T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLİ MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sinan KARAKAYA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Temmuz 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLİ MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sinan KARAKAYA

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 16.07.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı	Üye	Üye
Prof. Dr. Refik Keskin	Prof. Dr. Halim Özdemir	Dr. Öğr. Üyesi Sinem Şimşek

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Sinan KARAKAYA

16.07.2018

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, değerli danışman hocam Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR’e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Tuğba PETİK’e teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince yanımda olan eşime ve aileme sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\|A\|$	: A matrisinin determinantı
$[AB]$	: AB doğru parçası
$\|AB\|$	: AB doğru parçasının uzunluğu
$adj(A)$	: A matrisinin adjoint matrisi
A^T	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
F_n	: $n.$ Fibonacci sayısı
I	: Birim matris
$iz(A)$	: A matrisinin izi
L_n	: $n.$ Lucas sayısı
$n!$	: n sayısının faktöriyeli
$P(\lambda)$	: λ skalerinin P polinomu altındaki resmi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\sum$	: Toplam sembolü
■	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, altın oran, matris

Bu çalışmada, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oranın, matrislerle olan ilişkisi incelenmiştir.

İlk bölümde, çalışmanın konusunun önemi hakkında kısaca bazı bilgiler verilmekte ve çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan ispat yöntemleri, matrisler ve denklem sistemleri ile ilgili bazı temel kavramlar verilmektedir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oranla ilgili temel kavram ve teoremler verilmiştir. Yine bu kavramların matrislerle ilişkisi ile ilgili olarak, öncelikle Q ve R matrislerinden, daha sonra ilişkili diğer matrislerden bahsedilecektir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, Q ve R matrislerinin lineer bileşimleri incelenerek, literatür taramasında rastlanmayan bazı özellikler ile literatürde mevcut olan bazı özelliklerin farklı ispatları üzerinde durulacaktır. Dördüncü bölümde ise, kuvvetleri Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili olan, 3×3 boyutlu matrislerin elde edilmesi ile ilgili bir yöntem geliştirilerek, bu yöntemle bazı özel matrisler elde edilecektir.

Çalışmanın son bölümünde, çalışma ile ilgili bazı tartışma ve önerilere yer verilecektir.

ON THE LINEAR COMBINATIONS OF MATRICES ASSOCIATED WITH FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

SUMMARY

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, golden ratio, matrices

In this study, the relationship between Fibonacci numbers, Lucas numbers and golden ratio with matrices has been examined.

In the first chapter, a brief information about the importance of the study and some basic concepts about proof methods, matrices and equation system which will be used later in the study were given.

In the second chapter, basic concepts and theorems about Fibonacci numbers, Lucas numbers and golden ratio are given. Regarding the relation of these concepts to the matrices, first of all the matrices Q and R will be mentioned later in relation to the other matrices.

In the third chapter, different proofs of some features present in the literature will be discoursed together with some features not found in the literature by examining the linear combinations of the matrices Q and R. In the fourth chapter, some special matrices will be obtained by developing a method for obtaining 3×3 dimensional matrices, whose powers are related to Fibonacci and Lucas numbers.

In the last part of the study, some arguments and suggestions about study will be given.

BÖLÜM 1. ÖN BİLGİLER

1.1. Giriş

Fibonacci sayıları, yaygın kullanım alanlarına sahiptir ve matematiğin önemli konularından birisidir. Bu alanda yapılmış birçok farklı çalışma mevcuttur. Fibonacci sayılarının ve yine Fibonacci sayıları ile ilişkili olan altın oranın, doğada ve sanatta farklı örnekleri görülmektedir. Bunun yanında matematiksel bir dizi olarak Fibonacci dizisinin terimleri ile ilişkili olarak birçok özellik mevcuttur. Günümüzde bu alandaki çalışmalara devam edilmektedir ve yeni özellikler ortaya konulmaktadır.

Bu çalışmada, öncelikle Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oranla ilgili temel özellikler verilecektir. Daha sonra Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oranın matris temsillerinden bahsedilecektir. Bu temsillerden yola çıkılarak bazı temel problemler ele alınacak ve bu problemler çözülerek Fibonacci ve Lucas sayılarına ilişkin birçok özdeşlik ortaya konulacaktır. Bu özdeşliklerin bir kısmı literatürde mevcut olmasına rağmen farklı bir şekilde elde edilişleri sunulmuş olacaktır.

1.2. Matematiksel Tümevarım

Bilimsel araştırmalarda tümevarım ve tümdengelim kavramları birbirini tamamlayan kavramlardır. Genelden özele ulaşma tümdengelim ve özelden genele ulaşma tümevarım olarak nitelendirilir. Şimdi tümevarım kavramı üzerinde kısaca durulacaktır.

Tanım 1.1. (Birinci Tümevarım İlkesi) $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $P(n)$ bir önerme olsun ve aşağıdaki iki şart sağlansın:

(i) $P(1)$ doğru olsun.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ de doğru olsun.

Bu iki şart sağlandığında, $P(n)$ her $n \in \mathbb{N}^+$ için doğrudur [1].

Tanım 1.2. (İkinci Tümevarım İlkesi) $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $P(n)$ bir önerme olsun ve aşağıdaki iki şart sağlansın:

(i) $P(1)$ doğrudur.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $P(1)$, $P(2)$,…, $P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ de doğrudur.

Bu iki şart sağlandığında, $P(n)$ önermesi her $n \in \mathbb{N}^+$ için doğrudur [1].

1.3. Matris Cebiri ile İlgili Bazı Kavram ve Özellikler

Bu kısımda vektör ve matrisler ile ilişkili bazı kavramlar ve ispatsız olarak bazı özellikler verilecektir.

Tanım 1.3. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir vektör, $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ şeklindedir [2].

Tanım 1.4. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ ve $w=(w_1,w_2,...,w_n)$ birer vektör ve k bir skaler olmak üzere;

$$v+w=(v_1+w_1,\ v_2+w_2,...,v_n+w_n)$$
$$kv=(kv_1,kv_2,...,kv_n)$$

şeklindedir [2].

Tanım 1.5. k_i ’ler skalerler ve v_i ’ler vektörler olmak üzere; $k_1v_1+k_2v_2+...+k_nv_n$ şeklindeki yazılışa, v_i vektörlerinin bir lineer bileşimi denir [2].

Tanım 1.6. k_i 'ler skalerler ve v_i 'ler vektörler olmak üzere,

$$k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = 0$$

eşitliği ancak $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$ olması ile gerçekleşiyorsa, v_i vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde bu vektörlere lineer bağımlıdır denir [2].

Tanım 1.7. Skalerlerin dikdörtgensel bir düzenlemesine bir matris denir. Bir matrisin genel biçimi, genel olarak,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. m satır ve n sütundan oluşan bir A matrisine, $m \times n$ boyutludur denir. A matrisi kısaca $A = (a_{ij})$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı A matrisinin i. satır ve j. sütun elemanıdır [3].

Matrisler genellikle skalerlerin bulunduğu cisim ile anılır. Örneğin matrisin elemanları reel ise reel matris, kompleks ise kompleks matris gibi. Bu çalışma boyunca matris denildiğinde reel matris anlaşılacaktır.

Tanım 1.8. A ve B aynı boyutlu iki matris olsun. A ve B matrislerinin tüm elemanları karşılıklı olarak aynı ise bu matrislere eşit matrisler denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir [3].

Tanım 1.9. A ve B aynı boyutlu iki matris olsun. A ve B matrislerinin toplamı $A + B$ ile gösterilir. İki matris toplanırken ij. elemanları karşılıklı olarak toplanır. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ olmak üzere, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ şeklindedir [3].

Tanım 1.10. Bir A matrisinin bir k skaleri ile çarpımı kA şeklinde gösterilir. Matris bir skalerle çarpılırken tüm elemanları bu skalerle çarpılır. $A=(a_{ij})$ olmak üzere, $kA=(ka_{ij})$ şeklindedir [3].

Tanım 1.11. A matrisi $m\times n$ boyutlu ve B matrisi $n\times p$ boyutlu matrisler olsun. A ve B matrislerinin çarpılmasıyla oluşan AB matrisi $m\times p$ boyutludur. AB matrisinin $ij.$ elemanı,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

şeklindedir [3].

Tanım 1.12. A, $m\times n$ boyutlu bir matris olsun. A matrisinin satır ve sütunlarının yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilen $n\times m$ boyutlu matrise A matrisinin transpozu denir ve A^T ile gösterilir [2].

