iki genelleştirilmiş kuadratik matrisin lineer bileşiminin genelleştirilmiş kuadratikliğini elementer matris işlemleri kullanarak ele almışlardır [13]. Ele alınan bu lineer bileşimin genelleştirilmiş kuadratik matris olması için sağlanması gereken matris eşitlikleri ve bunlara ilişkin katsayı eşitlikleri verilmiştir. Bu matris ve katsayı eşitliklerine özel değerler verildiğinde bu çalışmanın bugüne dek yapılmış özel tipli matrislerin lineer bileşiminin karakterizasyonu ile ilgili pek çok çalışmayı kapsadığını görmek mümkündür.

2016 yılında ise Uç ve arkadaşları değişmeli iki kuadratik matrisin lineer bileşiminin genelleştirilmiş kuadratik olduğu tüm durumları, blok matrisleri kullanarak, sağlanması gereken matris eşitlikleri ve bu matris eşitliklerine ilişkin katsayı eşitlikleri şeklinde karakterize etmişlerdir [14]. Yapılan bu çalışma idempotent ve/veya involutif matrislerin lineer bileşiminin idempotentliği veya involutifliği problemlerini kapsadığı gibi bu tipli lineer bileşimlerin tripotentliğini de kapsamaktadır.

Bugüne kadar özel tipli matrislerin lineer bileşimleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmasına rağmen kübik matrislerle ilgili herhangi bir çalışma yoktur. Yalnızca Uç'un 2015 yılındaki kuadratik matrislerin lineer bileşiminin kuadratikliği adlı doktora tezinin sonuçlar ve öneriler bölümünde kübik matrislerin tanımı geçmektedir [15]. Dolayısıyla ele alınan bu çalışma kübik matrisler ile ilgili öncü bir çalışma niteliğindedir.

Çalışmada $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ ve A_1 bir kübik matris ve A_2 bir kuadratik matris olmak üzere (1.1) lineer bileşiminin kuadratikliğinin karakterize edilmesi problemi ele alınmaktadır. Ele alınan çalışma şu şekilde düzenlenmiştir. İlk kısımda, önce bir kuadratik matris ile bir idempotent matris arasındaki ilişki, sonra bir kübik matris ile bir genelleştirilmiş kuadratik matris arasındaki ilişki ortaya koyulmaktadır. Daha sonra esas problem ele alınmaktadır: (1.1)'deki lineer bileşimin $A_1A_2 = A_2A_1$ ek koşulu altında, kuadratik matris olması için gerek ve yeter şartlar, blok matrisler ve elementer matris işlemleri kullanılarak elde edilmektedir. Daha sonra sağlanması gereken şartlar matris eşitlikleri ve bunlara ilişkin katsayı eşitliklerini içeren bir tablo sunulmaktadır.

Son olarak literatürdeki sonuçlarla karşılaştırma yapılmaktadır ve bu kıyaslama sonucunda yapılan bu çalışmadan literatürdeki benzer çalışmaların nasıl elde edilebileceği açıkça ifade edilmektedir.

BÖLÜM 2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu kısımda, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilmektedir.

2.1. Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1. Bir $M_1 \in \mathrm{C}_n$ matrisi için, $M_1 M_2 = M_2 M_1 = I_n$ olacak şekilde bir $M_2 \in \mathrm{C}_n$ matrisi varsa, M_1 matrisine bir *tersinir matris* denir. Bu durumda M_2 matrisine de M_1 *matrisinin tersi* denir ve $M_2 = M_1^{-1}$ ile gösterilir [16].

Bundan sonra tez süresince, i. satır ve j. sütundaki elemanı m_{ij} sayısı olan bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisi $M = [m_{ij}]$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.2. Bir $D = [d_{ij}] \in \mathrm{C}_n$ matrisi, $i \neq j$ için $d_{ij} = 0$ koşulunu sağlıyorsa, D matrisine bir *köşegen matris* denir. $d_i = d_{ii}$ olmak üzere, D köşegen matrisi genel itibariyle $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ şeklinde gösterilir [3].

Tanım 2.3. $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $D \in \mathbb{C}_n$ köşegen matrisinin tüm köşegen elemanları eşit (yani $D = \alpha I_n$) ise, D matrisine bir *skaler matris* denir [3].

Tanım 2.4. Bir $M \in \mathrm{C}_{m\times n}$ matrisinin *alt matrisi*, bazı satır ve/veya sütunlarının silinmesi ile elde edilen matris şeklinde ifade edilir [2].

Tanım 2.5. Bir $M_1 \in \mathrm{C}_n$ matrisi, satırları veya sütunları arasına yatay veya dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilmektedir. Bu durumda bu M matrisine bir *parçalanmış matris* ve alt matrislerine ise *bloklar* denir. Dolayısıyla $M \in \square_{m\times n}$ parçalanmış matrisinin genel biçimi

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, M_{ij} $(i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,c)$; $m_1,\ldots,m_k$ ve $n_1,\ldots,n_c$ sayıları $m_1+\cdots+m_k=m$ ve $n_1+\cdots+n_c=n$ olacak şekildeki pozitif tamsayılar olmak üzere $m_i \times n_j$ boyutlu bir matristir. Eğer

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{bmatrix}$$

matrisi bir parçalanmış matris ise, i. satırdaki $M_{i1},\ldots,M_{ic}$ alt matrislerinin her biri aynı sayıda satır içerir ve benzer şekilde j. sütundaki $M_{1j},\ldots,M_{kj}$ alt matrislerinin her biri aynı sayıda sütun içerir. $k=c$ olmak üzere $i=j$ ise, M_{ij} alt matrisine M matrisinin bir *köşegen bloğu* denir [2].

Çalışma boyunca $[M_{ij}]$ gösterimi, $i,j-$bloğu uygun boyutlu M_{ij} matrisi olan $m\times n$ boyutlu bir parçalanmış matrisi temsil edecektir. Ayrıca, parçalanmış matris ifadesi yerine yer yer *blok matris* ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.6. $M_{ii} \in \mathrm{C}_{n_i}$ $(i=1,\ldots,k)$ ve $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & M_{kk} \end{bmatrix}$$

biçimindeki $M \in \mathrm{C}_n$ matrisine bir *blok köşegen matris* denir. Böylece bu şekildeki blok köşegen bir matrisi $M = M_{11} \oplus \cdots \oplus M_{kk} = \bigoplus_{i=1}^{k} M_{ii}$ şeklinde yazmak mümkündür. Bu yazıma ise, $M_{11},\ldots,M_{kk}$ *matrislerinin direkt toplamı* denir [2].

Tanım 2.7. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir matrise, *satır indirgenmiş eşelon biçimdedir* denir.

i) Tüm elemanları sıfırdan farklı olan herhangi bir satırda, sıfır olmayan ilk eleman 1'dir (bu elemana bir 1 *baş elemanı* denmektedir).
ii) 1 baş elemanını içeren herhangi bir sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır.
iii) Sıfırdan farklı eleman içeren herhangi iki satırda, daha büyük numaralı satırın 1 baş elemanı daha sağda bulunur.
iv) Sadece sıfır elemanlarından ibaret olan herhangi bir satır, sıfırdan farklı eleman içeren diğer satırlardan daha aşağıdadır [16].

Tanım 2.8. Herhangi bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin *rankı*, M matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçiminde bütün elemanları sıfırdan farklı satırların sayısıdır ve bu sayı $\mathrm{rank}(M)$ ile gösterilmektedir [16].

2.2. Özdeğer, Özvektör, Benzerlik ve Köşegenleştirme

Tanım 2.9. $M \in \mathbb{C}_n$ verilmiş olsun.

$$M\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

eşitliğini sağlayacak biçimde sıfırdan farklı bir $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektörü ve bir $\lambda \in \mathbb{C}$ skaleri var ise, bu λ skalerine M matrisinin bir *özdeğeri* ve bu $\mathbf{x}$ vektörüne de M matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir *özvektörü* denir [3].

Tanım 2.10. Bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisinin *spektrumu*, tüm özdeğerlerinin kümesi olarak adlandırılır ve $\sigma(M)$ şeklinde gösterilir [3].

Teorem 2.11. $M \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere, t yerine M matrisi yazıldığında sıfır matrisini veren en küçük dereceli bir tek $q_M(t)$ monik (en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan) polinomu vardır. Bu polinomun derecesi en fazla n olabilir. Eğer $p(t)$; $p(M) = \mathbf{0}$ olacak şekildeki herhangi bir polinom ise, $q_M(t)$ polinomu $p(t)$ polinomunu böler ve ayrıca bu $q_M(t)$ monik polinomu, M matrisinin *minimal polinomu* olarak tanımlanır [17].

Teorem 2.12. Her $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $q_M(t)$ minimal polinomu $p_M(t)$ karakteristik polinomunu böler. Ayrıca $q_M(\lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul λ skalerinin M matrisinin bir özdeğeri olmasıdır. Dolayısıyla $p_M(t) = 0$ denkleminin her kökü $q_M(t) = 0$ denkleminin de bir köküdür [17].

Tanım 2.13. $M_1,\, M_2 \in \mathrm{C}_n$ olmak üzere $M_2 = S^{-1} M_1 S$ olacak şekilde bir $S \in \mathrm{C}_n$ tersinir matrisi varsa, M_2 *matrisi* M_1 *matrisine benzerdir* denir [3]. ($M_1 \sim M_2$: M_1 matrisi M_2 matrisine benzerdir.)

Tanım 2.14. Bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisinin bir köşegen matrise benzer olması durumunda, M matrisine *köşegenleştirilebilirdir* denir [3].

Bir matrisin köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirlemenin birçok yolu vardır. Bunlarla ilgili olarak aşağıda bazı teoremler verilmektedir.

Teorem 2.15. Aşağıdaki koşulların her biri, bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşuldur.

(i) $q_m(t) = 0$ minimal polinomu birbirinden farklı doğrusal çarpanlara sahiptir.

(ii) $q_M(t) = 0$ denkleminin her bir kökü tek katlıdır.

(iii) $q_M(t) = 0$ olacak şekildeki her bir t değeri için $q_M(t)$ polinomunun türevi sıfırdan farklıdır [17].

Teorem 2.16. $M \in \mathrm{C}_n$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ ve $D \in \mathbb{C}_{n-k}$ $(1 \le k < n)$ olmak üzere, M matrisinin

$$\begin{bmatrix} \Lambda & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

biçimindeki bir blok matrise benzer olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{C}^n$'de her biri aynı zamanda M matrisinin birer özvektörü olan k tane lineer bağımsız vektörün mevcut olmasıdır. Benzer şekilde M matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul her biri M matrisinin özvektörü olan n tane lineer bağımsız vektörün mevcut olmasıdır. Eğer $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$, M matrisinin lineer bağımsız özvektörleri ve $S = [\mathbf{x}^{(1)} \ \cdots \ \mathbf{x}^{(n)}]$ ise, bu durumda $S^{-1}MS$ bir köşegen matristir. Eğer M matrisi (2.1) şeklinde bir matrise benzer ise, Λ matrisinin köşegen elemanları M matrisinin özdeğerleridir; bu durumda M, bir Λ köşegen matrisine benzer ise, Λ matrisinin köşegen elemanları, M matrisinin özdeğerlerinin tümüdür [3].

Teorem 2.17. $M_{11} \in \mathbb{C}_{n_1}, \ldots, M_{kk} \in \mathbb{C}_{n_k}$ olmak üzere, M matrisi, bunların direkt toplamı yani,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & M_{kk} \end{bmatrix} = M_{11} \oplus \cdots \oplus M_{kk}$$

olsun. Dolayısıyla M matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir $M_{11}, \ldots, M_{kk}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olmasıdır [3].

Tanım 2.18. $M_1,\ M_2 \in \mathrm{C}_n$ olmak üzere $S^{-1}M_1S$ ve $S^{-1}M_2S$ çarpımlarının her ikisinin de köşegen olmasını sağlayan bir $S \in \mathrm{C}_n$ tersinir matrisi varsa, bu M_1 ve M_2 matrislerine *eşzamanlı olarak köşegenleştirilebilirdir* denir [3].

Teorem 2.19. $M_1,\ M_2 \in \mathrm{C}_n$ matrislerinin köşegenleştirilebilir olmasıyla beraber M_1 ve M_2 matrislerinin eşzamanlı olarak köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul M_1 ve M_2 matrislerinin değişmeli olması, yani $M_1M_2 = M_2M_1$ koşulunun sağlanmasıdır [3-2]. Eğer $M_1M_2 = M_2M_1 = \mathbf{0}$ koşulu sağlanıyorsa M_1 ve M_2 matrislerine *ayrık matrisler* denir [2].

2.3. Bazı Özel Tipli Matrisler ve Bu Matrislerin Bazı Özellikleri

Bu bölümde, bazı özel tipli matrislerin tanımları ve onlara ilişkin bazı temel teoremler ispatsız olarak verilmektedir.

Tanım 2.20. $M \in \mathrm{C}_n$ olmak üzere $M^2 = cM$ eşitliğini sağlayan bir $c \in \mathbb{C}^*$ sayısı varsa, M matrisine bir *skaler-potent matris* denir [18].

Tanım 2.21. Bir matrisi $M^2 = M$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi varsa bu M matrisine bir *idempotent matris* denir [19]. Bu çalışma boyunca tüm bu idempotent matrislerin kümesi P_n ile gösterilecektir.

Ayrıca buradan bir idempotent matrisin bir skaler-potent matris olduğu açıkça görülür.

Tanım 2.22. $M^2 = I_n$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi varsa bu M matrisine bir *involutif matris* denir [3].

Tanım 2.23. Bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi $M^2 = -M$ eşitliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *ters idempotent matris,* $M^2 = -I_n$ eşitliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *ters involutif matris* denir [20].

Tanım 2.24. P matrisi birim matristen farklı bir idempotent matris olmak üzere $M^2 = P$ özelliğini sağlayan bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi varsa bu M matrisine bir *genelleştirilmiş involutif* matris denir [11]. Bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi, P matrisi birim matristen farklı bir idempotent matris olmak üzere $M^2 = -P$ özelliğini sağlayan bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi varsa bu M matrisine bir *genelleştirilmiş ters involutif* matris denir [11].

Tanım 2.25. Bir $M \in \square_n$ matrisi için, $M^k = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı varsa, M matrisine bir *nilpotent matris* denir [20].

Tanım 2.26. $M^3 = M$ eşitliğini sağlayacak bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi varsa bu M matrisine bir *tripotent matris* denir [19].

Tanım 2.27. $M^3 = M$, $M^2 \neq M$ ve $M^2 \neq -M$ özelliklerini sağlayan bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi varsa bu M matrisine bir *esas tripotent matris* denir [9].

Yukarıdaki verilen tanımlar ışığında, idempotent ve involutif matrislerin aynı zamanda birer tripotent matris oldukları ve involutif matrislerin ise birer tersinir tripotent matrisler olduğu görülmektedir.

Teorem 2.28. M matrisi bir idempotent matris ise $\sigma(M) \subset \{0,\ 1\}$ 'dir [19].

Teorem 2.29. $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi, $m < n$ olmak üzere m ranklı herhangi bir matris olsun. Eğer M bir idempotent matris ise, M matrisinin m tane sıfırdan farklı özdeğeri vardır ve bu özdeğerlerin tümü 1'e eşittir [19].

Teorem 2.30. M matrisi bir tripotent matris ya da involutif matris ise bu M matrisinin spektrumu sırasıyla $\sigma(M) \subset \{-1,\ 0,\ 1\}$ ve $\sigma(M) \subset \{-1,\ 1\}$ 'dir [19, 20].