Tanım 1.13. A matrisi $n\times n$ boyutlu ise A matrisine kare matris denir. Kare matrisin sol üst köşesinden, sağ alt köşesine kadar olan elemanlarına köşegen elemanları denir [3].

Tanım 1.14. A bir kare matris olmak üzere A matrisinin köşegen elemanlarının toplamına A matrisinin izi denir ve $iz(A)$ ile gösterilir [3].

Tanım 1.15. A kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları 0 ise A matrisine köşegen matris denir. Köşegen matris

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

şeklindedir [3].

Teorem 1.16. $D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$ olmak üzere, $D^k=\begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^k \end{pmatrix}$ şeklindedir [2].

Tanım 1.17. Köşegen elemanlarının hepsi 1 olan köşegen matrise birim matris denir ve bu matris I ile gösterilir [3].

Tanım 1.18. Bir A kare matrisi için $AB=BA=\mathrm{I}$ olacak şekilde bir B matrisi varsa B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B=A^{-1}$ ile gösterilir. A matrisinin tersi varsa A matrisine tersinirdir denir [3].

Tanım 1.19. A kümesinin elemanlarının her bir sıralanışına A kümesinin bir permütasyonu denir. A kümesinin n tane elemanı varsa tüm permütasyonlarının sayısı $n!$ şeklinde bulunur. [4].

Tanım 1.20. A kümesi n elemanlı bir küme ve $i_1 i_2 ... i_n$ de A kümesinin bir permütasyonu olsun. Bu permütasyonda bir i_s tamsayısı kendisinden daha küçük olan bir i_r tamsayısından önce geliyorsa, $i_1 i_2 ... i_n$ permütasyonunda bir inversiyon vardır denir. Bir permütasyondaki toplam inversiyon sayısı tekse buna tek permütasyon, çiftse buna çift permütasyon denir [4].

Tanım 1.21. $1,2,...,n$ için bir permütasyon p olsun. Bu permütasyonun işareti e_p ile gösterilir. p çift ise $e_p=+1$ ve p tek ise $e_p=-1$ dir [4].

Tanım 1.22. A, $n\times n$ boyutlu kare matrisinin determinantı $|A|$ ile gösterilir. $1,2,...,n$'in tüm permütasyonları $p=(i_1,i_2,...,i_n)$ şeklinde olmak üzere,

$$|A| = \sum_p e_p a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

şeklindedir [4].

Teorem 1.23. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ şeklindedir [2].

Teorem 1.24. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

şeklindedir [2].

Teorem 1.25. A ve B aynı boyutlu kare matrisler olsun. Bu durumda $|AB| = |A||B|$ eşitliği vardır [2].

Teorem 1.26. A, $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. Her pozitif k sayısı için $|A^k| = |A|^k$ eşitliği vardır [3].

Tanım 1.27. A, $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. A matrisinin i. satır ve j. sütununun silinmesiyle elde edilen alt matris M_{ij} olsun. $|M_{ij}|$ determinantına, a_{ij} elemanının minörü denir. $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ ifadesine ise a_{ij} elemanının kofaktörü denir [2].

Teorem 1.28. A, $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. A matrisinin determinantı $i = 1, 2, \ldots, n$ için,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$$

ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için,

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}$$

dır. İlk yazılışa determinantın i. satıra göre açılımı ve ikinci yazılışa determinantın j. sütun açılımı denir [3].

Teorem 1.29. $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$ ise $|D| = d_1 d_2 \ldots d_n$ olur [3].

Teorem 1.30. A, $n \times n$ matrisinin tersinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $|A| \neq 0$ olmasıdır [3].

Teorem 1.31. A tersinir bir matris olsun. Bu durumda, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ 'dır [2].

Tanım 1.32. A, $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. A matrisinin, a_{ij} elemanının yerine, A_{ij} kofaktörünü yazarak elde edilen matrisin transpozuna, A matrisinin adjoint matrisi denir ve $adj(A)$ ile gösterilir [2].

Teorem 1.33. A, $n \times n$ boyutlu tersinir kare matris olsun. $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj(A)$ 'dır [3].

Tanım 1.34. x_1, x_2, …, x_n bilinmeyenler olmak üzere, $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$ şeklindeki denkleme n bilinmeyenli lineer denklem denir. Burada, b ve hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, ..., a_n$ katsayıları sabitlerdir [2].

Tanım 1.35. x_1, x_2, …, x_n bilinmeyenler olmak üzere;

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

şeklindeki sonlu tane lineer denklemden oluşan sisteme, n bilinmeyenli ve m denklemli bir lineer denklem sistemi denir. $n = m$ ise bu sisteme kare lineer sistem denir [2].

Bundan böyle bir lineer denklem sistemi kısaca lineer sistem veya sistem diye ifade edilecektir. Lineer denklem sistemi,

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

şeklinde gösterilebilir. Bu sistem $AX = B$ şeklinde yazılabilir. Burada, $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ matrislerine sırasıyla katsayılar, bilinmeyenler ve sabitler matrisi denir. X ve B ’nin her ikisinin de sütun vektörü olması durumunda, bunların yerine genellikle sırasıyla x ve b yazılır ve sistem $Ax = b$ ile gösterilir [2].

Teorem 1.36. (Cramer Metodu) $Ax = b$, n bilinmeyenli n denklemden oluşan lineer denklem sistemi olsun. $A = (a_{ij})$ katsayılar matrisi olmak üzere, $|A| \neq 0$ ise bu sistemin tek çözümü vardır ve bu çözüm;

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

ile belirlenir. Burada A_i matrisleri $(i = 1, 2, ..., n)$, A matrisinin $i.$ sütunu silinerek yerine b sütununun yazılmasıyla elde edilen matrislerdir [2].

Tanım 1.37. A bir $n \times n$ matris olsun. Eğer $Ax = \lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü varsa λ skalerine A'nın bir özdeğeri denir. x vektörüne de λ özdeğerine ilişkin (karşılık gelen) bir özvektör denir [2].

Tanım 1.38. A bir kare matris olmak üzere $P(\lambda) = |A - \lambda \mathrm{I}|$ polinomuna, A matrisinin karakteristik polinomu ve $|A - \lambda \mathrm{I}| = 0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir [2].

Teorem 1.39. A matrisi bir kare matris olsun. λ'nın A matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $|A - \lambda \mathrm{I}| = 0$ olmasıdır [2].

Teorem 1.40. (Cayley Hamilton Teoremi) Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar [2].

Teorem 1.41. Bir köşegen matrisin özdeğerleri, onun köşegen elemanlarıdır [2].

Teorem 1.42. A matrisi $n \times n$ boyutlu bir kare matris ve A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ise

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$$

eşitliği vardır [3].

Teorem 1.43. A matrisi $n \times n$ boyutlu kare matris ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ise

$$\text{iz}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$$

şeklindedir [3].

Teorem 1.44. A, $n\times n$ boyutlu matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin özdeğerlerinin tümünün sıfırdan farklı olmasıdır [2].

Tanım 1.45. A ve B kare matrisleri için $B=P^{-1}AP$ olacak şekilde tersinir bir P matrisi varsa A ve B matrislerine benzer matrisler denir [2].

Tanım 1.46. Bir A kare matrisi, bir köşegen D matrisine benzer ise bu A matrisine köşegenleştirilebilirdir denir [2].

Teorem 1.47. A kare matrisinin tüm özdeğerleri farklı ise A matrisi köşegenleştirilebilirdir [2].

Teorem 1.48. A kare matrisi köşegenleştirilebilir olsun. A matrisinin köşegenleştirilmesi ile oluşan köşegen matris D olmak üzere $A^k=PD^kP^{-1}$ eşitliği sağlanır [2].

BÖLÜM 2. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

2.1. Giriş

Leonardo Pisano (1170-1250), Orta Çağ'da yaşamış İtalyan matematikçidir. Matematikle ilgili yazılarında verdiği birkaç bilgi dışında hayatıyla ilgili pek fazla bilgi yoktur [5].

Fibonacci; 1170 yılında Pisa'da dünyaya geldi. Babası Guglielmo (William), başarılı bir tüccardı. Oğlunun da kendisi gibi ticaretle uğraşmasını istiyordu. Guglielmo, 1190 yılında gümrük görevlisi olarak Cezayir'in Bugia (bugünkü adı Bejaia) şehrine atandı ve Leonardo'yu da beraberinde Cezayir'e götürdü. Fibonacci, burada eğitim aldı. Öncelikle, Hint-Arap sayı sistemini ve bu sistemle hesaplama yöntemlerini öğrendi [6].

Fibonacci, ilerleyen yıllarda Mısır, Suriye, Yunanistan, Fransa ve İstanbul'a iş gezileri için sık sık gitti. Gittiği bu yerlerde, farklı sayı sistemleri üzerinde araştırmalar yaptı. Daha sonra Fibonacci, 1200 yılında Pisa'ya geri döndü. Burada Hint-Arap sayı sisteminin Roma sayı sistemine karşı üstünlüklerini savundu. Sonuç olarak, Fibonacci'nin son yıllarında, Avrupalılar Hint-Arap sayı sisteminin önemini anlamaya ve yavaş yavaş bu sistemi kullanmaya başlamışlardı. 18. yüzyılın sonunda Avrupa'nın büyük bir kısmı bu sayı sistemini kabul etmişti [6].

Otuzlu yaşlarında Fibonacci ilk kitabı olan ve Hesap Kitabı anlamına gelen *Liber Abaci'*yi yayınladı. Mısırlı matematikçi Abu Kamil'in bu kitaba ilham kaynağı olduğu söylenmektedir. Kitabın baş kısmında Hint-Arap sayı sistemi hakkında şu açıklama vardır: ''Hint sayı sisteminde dokuz rakam vardır: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Bu dokuz rakam ve sıfırı kullanarak bütün sayıların yazılabileceği aşağıda gösterilmiştir'' [7].

Fibonacci döneminde, *Liber Abaci* aritmetik bilgi için eksiksiz bir kaynak olarak kabul edilmiştir. Bu kitap, cebir ve aritmetikte yeni araştırmalara ilham kaynağı olmuş ve yüzlerce yıldır anahtar matematik kaynağı olarak kullanılmaya devam etmiştir [5].

Arap rakamları Avrupa'da daha önce de biliniyordu. Yarım asır önce Gerard bu sistemi Avrupa'ya getirmişti. Fakat daha önce yazılan hiçbir kitapta, Arap sayılarının Roma rakamlarına karşı üstünlükleri bu kadar zengin örneklerle gösterilmemişti. *Liber Abaci*, Fibonacci'nin yaşadığı dönemdeki tüm aritmetik yasaları içermekteydi. Orta Çağ'ın önemli bir eseri olmasının yanı sıra, *Liber Abaci* gelecek yüzyıllar için de bir model olarak kalacaktır [7].

Liber Abaci'den sonra Fibonacci üç kitap daha yazmıştır. 1220 yılında yazdığı *Practica Geometriae* sekiz bölümden oluşmaktadır. Bu kitap trigonometri ve geometri konularını büyük bir ustalıkla sunmaktadır [8].

Fibonacci'nin diğer iki kitabı; *Flos* ve *Liber Quadratorum* kitapları 1225 yılında yazılmıştır. *Flos* çeşitli problemler üzerine yazılmıştır. Bu kitapta Fibonacci ikinci dereceden denklemlerin çözümünde negatif değerlerin üzerinde durmuştur. *Liber Quadratorum*'da ise Fibonacci, ikinci dereceden diophant denklemlerin çözümleri üzerinde durmuştur [5].

Fibonacci, kendinden önce yapılmış Arap matematikçilerin çalışmalarının ötesine geçmedi. Fakat onun eserleri, eski soruların çözümlerine orijinal kanıtlar verecek yeni bakış açıları kazandırdı. Çok çeşitli matematiksel problemleri yaratıcı biçimde çözme becerisi, Fibonacci'nin Orta Çağ'ın büyük matematikçilerinden birisi olmasını sağlamıştır [5].

Fibonacci'nin günümüzde hatırlanmasının esas sebebi; Fibonacci sayı dizisidir. Fransız sayı kuramcı Édouard Lucas, Fibonacci'nin adını *Liber Abaci*'deki bir problemde görülen diziye vermiştir. Bu problem ünlü tavşan problemidir [7].

Tavşan problemi şu şekildedir: Bir adam etrafı duvarla çevrili kapalı bir alana, biri erkek biri dişi olmak üzere yeni doğmuş bir çift tavşan bırakmıştır. Yeni doğan bir çift tavşan, bir ay sonunda erişkin hale gelmektedir ve ikinci aydan sonra ise bu çiftin her ay, bir erkek ve bir dişi olmak üzere, bir çift yeni yavrusu olmaktadır. Bu kural tüm tavşan çiftleri için geçerlidir. Yıl boyunca hiçbir tavşan ölmediğine göre, bir yılın sonunda odadaki toplam tavşan çiftlerinin sayısını bulunuz [7].

Bu problemin çözümünü şu şekilde yapabiliriz: Kolaylık olması açısından ilk çift tavşanın 1 Ocak'ta doğduğunu ve kapalı alana bırakıldığını düşünelim. Ocak ayı boyunca bir çift tavşan olacaktır. 1 Şubat geldiğinde bu çift erişkin hale gelmiş olur fakat yeni bir çift doğmayacağı için şubat ayında da odada bir çift tavşan bulunur. 1 Mart geldiğinde, başlangıçtaki çiftin doğumundan itibaren iki ay geçtiği için, bu çiftin bir çift yavrusu olur. Böylece mart ayında iki çift tavşan olacaktır. 1 Nisan geldiğinde, ilk çiftin bir çift yavrusu daha olur, ikinci çift ise erişkin hale gelir. Nisan ayında odada üç çift tavşan olur. 1 Mayıs geldiğinde ise ilk çiftin ve ikinci çiftin birer çift yavrusu daha olur ve üçüncü çift ise erişkin hale gelir. Böylece 1 Mayıs tarihinde beş çift tavşan olur. Bu şekilde devam edilecek olursa, aylardaki toplam tavşan çifti sayısının,

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

şeklinde bir dizi oluşturduğu görülür [8].

Tavşan probleminin çözümüne bakıldığı zaman, herhangi bir aydaki tavşan çifti sayısı, önceki iki aydaki tavşan çifti sayısının toplamına eşittir. Tavşan probleminin çözümünde ortaya çıkan bu dizi Fibonacci dizisi olarak bilinir. Bu dizinin elemanları olan sayılar ise Fibonacci sayıları olarak adlandırılır [7].

Fibonacci, muhtemelen kendi dizisi ile ilgili bu özelliğin farkındaydı. Fakat dizi ile ilgili formülü kendisi ortaya koyamamıştır. Fibonacci dizisi ile ilgili formül ilk defa 1634 yılında Albert Girard tarafından yayınlanmıştır [9].

Fibonacci dizisinden başka özel diziler de mevcuttur. Bunlardan birisi de Lucas dizisidir. Bu dizi Édouard Lucas tarafından bulunmuştur.

François Édouard Anatole Lucas ya da bilinen adıyla Édouard Lucas, 1842 yılında Fransa'nın Amiens şehrinde dünyaya geldi. Matematik alanındaki yeteneği sayesinde, 1861 yılında Fransa'nın o dönem en prestijli yüksek öğrenim kurumu olan École Normale'de eğitimine başladı ve 1864 yılında buradaki eğitimini bitirdi. Daha sonra asistan olarak çalışmaya başladı. 1872 yılında, Lycée of Moulins'de matematik alanında profesör oldu. Lucas çok yetenekli ve eğlenceli bir öğretmendi. Lucas'ın kariyeri çok uzun sürmedi. 1891 yılında Marsilya'da katıldığı bir toplantıda yaşadığı bir kaza sonucunda oluşan enfeksiyon sebebiyle öldü [10].

2.2. Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları ve Altın Oran

Tanım 2.1. $n \geq 0$ ve F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere; $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde tanımlanan diziye Fibonacci dizisi denir [6].

Fibonacci sayıları;

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

şeklindedir. Fibonacci dizisinde, her terimin kendisinden önceki iki terimin toplamı olduğu bağıntısından yola çıkılarak negatif indisli Fibonacci sayıları da türetilebilir:

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1$$
$$F_{-2} = F_0 - F_{-1} = 0 - 1 = -1$$
$$F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 1 - (-1) = 2$$
$$F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -1 - 2 = -3$$
$$\vdots$$

Tanım 2.2. L_n, n. Lucas sayısı olmak üzere; $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ şeklinde tanımlanan diziye Lucas dizisi denir [5].