Teorem 2.31. İdempotent, involutif ve tripotent matrisler köşegenleştirilebilirdir [20, 21].

Teorem 2.32. $M \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere bir M matrisinin bir tripotent matris olması için gerek ve yeter koşul $M = X - Y$ olacak şekilde iki ayrık (yani $XY = YX = \mathbf{0}$) idempotent X ve Y matrislerinin mevcut olmasıdır. Ayrıca, bu matrisler $X = \frac{1}{2}\left(M^2 + M\right)$ ve $Y = \frac{1}{2}\left(M^2 - M\right)$ olacak biçimde tek türlü olarak belirlidir [1].

2.4. Kuadratik, Genelleştirilmiş Kuadratik, Kübik Matrisler ve Bu Matrislerin Bazı Özellikleri

Bu bölümde, çalışmada esas olarak ele alınan ve yine birer özel tipli matris olan kuadratik, genelleştirilmiş kuadratik ve kübik matris tanımları verilmekte olup bu matrislerin temel özelliklerinden söz edilmektedir. Sonrasında ise bu matris ailelerinin pek çok özel tipli matris ailelerini kapsadığı gösterilmektedir.

Tanım 2.33. Bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi için, $(M - pI_n)(M - qI_n) = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayacak biçimde $p,\ q \in \mathbb{C}$ sayıları varsa, M matrisine bir *kuadratik matris* denir [10].
Bu tip kuadratik matrislerin kümesi ise bu çalışmada $\Omega(p, q)$ şeklinde ifade edilecektir.

Bundan böyle, yukarıdaki tanımda bahsedilen p ve q karmaşık sayıları ile belirlenen $M \in \mathbb{C}_n$ matrisine, kısaca bir $\{p,\ q\}$-*kuadratik matris* denilecektir. $p = q$ ise özel olarak $M \in \mathrm{C}_n$ matrisine kısaca bir $\{p\}$-*kuadratik matris* denilecektir.

Teorem 2.34. $M \in \mathbb{C}_n$, $p,\ q \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) $M \in \Omega(p,q)$.

(ii) M matrisi köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(M) \subset \{p,q\}$'dir.

(iii) $M = pX + qY$, $X + Y = I_n$ ve $XY = YX = \mathbf{0}$ olacak şekilde $X, Y \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisleri vardır.

(iv) $M = (p-q)X + qI$ olacak şekilde bir $X \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisi vardır [4].

Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi bir $\{p\}$-kuadratik matris ise $\sigma(M) = \{p\}$ olduğu açıkça görülmektedir.

M matrisi bir idempotent matris, bir involutif matris, bir ters idempotent matris, bir ters involutif matris veya bir nilpotent matris ise M matrisinin özdeğerleri olan p ve q sırasıyla $(p,\ q) \in \{(0,\ 1),\ (1,\ 0)\}$, $(p,\ q) \in \{(-1,\ 1),\ (1,\ -1)\}$, $(p,\ q) \in \{(-1,\ 0),\ (0,\ -1)\}$, $(p,\ q) \in \{(-i,\ i),\ (i,\ -i)\}$ ve $(p,\ q) = (0,\ 0)$ biçimindedir. Bu sebeple kuadratik matrisler ailesi, idempotent, involutif, ters idempotent, ters involutif ve nilpotent matrisler ailelerini kapsamaktadır.

Tanım 2.35. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi için $(M - pP)(M - qP) = \mathbf{0}$ ve $MP = PM = M$ koşullarını sağlayan $p, q \in \mathbb{C}$ sayıları ve bir P idempotent matrisi varsa bu M matrisine *genelleştirilmiş kuadratik matris* denir [11]. Ayrıca bu çalışma boyunca yukarıda tanımlanan $M \in \mathbb{C}_n$ matrisine P *idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş* $\{p,q\}$-*kuadratik matris* denilecektir.

Bu çalışmada ise, $p \neq q$ olma üzere bu tip M matrislerinin kümesi $\mathcal{L}\left(P;\ p,\ q\right)$ ile gösterilecektir. Bir P idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p,q\}$-kuadratik matris tanımından hareketle, $P = I_n$ olması durumunda, $MP = PM = M$ koşulu zaten sağlanacağından ve ayrıca $(M - pI_n)(M - qI_n) = \mathbf{0}$ olacağından, bu durumda bir P idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p,q\}$-kuadratik matrisin, bir $\{p,q\}$-kuadratik matrise indirgendiği açıkça bellidir.

Teorem 2.36. $M \in \mathbb{C}_n$, $P \in \mathcal{P}_n$, $p,\ q \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) $M \in \mathcal{L}\left(P;\ p,\ q\right)$.

(ii) $M = pX + qY$, $X + Y = P$ ve $XY = YX = \mathbf{0}$ olacak şekilde $X, Y \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisleri vardır.

(iii) $M = (p-q)K + qP$ ve $KP = PK = K$ olacak şekilde bir K idempotent matrisi vardır [4].

Teorem 2.37. $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $M \in \mathcal{L}\left(P;\ \alpha,\ \beta\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$M = \alpha X + \beta Y,\ \ X + Y = P \ \text{ ve } \ XY = YX = \mathbf{0}$$

olacak şekilde X ve Y idempotent matrislerinin mevcut olmasıdır [13].

Teorem 2.38. $M \in \mathcal{L}\left(P;\ \alpha,\ \beta\right)$ olsun. Bu durumda, M matrisinin mümkün olan özdeğerlerinin tümü 0, α ve β karmaşık sayılarından ibarettir, yani $\sigma(M) \subset \{0,\ \alpha,\ \beta\}$'dır [11].

Teorem 2.30.'a göre, bir M tripotent matrisinin özdeğerlerinin kümesi $\sigma(M) \in \{1,-1,0\}$ şeklinde olur. Diğer yandan, Teorem 2.32.'ye göre, M matrisi bir tripotent matris ise $M = \frac{1}{2}\left(M^2 + M\right) - \frac{1}{2}\left(M^2 - M\right)$ eşitliğini sağlayacak şekilde iki ayrık idempotent matrisin farkı olarak yazılabilir. $X = \frac{1}{2}\left(M^2 + M\right)$ ve $Y = \frac{1}{2}\left(M^2 - M\right)$ biçiminde tanımlanırsa $X + Y = M^2$ olur. M matrisi tripotent matris olduğundan, M^2 matrisi idempotent matristir. Dolayısıyla Teorem 2.37. göz önüne alındığında, bir esas tripotent M matrisi, M^2 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{1,-1\}$-kuadratik matris olarak düşünülebilir. Öte yandan, tripotent matrisler ailesi; esas tripotent matrisler ailesinin, idempotent matrisler ailesi ve ters idempotent matrisler ailesinin bileşimidir. Ayrıca, genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesi, kuadratik matrisler ailesini, kuadratik matrisler ailesinin de idempotent ve ters idempotent matrisler ailelerini kapsadığı bilinmektedir. Buradan hareketle, genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesi tripotent matrisler ailesini kapsar.

Bir $M \in \mathrm{L}\left(P;\, p,\, q\right)$ matrisi için; $(p,q) = (-1,1)$ ve $P = -M$ ise M matrisinin bir ters idempotent, $(p,q) \in \{(-i,i),(i,-i)\}$ ve $P \neq I$ ise M matrisinin bir ters involutif, $(p,q) \in \{(-1,1),(1,-1)\}$ ve $P \neq I$ ise M matrisinin bir genelleştirilmiş involutif matris olduğu görülmektedir. Dolayısıyla tüm bu bilgiler doğrultusunda genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesinin, idempotent, involutif, ters idempotent, ters involutif, nilpotent, tripotent, genelleştirilmiş involutif ve genelleştirilmiş ters involutif matris ailelerini kapsadığı dikkate alınmalıdır.

Tanım 2.39. $M \in \mathrm{C}_n$ olmak üzere, $(M - pI_n)(M - qI_n)(M - rI_n) = \mathbf{0}$ olacak şekilde $p,\, q, r \in \mathbb{C}$ sayıları varsa, M matrisine bir *kübik matris* denir ve $p \neq q$, $q \neq r$, $p \neq r$ olmak üzere bu tip kübik matrislerin kümesi $\kappa(p,q,r)$ ile gösterilecektir.

Eğer bir $M \in \mathrm{C}_n$ matrisi bir tripotent matris ise $(p,q,r) \in \{(0,1,-1),(0,-1,1),(1,0,-1),(1,-1,0),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ yazılabilir. Bu sebeple kübik matrisler ailesi tripotent matrisler ailesini kapsamaktadır.

Teorem 3.1'de bahsedileceği üzere bir $M \in \mathrm{C}_n$ kübik matrisinin özdeğerlerinin kümesi $\sigma(M) \subset \{p,q,r\}$ olduğundan, Teorem 2.38. dikkate alındığında kübik matrisler ailesinin genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesini kapsayan geniş bir matris ailesi olduğu görülür.

BÖLÜM 3. DEĞİŞMELİ BİR KÜBİK VE BİR KUADRATİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMİNİN KUADRATİKLİĞİ

3.1. Giriş

Bu bölümde öncelikle, değişmeli bir kübik ve bir kuadratik matrisin lineer bileşiminin kuadratikliğini karakterize eden bir ana sonuç verilmekte, daha sonra literatürde özel tipli matrislerin lineer bileşiminin karakterizasyonu ile ilgili mevcut olan pek çok sonucun, çalışmadaki ana sonuçtan nasıl elde edilebileceği gösterilmektedir.

Ana sonuç verilmeden önce, kübik matrisler ve kuadratik matrisler ile ilgili bazı yardımcı sonuçlar ve tartışmalar verilecektir.

3.2. Bir Kübik Matrisin Genelleştirilmiş Kuadratik Matrislere Göre İfadesi

Bu kısımda, kübik matrislerle genelleştirilmiş kuadratik matrisler arasındaki ilişki ortaya koyulacaktır. Bunun için önce bir kübik matris ile idempotent matrisler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilecektir. Bu teorem sayesinde bir kübik matris, bir genelleştirilmiş kuadratik matris ile birim matrisin skaler bir katının toplamı şeklinde ifade edilebilecektir.

Teorem 3.1. $M \in \kappa(p,q,r)$, $M \in \mathbb{C}_n$ $p,q,r \in \mathbb{C}$ olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) $M \in \kappa(p,q,r)$.

(ii) M köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(M) \subset \{p,q,r\}$.

(iii) $M = pX + qY + rZ$, $X + Y + Z = I_n$, $XY = YX = \mathbf{0}$, $YZ = ZY = \mathbf{0}$ ve $XZ = ZX = \mathbf{0}$ olacak şekilde $X, Y, Z \in \square_n$ idempotent matrisleri vardır.

(iv) $M = (p-r)X + (q-r)Y + rI_n$ ve $XY = YX = \mathbf{0}$ olacak şekilde $X, Y \in \square_n$ idempotent matrisleri vardır.

İspat. (i)$\Rightarrow$(ii). Herhangi bir matrisin köşegenleştirilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu o matrisin minimal polinomunun basit köklere sahip olmasıdır. Dolayısıyla bu kısmın ispatı açıktır.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Hipotezden $M = S(pI_a \oplus qI_b \oplus rI_c)S^{-1}$, $a,b,c \in \{0,1,...,n\}$ ve $a+b+c+=n$ olacak şekilde bir S tersinir matrisi vardır.
Şimdi,

$$X = S(I_a \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})S^{-1} ,$$

$$Y = S(\mathbf{0} \oplus I_b \oplus \mathbf{0})S^{-1} ,$$

$$Z = S(\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus I_c)S^{-1}$$

olarak tanımlayalım.

Açıktır ki $M = pX + qY + rZ$, $X + Y + Z = I_n$, $XY = YX = \mathbf{0}$, $YZ = ZY = \mathbf{0}$ ve $XZ = ZX = \mathbf{0}$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $X^2 = X$, $Y^2 = Y$ ve $Z^2 = Z$ dir. Dolayısıyla, (ii) şıkkının (iii) şıkkını sağladığı görülür.

(iii)$\Rightarrow$(iv). $M = pX + qY + rZ$ ve $Z = I_n - X - Y$ olduğundan, $M = pX + qY + r(I_n - X - Y) = (p-r)X + (q-r)Y + rI_n$ eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla istenilen sonuç elde edilmiş olur.

(iv)$\Rightarrow$(i). X ve Y idempotent matrisleri değişmeli ve ayrık matrisler olduklarından,

$$X = S(I_a \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})S^{-1} \text{ ve } Y = S(\mathbf{0} \oplus I_b \oplus \mathbf{0})S^{-1}$$

eşitliklerini sağlayan bir tersinir S matrisi vardır. Burada $a = \text{rank}(X)$ ve $b = \text{rank}(Y)$ olarak tanımlanmıştır. Buradan hareketle, $c = n-(a+b)$ olmak üzere

$$M = (p-r)X + (q-r)Y + rI_n = S(pI_a \oplus qI_b + rI_c)S^{-1}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$M - pI_n = S(\mathbf{0} \oplus (q-p)I_b \oplus (r-p)I_c)S^{-1} \text{ ,}$$

$$M - qI_n = S((p-q)I_a \oplus \mathbf{0} \oplus (r-q)I_c)S^{-1},$$

ve

$$M - rI_n = S((p-r)I_a \oplus (q-r)I_b \oplus \mathbf{0})S^{-1}.$$

olduğu görülebilir. Böylece, $(M - pI_n)(M - qI_n)(M - rI_n) = \mathbf{0}$ eşitliği elde edilmiş olur.

Dolayısıyla ispat tüm şıklarıyla birlikte tamamlanmış olur. ■

$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma$ olmak üzere, bir A $\{\alpha, \beta, \gamma\}-$kübik matrisini ele alalım. Teorem 3.1'e göre

$$A = (\alpha-\gamma)X + (\beta-\gamma)Y + \gamma I \text{ .} \tag{3.1}$$

olacak şekilde X ve Y ayrık idempotentleri vardır. Eğer $C = (\alpha-\gamma)X + (\beta-\gamma)Y$ denirse (3.1) ifadesindeki A matrisi

$$A = C + \gamma I \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer yandan Teorem 2.36'dan yukarıda tanımlanan $C=(\alpha-\gamma)X+(\beta-\gamma)Y$ matrisinin $X+Y$ idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{\alpha-\gamma,\beta-\gamma\}$-kuadratik matris olduğu açıktır. Çalışma boyunca (3.2) ifadesindeki A matrisine C *genelleştirilmiş kuadratik matrisiyle ilişkili bir* $\{\alpha,\beta,\gamma\}$*-kübik matris* denilecektir. Bu şekilde tanımlanan tüm A matrislerinin kümesi $\kappa(\alpha,\beta,\gamma,C,X+Y)$ şeklinde gösterilecektir. Dolayısıyla bir kübik matrisin aslında bir genelleştirilmiş kuadratik matris yardımıyla yazılabildiği görülür ve bu da kübik matrisler ailesinin genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesini kapsadığını açıkça göstermiş olur. Hatta genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesinin kuadratik matrisler ailesini kapsadığı göz önünde bulundurulursa, kübik matrisler ailesinin aynı zamanda kuadratik matrisler ailesini kapsadığı görülür.

3.3. Bir Kuadratik Matrisin Bir Skaler-Potent Matrise Göre İfadesi

$\alpha\neq\beta$ olmak üzere, eğer bir A matrisi bir $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik matris ise Teorem 2.34.(iv) gereği bir Q idempotent matris yardımıyla

$$A=(\alpha-\beta)Q+\beta I \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) ifadesindeki $(\alpha-\beta)Q$ matrisi aslında bir skaler-potent matristir. Eğer bu skaler-potent matris, $B=(\alpha-\beta)Q$ şeklinde tanımlanırsa, (3.3) ifadesindeki A matrisine B *skaler-potent matrisiyle ilişkili bir* $\{\alpha,\beta\}$*-kuadratik matris* denilecektir. Çalışma boyunca bu şekilde tanımlanan A matrislerinin kümesi $\Omega(\alpha,\beta,B)$ ile gösterilecektir.