Lucas sayıları;

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, …

şeklindedir. Yine Fibonacci dizisinde olduğu gibi Lucas dizisinde de negatif indisli Lucas sayıları türetilebilir:

$$
\begin{aligned}
&L_{-1} = L_1 - L_0 = 1 - 2 = -1 \\
&L_{-2} = L_0 - L_{-1} = 2 - (-1) = 3 \\
&L_{-3} = L_{-1} - L_{-2} = -1 - 3 = -4 \\
&L_{-4} = L_{-2} - L_{-3} = 3 - (-4) = 7 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Görüldüğü üzere her $k \in \mathbb{Z}$ için $L_k \neq 0$ 'dır.

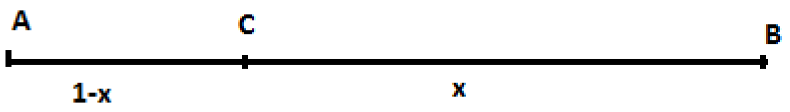
Tanım 2.3. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına altın oran adı verilir [11].

Altın oran, eski çağlardan bu yana birçok matematikçi, fizikçi, filozof, mimar hatta müzisyenin ilgisini çekmiştir. Altın oran ile ilgili bilinen ilk kitap, Luca Pacioli (1445-1519) tarafından yazılan ve 1509 yılında yayımlanan, *De Divina Proportione* adlı kitaptır [11].

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin pozitif köküdür. Bu oran matematikte çokça karşımıza çıkar. Bu sayı genellikle α ile gösterilir [12].

Altın oranın geometrideki örneklerinden birisi aşağıda verilmiştir.

$|AB| = 1$ olacak şekilde, $[AB]$ doğru parçasını ele alalım. Bu doğru parçasını $[AC]$ ve $[BC]$ olacak şekilde iki parçaya bölelim. Bu bölme işlemini, doğru parçasının tamamının büyük parçaya oranı, büyük parçanın küçük parçaya oranına eşit olacak şekilde yapalım.



Büyük parçaya x ve küçük parçaya $1-x$ denirse bu durumda;

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x} \tag{2.1}$$

veya (2.1) eşitliğine denk olarak,

$$x^2-x-1=0 \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir. (2.2) denkleminin pozitif kökü olan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın orana eşittir. Böyle bir C noktasından bölme işlemine altın bölme denir [12]. (2.2) denkleminin negatif kökü ise $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sayısıdır. Genellikle bu sayı β ile gösterilir [8].

α ve β sayıları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır [6].

$$\alpha^2=\alpha+1 \tag{2.3}$$

$$\beta^2=\beta+1 \tag{2.4}$$

$$\alpha^{-1}=-\beta \tag{2.5}$$

$$\beta^{-1}=-\alpha \tag{2.6}$$

$$\alpha\beta = -1 \tag{2.7}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3 \tag{2.8}$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{5} \tag{2.9}$$

$$\alpha + \beta = 1 \tag{2.10}$$

Altın oran birçok kaynakta Yunanca semboller olan Φ ve τ harfleri ile de gösterilir. Yine β sembolü yerine de birçok kaynakta Ψ sembolü kullanılmaktadır.

Bu tez boyunca $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak kullanılacaktır.

2.3. Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları ve Altın Oranla İlgili Bazı Özellikler

Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oranla ilişkili birçok özellik literatürde mevcuttur. Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı teoremler, geleneksel yöntemlerin gösterilmesi amacıyla ispatları ile beraber verilecektir.

Teorem 2.4. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$'dir [13].

İspat. İspat için, n üzerinden birinci tümevarım ilkesini kullanalım.
$F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$ olduğundan $n = 1$ için iddia doğrudur.
$n = k$ için eşitlik doğru olsun. $n = k + 1$ için de eşitliğin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$F_1 + F_2 + ... + F_{k+1} = (F_1 + F_2 + ... + F_k) + F_{k+1} = (F_{k+2} - 1) + F_{k+1}$$

$$F_1 + F_2 + ... + F_{k+1} = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$$

olur. Yani eşitlik $n = k + 1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.5. (Binet Formülü) Her $n \geq 1$ için $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$'dir [8].

İspat. $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ olsun. (2.9) ve (2.10) eşitlikleri göz önüne alındığında, $n = 1$ ve $n = 2$ için sırasıyla,

$$u_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$u_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

elde edilir. $n \geq 3$ için; (2.3), (2.4) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$u_{n-1} + u_{n-2} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^{n-2}(\alpha+1) - \beta^{n-2}(\beta+1)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\alpha^{n-2}\alpha^2 - \beta^{n-2}\beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = u_n$$

yani $u_{n-1} + u_{n-2} = u_n$ elde edilir. Böylece, $u_1 = F_1$, $u_2 = F_2$ ve $n \geq 3$ için $u_{n-1} + u_{n-2} = u_n$ bulunur. O halde her $n \geq 1$ için $F_n = u_n$ elde edilir. Buradan $n \geq 1$ için,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olur. ■

Teorem 2.5'te verilen formül Binet formülü olarak adlandırılır. Fransız matematikçi Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) tarafından 1843 yılında bulunmuştur. Fakat gerçekte bu formülü 1718 yılında ilk bulan Fransız matematikçi Abraham De

Moivre (1667-1754)‘dir. Ayrıca bunlardan bağımsız olarak 1844 yılında, Fransız matematikçi ve mühendis Gabriel Lame (1795-1870) tarafından da bulunmuştur [8].

Yardımcı Teorem 2.6. $n \geq 1$ için $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$’dir [8].

İspat. Teorem 2.5 ile (2.5) ve (2.6) eşitlikleri kullanılırsa;

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = \frac{(-1)^n(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} = \frac{(-1)^{n+1}(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1} F_n$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Yardımcı Teorem 2.7. $n \geq 0$ için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$’dir [8].

İspat. n üzerinden birinci tümevarım ilkesi uygulanırsa;

$n = 0$ için $\alpha^0 = 1 = 0\alpha + 1 = F_0\alpha + F_{-1}$ şeklindedir ve eşitlik doğrudur.

$n = 1$ için $\alpha^1 = \alpha = 1\alpha + 0 = F_1\alpha + F_0$ şeklindedir ve eşitlik doğrudur.

$n = k$ için eşitliğin doğruluğunu kabul edelim $n = k + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Tanım 2.1 ve (2.3) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\alpha^{k+1} &= \alpha^k \alpha = (\alpha F_k + F_{k-1})\alpha = \alpha^2 F_k + \alpha F_{k-1} \\
&= (\alpha + 1)F_k + \alpha F_{k-1} = \alpha F_k + \alpha F_{k-1} + F_k = \alpha(F_k + F_{k-1}) + F_k \\
&= \alpha F_{k+1} + F_k
\end{aligned}$$

bulunur ve $n = k + 1$ için eşitliğin doğruluğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. ■

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki ifade elde edilir.

Sonuç 2.8. $n \geq 0$ için $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$’dir [8].

Sonuç 2.9. $n \geq 1$ için $\alpha^{-n} = (-1)^{n+1}(\alpha F_n - F_{n+1})$ 'dir [8].

İspat. Sırasıyla, Yardımcı Teorem 2.7 ve Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha^{-n} &= \alpha F_{-n} + F_{-n-1} = \alpha F_{-n} + F_{-(n+1)} = \alpha(-1)^{n+1} F_n + (-1)^{n+2} F_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}(\alpha F_n - F_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.10. $n \geq 1$ için $\beta^{-n} = (-1)^{n+1}(\beta F_n - F_{n+1})$ 'dir [8].

İspat. Sonuç 2.8 ve Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \beta^{-n} &= \beta F_{-n} + F_{-n-1} = \beta F_{-n} + F_{-(n+1)} = \beta(-1)^{n+1} F_n + (-1)^{n+2} F_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}(\beta F_n - F_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.11. (Lucas Sayıları İçin Binet Formülü)
$n \geq 1$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$ 'dir [14].

İspat. İkinci tümevarım ilkesini uygulayalım.
(2.10) eşitliğinden; $L_1 = 1 = \alpha^1 + \beta^1$ olur. Önerme $n = 1$ için doğrudur.
$n = 1, 2, ..., k$ için $P(n)$ doğru olsun. $n = k+1$ için de $P(n)$'nin doğru olduğunu gösterelim. Sırasıyla, Tanım 2.2, tümevarım hipotezi, Sonuç 2.9 ve Sonuç 2.10 kullanılarak

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_{k-1} + L_k = \alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \alpha^k + \beta^k = \alpha^{k-1} + \alpha^k + \beta^{k-1} + \beta^k \\ &= \alpha^k(1+\alpha^{-1}) + \beta^k(1+\beta^{-1}) = \alpha^k(1+\alpha-1) + \beta^k(1+\beta-1) = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $P(n)$, $n=k+1$ için de doğrudur. ■

Yardımcı Teorem 2.12. $n \geq 1$ için $L_{-n} = (-1)^n L_n$'dir [15].