Buraya kadar yapılan tartışmalardan sonra bu çalışmayı oluşturan asıl teoreme geçilebilir.

3.4. Değişmeli Bir Kübik ve Bir Kuadratik Matrisin Lineer Bileşiminin Kuadratikliği

Teorem 3.2. $A_1 \in \kappa(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, B_1, P_1)$, $A_2 \in \Omega(\alpha_2, \beta_2, B_2)$, $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $A_1 A_2 = A_2 A_1$ olsun. Bu durumda,

$$B_1 = S\begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} S^{-1} \text{ ve } B_2 = S\begin{pmatrix} X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T \end{pmatrix} S^{-1}$$

olacak şekilde bir S tersinir matrisi vardır.

İspat. Teoremin hipotezinden

$$A_1 = B_1 + \gamma_1 I,\; A_2 = B_2 + \beta_2 I \tag{3.4}$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca B_1 matrisi P_1 matrisiyle ilişkili bir $\{\alpha_1 - \gamma_1,\; \beta_1 - \gamma_1\}$-genelleştirilmiş kuadratik matris olduğundan aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\left(B_1 - (\alpha_1 - \gamma_1) P_1\right)\left(B_1 - (\beta_1 - \gamma_1) P_1\right) = \mathbf{0}, \quad P_1 B_1 = B_1 P_1 = B_1 \tag{3.5}$$

Benzer şekilde A_2 matrisi B_2 skaler-potent matrisiyle ilişkili bir $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matris olduğundan,

$$B_2 = (\alpha_2 - \beta_2) W \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir W idempotent matrisi vardır. Dolayısıyla

$$B_2^{\,2} = (\alpha_2 - \beta_2) B_2 \tag{3.7}$$

yazılabilir. $A_1A_2 = A_2A_1$ olduğundan, (3.4) eşitliğinden açıkça $B_1B_2 = B_2B_1$ olduğu görülür.

Şimdi, P_1 matrisi bir idempotent matris olduğundan, genelliği bozmaksızın

$$P_1 = S(I \oplus \mathbf{0})S^{-1} \tag{3.8}$$

olacak şekilde bir S tersinir matrisi vardır.

P_1 matrisinin rankı r olmak üzere

$$B_1 = S\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}S^{-1}, \quad K \in \square_r \tag{3.9}$$

olsun. (3.9) ve (3.5) ifadesinin ikinci eşitliğinden $L = \mathbf{0},\ M = \mathbf{0},\ N = \mathbf{0}$ elde edilir. Böylece B_1 matrisi

$$B_1 = S\begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}S^{-1} \tag{3.10}$$

olarak yazılabilir. Eğer (3.8) ve (3.10) eşitlikleri (3.5) ifadesinin birinci eşitliğinde yazılırsa

$$\big(K_1 - (\alpha_1 - \gamma_1)I\big)\big(K - (\beta_1 - \gamma_1)I\big) = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. (3.11) eşitliğinden açıkça görülür ki K matrisi bir $\{\alpha_1 - \gamma_1, \beta_1 - \gamma_1\}-$kuadratik matristir ve $\alpha_1 \neq \gamma_1,\ \beta_1 \neq \gamma_1$ olduğundan K matrisi tersinir bir matristir.

$X \in \square_r$ ve $T \in \square_{n-r}$ olmak üzere

$$B_2 = S\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} S^{-1}$$

olsun. $B_1 B_2 = B_2 B_1$ olma şartıyla beraber (3.10) eşitliği kullanılırsa B_2 matrisi

$$B_2 = S\begin{pmatrix} X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T \end{pmatrix} S^{-1} \tag{3.12}$$

şeklinde olur. (3.10) ve (3.12)'den, istenilen elde edilir. ■

Teorem 3.3. X, T, K matrisleri Teorem 3.2'deki matrisler olmak üzere

$$X = (\alpha_2 - \beta_2)M_1, \quad T = (\alpha_2 - \beta_2)M_2 \quad \text{ve} \quad K = (\alpha_1 - \beta_1)Z_1 + (\beta_1 - \gamma_1)I$$

olacak şekilde $M_1, M_2, Z_1 \in P_n$ matrisleri vardır.

İspat. $S(M_1 \oplus M_2)S^{-1} = W$ olarak alınırsa (3.6) ve (3.12) eşitliklerinden

$$X = (\alpha_2 - \beta_2)M_1 \text{ and } T = (\alpha_2 - \beta_2)M_2 \tag{3.13}$$

olacak şekilde $M_1, M_2 \in P_n$ vardır. Ayrıca (3.11) ifadesinden de anlaşılacağı üzere K matrisi $\{\alpha_1 - \gamma_1, \beta_1 - \gamma_1\}-$kuadratik matris olduğundan Teorem 2.34.'ün (iv) şıkkından

$$K = (\alpha_1 - \beta_1)Z_1 + (\beta_1 - \gamma_1)I \tag{3.14}$$

olacak şekilde $Z_1 \in P_n$ matrisi vardır. ■

Şimdi, A_1 ve A_2 matrisleri Teorem 3.2'deki matrisler olmak üzere

$$A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2 \tag{3.15}$$

lineer bileşimini göz önüne alalım. B_1 ve B_2 matrisleri Teorem 3.2.'deki gibi olmak üzere (3.15) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A_3 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + (a_1\gamma_1 + a_2\beta_2)I \ . \tag{3.16}$$

Bu çalışmadaki asıl amaç (3.15) ifadesindeki lineer bileşimin $\{\alpha_3, \beta_3\}-$kuadratik olmasının karakterizasyonu olduğundan, kuadratiklik tanımı ve (3.16) ifadesi birlikte kullanılırsa

$$\left(a_1B_1 + a_2B_2 + \left(a_1\gamma_1 + a_2\beta_2 - \alpha_3\right)I\right)\left(a_1B_1 + a_2B_2 + \left(a_1\gamma_1 + a_2\beta_2 - \beta_3\right)I\right) = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

ifadesi elde edilir. (3.11)'de sadelik ve işlem kolaylığı açısından $a_3 = a_1\gamma_1 + a_2\beta_2$ olarak alınırsa

$$\left(a_1B_1 + a_2B_2 + \left(a_3 - \alpha_3\right)I\right)\left(a_1B_1 + a_2B_2 + \left(a_3 - \beta_3\right)I\right) = \mathbf{0} \tag{3.18}$$

olur. (3.18) ifadesi düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} &a_1^{\,2}B_1^{\,2} + 2a_1a_2B_1B_2 + a_2^{\,2}B_2^{\,2} + a_1\left(2a_3 - \alpha_3 - \beta_3\right)B_1 \\ &+a_2\left(2a_3 - \alpha_3 - \beta_3\right)B_2 + \left(a_3 - \alpha_3\right)\left(a_3 - \beta_3\right)I = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.5) ve (3.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &\left(a_1^{\,2}\left(\alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_1\right) + a_1\left(2a_3 - \alpha_3 - \beta_3\right)\right)B_1 \\ &\left(a_2^{\,2}\left(\alpha_2 - \beta_2\right) + a_2\left(2a_3 - \alpha_3 - \beta_3\right)\right)B_2 \\ &+2a_1a_2B_1B_2 - a_1^{\,2}\left(\alpha_1 - \gamma_1\right)\left(\beta_1 - \gamma_1\right)P_1 + \left(a_3 - \alpha_3\right)\left(a_3 - \beta_3\right)I = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte yine sadelik ve kısalık için

$$
\begin{aligned}
c_1 &= a_1^2(\alpha_1+\beta_1-2\gamma_1)+a_1(2a_3-\alpha_3-\beta_3),\\
c_2 &= a_2^2(\alpha_2-\beta_2)+a_2(2a_3-\alpha_3-\beta_3),\\
c_3 &= -a_1^2(\alpha_1-\gamma_1)(\beta_1-\gamma_1),\\
c_4 &= (a_3-\alpha_3)(a_3-\beta_3)
\end{aligned}
$$

olarak alınırsa (3.20) ifadesi

$$c_1B_1+c_2B_2+2a_1a_2B_1B_2+c_3P_1+c_4I=\mathbf{0} \tag{3.21}$$

ifadesine dönüşür. Tüm bunlardan sonra eğer (3.8), (3.10) ve (3.12) ifadeleri (3.21) eşitliğinde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&c_1K+c_2X+2a_1a_2KX+(c_3+c_4)I=\mathbf{0}\\
&c_2T+c_4I=\mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

$B_1B_2=B_2B_1$ olduğundan, (3.10) ve (3.12) eşitlikleri göz önüne alınırsa $KX=XK$ eşitliği yazılır. $\alpha_1\neq\beta_1$ ve $\alpha_2\neq\beta_2$ olduğundan (3.13) eşitliklerinin ilki ve (3.14) eşitlikliğinden $Z_1M_1=M_1Z_1$ ifadesi açıkça elde edilir. Eğer (3.13) ifadesindeki X matrisini ve (3.14) ifadesindeki K matrisini (3.22) ifadesinin ilk eşitliğinde yazarsak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&c_1(\alpha_1-\beta_1)Z_1+\left(c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)\right)M_1\\
&+2a_1a_2(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)Z_1M_1+\left(c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_3+c_4\right)I=\mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

(3.13) ifadesinin ikinci eşitliğindeki T matrisinin, (3.22) ifadesinin ikinci kısmında yerine yazılması

$$c_2(\alpha_2-\beta_2)M_2+c_4I=\mathbf{0} \tag{3.24}$$

eşitliğine götürür. Bu da aşağıdaki sonucu ortaya koyar.

Sonuç 3.4. (3.15) ifadesindeki lineer bileşimin $\{\alpha_3, \beta_3\}-$kuadratik olması için gerek ve yeter şart (3.23) ve (3.24) eşitliklerinin birlikte sağlanmasıdır.

Teorem 3.5. Teorem 3.2.'nin koşulları altında (3.24) denkleminin sağlanması için gerek ve yeter şart M_2 matrisi, Teorem 3.3.'deki gibi olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır.

(i) $c_4 = 0$ ve $M_2 = \mathbf{0}$,

(ii) $c_2(\alpha_2 - \beta_2) + c_4 = 0$ ve $M_2 \sim I \oplus I$,

(iii) $c_2 = c_4 = 0$ ve $M_2 \sim I \oplus \mathbf{0}$.

İspat. (3.24) ifadesi M_2 idempotent matrisiyle çarpılırsa

$$(c_2(\alpha_2 - \beta_2) + c_4)M_2 = \mathbf{0} \tag{3.25}$$

eşitliği elde edilir. M_2 matrisi idempotent olduğundan iki durum söz konusudur.

Durum 1. $M_2 = \mathbf{0}$. Dolayısıyla (3.24) eşitliğinden

(i) $c_4 = 0$

ifadesi elde edilir.

Durum 2. $M_2 \neq \mathbf{0}$. M_2 idempotent matrisinin köşegen formu için iki durum söz konusudur: $M_2 \sim I \oplus I$ veya $M_2 \sim I \oplus \mathbf{0}$. Dolayısıyla (3.25) eşitliğinden sırasıyla

(ii) $c_2(\alpha_2 - \beta_2) + c_4 = 0$

ve

(iii) $c_2 = c_4 = 0$

eşitlikleri elde edilir. ■

Teorem 3.6. Teorem 3.2'nin koşulları altında (3.23) denkleminin sağlanması için gerek ve yeter koşul Z_1 ve M_1 matrislerinin Teorem 3.3.'deki gibi olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır.

(a) $c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0$,

$Z_1=\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim I\oplus I$,

(b) $c_1(\beta_1-\gamma_1)=-c_3-c_4$, $c_2=-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)$,

$Z_1=\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim I\oplus\mathbf{0}$,

(c) $c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_3+c_4=0$,

$Z_1=\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}$,

(d) $c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_3+c_4=0$,

$Z_1 \sim I\oplus I$ ve $M_1 \sim \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}$,

(e) $c_1=c_3+c_4=0$,

$Z_1 \sim I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}$,

(f) $c_3+c_4=-c_1(\alpha_1-\gamma_1)=-c_2(\alpha_2-\beta_2)-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)-c_1(\beta_1-\gamma_1)$,

$Z_1 \sim I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim \mathbf{0}\oplus I$,

(g) $c_1=0$, $c_2=-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)$, $c_3=-c_4$,

$Z_1 \sim I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim \mathbf{0}\oplus I\oplus\mathbf{0}$,

(h) $c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0$,

$Z_1 \sim I$ ve $M_1 \sim I$,

(k) $c_1(\alpha_1-\gamma_1)=-c_3-c_4$, $c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)$,

$Z_1 \sim I\oplus I$ ve $M_1 \sim I\oplus\mathbf{0}$,

(l) $c_1(\beta_1-\gamma_1)=c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=-c_3-c_4$,

$Z_1 \sim I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim I\oplus\mathbf{0}$,

(m) $c_1=-2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2),\; c_2(\alpha_2-\beta_2)=-c_3-c_4$,

$Z_1 \sim I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim I\oplus I$,

(n) $\begin{array}{l} c_1(\alpha_1-\gamma_1)=c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=-c_3-c_4 \\ c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1) \end{array}$,

$Z_1 \sim I\oplus I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim I\oplus\mathbf{0}\oplus I$,

(p) $c_1=0,\; c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)\;,\; c_3=-c_4$,

$Z_1 \sim I\oplus I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1 \sim I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}$,

(r) $\begin{array}{l} c_1(\beta_1-\gamma_1)=-c_3-c_4\;,\; c_2=-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1), \\ c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0 \end{array}$,

İspat. (3.23) ifadesi soldan Z_1 matrisi ile çarpılır ve $Z_1^2=Z_1$ olduğu kullanılırsa

$$(c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_3+c_4)Z_1+(c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2))Z_1M_1=\mathbf{0} \qquad (3.26)$$

eşitliği yazılır. Daha sonra (3.26) ifadesi sağdan M_1 matrisiyle çarpılır ve $M_1^2=M_1$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4\right)Z_1M_1=\mathbf{0} \qquad (3.27)$$

Şimdi buradan hareketle iki durum mevcuttur.

Durum 3. $Z_1M_1=\mathbf{0}$. Dolayısıyla (3.26) ifadesinden

$$(c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_3+c_4)Z_1=\mathbf{0} \qquad (3.28)$$

eşitiliği elde edilir. (3.28) eşitliğinden iki durum söz konusudur.

Durum 3.a. $Z_1 = \mathbf{0}$. Bu durumda (3.23) eşitliğinden

$$(c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2))M_1+(c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_3+c_4)I=\mathbf{0} \tag{3.29}$$

eşitliği yazılır. Ayrıca $Z_1 = \mathbf{0}$ olduğundan, (3.14) eşitliğinden

$$K=(\beta_1-\gamma_1)I \tag{3.30}$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan $M_1 \in P_n$ olduğundan, M_1 matrisinin köşegen formları $M_1 \sim I \oplus I$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$ veya $M_1 \sim \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$ şeklindedir. Dolayısıyla (3.29) eşitliğinden M_1 matrisinin köşegen formları kullanılarak sırasıyla

(a) $c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0$

(b) $c_1(\beta_1-\gamma_1)=-c_3-c_4$, $c_2=-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)$,

(c) $c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_3+c_4=0$

eşitlikleri elde edilir.