İspat. (2.5) ve (2.6) eşitliklerine göre $\alpha^{-n} = (-1)^n \beta^n$ ve $\beta^{-n} = (-1)^n \alpha^n$ yazılabilir. Buradan, Teorem 2.11 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
L_{-n} &= \alpha^{-n} + \beta^{-n} = (-1)^n \beta^n + (-1)^n \alpha^n = (-1)^n (\beta^n + \alpha^n) \\
&= (-1)^n L_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 2.13. $n \geq 1$ için $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$'dir [15].

İspat. Sırasıyla Teorem 2.5, (2.7) ve Teorem 2.11 dikkate alındığında,

$$
\begin{aligned}
F_{n-1} + F_{n+1} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n+1} - (\alpha\beta)\alpha^{n-1} + (\alpha\beta)\beta^{n-1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n (\alpha - \beta) + \beta^n (\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\
&= \alpha^n + \beta^n = L_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 2.14. $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$'dir [16].

İspat. Teorem 2.13'ten $L_{n-1} = F_{n-2} + F_n$ ve $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$ yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanarak

$$L_{n-1} + L_{n+1} = F_{n-2} + F_n + F_n + F_{n+2}$$

$$L_{n-1}+L_{n+1}=F_{n-2}+F_n+F_n+F_n+F_{n+1}=F_{n-2}+F_{n+1}+3F_n$$
$$=F_{n-2}+F_{n-1}+F_n+3F_n=F_n+F_n+3F_n=5F_n$$

elde edilir. ■

Teorem 2.15. $F_{n+h}F_{n+k}-F_nF_{n+h+k}=(-1)^nF_hF_k$ 'dir [17].

İspat. Sırasıyla, Teorem 2.5, (2.9) ve (2.7) dikkate alınırsa,

$$F_{n+h}F_{n+k}-F_nF_{n+h+k}=\frac{\alpha^{n+h}-\beta^{n+h}}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+k}-\beta^{n+k}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+h+k}-\beta^{n+h+k}}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^{2n+h+k}-\alpha^{n+h}\beta^{n+k}-\beta^{n+h}\alpha^{n+k}+\beta^{2n+h+k}}{5}-\frac{\alpha^{2n+h+k}-\alpha^n\beta^{n+h+k}-\beta^n\alpha^{n+h+k}+\beta^{2n+h+k}}{5}$$
$$=\frac{-\alpha^{n+h}\beta^{n+k}-\beta^{n+h}\alpha^{n+k}+\alpha^n\beta^{n+h+k}+\beta^n\alpha^{n+h+k}}{5}$$
$$=\frac{-(\alpha\beta)^n\alpha^h\beta^k-(\alpha\beta)^n\beta^h\alpha^k+(\alpha\beta)^n\beta^{h+k}+(\alpha\beta)^n\alpha^{h+k}}{5}$$
$$=\frac{(-1)^n[\beta^{h+k}+\alpha^{h+k}-\alpha^h\beta^k-\beta^h\alpha^k]}{5}=\frac{(-1)^n[\alpha^h(\alpha^k-\beta^k)-\beta^h(\alpha^k-\beta^k)]}{5}$$
$$=(-1)^n\frac{[(\alpha^h-\beta^h)(\alpha^k-\beta^k)]}{5}=(-1)^n\frac{(\alpha^h-\beta^h)}{\alpha-\beta}\frac{(\alpha^k-\beta^k)}{\alpha-\beta}$$
$$=(-1)^nF_hF_k$$

elde edilir. ■

Teorem 2.16. $a,b,c,d,r\in\mathbb{Z}$ ve $a+b=c+d$ olmak üzere;
$F_aF_b-F_cF_d=(-1)^r(F_{a-r}F_{b-r}-F_{c-r}F_{d-r})$ 'dir [18].

İspat. Teorem 2.15'te $n=c$, $h=a-c$ ve $k=b-c$ alınırsa,

$$F_aF_b-F_cF_{a+b-c}=(-1)^cF_{a-c}F_{b-c} \tag{2.11}$$

elde edilir. Yine Teorem 2.15'te $n=c-r$, $h=a-c$ ve $k=b-c$ alınırsa,

$$F_{a-r}F_{b-r}-F_{c-r}F_{a+b-c-r}=(-1)^{c-r}F_{a-c}F_{b-c} \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.11) ve (2.12) eşitlikleri birleştirildiğinde,

$$F_aF_b-F_cF_{a+b-c}=(-1)^r(F_{a-r}F_{b-r}-F_{c-r}F_{a+b-c-r}) \tag{2.13}$$

ve (2.13) eşitliğinde $a+b=c+d$ yazılırsa,

$$F_aF_b-F_cF_d=(-1)^r(F_{a-r}F_{b-r}-F_{c-r}F_{d-r})$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.17. $a,b,c,d,r\in\mathbb{Z}$ ve $a+b=c+d$ olmak üzere,
$F_aL_b-F_cL_d=(-1)^r(F_{a-r}L_{b-r}-F_{c-r}L_{d-r})$'dir [18].

İspat. Teorem 2.16'ya göre, sırasıyla, önce b yerine $b-1$, d yerine $d-1$ ve sonra b yerine $b+1$, d yerine $d+1$ yazılırsa,

$$F_aF_{b-1}-F_cF_{d-1}=(-1)^r(F_{a-r}F_{b-1-r}-F_{c-r}F_{d-1-r}) \tag{2.14}$$

ve

$$F_aF_{b+1}-F_cF_{d+1}=(-1)^r(F_{a-r}F_{b+1-r}-F_{c-r}F_{d+1-r}) \tag{2.15}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.14) ve (2.15) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$F_a(F_{b-1}+F_{b+1})-F_c(F_{d-1}+F_{d+1})=(-1)^r[F_{a-r}(F_{b-1-r}+F_{b+1-r})-F_{c-r}(F_{d-1-r}+F_{d+1-r})]$$

bulunur. Teorem 2.13 dikkate alınırsa, buradan da,

$$F_a L_b - F_c L_d = (-1)^r (F_{a-r} L_{b-r} - F_{c-r} L_{d-r})$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

2.4. Fibonacci ve Lucas Sayılarının Matrislerle İlişkisi

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının matrislerle olan ilişkisi incelenecektir.

2.4.1. Fibonacci Q Matrisi

Fibonacci sayıları ve matris ilişkisi denilince ilk akla gelen Fibonacci Q matrisidir:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin kuvvetleri alındığı zaman,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

olur. Q matrisinin, Q^2, Q^3 ve Q^4 matrislerinin elemanlarının Fibonacci sayılarından ibaret olduğu görülmektedir. Bu durumun genel ifadesi aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 2.18. $n \geq 1$ için $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$'dir [15].

İspat. İspatı birinci tümevarım ilkesini kullanarak yapalım.

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

olduğundan iddia $n=1$ için doğrudur. Şimdi $n=k$ için iddianın doğruluğunu kabul edelim ve $n=k+1$ için de doğru olduğunu görelim.

$$Q^{k+1} = Q^k Q = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1}+F_k & F_{k+1} \\ F_k+F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece iddia $n=k+1$ için de doğrudur. İspat tamamlanır. ■

Teorem 2.18, Q matrisinin tüm tamsayı kuvvetleri için kullanılabilir. $Q^0 = \mathrm{I}$ olur ve I matrisinin elemanları Teorem 2.18'i sağlar. Ayrıca Q matrisinin negatif tamsayı kuvvetleri için de negatif indisli Fibonacci sayıları ile karşılaşılacaktır. Bunun için ise Yardımcı Teorem 2.6 kullanılabilir.

Q matrisinin tarihçesi incelendiğinde, bu matrisin Charles King'in, *Some Properties of Fibonacci numbers of the Fibonacci Numbers (San Jose State College, 1960)* isimli master tezine dayandığı görülmektedir [19].

Şimdi Q matrisinin veya kuvvetlerinin determinantları ile ilişkili bazı sonuçlar verilecektir.

Teorem 2.19. $n \geq 1$ için $\left|Q^n\right| = (-1)^n$'dir [15].

İspat. $|Q| = -1$ olduğu açıktır. Buradan,

$$\left|Q^n\right| = \left|Q\right|^n = (-1)^n$$

elde edilir. ■

Teorem 2.20.(Cassini Formülü) $n \geq 1$ için $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ eşitliği vardır [8].

İspat. Q matrisinin tanımı dikkate alındığında, $\left|Q^n\right| = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ şeklindedir. Teorem 2.19'a göre, $\left|Q^n\right| = (-1)^n$ eşitliği vardır. Böylece $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ elde edilir. ■

Teorem 2.21. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2}$ eşitliği sağlanır [20].

İspat. Teorem 2.18 ve Fibonacci sayılarının tanımından,

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{pmatrix} = Q^{n-1} + Q^{n-2}$$

elde edilir. ■

Q matrisi ile altın oran arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.22. Q matrisinin özdeğerleri α ve β 'dır [15].

İspat. Q matrisinin özdeğerleri; $\mid Q - \lambda \mathrm{I} \mid = 0$ denkleminin kökleridir:

$$Q - \lambda \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

ve buradan,

$$| Q-\lambda I | = \lambda^2 - \lambda - 1$$

denkleminin köklerinin α ve β olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 2.23. $\left(\alpha, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ve $\left(\beta, \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, Q matrisinin ilişkili özdeğer özvektör ikililerindendir [5].

İspat. $Qx = \alpha x$ ve $Qx = \beta x$ lineer denklem sistemleri kullanılarak kolaylıkla elde edilir. ■

2.4.2. *R* MATRİSİ

R matrisi,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olan matristir. Bu matris Q matrisi yardımıyla Lucas sayılarını bulmaya yarayan matristir ve Hoggatt ile Ruggles tarafından 1963 yılında ortaya konulmuştur [8].

Bu matrisin Lucas sayıları ile olan ilişkisi aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 2.24. $RQ^n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$'dir [8].

İspat. Sırasıyla, Teorem 2.18 ve Teorem 2.13 dikkate alınırsa,

$$RQ^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + 2F_n & F_n + 2F_{n-1} \\ 2F_{n+1} - F_n & 2F_n - F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$RQ^n = \begin{pmatrix} F_{n+2} + F_n & F_{n+1} + F_{n-1} \\ F_{n+1} + F_{n-1} & F_n + F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

2.4.3. Kuvvetleri Fibonacci Sayıları ile İlişkili Diğer Matrisler

Bu bölümde kuvvetleri Fibonacci sayıları ile ilişkili olan 2×2 boyutlu farklı matrislerin elde edilmesi incelenecektir.

Yardımcı Teorem 2.25. X bir kare matris ve $X^2 = X + \mathrm{I}$ olsun. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $X^n = F_n X + F_{n-1}\mathrm{I}$ 'dır [21].

İspat. $X^0 = \mathrm{I} = 0X + \mathrm{I} = F_0 X + F_{-1}\mathrm{I}$ olduğundan $n = 0$ için iddia doğrudur.
$n \geq 1$ için birinci tümevarım ilkesini kullanalım.
$X^1 = X = X + 0\mathrm{I} = F_1 X + F_0 \mathrm{I}$ olduğundan iddia $n = 1$ için doğrudur.
$n = k$ için iddia doğru olsun. Gösterilmesi gereken $n = k + 1$ için de iddianın doğru olduğudur.

$$X^{k+1} = X^k X = (F_k X + F_{k-1}\mathrm{I})X = F_k X^2 + F_{k-1} X$$

elde edilir. Buradan, $X^2 = X + \mathrm{I}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= F_k (X + \mathrm{I}) + F_{k-1} X = (F_k + F_{k-1})X + F_k \mathrm{I} \\ &= F_{k+1} X + F_k \mathrm{I} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n = 0$ ve her $n \geq 1$ için iddianın doğru olduğu görülür. İspatın tamamlanması için, $n \geq 1$ için $X^{-n} = F_{-n} X + F_{-n-1}\mathrm{I}$ olduğunu göstermek gerekir. Öncelikle $X^2 = X + \mathrm{I}$ olduğundan, $X(X - \mathrm{I}) = \mathrm{I}$ ve buradan X 'in tersinir olup $X^{-1} = X - \mathrm{I}$ veya denk olarak, $-X^{-1} = \mathrm{I} - X$ olduğu görülür. Şimdi

$$Y = \mathrm{I} - X = -X^{-1}$$

olsun. Buradan,

$$Y^2 = (\mathrm{I} - X)^2 = \mathrm{I} - 2X + X^2 = \mathrm{I} - 2X + X + \mathrm{I} = \mathrm{I} + \mathrm{I} - X$$

veya

$$Y^2 = \mathrm{I} + Y \qquad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) eşitliği dikkate alınarak birinci tümevarım ilkesinden her $n \geq 1$ için $Y^n = F_n Y + F_{n-1}\mathrm{I}$ olduğu kolayca görülür. Buradan, her $n \geq 1$için,

$$\begin{aligned}(-X^{-1})^n &= F_n(-X^{-1}) + F_{n-1}\mathrm{I} = F_n(\mathrm{I} - X) + F_{n-1}\mathrm{I} \\ &= -F_n X + (F_{n-1} + F_n)\mathrm{I} = -F_n X + F_{n+1}\mathrm{I}\end{aligned}$$

olur. Buradan Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}X^{-n} &= (-1)^{n+1} F_n X + (-1)^n F_{n+1}\mathrm{I} \\ &= F_{-n} X + F_{-n-1}\mathrm{I}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Bu sonuç kullanılarak Teorem 2.18’in $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesine genelleştirilmesi olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.26. $n \in \mathbb{Z}$ için $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$’dir [21].

Kuvvetleri Fibonacci sayıları ile ilişkili olan ve Q matrisinden farklı olan 2×2

boyutlu matrisler elde etmeye çalışalım. Özdeğerleri, α ve β olan, keyfi 2×2 boyutlu matrisleri ele alalım. K bu özelliği sağlayan herhangi bir matris olsun. Bu durumda K'nın karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ olacaktır. Cayley Hamilton Teoremine göre K matrisi kendi karakteristik denklemini sağlayacaktır. Dolayısıyla $K^2 = K + \mathrm{I}$ elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 2.25'ten dolayı, her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$K^n = F_n K + F_{n-1}\mathrm{I}$$

olacaktır. Genelliği bozmaksızın;

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

olsun. Özdeğerlerin toplamı matrisin izi, çarpımı matrisin determinantı olacağından ve $\alpha+\beta = 1$ ile $\alpha\beta = -1$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a + d &= 1 \\ ad - bc &= -1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

bulunur. Eğer $b = c = 0$ ise,

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu nedenle genelliği bozmaksızın b ve c'den en az biri, diyelim ki $b \neq 0$ olsun. Bu durumda, (2.17) eşitliklerinden,

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1+a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

elde edilir. Bununla birlikte K'nın özdeğerlerinin α ve β olduğu hipotezi dikkate alındığında, $K^2 = K + \mathrm{I}$ koşulunu sağlandığı kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla K matrisi Yardımcı Teorem 2.25'in koşullarını sağlar. Buradan,

$$K^n = \begin{pmatrix} aF_n + F_{n-1} & bF_n \\ \dfrac{1+a-a^2}{b}F_n & (1-a)F_n + F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

elde edilir [22].

(2.18) ve (2.19) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki özel matrisler ve ilişkili özellikler elde edilir.

Sonuç 2.27. $S = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ olmak üzere; $S^n = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_n/2 & 5F_n/2 \\ F_n/2 & L_n/2 \end{pmatrix}$'dir [21].

Sonuç 2.28. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere; $S^n = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_n \\ -F_n & -F_{n-2} \end{pmatrix}$'dir [22].

Elde edilen bu matrisler yardımıyla bazı özelliklerin ispatı yapılabilir. Örneğin, Teorem 2.20'de, Q matrisinin determinantı kullanılarak Cassini formülünün ispatı yapılmıştı. Bu formüle benzer olarak, Sonuç 2.27'de elde edilen matrisin determinantı alınarak, $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ eşitliği elde edilir [21].

BÖLÜM 3. Q VE R MATRİSLERİ İLE İLİŞKİLİ KOMBİNASYONEL ÖZELLİKLER

Bu bölümde, önce Q matrisinin herhangi iki tamsayı kuvvetinin lineer bileşiminin yine Q matrisinin bir tamsayı kuvveti olması problemi ele alınacaktır. Elde edilen sonuçlar yardımıyla, Fibonacci sayıları ve Lucas sayılarına dair iyi bilinen bazı özelliklerin ispatları farklı bir biçimde verilecektir. Bundan başka literatür taramasında rastlamadığımız bazı ilave özellikler de elde edilecektir.