Durum 3.b. $Z_1 \neq \mathbf{0}$. (3.28) eşitliğinden

$$c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_3+c_4=0 \tag{3.31}$$

ifadesi elde edilir. Dahası $Z_1M_1=\mathbf{0}$ olduğundan, Z_1 ve M_1 matrislerinin mümkün olabilecek tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir.

$Z_1 \sim I \oplus I$ ve $M_1 \sim \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$,

$Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$ ve $M_1 \sim \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$ veya $\mathbf{0} \oplus I$,

$Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$ ve $M_1 \sim \mathbf{0} \oplus I \oplus \mathbf{0}$.

Dolayısıyla (3.31) eşitliği göz önüne alınırsa, (3.23) ifadesinden yukarıdaki köşegen formlar kullanılarak sırasıyla aşağıdaki katsayı eşitlikleri bulunur.

(d) $c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_3+c_4=0$,

(e) $c_1=c_3+c_4=0$,

(f) $c_3+c_4=-c_1(\alpha_1-\gamma_1)=-c_2(\alpha_2-\beta_2)-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)-c_1(\beta_1-\gamma_1)$,

(g) $c_1=0$, $c_2=-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)$, $c_3=-c_4$.

Durum 4. $Z_1M_1\neq\mathbf{0}$. Bu durumda Z_1 ve M_1 matrisleri sıfırdan farklı matrisler olmak zorundadır. Böylece $\alpha_1\neq\beta_1$ olduğu da dikkate alınıra Z_1 ve M_1 matrislerinin mümkün olabilecek tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir.

$Z_1\sim I$ ve $M_1\sim I$,

$Z_1\sim I\oplus I$ ve $M_1\sim I\oplus\mathbf{0}$,

$Z_1\sim I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1\sim I\oplus\mathbf{0}$ veya $I\oplus I$,

$Z_1\sim I\oplus I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1\sim I\oplus\mathbf{0}\oplus I$,

$Z_1\sim I\oplus I\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1\sim I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}$,

$Z_1\sim I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}$ ve $M_1\sim I\oplus I\oplus\mathbf{0}$.

Böylece $c_1\neq0$, $\alpha_1\neq\beta_1$ ve $\alpha_2\neq\beta_2$ olduğundan, (3.23) eşitliğinden yukarıdaki köşegen formlar yerlerine yazılarak sırasıyla aşağıdaki katsayı eşitlikleri yazılır.

(h) $c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0$,

(k) $c_1(\alpha_1-\gamma_1)=-c_3-c_4$, $c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)$,

(l) $c_1(\beta_1-\gamma_1)=c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=-c_3-c_4$,

(m) $c_1=-2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2)$, $c_2(\alpha_2-\beta_2)=-c_3-c_4$,

(n) $$c_1(\alpha_1-\gamma_1)=c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=-c_3-c_4,$$
$$c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1),$$

(p) $$c_1=0\,,\; c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)\;,\; c_3=-c_4\,,$$

(r) $$c_1(\beta_1-\gamma_1)=-c_3-c_4\;,\; c_2=-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1),$$
$$c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0.$$

Böylece ispat tüm şıklarıyla birlikte tamamlanmış olur. ■

Buraya kadar elde edilen sonuçlar birlikte düşünülürse aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.7. $A_1\in\kappa(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,B_1,P_1)$, $A_2\in\Omega(\alpha_2,\beta_2,B_2)$, $A_1,A_2\in\mathbb{C}_n$ ve $a_1,a_2\in\mathbb{C}^*$ olsun. $A_1A_2=A_2A_1$ olmak üzere $A_3=a_1A_1+a_2A_2$ lineer bileşiminin $\{\alpha_3,\beta_3\}-$kuadratik olması için gerek ve yeter şart

$c_1=a_1^{\,2}(\alpha_1+\beta_1-2\gamma_1)+a_1(2a_3-\alpha_3-\beta_3)\,, c_2=a_2^{\,2}(\alpha_2-\beta_2)+a_2(2a_3-\alpha_3-\beta_3)\,,$

$c_3=-a_1^{\,2}(\alpha_1-\gamma_1)(\beta_1-\gamma_1)\,,\; c_4=(a_3-\alpha_3)(a_3-\beta_3)$ ve $a_3=a_1\gamma_1+a_2\beta_2$

olmak üzere aşağıdaki durumların birinin sağlanmasıdır.

(a_1) $$c_1(\omega_i-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+c_3+2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=0,\; c_4=0\,,$$
$$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\; B_2=(\alpha_2-\beta_2)P_1,\; i=1 \text{ veya } 2,\; (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1)\,,$$

(a_2) $$c_2=-2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1),\; c_3=-c_1(\omega_i-\gamma_1),\; c_4=0\,,$$
$$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\; B_1B_2=(\omega_i-\gamma_1)B_2,\; i=1 \text{ veya } 2,\; (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1)\,,$$

(a_3) $$c_3=-c_1(\omega_i-\gamma_1),\; c_4=0\,,$$
$$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\; B_2=\mathbf{0},\; i=1 \text{ veya } 2,\; (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1)\,,$$

(a_4) $$c_1=-2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2),\; c_2=-2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1),\; c_3=2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)\,,\; c_4=0\,,$$
$$B_1B_2+(\omega_i-\gamma_1)((\alpha_2-\beta_2)P_1-B_2)=(\alpha_2-\beta_2)B_1,\; i=1 \text{ veya } 2,\; (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1)\,,$$

(a_5) $\quad c_1(\omega_i-\gamma_1)+c_3=0,\ c_2(\alpha_2-\beta_2)+\mathrm{c}_1(\omega_j-\gamma_1)+2a_1a_2(\omega_j-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3=0$,

$c_4=0,\ (\alpha_2-\beta_2)B_1+(\omega_i-\omega_j)B_2=(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1,$

$(\omega_i-\omega_j)B_1B_2+(\omega_j-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)(B_1-(\omega_i-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0},$

$(i,j)=(1,2)$ veya $(i,j)=(2,1),\ (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$

(a_6) $\quad c_1=-2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2),\ c_3=-c_2(\alpha_2-\beta_2),\ c_4=0,$

$B_2=(\alpha_2-\beta_2)P_1,$

(a_7) $\quad c_1(\omega_i-\gamma_1)+c_3+2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=0,\ c_2(\alpha_2-\beta_2)+c_4=0,$

$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\ B_2=(\alpha_2-\beta_2)I,\ i=1$ veya 2, $(\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$

(a_8) $\quad c_2=-2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1),\ c_3=-(\omega_i-\gamma_1)(c_1+2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2)),$

$\mathrm{c}_4=2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2),$

$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\ B_1B_2+(\omega_i-\gamma_1)((\alpha_2-\beta_2)I-B_2-(\alpha_2-\beta_2)P_1)=\mathbf{0},$

$i=1$ veya 2, $(\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$

(a_9) $\quad c_1(\omega_i-\gamma_1)+c_3=c_2(\alpha_2-\beta_2)=-c_4,$

$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\ B_2+(\alpha_2-\beta_2)(P_1-I)=\mathbf{0},$

$i=1$ veya 2, $(\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$

(a_{10}) $\quad c_1=0,\ c_2=-2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1),\ c_3=-2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=-\mathrm{c}_4,$

$B_1B_2+(\omega_i-\gamma_1)((\alpha_2-\beta_2)I-B_2-(\alpha_2-\beta_2)P_1)=\mathbf{0},$

$i=1$ veya 2, $(\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$

$c_1(\omega_i-\gamma_1)+c_3+c_4=0,\ c_2(\alpha_2-\beta_2)+c_4=0,$

$c_1(\omega_j-\gamma_1)+2a_1a_2(\omega_j-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3=0,$

(a_{11}) $$(\omega_i-\omega_j)(B_2-(\alpha_2-\beta_2)I)+(\alpha_2-\beta_2)(B_1-(\omega_j-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0},$$
$$(\omega_i-\omega_j)B_1B_2+(\omega_j-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)(B_1-(\omega_i-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0},$$
$$(i,j)=(1,2) \text{ veya } (i,j)=(2,1),\ (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$$

(a_{12}) $$c_1=0,\ c_2(\alpha_2-\beta_2)=c_3=-c_4,$$
$$B_2+(\alpha_2-\beta_2)(P_1-I)=\mathbf{0},\ B_1B_2=\mathbf{0},$$

(a_{13}) $$c_1(\omega_i-\gamma_1)+c_3+2a_1a_2(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=0,\ c_2=0,\ c_4=0,$$
$$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\ B_1B_2=(\omega_i-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1,$$
$$i=1 \text{ veya } 2,\ (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$$

(a_{14}) $$c_1(\omega_i-\gamma_1)+c_3=0,\ c_2=0,\ c_4=0,$$
$$B_1=(\omega_i-\gamma_1)P_1,\ B_1B_2=0,$$
$$i=1 \text{ veya } 2,\ (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1),$$

(a_{15}) $$c_1(\omega_j-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\omega_j-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0,$$
$$c_2=0, c_4=0, c_3+c_1(\omega_i-\gamma_1)=0,$$
$$(\omega_i-\omega_j)B_1B_2+(\omega_j-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)(B_1-(\omega_i-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0},$$
$$(i,j)=(1,2) \text{ veya } (i,j)=(2,1),\ (\omega_1,\omega_2)=(\alpha_1,\beta_1).$$

İspat. K; Teorem 3.5’deki (i) veya (ii) veya (iii) ve L; Teorem 3.6’daki (a) veya (b) veya ... veya (r) olmak üzere Teorem 3.5’in K. durumu ile Teorem 3.6’nın L. durumu sırasıyla karşılıklı olarak dikkate alındığında teoremin ifadesindeki katsayı eşitlikleri elde edilir. Örneğin; Teorem 3.5’in (i). durumu ile Teorem 3.6’nın (a). durumunu ele alalım. Dolayısıyla

(i) $c_4=0$

ve

(a) $c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3+c_4=0$

olduğundan (i) eşitliği (a) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)+c_3+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)=0 \text{ ve } c_4=0$$

şeklinde (i-a) kesişimine ait katsayı eşitlikleri bulunmuş olur. Diğer katsayı eşitlikleri de benzer şekilde kolaylıkla elde edilir. Bu şekilde elde edilen katsayı eşitlikleri (3.21) ifadesinde yazıldığı zaman sırasıyla aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir. (Bundan böyle kısalık adına her kesişime ait elde edilen katsayı eşitliği verilmeyip direkt olarak matris eşitliklerinin nasıl bulunduğu verilecektir ve bu bölümün en sonunda elde edilen katsayı ve matris eşitlikleri tablo halinde sunulacaktır.)

(i-a) $c_1(B_1-(\beta_1-\gamma_1)P_1)+c_2(B_2-(\alpha_2-\beta_2)P_1)+2a_1a_2(B_1B_2-(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1)=\mathbf{0}$

Bu eşitlikte $B_1,\ B_2,\ P_1$ matrislerinin ilgili köşegen formları yerlerine yazılırsa

$$B_1=(\beta_1-\gamma_1)P_1 \text{ ve } B_2=(\alpha_2-\beta_2)P_1$$

bulunur. Bundan böyle diğer matris eşitlikleri de benzer şekilde $B_1,\ B_2,\ P_1$ matrislerinin ilgili köşegen formları yerlerine yazılarak bulunacaktır ve bundan her seferinde bahsedilmeyecektir.

(i-b) $c_1(B_1-(\beta_1-\gamma_1)P_1)+2a_1a_2(B_1B_2-(\beta_1-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0}$

Buradan

$$B_1=(\beta_1-\gamma_1)P_1 \text{ ve } B_1B_2=(\beta_1-\gamma_1)B_2$$

bulunur.

(i-c) $c_1(B_1-(\beta_1-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0}$

Bu eşitlikten

$B_1=(\beta_1-\gamma_1)P_1$ ve $B_2=\mathbf{0}$

olur.

(i-d) $c_1(B_1-(\alpha_1-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0}$

Buradan

$B_1=(\alpha_1-\gamma_1)P_1$ ve $B_2=\mathbf{0}$.

bulunur.

(i-e) $c_3=0$ bulunur ve bu da hipotezle çelişir. Dolayısıyla bu kesiştirmeden bir sonuç elde edilemez.

(i-f)
$$\begin{aligned}&c_2\left(\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}B_1-\frac{(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)}{\alpha_1-\beta_1}P_1+B_2\right)\\&+2a_1a_2\left(B_1B_2+\frac{(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)}{\alpha_1-\beta_1}B_1-\frac{(\alpha_1-\gamma_1)(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)}{\alpha_1-\beta_1}P_1\right)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

Dolayısıyla bu eşitlikten

$$\begin{cases}(\alpha_2-\beta_2)B_1+(\alpha_1-\beta_1)B_2=(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1,\\(\alpha_1-\beta_1)B_1B_2+(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)(B_1-(\alpha_1-\gamma_1)P_1)=\mathbf{0}\end{cases}$$

olur.

(i-g) Hipotezin aksine $c_3 = 0$ bulunur ve çelişki elde edilir.

(i-h) $c_1(B_1 - (\alpha_1 - \gamma_1)P_1) + c_2(B_2 - (\alpha_2 - \beta_2)P_1) + 2a_1a_2(B_1B_2 - (\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)P_1) = \mathbf{0}$.

Buradan

$B_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)P_1$ ve $B_2 = (\alpha_2 - \beta_2)P_1$

matris eşitlikleri bulunur.

(i-k) $c_1(B_1 - (\alpha_1 - \gamma_1)P_1) + 2a_1a_2(B_1B_2 - (\alpha_1 - \gamma_1)B_2) = \mathbf{0}$

Buradan

$B_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)P_1$ ve $B_1B_2 = (\alpha_2 - \beta_2)B_2$

matris eşitlikleri elde edilir.

(i-l)
$$c_2\left(\frac{\alpha_2 - \beta_2}{\beta_1 - \alpha_1}B_1 - \frac{(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)}{\beta_1 - \alpha_1}P_1 + B_2\right)$$
$$+2a_1a_2\left(B_1B_2 + \frac{(\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)}{\beta_1 - \alpha_1}B_1 - \frac{(\alpha_1 - \gamma_1)(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)}{\beta_1 - \alpha_1}P_1\right) = \mathbf{0}$$

Buradan

$(\alpha_2 - \beta_2)B_1 + (\alpha_1 - \beta_1)B_2 = (\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)P_1$ ve
$(\alpha_1 - \beta_1)B_1B_2 + (\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)(B_1 - (\alpha_1 - \gamma_1)P_1)$

matris eşitlikleri bulunur.

(i-m) $2a_1a_2(B_1B_2-(\alpha_2-\beta_2)B_1)+c_2(B_2-(\alpha_2-\beta_2)P_1)=\mathbf{0}$

ifadesi elde edilir ve aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir.

$B_2=(\alpha_2-\beta_2)P_1$ ve $B_1B_2=(\alpha_2-\beta_2)B_1$

(i-n) $2a_1a_2(B_1B_2+(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1-(\alpha_2-\beta_2)B_1-(\alpha_1-\gamma_1)B_2)=\mathbf{0}$

Buradan

$$B_1B_2+(\alpha_1-\gamma_1)((\alpha_2-\beta_2)P_1-B_2)=(\alpha_2-\beta_2)B_1$$

matris eşitliği elde edilir.

(i-p) Hipotezin aksine $c_3=0$ bulunur ve çelişki elde edilir.

(i-r) $2a_1a_2(B_1B_2+(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1-(\alpha_2-\beta_2)B_1-(\beta_1-\gamma_1)B_2)=\mathbf{0}$

Buradan aşağıdaki matris eşitliği bulunur.

$$B_1B_2+(\beta_1-\gamma_1)((\alpha_2-\beta_2)P_1-B_2)=(\alpha_2-\beta_2)B_1$$

Kalan matris eşitlikleri ise tamamen benzer şekilde ilerlenerek kolayca bulunur. Kabalık olmaması adına bunlara burada yer verilmemektedir. (ii) şıkkı (a)-(r) şıklarıyla ve (iii) şıkkı (a)-(r) şıklarıyla kesiştirilir. Bu kesiştirmede (ii-m), (ii-n), (ii-r), (iii-e) ve (iii-m) durumlarında $c_3=0$ olmasından kaynaklı, (iii-b), (iii-g) ve (iii-r) durumlarında ise $\beta_1=\gamma_1$ olmasından kaynaklı ve (iii-k), (iii-n) ve (iii-p) durumlarında $\alpha_1 = \gamma_1$ olmasından kaynaklı çelişkiler elde edilmektedir, dolayısıyla bu durumlarda çözüm mevcut değildir ve bu durumlar elenmektedir.

Bulunan tüm sonuçlar, içerdikleri matrislerin köşegen formları, katsayı ve matris eşitlikleri de belirtilerek aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Tablodaki (i-a), (i-b), (i-c) şıkları Durum 1 ve Durum 3.a'nın sonuçlarıdır; (i-d), (i-f), (i-h), (i-k), (i-l), (i-m), (i-n), (i-r) şıkları Durum 1, Durum 3.a ve Durum 4'ün sonuçlarıdır; (ii-a), (ii-b), (ii-c), (iii-a), (iii-c) şıkları Durum 2 ve Durum 3.a'nın sonuçlarıdır; (ii-d), (ii-e), (ii-f), (ii-g), (ii-h), (ii-k), (ii-l), (ii-p), (iii-d), (iii-f), (iii-h), (iii-l) Durum 2, Durum 3.b ve Durum 4'ün sonuçlarıdır.

Tablo 3.1. Teorem 3.5 ve Teorem 3.6'daki durumların kesiştirilmesi

Eşitlik Adı	**Köşegen Formlar**	**Katsayı Eşitlikleri**	**Matris Eşitlikleri**
	(M_1, M_2)		
(i-a)	$(I\oplus I, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0})$	$c_1(\beta_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)$ $+2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+c_3=0,$ $c_4=0,$	$B_1=(\beta_1-\gamma_1)P_1,\ B_2=(\alpha_2-\beta_2)P_1,$
(i-b)	$(I\oplus\mathbf{0}, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0})$	$c_3=-c_1(\beta_1-\gamma_1),$ $c_2=-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1),\ c_4=0,$	$B_1=(\beta_1-\gamma_1)P_1,\ B_1B_2=(\beta_1-\gamma_1)B_2$
(i-c)	$(\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0})$	$c_3=-c_1(\beta_1-\gamma_1),\ c_4=0,$	$B_1=(\beta_1-\gamma_1)P_1,\ B_2=\mathbf{0}$
	(M_1, M_2, Z_1)		
(i-d)	$(\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, I\oplus I)$	$c_4=0,\ \ c_3=-c_1(\alpha_1-\gamma_1),$	$B_1=(\alpha_1-\gamma_1)P_1,\ B_2=\mathbf{0}$
(i-f)	$(\mathbf{0}\oplus I, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, I\oplus\mathbf{0})$	$c_4=0,\ \ c_3=-c_1(\alpha_1-\gamma_1),$ $2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $+c_2(\alpha_2-\beta_2)=c_1(\alpha_1-\beta_1),$	$(\alpha_2-\beta_2)B_1+(\alpha_1-\beta_1)B_2$ $=(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1,$ $(\alpha_1-\beta_1)B_1B_2+(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)B_1$ $-(\alpha_1-\gamma_1)(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1=\mathbf{0}$
(i-h)	$(I\oplus I, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, I\oplus I)$	$c_4=0,$ $c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_2(\alpha_2-\beta_2)$ $+2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)+\mathrm{c}_3=0,$	$B_1=(\alpha_1-\gamma_1)P_1,\ \ B_2=(\alpha_2-\beta_2)P_1$
(i-k)	$(\mathbf{0}\oplus I, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, I\oplus I)$	$c_4=0,\ c_3=-c_1(\alpha_1-\gamma_1),$ $c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1),$	$B_1=(\alpha_1-\gamma_1)P_1,\ \ B_1B_2=(\alpha_2-\beta_2)B_2,$
(i-l)	$(I\oplus\mathbf{0}, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, I\oplus\mathbf{0})$	$c_3=-c_1(\beta_1-\gamma_1),$ $2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $+c_2(\alpha_2-\beta_2)=c_1(\beta_1-\alpha_1),$ $c_4=0,$	$(\alpha_2-\beta_2)B_1+(\beta_1-\alpha_1)B_2$ $=(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1,$ $(\beta_1-\alpha_1)B_1B_2+(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)B_1$ $-(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1=\mathbf{0},$
(i-m)	$(I\oplus I, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}, I\oplus\mathbf{0})$	$c_4=0,\ c_1=-2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2),$ $c_3=-c_2(\alpha_2-\beta_2),$	$B_2=(\alpha_2-\beta_2)P_1,$ $B_1B_2=(\alpha_2-\beta_2)B_1,$
(i-n)	$(I\oplus\mathbf{0}\oplus I, \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0},$ $I\oplus I\oplus\mathbf{0})$	$c_4=0,\ c_1=-2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2),$ $c_3=2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2),$ $c_2=-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1),$	$B_1B_2+(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)P_1$ $-(\alpha_1-\gamma_1)B_2=(\alpha_2-\beta_2)B_1,$

Tablo 3.1. (Devamı)

Eşitlik Adı	**Köşegen Formlar**	**Katsayı Eşitlikleri**	**Matris Eşitlikleri**
	(M_1, M_2, Z_1)		
(i-r)	$(I \oplus I \oplus \mathbf{0}, \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0},$ $I \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})$	$c_4 = 0,\ c_1 = -2a_1a_2(\alpha_2 - \beta_2),$ $c_3 = 2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2),$ $c_2 = -2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1),$	$B_1B_2 + (\beta_1 - \gamma_1)((\alpha_2 - \beta_2)P_1 - B_2)$ $= (\alpha_2 - \beta_2)B_1,$
	(M_1, M_2)		
(ii-a)	$(I \oplus I, I \oplus I)$	$c_2(\alpha_2 - \beta_2) + \mathrm{c}_4 = 0,$ $2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2) + \mathrm{c}_3$ $+c_1(\beta_1 - \gamma_1) = 0,$	$B_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)P_1, \quad B_2 = (\alpha_2 - \beta_2)I,$
(ii-b)	$(I \oplus \mathbf{0}, I \oplus I)$	$c_1(\beta_1 - \gamma_1)$ $+2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2) = -c_3,$ $c_2 = -2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1),$ $c_4 = 2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2),$	$B_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)P_1,$ $B_1B_2 + (\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)(I - P_1)$ $= (\beta_1 - \gamma_1)P_1,$
(ii-c)	$(\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}, I \oplus I)$	$c_2(\alpha_2 - \beta_2) + \mathrm{c}_4 = 0,$ $c_1(\beta_1 - \gamma_1) + c_3 = c_2(\alpha_2 - \beta_2),$	$B_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)P_1,$ $B_2 + (\alpha_2 - \beta_2)(P_1 - I) = \mathbf{0},$
(iii-a)	$(I \oplus I, I \oplus \mathbf{0})$	$c_1(\beta_1 - \gamma_1) + 2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)$ $+\mathrm{c}_3 = 0,\ c_2 = \mathrm{c}_4 = 0,$	$B_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)P_1,$ $B_1B_2 = (\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)P_1,$
(iii-c)	$(\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}, I \oplus \mathbf{0})$	$\mathrm{c}_3 = -c_1(\beta_1 - \gamma_1),\ \ c_2 = \mathrm{c}_4 = 0,$	$B_1 = (\beta_1 - \gamma_1)P_1, \quad B_1B_2 = \mathbf{0},$
	(M_1, M_2, Z_1)		
(ii-d)	$(\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}, I \oplus I, I \oplus I)$	$c_2(\alpha_2 - \beta_2) + \mathrm{c}_4 = 0,$ $c_1(\alpha_1 - \gamma_1) + c_3 = c_2(\alpha_2 - \beta_2),$	$B_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)P_1,$ $B_2 + (\alpha_2 - \beta_2)(P_1 - I) = \mathbf{0},$
(ii-e)	$(\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}, I \oplus I, I \oplus \mathbf{0})$	$c_2(\alpha_2 - \beta_2) + \mathrm{c}_4 = 0,$ $c_3 = c_2(\alpha_2 - \beta_2),\ c_1 = 0,$	$B_2 = (\alpha_2 - \beta_2)(P_1 - I), \ \ B_1B_2 = \mathbf{0},$
(ii-f)	$(\mathbf{0} \oplus I, I \oplus I, I \oplus \mathbf{0})$	$c_4 = -c_2(\alpha_2 - \beta_2),$ $2a_1a_2(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)$ $+c_2(\alpha_2 - \beta_2) = c_1(\alpha_1 - \beta_1),$ $-2a_1a_2(\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \beta_2)(\beta_1 - \gamma_1)$ $-c_2(\alpha_2 - \beta_2)(\beta_1 - \gamma_1) = c_3(\alpha_1 - \beta_1),$	$(\alpha_1 - \beta_1)(B_2 - (\alpha_2 - \beta_2)I)$ $= (\alpha_2 - \beta_2)((\beta_1 - \gamma_1)P_1 - B_1),$ $(\alpha_2 - \beta_2)(\beta_1 - \gamma_1)(\alpha_1 - \gamma_1)P_1$ $-(\alpha_2 - \beta_2)(\beta_1 - \gamma_1)B_1 = (\alpha_1 - \beta_1)B_1B_2,$

Tablo 3.1. (Devamı)

Eşitlik Adı	**Köşegen Formlar** (M_1, M_2, Z_1)	**Katsayı Eşitlikleri**	**Matris Eşitlikleri**
(ii-g)	$(\mathbf{0}\oplus I\oplus \mathbf{0}, I\oplus I\oplus I, I\oplus \mathbf{0}\oplus \mathbf{0})$	$c_1 = 0,\ c_2 = -2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1),$ $-2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $= c_3 = -c_4,$	$B_1B_2 - (\beta_1-\gamma_1)B_2$ $= (\alpha_2-\beta_2)(\beta_1-\gamma_1)(P_1 - I),$
(ii-h)	$(I\oplus I, I\oplus I, I\oplus I)$	$2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $+c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_3 = 0,$ $c_2(\alpha_2-\beta_2)+c_4 = 0,$	$B_1 = (\alpha_1-\gamma_1)P_1,$ $B_2 = (\alpha_2-\beta_2)I,$
(ii-k)	$(\mathbf{0}\oplus I, I\oplus I, I\oplus I)$	$c_4 = 2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2),$ $c_2 = -2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1),$ $2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $+c_1(\alpha_1-\gamma_1) = -c_3,$	$B_1 = (\alpha_1-\gamma_1)P_1,$ $B_1B_2 - (\alpha_1-\gamma_1)B_2$ $= (\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)(P_1 - I),$
(ii-l)	$(I\oplus \mathbf{0}, I\oplus I, I\oplus \mathbf{0})$	$2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $+c_2(\alpha_2-\beta_2) = c_1(\beta_1-\alpha_1),$ $c_2(\alpha_2-\beta_2)+c_4 = 0,$ $-2a_1a_2(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)(\beta_1-\gamma_1)$ $-(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)c_2 = c_3(\beta_1-\alpha_1),$	$(\beta_1-\alpha_1)(B_2-(\alpha_2-\beta_2)I)$ $= (\alpha_2-\beta_2)((\alpha_1-\gamma_1)P_1 - B_1),$ $(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)((\beta_1-\gamma_1)P_1 - B_1)$ $= (\beta_1-\alpha_1)B_1B_2,$
(ii-p)	$(I\oplus \mathbf{0}\oplus \mathbf{0}, I\oplus I\oplus I, I\oplus I\oplus \mathbf{0})$	$c_1 = 0, ,\ c_2 = -2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1),$ $-2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $= c_3 = -c_4,$	$B_1B_2 - (\alpha_1-\gamma_1)B_2$ $= (\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)(P_1 - I),$
(iii-d)	$(\mathbf{0}\oplus \mathbf{0}, I\oplus \mathbf{0}, I\oplus I)$	$c_3 = -c_1(\beta_1-\gamma_1),\ \ c_2 = c_4 = 0,$	$B_1 = (\alpha_1-\gamma_1)P_1,\ B_1B_2 = \mathbf{0},$
(iii-f)	$(\mathbf{0}\oplus I, I\oplus \mathbf{0}, I\oplus \mathbf{0})$	$2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $= c_1(\alpha_1-\beta_1),$ $2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $= -c_3(\alpha_1-\beta_1),$	$(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)((\beta_1-\gamma_1)P_1 - B_1)$ $= (\alpha_1-\gamma_1)B_1B_2,$
(iii-h)	$(I\oplus I, I\oplus \mathbf{0}, I\oplus I)$	$c_2 = c_4 = 0,$ $2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $+c_1(\alpha_1-\gamma_1)+c_3 = 0,$	$B_1 = (\alpha_1-\gamma_1)P_1,$ $B_1B_2 = (\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)P_1,$
(iii-l)	$(I\oplus \mathbf{0}, I\oplus \mathbf{0}, I\oplus \mathbf{0})$	$c_2 = c_4 = 0,$ $2a_1a_2(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $= c_1(\alpha_1-\beta_1),$ $2a_1a_2(\alpha_1-\gamma_1)(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_2-\beta_2)$ $= -c_3(\beta_1-\alpha_1),$	$(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\gamma_1)((\beta_1-\gamma_1)P_1 - B_1)$ $= (\beta_1-\alpha_1)B_1B_2,$

Yukarıdaki tablo göz önüne alındığında ise bazı durumların birbirine benzerliği görülecektir ve bu nedenle bu durumlar arasında indisleme yapılırsa teoremin ifadesindeki şıklar elde edilecektir. İndisleme yapılan şıklar şu şekildedir:

(i-a) ile (i-h), (i-b) ile (i-k), (i-c) ile (i-d), (i-n) ile (i-r), (i-f) ile (i-l), (ii-a) ile (ii-h), (ii-b) ile (ii-k), (ii-c) ile (ii-d), (ii-f) ile (ii-l), (ii-g) ile (ii-p), (iii-a) ile (iii-h), (iii-c) ile (iii-d), (iii-f) ile (iii-l) şıklarında indisleme yapılmıştır. Ayrıca (i-m) ve (ii-e) durumlarının benzerleri olmadığı için indisleme yapılmamıştır. Tüm bu indisleme sonucunda tablodaki elemanlar düzenlendiğinde teoremin ifadesindeki şıklar elde edilmiş olur.

(i-a) ile (i-h) şıkları ele alınırsa, (i-a) şıkkının katsayı eşitliklerinde kullanılan β_1 katsayısı (i-h) şıkkında α_1 olmuştur ve diğer katsayılar aynı kalmıştır. Benzer biçimde (i-a) şıkkının matris eşitlerindeki β_1 katsayısı (i-h) şıkkında α_1 olmuştur ve kullanılan diğer katsayı ve matrisler aynı kalmıştır. Bu sebeple her iki şıkta β_1 ve α_1 katsayıları için ω_i dönüşümü ve $i=1$ veya 2 olmak üzere $(\omega_1, \omega_2) = (\alpha_1, \beta_1)$ şeklinde indisleme yapılmıştır. Böylece bu indisleme sonucunda (i-a) ve (i-h) şıklarının birleşimi olarak teoremin ifadesindeki (a1) şıkkı elde edilmiş olunur. Dolayısıyla (a1) şıkkında yukarıdaki dönüşüme ait olarak $i=1$ alınırsa (i-h), $i=2$ alınırsa (i-a) şıkkı elde edilir.