3.1. $aQ^n + bQ^m = Q^k$ Matris Denkleminin Çözümleri

Teorem 2.21'e göre $n \in \mathbb{Z}$ için $Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2}$ şeklindedir. Buradan, bu özelliğin iç içe kullanılmasından,

$$Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2} = Q^{n-2} + Q^{n-3} + Q^{n-2} = 2Q^{n-2} + Q^{n-3} = \dots$$

olduğu görülür. Buradan, n, m ve k birer tamsayı olmak üzere Q^k matrisinin, Q^n ve Q^m matrislerinin lineer bileşimi şeklinde yazılabilmesi problemi ele alınabilir:

$$aQ^n + bQ^m = Q^k \tag{3.1}$$

(3.1) denkleminde, Q^n, Q^m ve Q^k matrisleri yerine Teorem 2.18 yardımıyla elde edilen değerler yazılırsa,

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$$

eşitliğinin

$$a\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

eşitliğine denk olduğu görülür. (3.2) denkleminden,

$$\begin{pmatrix} aF_{n+1} + bF_{m+1} & aF_n + bF_m \\ aF_n + bF_m & aF_{n+1} + bF_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

elde edilir. İki matrisin eşitliği dikkate alınarak (3.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} aF_{n+1} + bF_{m+1} &= F_{k+1} \\ aF_n + bF_m &= F_k \\ aF_{n-1} + bF_{m-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

lineer denklemler sistemi elde edilir. (3.4) denklem sistemindeki ikinci ve üçüncü denklemler taraf tarafa toplanırsa, ilk denklem elde edilir. Yani, ilk denklem diğer iki denklemle lineer bağımlıdır. O halde sadece ikinci ve üçüncü denklem alınarak oluşan,

$$\begin{aligned} aF_n + bF_m &= F_k \\ aF_{n-1} + bF_{m-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

denklem sistemi (3.4) sistemine denktir. Yani (3.5) sistemini çözmek yeterli olacaktır. (3.5) denklem sisteminin matris biçimi,

$$\begin{pmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

şeklindedir. (3.6) matris denkleminin çözümü ve çözüm sayısı,

$$\begin{pmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1} \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisinin determinantı ile ilişkilidir. Bu matrisin determinantı,

$$\begin{vmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1} \end{vmatrix} = F_n F_{m-1} - F_m F_{n-1} \tag{3.7}$$

olur. (3.7)'de $n+(m-1)=m+(n-1)$ olduğundan $a=n$, $b=m-1$, $c=m$, $d=n-1$ ve $r=n-1$ alınarak, Teorem 2.16'dan,

$$\begin{vmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1} \end{vmatrix} = F_n F_{m-1} - F_m F_{n-1} = (-1)^{n-1}(F_1 F_{m-n} - F_{m-n+1} F_0) = (-1)^{n-1} F_{m-n} \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinde görüldüğü üzere determinant $n=m$ için sıfır olur. $n \neq m$ için ise sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla bu iki durumu ayrı ayrı ele alalım.

Durum I. *$n=m$ Durumu:*

Bu durumda (3.5) sistemi,

$$\begin{aligned} aF_n + bF_n &= F_k \\ aF_{n-1} + bF_{n-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

veya (3.9) sistemine denk olarak,

$$\begin{aligned} (a+b)F_n &= F_k \\ (a+b)F_{n-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

sistemine dönüşür. Şimdi (3.10) sistemini k'nın değerlerine göre inceleyelim.

(i) $k=n$ *durumu*: Bu durumda (3.10) sistemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}(a+b)F_n &= F_n \\ (a+b)F_{n-1} &= F_{n-1}\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Buradan, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a,b)=(t,1-t)$ şeklindeki her sıralı ikili (3.11) sisteminin bir çözümü olduğu görülür. Yani, $n=m=k$ için (3.1) matris denkleminin veya denk olarak (3.4) sisteminin, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a,b)=(t,1-t)$ şeklinde sonsuz çoklukta çözümü elde edilir.

(ii) $k \neq n$ *durumu*: Bu durumda (3.10) sistemi,

$$\begin{aligned}(a+b)F_n &= F_k \\ (a+b)F_{n-1} &= F_{k-1}\end{aligned} \tag{3.12}$$

sistemine dönüşür. (3.12) denklem sistemi aşağıdaki gibi incelenebilir.

$n=0$ olsun. $(a+b)F_n = F_k$ denkleminden, $F_k = 0$ ve buradan $k=0$ bulunur. Bu ise $n \neq k$ olması ile çelişir.

$n=1$ olsun. $(a+b)F_{n-1} = F_{k-1}$ denkleminden, $F_{k-1} = 0$ ve buradan $k=1$ bulunur. Bu ise $n \neq k$ olması ile çelişir.

Şimdi, $n \neq 0$ ve $n \neq 1$ olsun. Bu durumda; F_{n-1} ve F_n sıfırdan farklı olur. (3.12) denklem sistemindeki denklemlerden,

$$a+b = \frac{F_{k-1}}{F_{n-1}} = \frac{F_k}{F_n} \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir. (3.13) düzenlenirse

$$F_{k-1}F_n - F_k F_{n-1} = 0 \tag{3.14}$$

bulunur. Teorem 2.16'da $a=k-1$, $b=n$, $c=k$, $d=n-1$ ve $r=n-1$ alınarak (3.14)'ten,

$$0=F_{k-1}F_n-F_kF_{n-1}=(-1)^{n-1}(F_{k-n}F_1-F_{k-n+1}F_0)=(-1)^{n-1}F_{k-n} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15)'ten $F_{k-n}=0$ ve $n=k$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Yani, (3.12) denklem sistemini sağlayan a ve b sayıları yoktur. Sonuç olarak, $m=n\neq k$ için, (3.1) denkleminin veya denk olarak (3.4) denklem sisteminin çözümü yoktur.

Durum II. *$n\neq m$ Durumu*

$n\neq m$ olması durumunda; (3.7) determinantı sıfırdan farklıdır. Bu durumda, (3.5) denklem sisteminin tek çözümü vardır. Bu sistem Cramer metodu ve Teorem 2.16 yardımıyla

$$a=\frac{\begin{vmatrix} F_k & F_m \\ F_{k-1} & F_{m-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1}\end{vmatrix}}=\frac{F_kF_{m-1}-F_mF_{k-1}}{F_nF_{m-1}-F_mF_{n-1}}=\frac{(-1)^{m-1}(F_{k-m+1}F_0-F_1F_{k-m})}{(-1)^{m-1}(F_{n-m+1}F_0-F_1F_{n-m})}=\frac{(-1)^mF_{k-m}}{(-1)^mF_{n-m}}=\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} F_n & F_k \\ F_{n-1} & F_{k-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1}\end{vmatrix}}=\frac{F_nF_{k-1}-F_kF_{n-1}}{F_nF_{m-1}-F_mF_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}(F_1F_{k-n}-F_{k-n+1}F_0)}{(-1)^{n-1}(F_1F_{m-n}-F_{m-n+1}F_0)}=\frac{(-1)^{n-1}F_{k-n}}{(-1)^{n-1}F_{m-n}}=\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}$$

olarak bulunur. Yani, $n\neq m$ için (3.1) matris denkleminin veya denk olarak (3.4) sisteminin tek çözümü vardır. Sonuç olarak, $n\neq m$ için $a=\dfrac{F_{k-m}}{F_{n-m}}$ ve $b=\dfrac{F_{k-n}}{F_{m-n}}$ tek çözümü elde edilir.

Bütün bu yapılanlar aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 3.1. $aQ^n + bQ^m = Q^k$ matris denklemi,

(i) $n = m = k$ olması durumunda sonsuz çoklukta çözüme sahiptir; $(a,b) = (t,1-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $n = m \neq k$ olması durumunda çözüme sahip değildir.

(iii) $n \neq m$ olması durumunda her k tamsayısı için yalnızca, $a = \dfrac{F_{k-m}}{F_{n-m}}$ ve $b = \dfrac{F_{k-n}}{F_{m-n}}$ çözümüne sahiptir.

Şimdi Teorem 3.1'deki durumları açıklamak amacıyla sayısal örnekler vereceğiz.