Kalan diğer ikili şıklarda aynı indisleme yapılırsa Tablo 3.7.’deki tüm ifadeler açıkça elde edilir.

3.5. Çalışmanın Sonuçlarının Literatürdeki Bazı Sonuçlarla Karşılaştırılması

Çalışmanın bu kısmı 5 aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada [22]'deki Teorem 2, A_1 ve A_2 matris çiftinin değişmeli olması durumunda yeniden düzenlenmektedir. Ayrıca [22]'deki Teorem 2.'deki eksik sonuçlara da vurgu yapılmaktadır. Sonraki aşamada [8]'deki Teorem 2.2.'deki matris çiftinden A_2 matrisi idempotent alınarak, teorem değişmeli bir tripotent ve bir idempotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliği olarak yeniden düzenlenmiştir. Daha sonraki aşamada ise yenilenen bu iki çalışma sayesinde bazı tartışmalar düşünülerek yeni bir sonuç elde edilmektedir. Dördüncü aşamada, bu çalışmanın ana sonucunun, elde edilen yeni sonucu kapsadığı ifade edilmektedir. Son aşamada [23]'deki matris çiftinin değişmeli olması durumunda yeniden düzenlenmektedir ve çalışmadaki ana sonucun yine yenilenen bu çalışmayı kapsadığı gösterilmektedir.

Yao ve arkadaşları bir idempotent ve bir tripotent matrisin lineer bileşiminin karakterizasyonu ile ilgili tüm durumları [22]'deki çalışmada aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.8. A_1 ve A_2 sırasıyla sıfırdan farklı kompleks tripotent ve idempotent matrisler olsun. $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $A = a_1A_1 + a_2A_2$ lineer bileşim matrisini ele alalım. Aşağıdaki durumlar A matrisinin idempotent olduğu tüm durumları içermektedir:

(i) $A_1A_2 + A_2A_1 + a_1A_1^2 - A_1 = \mathbf{0}$ ile $a_1 \in \mathbb{C}^*, a_2 = 1$; eğer $a_1 \neq \pm 1$ ise $p = q$'dur burada $p + q = \text{rank}A_1$'dir;

(ii) $A_1A_2 + A_2A_1 = A_2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1)$ ile $a_1 = -1, a_2 = 2$;

(iii) $A_1A_2 + A_2A_1 = A_2 + 2A_1 - A_1^2$ ile $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$;

(iv) $A_1A_2 + A_2A_1 = -A_2 + \frac{1}{2}(A_1 - A_1^2)$ ile $a_1 = 1, a_2 = 2$;

(v) $A_1A_2 + A_2A_1 = A_1^2 + 2A_1 - A_2$ ile $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$.

Önceki teorem $A_1A_2 = A_2A_1$ olması durumunda aşağıdaki şekli alır:

Teorem 3.9. A_1 ve A_2 sırasıyla sıfırdan farklı kompleks tripotent ve idempotent matrisler olsun. $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $A = a_1A_1 + a_2A_2$ lineer bileşim matrisi olsun. $A_1A_2 = A_2A_1$ koşulu altında aşağıdaki durumlar A matrisinin idempotent olduğu tüm durumları içermektedir:

(i) $2A_1A_2 + a_1A_1^2 - A_1 = \mathbf{0}$ ile $a_1 \in \{-1,1\}, a_2 = 1$;

(ii) $2A_1A_2 = A_2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1)$ ile $a_1 = -1, a_2 = 2$;

(iii) $2A_1A_2 = A_2 + 2A_1 - A_1^2$ ile $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$;

(iv) $2A_1A_2 = -A_2 + \frac{1}{2}(A_1 - A_1^2)$ ile $a_1 = 1, a_2 = 2$;

(v) $2A_1A_2 = A_1^2 + 2A_1 - A_2$ ile $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$.

Teorem 3.8.(i)'de $a_1 \in \mathbb{C}^*$ olmasına rağmen, Teorem 3.9.(i)'de $a_1 = -1$ veya $a_1 = 1$ olduğuna dikkat edelim. Şimdi bu durumu ispatlayalım.

A_2 sıfırdan farklı bir idempotent matris olduğundan

$$A_2 = S\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}S^{-1} \tag{3.32}$$

olacak şekilde bir S tersinir matrisi vardır.

A_1 matrisini, A_2 matrisinin bloklarına uygun olarak

$$A_1 = S\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}S^{-1} \tag{3.33}$$

biçiminde parçalayalım. (3.32) ve (3.33) ifadeleri $A_1A_2 = A_2A_1$ şartıyla beraber ele alındığında $L = \mathbf{0}$ ve $M = \mathbf{0}$ elde edilir. Dolayısıyla A_1 matrisi

$$A_1 = S\begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}S^{-1} \tag{3.34}$$

şeklinde elde edilir. $A_1^3 = A_1$ olduğundan $K^3 = K$ ve $N^3 = N$ 'dir. Diğer yandan (i) şıkkından

$$2A_1A_2 + a_1A_1^2 - A_1 = \mathbf{0}$$

olduğu bilinmektedir. Eğer (3.32) ve (3.34) ifadeleri bu eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$K + a_1K^2 = \mathbf{0} \text{ ve } a_1N^2 - N = \mathbf{0} \tag{3.35}$$

bulunur. (3.35)'in ilk eşitliği a_1K ile çarpılır ve $K^3 = K$ olduğu hesaba katılırsa $a_1K^2 + a_1^2K = \mathbf{0}$ olur. $a_1K^2 = -K$ olduğundan, $a_1^2K - K = \mathbf{0}$ bulunur. Benzer şekilde (3.35)'in ikinci eşitliği a_1N ile çarpılır ve $N^3 = N$ olduğu kullanılırsa, $a_1^2N - a_1N^2 = \mathbf{0}$ olur. $a_1N^2 = N$ olduğundan $a_1^2N - N = \mathbf{0}$ bulunur. Böylece (3.35) eşitliklerinden

$$K = a_1^2K \text{ ve } a_1^2N = N \tag{3.36}$$

eşitlikleri elde edilir.

$A_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan, K ve N matrislerinin ikisi aynı aynda sıfır olamaz. Dolayısıyla $K \neq \mathbf{0}$ ya da $N \neq \mathbf{0}$ olmalıdır.

Eğer $K \neq \mathbf{0}$ ise, (3.36)'nın ilk kısmından $a_1^2 = 1$'dir ve dolayısıyla $a_1 = \pm 1$ elde edilir. Benzer biçimde $N \neq \mathbf{0}$ ise, (3.36) eşitliğinin ikinci kısmından $a_1^2 = 1$'dir yani $a_1 = \pm 1$ elde edilir. Dolayısıyla her iki durumda da $a_1 = \pm 1$'dir. $a_1 = 1$ olduğunda Teorem 3.9.(i) şıkkı aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$2A_1A_2 + A_1^2 - A_1 = \mathbf{0}. \tag{3.37}$$

$a_1 = 1$ olduğundan (3.35) eşitlikleri

$$K^2 = -K \text{ ve } N^2 = N \tag{3.38}$$

eşitliklerine dönüşür. (3.38) eşitliğinden görüleceği üzere K matrisi bir ters idempotent matris, N matrisi ise idempotent matristir. (3.32)'deki I matrisi ile (3.34)'deki K matrisinin değişmeli olduğuna, benzer biçimde (3.32)'deki $\mathbf{0}$ matrisi ile (3.34)'deki N matrisinin değişmeli olduğuna dikkat edelim. Bu sebeple, bu matrislerin sadece köşegen formları ile çalışmak yeterlidir.

K matrisinin mümkün olan tüm köşegen formları $\mathbf{0}, -I$ veya $-I \oplus \mathbf{0}$ şeklindedir ve benzer biçimde N matrisinin mümkün olan tüm köşegen formları $\mathbf{0}, I$ veya $I \oplus \mathbf{0}$ şeklindedir.

Diğer yandan K ve N matrislerinin ikisi birden sıfır olamayacağından K ve N matris çifti için mümkün olan tüm durumlar aşağıdaki gibidir:

(1) $K \sim \mathbf{0}$ ve $N \sim I$,

(2) $K \sim \mathbf{0}$ ve $N \sim (I \oplus \mathbf{0})$,

(3) $K \sim -I$ ve $N \sim \mathbf{0}$,

(4) $K \sim -I$ ve $N \sim I$,

(5) $K \sim -I$ ve $N \sim (I \oplus \mathbf{0})$,

(6) $K \sim (-I \oplus \mathbf{0})$ ve $N \sim \mathbf{0}$,

(7) $K \sim (-I \oplus \mathbf{0})$ ve $N \sim I$,

(8) $K \sim (-I \oplus \mathbf{0})$ ve $N \sim (I \oplus \mathbf{0})$.

(1)-(8) durumlarının her biri (3.32), (3.34) ve (3.37) ifadeleriyle birlikte göz önüne alınırsa sırasıyla aşağıdaki matris eşitlikleri bulunur:

$$\begin{aligned}
&(1') && A_1 + A_2 = I,\ A_1^2 = A_1, \\
&(2') && A_1^2 = A_1,\ A_1A_2 = \mathbf{0}, \\
&(3') && A_1^2 = -A_1 = A_2, \\
&(4') && A_1^2 = I,\ A_2 = \frac{1}{2}(I - A_1), \\
&(5') && A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1), \\
&(6') && A_1^2 = -A_1 = -A_1A_2, \\
&(7') && -A_1A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1), \\
&(8') && -A_1A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Böylece Teorem 3.9.(i)'deki $(a_1, a_2) = (1,1)$ durumu için yukarıdaki matris eşitlikleri elde edilmiş olur.

Şimdi $a_1 = -1$ durumu ele alınırsa (3.35) eşitliklerinden

$$K^2 = K \text{ ve } N^2 = -N \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) eşitliklerinden açıktır ki K matrisi idempotent matris, N matrisi ters-idempotent matristir ve $A_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan K, N matrislerinin ikisi birden sıfır olamaz. Dolayısıyla K ve N matrislerinin mümkün olabilecek tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir:

(a) $K \square \mathbf{0}$ ve $N \square -I$,

(b) $K \square \mathbf{0}$ ve $N \square (-I \oplus \mathbf{0})$,

(c) $K \square I$ ve $N \square \mathbf{0}$,

(d) $K \square I$ ve $N \square -I$,

(e) $K \square I$ ve $N \square (-I \oplus \mathbf{0})$,

(f) $K \square (I \oplus \mathbf{0})$ ve $N \square \mathbf{0}$,

(g) $K \square (I \oplus \mathbf{0})$ ve $N \square -I$,

(h) $K \square (I \oplus \mathbf{0})$ ve $N \square (-I \oplus \mathbf{0})$.

(a)-(h) durumları (3.32), (3.34) ve (3.37) ifadeleriyle beraber ele alınırsa sırasıyla aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&(\text{a}') \quad -A_1 + A_2 = I,\ A_1^2 = -A_1, \\
&(\text{b}') \quad A_1^2 = -A_1,\ A_1A_2 = \mathbf{0}, \\
&(\text{c}') \quad A_1^2 = A_1 = A_2, \\
&(\text{d}') \quad A_1^2 = I, A_2 = \frac{1}{2}(I + A_1), \\
&(\text{e}') \quad A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1), \\
&(\text{f}') \quad A_1^2 = A_1 = A_1A_2, \\
&(\text{g}') \quad A_1A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1), \\
&(\text{h}') \quad A_1A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1).
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Böylece Teorem 3.9.(i)’deki $(a_1, a_2) = (-1,1)$ durumu için yukarıdaki matris eşitlikleri elde edilir.

Dikkat edilmelidir ki (7') şıkkı ile (8') şıkkı aynı sonucu içermektedir ve benzer biçimde (g') şıkkı ile (h') şıkkı aynı sonucu içermektedir.

Şimdi Teorem 3.9.(ii) şıkkını ele alalım. Eğer

$$2A_1A_2 = A_2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1) \tag{3.42}$$

eşitliği 2 ile çarpılırsa, $4A_1A_2 = 2A_2 + A_1^2 + A_1$ elde edilir ve bu eşitlik soldan A_1 matrisi ile çarpılırsa, $A_1^3 = A_1$ olduğundan

$$4A_1^2A_2 = 2A_1A_2 + A_1 + A_1^2 \tag{3.43}$$

eşitliği elde edilir. Eğer (3.43) eşitliği $A_2^2 = A_2$ bilgisi altında sağdan A_2 matrisi ile çarpılırsa $4A_1^2A_2 = 2A_1A_2 + A_1A_2 + A_1^2A_2$ yani $A_1^2A_2 = A_1A_2$ bulunur. (3.32) ve (3.34) eşitlikleri $A_1^2A_2 = A_1A_2$ ifadesinde yerine koyulursa $K^2 = K$ bulunur. Diğer yandan (3.32), (3.34) ve (3.42) eşitliklerinden, $K^2 = K$ olduğu da hatırlanarak, $K = I$ ve $N^2 = -N$ olduğu görülür.

Böylece

$$A_1 = S\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}S^{-1},\ N^2 = -N \tag{3.44}$$

elde edilir.

N matrisi ters-idempotent olduğundan mümkün olan tüm köşegen formları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathbf{0} \\ \text{(j)} & -I \\ \text{(k)} & -I \oplus \mathbf{0} \end{array} \tag{3.45}$$

(3.42) ifadesi (3.32), (3.44) ve (3.45) eşitlikleriyle birlikte ele alınırsa sırasıyla aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir:

(i') $A_1^2 = A_1 = A_2$,
(j') $A_1^2 = I$ ve $A_2 = \frac{1}{2}\left(I + A_1\right)$, (3.46)
(k') $A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_1\right)$.

Böylece, Teorem 3.9.(ii) şıkkındaki matris eşitlikleri (i')-(j') eşitliklerine bölünmüş olur.

Şimdi Teorem 3.9.(iii)'yi ele alalım. Eğer (3.32) ve (3.34) ifadeleri

$$2A_1A_2 = A_2 + 2A_1 - A_1^2 \tag{3.47}$$

eşitliğide yazılırsa $K^2 = I$ ve $N^2 = 2N$ elde edilir. Diğer yandan N matrisi tripotent olduğundan $N^3 = N$ ve $N^2 = 2N$ eşitliklerinden açıktır ki $N = \mathbf{0}$'dır. Böylece

$$A_1 = S\begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}S^{-1},\ K^2 = I \tag{3.48}$$

yazılabilir.

K matrisinin involutifliğinden dolayı, bu matrisin mümkün olan tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir:

(l) I
(m) $-I$ (3.49)
(n) $I \oplus -I$

Eğer (3.47) eşitliği (3.32), (3.48) ve (3.49) eşitlikleriyle birlikte ele alınırsa aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir:

(l') $A_1^2 = A_1 = A_2$,
(m') $A_1^2 = -A_1 = A_2$, (3.50)
(n') $A_1^2 = A_2$.

Böylece (3.50) eşitliği (3.47) eşitliğinin bölünmüş halidir.

Şimdi Teorem 3.9.(iv) şıkkını ele alalım. Eğer

$$2A_1A_2 = -A_2 + \frac{1}{2}(A_1 - A_1^2) \tag{3.51}$$

eşitliği 2 ile çarpılırsa, $4A_1A_2 = -2A_2 + A_1 - A_1^2$ elde edilir ve elde edilen eşitlik $A_1^3 = A_1$ bilgisi altında soldan A_1 ile ve benzer şekilde $A_2^2 = A_2$ bilgisi altında sağdan A_2 ile çarpılırsa $4A_1^2A_2 = -2A_1A_2 + A_1^2A_2 - A_1A_2$ yani $A_1^2A_2 = -A_1A_2$ elde edilir.

(3.32) ve (3.34) eşitlikleri $A_1^2A_2 = -A_1A_2$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa $K^2 = -K$ bulunur. Diğer yandan (3.51) eşitliği (3.32), (3.34) ve $K^2 = -K$ ile birlikte göz önüne alınırsa $K = -I$ ve $N^2 = N$ elde edilir. Dolayısıyla

$$A_1 = S\begin{pmatrix} -I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}S^{-1},\ N^2 = N \tag{3.52}$$

bulunur.

N matrisi idempotent olduğundan mümkün olan tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir:

(o) $\mathbf{0}$
(p) I (3.53)
(r) $I \oplus \mathbf{0}$

Eğer (3.52) eşitliğinde, (3.53)’deki (o)-(r) formları yerlerine koyulur ve daha sonra (3.32) ve (3.51) eşitlikleri de göz önüne alınırsa, aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir:

$$\begin{aligned} &(\text{o}')\quad A_1^2 = -A_1 = A_2, \\ &(\text{p}')\quad A_1^2 = I \text{ ve } A_2 = \frac{1}{2}\left(I - A_1\right), \\ &(\text{r}')\quad A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 - A_1\right). \end{aligned} \tag{3.54}$$

(3.54) eşitliği (3.51) eşitliğinin bölünmüş halidir.

Son olarak Teorem 3.9.(v) şıkkını ele alalım. Eğer (3.32) ve (3.34) eşitlikleri

$$2A_1A_2 = A_1^2 + 2A_1 - A_2 \tag{3.55}$$

eşitliğinde yerlerine yazılırsa $K^2 = I$ ve $N^2 = -2N$ elde edilir. $N^3 = N$ olduğundan $N^2 = -2N$ ifadesinden $N = \mathbf{0}$ olarak bulunur. K involutif matris olduğundan mümkün olan tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &(\text{s})\quad I, \\ &(\text{t})\quad -I, \\ &(\text{u})\quad I \oplus -I. \end{aligned} \tag{3.56}$$

$N = \mathbf{0}$ olduğundan, (3.34) eşitliğinden

$$A_1 = S\begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}S^{-1},\ K^2 = I \tag{3.57}$$

eşitlikleri yazılabilir.

(3.56) eşitlikleri ilk olarak (3.57) eşitlikleriyle birlikte göz önüne alınır ve daha sonra (3.32) ve (3.55) eşitlikleri de hesaba katılırsa aşağıdaki matris eşitlikleri bulunur:

$$\begin{aligned} &(s')\quad A_1^2 = A_1 = A_2, \\ &(t')\quad A_1^2 = -A_1 = A_2, \\ &(u')\quad A_1^2 = A_2. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Dolayısıyla (3.58) eşitlikleri (3.55) eşitliğinin bölünmüş halidir.

Aşağıda, (3.32), (3.34), (3.46), (3.50), (3.54) ve (3.58)'deki matris eşitliklerini ve bunlarla ilişkili katsayı eşitliklerini içeren özetleyici bir tablo verilmektedir.

Tablo 3.2. Teorem 3.9'un şıklarının parçalanmış halleri

(a_1, a_2)	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(1,2)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ **veya** $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
Matris Eşitlikleri	$A_1 + A_2 = I,$ $A_1^2 = A_1,$	$-A_1 + A_2 = I,$ $A_1^2 = -A_1,$	$A_1^2 = A_1 = A_2,$	$A_1^2 = -A_1 = A_2,$	$A_1^2 = A_1 = A_2,$
	$A_1^2 = A_1,$ $A_1A_2 = \mathbf{0},$	$A_1^2 = -A_1,$ $A_1A_2 = \mathbf{0},$	$A_1^2 = I,$ $A_2 = \frac{1}{2}(I + A_1),$	$A_1^2 = I,$ $A_2 = \frac{1}{2}(I - A_1),$	$A_1^2 = A_1 = A_2,$
	$A_1^2 = -A_1 = A_2,$	$A_1^2 = A_1 = A_2,$	$A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1),$	$A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1),$	$A_1^2 = A_2.$
	$A_1^2 = I,$ $A_2 = \frac{1}{2}(I - A_1),$	$A_1^2 = I,$ $A_2 = \frac{1}{2}(I + A_1),$			
	$A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1),$	$A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1),$			
	$A_1^2 = -A_1$ $= -A_1A_2,$	$A_1^2 = A_1 = A_1A_2,$			
	$-A_1A_2$ $= \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1),$	$A_1A_2 =$ $\frac{1}{2}(A_1^2 + A_1),$			

Bu tablo, [22]'deki Teorem 2.'nin $A_1A_2 = A_2A_1$ olması durumundaki sonuçlarının detaylı bir incelemesini sunar.

Tablo 3.2.'de, dolayısıyla [22]'deki Teorem 2.'de tarafımızca farkedilmiş olan bazı eksik sonuçlar mevcuttur. Şimdi, eksik sonuçların ilkini görebilmek için [8]'deki Teorem 2.2.'yi göz önüne alalım.

Özdemir ve arkadaşları [9] çalışmasının Teorem 2.2.'sinde $A_1 \neq \pm A_2$ olmak şartıyla sıfırdan farklı ve değişmeli A_1, A_2 tripotent matrislerinin lineer bileşiminin idempotentliğinin gerek ve yeter şartlarını ortaya koymuşlardır. Diğer yandan biliyoruz ki her idempotent matris aynı zamanda bir tripotent matristir. Dolayısıyla [9]'un Teorem 2.2.'sinde $A_2^2 = A_2$ olarak alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir. Böylece elde edilen teorem sıfırdan farklı ve değişmeli bir idempotent ve bir tripotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliğine dönüşmüş olur.

Teorem 3.10. $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri sırasıyla bir tripotent matris ve bir idempotent matris olsun. $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $A_1A_2 = A_2A_1$ ve $A_1 \neq \pm A_2$ sartlarıyla beraber $A = a_1A_1 + a_2A_2$ lineer bileşiminin idempotent olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.

(a) $(a_1, a_2) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ ve $A_1^2 = A_2$,

(b) $(a_1, a_2) = (-1, -1)$ ve $\frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_1\right) + A_2 + A_1A_2 = \mathbf{0}$,

(c) $(a_1, a_2) = (1, 1)$ ve $\frac{1}{2}\left(A_1 - A_1^2\right) = A_1A_2$,

(d) $(a_1, a_2) = (-1, 1)$ ve $\frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_1\right) = A_1A_2$,

(e) $(a_1, a_2) = (1, -1)$ ve $\frac{1}{2}\left(A_1^2 - A_1\right) + A_2 - A_1A_2 = \mathbf{0}$,

(f) $(a_1, a_2) = (1, 2)$ ve $A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 - A_1\right)$

(g) $(a_1, a_2) = (-1, 2)$ ve $A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_1\right)$

[9]'daki Teorem 2.2.'de $A_2^2 = A_2$ durumu dikkate alınırsa bazı şıklarda $A_1 = \pm A_2$ veya $A_1 = \mathbf{0}$ veya $A_2 = \mathbf{0}$ şeklinde çelişkiler ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla yukarıdaki teoremde çelişkiden kaynaklanan durumlar görünmemektedir.

Teorem 3.10.'un (a) şıkkı, Tablo 3.2.'deki 4. ve 6. sütunların kapalı halidir. Fakat, Teorem 3.10.'un $A_1 \neq \pm A_2$ koşulu gereğince Tablo 3.2.'deki 4. ve 6. sütunların 1. ve 2. satırları Teorem 3.10.'da ihmal edilmektedir. Yine Teorem 3.10.'un (c), (d), (f), (g) şıkları ve Tablo 3.2.'nin sırasıyla 1., 2., 5., 3. sütunları arasında da yukarıdakine benzer bir ilişki mevcuttur.

Dikkat edilirse Tablo 3.2.'de Teorem 3.10.'daki (b) ve (e) şıkları görünmemektedir. Dolayısıyla [22]'deki Teorem 2.'de bazı eksik sonuçlar mevcuttur.

Şimdi, Teorem 3.10.'daki (b) şıkkını ele alalım. A_1 ve A_2 matrisleri sırasıyla (3.34) ve (3.32)'deki gibi yazılabilir. Diğer yandan

$$\frac{1}{2}(A_1^2 + A_1) + A_2 + A_1A_2 = \mathbf{0} \tag{3.59}$$

olduğundan $A_1A_2 = A_2A_1$ şartı altında (3.59)'dan $A_1A_2 = -A_1^2A_2$ elde edilir. Eğer (3.32) ve (3.34) eşitlikleri $A_1A_2 = -A_1^2A_2$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa $K^2 = -K$ elde edilir. Ayrıca (3.59) eşitliği (3.32), (3.34) ve $K^2 = -K$ eşitlikleri ile birlikte göz önüne alınırsa $K = -I$ ve $N^2 = -N$ bulunur. Dolayısıyla

$$A_1 = S\begin{pmatrix} -I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}S^{-1},\ N^2 = -N \tag{3.60}$$

olur.

N matrisi bir involutif matris ve $A_1 \neq \pm A_2$ olduğundan N matrisinin mümkün olan tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\text{(w)}\quad -I \\ &\text{(x)}\quad -I \oplus \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.61}$$

(3.61) ifadesi (3.60) ifadesiyle birlikte göz önüne alınır ve daha sonra (3.32) ve (3.59) eşitlikleri kullanılırsa aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir:

$$\begin{aligned} &\text{(w')}\quad A_1 = -I, \\ &\text{(x')}\quad A_1^2 = -A_1 \text{ ve } A_1A_2 = -A_2. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Benzer şekilde Teorem 3.10.(e) şıkkını ele alalım.

$$\frac{1}{2}(A_1^2 - A_1) + A_2 - A_1A_2 = \mathbf{0} \tag{3.63}$$

olduğundan $A_1A_2 = A_2A_1$ şartı altında (3.63)'den $A_1^2A_2 = A_2A_1$ eşitliği elde edilir. (3.32), (3.34) ve $A_1^2A_2 = A_2A_1$ eşitlikleri göz önüne alınırsa $K^2 = K$ bulunur. Eğer (3.63) ifadesi (3.32), (3.34) ve $K^2 = K$ eşitlikleri ile birlikte göz önüne alınırsa $K = I$ ve $N^2 = N$ olur ve dolayısıyla

$$A_1 = S\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}S^{-1},\ N^2 = N \tag{3.64}$$

elde edilir.

N matrisi idempotent matris ve $A_1 \neq \pm A_2$ olduğundan, N matrisinin mümkün olan tüm köşegen formları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &(z) \quad I \\ &(q) \quad I \oplus \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.65}$$

(3.65), (3.64) ile birlikte göz önüne alınır ve daha sonra (3.32) ve (3.63) eşitlikleri kullanılırsa aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilir:

$$\begin{aligned} &(z') \quad A_1 = I \\ &(q') \quad A_1^2 = A_1 \text{ ve } A_1 A_2 = A_2 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Sonuç olarak (3.62) ve (3.66) ifadeleri Teorem 3.10.'un (b) ve (e) şıklarının bölünmüş halleridir.

Farkına varılırsa, [9]'daki Teorem 2.2.'de $A_1 \neq \pm A_2$ olmasına rağmen [22]'deki Teorem 2.'de $A_1 \neq \pm A_2$ koşulu yoktu. Dolayısıyla, [22]'deki Teorem 2'nin $A_1 A_2 = A_2 A_1$ koşulu altında dönüştürüldüğü Teorem 3.9.'da, $A_1 \neq \pm A_2$ koşulu koyulmadı. $A_1 = A_2$ veya $A_1 = -A_2$ olsaydı durum ne olurdu?

$A_1 = A_2$ ise

$$\left(a_1 A_1 + a_2 A_2\right)^2 = a_1 A_1 + a_2 A_2 \tag{3.67}$$

olacak şekildeki a_1 ve a_2'yi irdeleyelim.

$A_1 = A_2$ olduğundan (3.67) eşitliğinden $\left((a_1+a_2)A_1\right)^2 = (a_1+a_2)A_1$ olup, A_1 idempotent olduğundan $(a_1+a_2)^2 A_1 = (a_1+a_2)A_1$ bulunur. Buradan $(a_1+a_2)(a_1+a_2-1)A_1 = \mathbf{0}$ olup, $A_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan

$$a_1 + a_2 = 0 \text{ veya } a_1 + a_2 = 1 \qquad (3.68)$$

elde edilir.

$A_1 = -A_2$ ise, (3.67)'den $\left((a_2-a_1)A_2\right)^2 = (a_2-a_1)A_2$ olup, A_2 idempotent olduğundan $(a_2-a_1)^2 A_2 = (a_2-a_1)A_2$ ve dolayısıyla $(a_2-a_1)(a_2-a_1-1)A_2 = \mathbf{0}$ olur. $A_2 \neq \mathbf{0}$ olduğundan

$$a_2 - a_1 = 0 \text{ veya } a_2 - a_1 = 1 \qquad (3.69)$$

elde edilir. Fakat [22]'deki Teorem 2.'den dönüştürülen Teorem 3.9.'da $A_1 \neq \pm A_2$ koşulu olmamasına rağmen, (3.68) ve (3.69) sonuçları Teorem 3.9.'da görünmemektedir.

Eğer Tablo 5; (3.62), (3.66), (3.68) ve (3.69) eşitlikleri ile birlikte göz önüne alınırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.11. $A_1, A_2 \in \square_n$ matrisleri sırasıyla bir tripotent ve bir idempotent matris olmak üzere $A_1A_2 = A_2A_1$ koşulu altında $a_1, a_2 \in \square^*$ olacak şekilde $A = a_1A_1 + a_2A_2$ lineer bileşim matrisini ele alalım. A matrisinin idempotent matris olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan herhangi birinin sağlanmasıdır:

(a) $(a_1, a_2) = (1,1)$ ve aşağıdaki matris eşitliklerinden herhangi biri:

(a1) $A_1 + A_2 = I$, $A_1^2 = A_1$,

(a2) $A_1^2 = A_1$, $A_1A_2 = \mathbf{0}$, (a3) $A_1^2 = I,\ A_2 = \frac{1}{2}(I - A_1)$,

(a4) $A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1)$,

(a5) $A_1^2 = -A_1 = -A_1A_2$,

(a6) $-A_1A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1)$,

(b) $(a_1, a_2) = (-1, 1)$ ve aşağıdaki matris eşitliklerinden herhangi biri:

(b1) $-A_1 + A_2 = I$ ve $A_1^2 = -A_1$,

(b2) $A_1^2 = -A_1,\ A_1A_2 = \mathbf{0}$,

(b3) $A_1^2 = I,\ A_2 = \frac{1}{2}(I + A_1)$,

(b4) $A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1)$,

(b5) $A_1^2 = A_1 = A_1A_2$,

(b6) $A_1A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1)$,

(c) $(a_1, a_2) = (-1, -1)$ ve aşağıdaki matris eşitliklerinden herhangi biri:

(c1) $A_1 = -I$,

(c2) $A_1A_2 = -A_2,\ A_1^2 = -A_1$,

(d) $(a_1, a_2) = (1, -1)$ ve aşağıdaki matris eşitliklerinden herhangi biri:

(d1) $A_1 = I$,

(d2) $A_1A_2 = A_2,\ A_1^2 = A_1$,

(e) $(a_1, a_2) = (-1, 2)$ ve aşağıdaki matris eşitliklerinden herhangi biri:

(e1) $A_1^2 = I,\ A_2 = \frac{1}{2}(I + A_1)$, (e2) $A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1)$,

(f) $(a_1, a_2) = (1, 2)$ ve aşağıdaki matris eşitliklerinden herhangi biri:

(f1) $A_1^2 = I$, $A_2 = \frac{1}{2}\left(I - A_1\right)$,

(f2) $A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 - A_1\right)$,

(g) $(a_1, a_2) \in \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ ve $A_1^2 = A_2$,

(h) $a_1 + a_2 = 0$ veya $a_1 + a_2 = 1$; $A_1 = A_2$,

$a_1 - a_2 = 0$ veya $a_1 - a_2 = -1$; $A_1 = -A_2$.

Not edelim ki, Tablo 3.2.'nin her sütununda $A_1 = A_2$ veya $A_1 = -A_2$ olacak şekilde matris eşitlikleri mevcuttu. Fakat bu eşitlikler zaten Teorem 3.11.'in (h) şıkkının özel durumları olduğundan, Tablo 3.2.'deki veriler Teorem 3.11.'e taşınırken, (h) şıkkından önceki şıklardaki bu tip matris eşitlikleri silindi.

Baksalary ve arkadaşları [23]'deki çalışmanın Teorem 1.'inde bir esas tripotent ve bir idempotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliği ile ilgili tüm durumları vermişlerdir.

Şimdi, söz konusu teoremdeki matris çiftini değişmeli olarak alalım. Eğer A_1 matrisi esas tripotent matris ise, $A_1 = B_1 - B_2$ olacak şekilde sıfırdan farklı ayrık B_1 ve B_2 idempotent matrisleri mevcuttur.

A_2 matrisi idempotent matris ve $A_1A_2 = A_2A_1$ olsun. B_1 ve B_2 matrislerinin sırasıyla

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 + A_1\right) \text{ ve } B_2 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 - A_1\right) \tag{3.70}$$

olarak yazılabildiği bilinmektedir. Dolayısıyla, $A_1A_2 = A_2A_1$ şartı $A_2B_1 = B_1A_2$ ve $A_2B_2 = B_2A_2$ eşitliklerine denktir. Buradan hareketle $A_1A_2 = A_2A_1$ durumunda sadece [23]'deki Teorem 1.'in (a) şıkkı ele alınacaktır. Teorem 1.(a), (3.70) eşitliklerine göre A_1 ve A_2 matrislerine göre ifade edilirse aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.12. $A_1A_2 = A_2A_1$ olmak üzere A_1 matrisi bir esas tripotent ve A_2 matrisi bir idempotent matris olsun. $a_1A_1 + a_2A_2$ lineer bileşiminin idempotent olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan herhangi birinin sağlanmasıdır:

(i) $(a_1, a_2) = (1,1)$ ve $A_1A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1 - A_1^2\right)$

(ii) $(a_1, a_2) = (1,2)$ ve $A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1^2 - A_1\right)$

(iii) $(a_1, a_2) = (-1,1)$ ve $A_1A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_1^2\right)$

(iv) $(a_1, a_2) = (-1,2)$ ve $A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_1^2\right)$

(v) $(a_1, a_2) \in \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ ve $A_2 = A_1^2$.

Teorem 3.12.'nin (i) ve (iii) durumları sırasıyla Teorem 3.11.'deki (a6) ve (b6) durumlarına karşılık gelir. Dikkat edilmelidir ki (a3) ve (a4) durumları (a6) durumunun özel halleridir. Ayrıca (a) şıkkının kalan durumlarında A_1 matrisi idempotent veya ters-idempotent matristir yani esas tripotent matris değildir.

Benzer şekilde Teorem 3.11.'deki (b3) ve (b4) durumları (b6) durumunun özel halleridir. Ayrıca (b) şıkkının kalan durumlarında A_1 matrisi idempotent veya ters-idempotent matristir yani esas tripotent değildir.

Diğer yandan Teorem 3.12.'deki (ii) ve (iv) şıkları sırasıyla Teorem 3.11.'deki (f2) ve (e2) şıklarına karşılık gelir. Dikkat edilmelidir ki, (f1) ve (e1) şıkları sırasıyla (f2) ve (e2) şıklarının özel halleridir. Teorem 3.12.'deki (v) durumu Teorem 3.11.'in (g) durumuna karşılık gelir.

Not edelim ki, Teorem 3.11.'in (h) şıkkında $A_1 = \pm A_2$ olduğundan (yani A_1 tripotent matrisi özel olarak idempotent veya ters-idempotent olduğundan), Teorem 3.12.'de bu şıkka karşılık bir sonuç yoktur çünkü Teorem 3.12.'deki A_1 tripotent matrisi esas tripotenttir. Dolayısıyla Teorem 3.11. ve Teorem 3.12. birbiriyle uyumludur.

$\alpha_1 \neq \beta_1,\ \alpha_1 \neq \gamma_1,\ \beta_1 \neq \gamma_1$ olmak üzere bir $A_1 \neq \mathbf{0}$ $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}-$kübik matrisi,

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in \{(1,0,-1),(1,-1,0),(0,1,-1),(0,-1,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\} \tag{3.71}$$

olduğunda bir tripotent matrise; $\alpha_2 \neq \beta_2$ olmak üzere bir $A_2 \neq \mathbf{0}$ $\{\alpha_2, \beta_2\}-$kuadratik matrisi,

$$(\alpha_2, \beta_2) \in \{(1,0),(0,1)\} \tag{3.72}$$

olduğunda bir idempotent matrise dönüşür.

Öte yandan biliyoruz ki, $\alpha_1 \neq \beta_1,\ \alpha_1 \neq \gamma_1,\ \beta_1 \neq \gamma_1$ olmak üzere bir A_1 kübik matrisi, B_1 matrisi P_1 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{\alpha_1 - \gamma_1, \beta_1 - \gamma_1\}-$kuadratik matris olmak üzere

$$A_1 = B_1 + \gamma_1 I \tag{3.73}$$

şeklinde yazılabilir. Genelleştirilmiş kuadratik matrisin tanımına göre de

$$\left(B_1-(\alpha_1-\gamma_1)P_1\right)\left(B_1-(\beta_1-\gamma_1)P_1\right)=\mathbf{0},\ \ B_1P_1=P_1B_1=B_1 \tag{3.74}$$

dir. (3.74)'ün ilk eşitliğinde gerekli matris işlemleri yapılır ve $\alpha_1\neq\gamma_1,\ \beta_1\neq\gamma_1$ olduğu dikkate alınırsa, $P_1=\dfrac{1}{(\gamma_1-\alpha_1)(\beta_1-\gamma_1)}\left[B_1^{\,2}-\left(\alpha_1+\beta_1-2\gamma_1\right)B_1\right]$ bulunur. Bu son eşitlikte (3.73) eşitliği kullanılırsa,

$$P_1=\frac{1}{(\gamma_1-\alpha_1)(\beta_1-\gamma_1)}\left[\left(A_1-\gamma_1 I\right)^2-\left(\alpha_1+\beta_1-2\gamma_1\right)\left(A_1-\gamma_1 I\right)\right] \tag{3.75}$$

elde edilir.

Dolayısıyla Teorem 3.7.'de $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2$ skalerleri (3.71) ve (3.72)'deki gibi, P_1 matrisi de (3.75)'deki gibi alınır ve

$$(\alpha_3,\beta_3)\in\left\{(1,0),(0,1)\right\} \tag{3.76}$$

alınırsa Teorem 3.11. ve Teorem 3.12.'deki tüm sonuçlar elde edilir. Böylece Teorem 3.7., literatürdeki pek çok sonucu kapsayıcı niteliktedir.

Ayrıca $(\alpha_2,\beta_2)\in\left\{(1,-1),(-1,1)\right\}$ ve $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ skalerleri (3.71)'deki gibi, α_3,β_3 skalerleri de (3.76)'daki gibi alınırsa, bir tripotent ve bir involutif matrisin lineer bileşiminin idempotentliği; $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ skalerleri (3.71)'deki gibi, α_2,β_2 skalerleri (3.72)'deki gibi, $(\alpha_3,\beta_3)\in\left\{(1,-1),(-1,1)\right\}$ alınırsa, bir tripotent ve bir idempotent matrisin lineer bileşiminin involutifliği gibi farklı ve yeni birçok karakterizasyon elde edilebilir.

BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Birinci bölümde, öncelikle özel tipli matrislerle ilgili olarak ele alınacak problemin içeriğine ve önemine vurgu yapılmıştır. Sonra ilgili literatür araştırmasının kısa bir özeti verilmiştir. İkinci bölümde, temel tanım, kavram ve bazı temel teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmanın esas amacı olan değişmeli bir kübik ve bir kuadratik matrisin lineer bileşiminin kuadratikliğinin karakterizasyonu problemi ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlardan literatürde var olan bir çok sonucun üretilebileceği görülmüştür.

Ele alınan problemde A_1 matrisi $\alpha_1 \neq \beta_1$, $\alpha_1 \neq \gamma_1$, $\beta_1 \neq \gamma_1$ ve $\sigma(A_1) = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ olacak şekilde kübik ve A_2 matrisi $\alpha_2 \neq \beta_2$ ve $\sigma(A_2) = \{\alpha_2, \beta_2\}$ olacak şekilde kuadratik matris matristir. Bu nedenle eğer, A_1 matrisi tripotent matris ve A_2 matrisi idempotent veya involutif matris olduğunda A_1 ve A_2 matrisleri çalışmada ele alınan esas problemin koşullarını sağlar.

Literatürde A_1 matrisi tripotent matris hatta genelleştirilmiş kuadratik matris ve A_2 matrisi idempotent veya involutif matris olmak üzere

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2$$

lineer bileşim matrisinin idempotentliği veya involutifliği ile ilgili birçok sonuç mevcuttur. Bu nedenle bu çalışmada elde edilen sonuçlardan literatürdeki bu tür çalışmalardaki aynı koşullar altındakilerini ilgilendiren sonuçlar türetilebilir.

Ancak dikkat etmek gerekir ki bizim ele aldığımız problemdeki koşullar ile literatürde ele alınan problemlerdeki koşullar birbirinden farklıdır. Böyle olmakla beraber literatüde ele alınan problemlerdeki koşullar bu çalışmada ele alınan koşullara kısıtlandığında ortaya çıkacak özel matris sınıfları bu çalışmada ele alınan matris sınıfları tarafından kapsanmaktadır. Bu bakış açısıyla bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçların bir genelleştirilmesidir.

Sonuç olarak, A_1'deki $\alpha_1 \neq \beta_1$, $\alpha_1 \neq \gamma_1$, $\beta_1 \neq \gamma_1$ ve A_2'deki $\alpha_2 \neq \beta_2$ koşullarının tamamı veya bir kısmı kaldırılarak ele alınan problem tekrar çalışılabilir ve sonuçlar daha da genelleştirilebilir. Hatta literatürdeki bazı özel tipli alt sınıf matrisleri için ele alınan problemlerde olduğu gibi değişmelilik koşulu da kaldırılarak yine problem tekrar ele alınabilir. Bu durumda ayrık sonuçların elde edilebileceği öngörülmektedir.

Çalışmada elde edilmiş ve yukarıda belirtilen durumlarda elde edilebilecek sonuçlar teorik açıdan önemlidir. Bütün bunların reel problemlere uygulanabilirliği ve uygulaması ise ayrıca araştırmaya değerdir.

KAYNAKLAR

[1] Rao C., R., ve Mitra, S., K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications, New York: John Wiley & Sons. Inc., 1971.

[2] Harville, D., A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, New York: Springer-Verlag, 1997.

[3] Horn R., A., ve Jhonson, C., R., Matrix Analysis, New York: Cambrige University Press, 2013.

[4] Özdemir H., ve Petik, T., On the Spectra of Some Matrices Derived From Two Quadratic Matrices, Bull. Iranian Math. Soc., 39(2), pp. 225-238, 2013.

[5] Baksalary J., K., ve Baksalary, O., M., Idempotency of Linear Combinations of Two Idempotent Matrices, Linear Algebra Appl., 321(1), pp. 3-7, 2000.

[6] Baksalary, J., K., Baksalary, O., M., ve H., Özdemir, A Note On Linear Combinations Of Commuting Tripotent Matrices, Linear Algebra and its Applications, 388 45-51, 2004.

[7] Özdemir, H., ve Özban, A., Y., On Idempotency of Linear Combinations of Idempotent Matrices, Appl. Math. Comput., 159 439-448, 2004.

[8] Özdemir, H., ve Sarduvan, M., Notes on Linear Combinations of Two Tripotent, Idempotent, and Involutive Matrices That Commute, An. Ştiinț. Univ. "Ovidius" Constanța Ser. Mat., 16(2), pp. 83-90, 2008.

[9] Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A., Y., ve Güler, N., On Idempotency and Tripotency of Linear Combinations of Two Commuting Tripotent Matrices, Appl. Math. Comput., 207(1), pp. 197-201, 2009.

[10] Aleksiejczyk, M., ve Smoktunowicz, A., On Properties of Quadratic Matrices, Math. Pannon., 11(2), pp. 239-248, 2000.

[11] Farebrother, R., W., ve Trenkler, G., On Generalized Quadratic Matrices, Linear Algebra Appl., 410, pp. 244-253, 2005.

[12] Uç, M., Özdemir, H., ve Özban, A., Y., On the Quadraticity of Linear Combinations of Quadratic Matrices, Linear Multilinear Algebra, 63(6), pp. 1125-1137, 2015.

[13] Petik, T., Uç, M., ve Özdemir, H., Generalized Quadraticity of Linear Combination of Two Generalized Quadratic Matrices, Linear Multilinear Algebra, 63(12), pp. 2430-2439, 2015.

[14] Uç, M., Petik, T., ve Özdemir, H., The Generalized Quadraticity of Linear Combinations of Two Commuting Quadratic Matrices, Linear Multilinear Algebra, 64(9), pp. 1696-1715, 2016.

[15] Uç, M., Kuadratik Matrislerin Doğrusal Bileşimlerinin Kuadratikliğinin Karakterize Edilmesi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 2015.

[16] Venit, S., ve Bishop, W., Elementary Linear Algebra, Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1985.

[17] Horn, R., A., ve Jhonson, C., R., Matrix Analysis, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985.

[18] Tian, Y., ve Styan, G., P., H., Rank Equalities for Idempotent and Involutory Matrices, Linear Algebra Appl., 335(1), pp. 101-117, 2001.

[19] Graybill, F., A., Matrices with Applications in Statistics, California: Wadsworth International Group, 1983.

[20] Zhang, F., Matrix Theory, Basic Results and Techniques, New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2011.

[21] Bu, C., Linear Maps Preserving Drazin Inverses of Matrices over Fields, Linear Algebra Appl., 396, pp. 159-173, 2005.

[22] Yao, H., Sun, Y., Xu, C., ve Bu, C., A Note On Linear Combinations Of An Idempotent Matrix And A Tripotent Matrix, J. Appl. Math. & Informatics, 27(5-6), pp. 1493-1499, 2009.

[23] Baksalary, J., K., Baksalary, O., M., ve Styan, G., P., H., Idempotency Of Combinations Of An Idempotent Matrix And A Tripotent Matrix, Linear Algebra and its Applications, 354 21-34, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Burak Tufan GÖKMEN, 28.02.1991 tarihinde Üsküdar’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini 2009 yılında tamamladı. 2009 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2014 yılında ise lisans öğrenimini tamamladı. 2014-2015 yılları arasında vatani görevini yerine getirdi. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kaydoldu. 2017 yılında hayatını saygıdeğer eşi Begüm GÜREL GÖKMEN ile birleştirdi. 2013 yılından bu yana özel eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak hayatına devam etmektedir.