Örnek 3.2. $a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5$ eşitliğini sağlayan a ve b değerlerini bulmaya çalışırsak; $n = m = k = 5$ olduğundan, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a,b) = (t,1-t)$ şeklinde sonsuz çoklukta çözüm vardır. Gerçekten de,

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5$$

$$a\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(a+b)\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a + b = 1$$

elde edilir. Buradan $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a,b) = (t,1-t)$ şeklinde sonsuz çoklukta çözüm vardır.

Örnek 3.3. $a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4$ eşitliğini sağlayan a ve b değerleri $n = m \neq k$ olduğundan dolayı yoktur. Gerçekten,

$$a\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

veya denk olarak,

$$\begin{aligned}3a+3b&=5\\ 2a+2b&=3\\ a+b&=2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin çözümü olmadığı kolayca görülür.

Örnek 3.4. $a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^3+b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^8$ eşitliğini sağlayan a ve b değerlerini bulamaya çalışırsak; $n\neq m$ olduğu için denklemin tek çözümü vardır. Bu değerler;

$$a=\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}=\frac{F_{8-6}}{F_{3-6}}=\frac{F_2}{F_{-3}}=\frac{1}{2}$$

$$b=\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}=\frac{F_{8-3}}{F_{6-3}}=\frac{F_5}{F_3}=\frac{5}{2}$$

şeklinde bulunur. Gerçekten,

$$a\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 21\\ 21 & 13\end{pmatrix}$$

matris denkleminden,

$$\begin{aligned}3a+13b&=34\\ 2a+8b&=21\\ a+5b&=13\end{aligned}\qquad(3.16)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemde ikinci ve üçüncü denklem taraf tarafa toplandığında ilk denklem elde edilir. Yani (3.16) sistemine denk olarak,

$$\begin{aligned} 2a+8b&=21 \\ a+5b&=13 \end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.17) sistemi çözüldüğünde, $a=\frac{1}{2}$ ve $b=\frac{5}{2}$ olacak şekilde tek çözümün olduğu görülür.

Teorem 3.1'de $n\neq m$ için $a=\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}$ ve $b=\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}$ yazılarak,

$$\begin{aligned} \frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}F_{n+1}+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}F_{m+1}&=F_{k+1} \\ \frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}F_{n}+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}F_{m}&=F_{k} \\ \frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}F_{n-1}+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}F_{m-1}&=F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.18)'de birinci ve ikinci eşitlik taraf tarafa toplanır ve Tanım 2.1 dikkate alınırsa,

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}F_{n+2}+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}F_{m+2}=F_{k+2} \tag{3.19}$$

eşitliği de elde edilir. Bu yolla (3.19) gibi eşitlikler çoğaltılabilir. Tüm bu eşitlikleri kapsayacak genelleştirme aşağıdaki sonuçta içerilmektedir.

Sonuç 3.5. $n\neq m$ olmak üzere her $n,m,k,c\in\mathbb{Z}$ için $\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}F_{n+c}+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}F_{m+c}=F_{k+c}$ eşitliği vardır.

İspat. $n,m,k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $n\neq m$ için $aQ^n+bQ^m=Q^k$ denkleminin tek çözümünün olduğu gösterilmişti ve bu denklemin sonucu olarak (3.18)'de, $\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}F_n+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}F_m=F_k$ eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlikte $c\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, n yerine $n+c$, m yerine $m+c$ ve k yerine $k+c$ yazılırsa;

$$\frac{F_{(k+c)-(m+c)}}{F_{(n+c)-(m+c)}}F_{n+c}+\frac{F_{(k+c)-(n+c)}}{F_{(m+c)-(n+c)}}F_{m+c}=F_{k+c}$$

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}F_{n+c}+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}F_{m+c}=F_{k+c}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.5 kullanılarak farklı eşitlikler elde edilebilir.

Sonuç 3.5'te m yerine $n+1$, k yerine $2n$ ve $c=0$ alınarak,

$$F_{2n}=\frac{F_{n-1}}{F_{-1}}F_n+\frac{F_n}{F_1}F_{n+1} \tag{3.20}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.6'ya göre $F_{-1}=1$'dir. Bu (3.20)'de yazılırsa,

$$F_{2n}=F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}=F_n(F_{n-1}+F_{n+1}) \tag{3.21}$$

eşitliği bulunur. (3.21) eşitliğinde, Teorem 2.13 dikkate alınırsa, [8] çalışmasında Corollary 5.5 olarak yer alan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $F_{2n}=F_nL_n$'dir [8].

Sonuç 3.5'te n yerine $n+1$, m yerine $n-1$, k yerine $2n$ ve $c=0$ alınır ve Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınırsa, [11] çalışmasında Lemma 7 olarak yer alan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.7. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ 'dir [11].

Sonuç 3.5'de n yerine p, m yerine $p-1$, k yerine r ve $c=0$ konulur ve Yardımcı Teorem 2.16 dikkate alınırsa, [8]'in 88. sayfasındaki 6. özellik olarak yer alan aşağıdaki özellik elde edilir.

Sonuç 3.8. Her $r, p \in \mathbb{Z}$ için $F_r = F_p F_{r-p+1} + F_{p-1} F_{r-p}$ 'dir [8].

Sonuç 3.9. $F_{2n+1} = F_{n-1}^2 + 2F_n F_{n+1}$ 'dir [23].

İspat. Sonuç 3.5'de $c=2$ ve $c=-n+2$ alınırsa sırasıyla,

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n+2} + \frac{F_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m+2} = F_{k+2} \tag{3.22}$$

ve

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}} F_2 + \frac{F_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m-n+2} = F_{k-n+2} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.22) eşitliğinden; (3.23) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}} (F_{n+2} - 1) + \frac{F_{k-n}}{F_{m-n}} (F_{m+2} - F_{m-n+2}) = F_{k+2} - F_{k-n+2} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) eşitliğinde, k yerine $2n-1$, m yerine $n+1$ yazılır ve Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınırsa,

$$\frac{F_{2n-1-n-1}}{F_{n-n-1}} (F_{n+2} - 1) + \frac{F_{2n-1-n}}{F_{n+1-n}} (F_{n+1+2} - F_{n+1-n+2}) = F_{2n-1+2} - F_{2n-1-n+2}$$

$$\frac{F_{n-2}}{F_{-1}} (F_{n+2} - 1) + \frac{F_{n-1}}{F_1} (F_{n+3} - F_3) = F_{2n+1} - F_{n+1}$$

$$F_{n-2}F_{n+2}-F_{n-2}+F_{n-1}F_{n+3}-2F_{n-1}=F_{2n+1}-F_{n+1}$$

$$F_{n-2}F_{n+2}-F_{n-2}+F_{n-1}F_{n+3}-2F_{n-1}+F_{n+1}=F_{2n+1} \tag{3.25}$$

eşitliği bulunur. (3.25) eşitliği Tanım 2.1 kullanılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
F_{2n+1} &= F_{n-2}F_{n+2}-F_{n-2}+F_{n-1}F_{n+3}+F_{n-2}\\
&= F_{n-2}F_{n+2}+F_{n-1}F_{n+3}\\
&= (F_n-F_{n-1})F_{n+2}+F_{n-1}(F_{n+1}+F_{n+2})\\
&= F_nF_{n+2}-F_{n-1}F_{n+2}+F_{n-1}F_{n+1}+F_{n-1}F_{n+2}\\
&= F_nF_{n+2}+F_{n-1}F_{n+1}\\
&= F_n(F_{n+1}+F_n)+F_{n-1}(F_{n-1}+F_n)\\
&= F_nF_{n+1}+F_nF_n+F_{n-1}F_{n-1}+F_{n-1}F_n\\
&= F_nF_{n+1}+F_n(F_n+F_{n-1})+F_{n-1}F_{n-1}\\
&= F_nF_{n+1}+F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_{n-1}
\end{aligned}$$

yani,

$$F_{2n+1}=F_{n-1}^2+2F_nF_{n+1} \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 3.10. $n\geq 1$ için $F_n\sum_{i=1}^{n}F_i+F_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}F_i=F_{2n+3}-F_{n+2}$ ’dir.

İspat. (3.24) eşitliğinde, m yerine $n+1$, k yerine $2n+1$ alınır ve Tanım 2.1 ile Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınırsa,

$$\frac{F_n}{F_{-1}}(F_{n+2}-1)+\frac{F_{n+1}}{F_1}(F_{n+3}-F_3)=F_{2n+3}-F_{n+3}$$

$$F_n(F_{n+2}-1)+F_{n+1}(F_{n+3}-2)=F_{2n+3}-F_{n+3}$$
$$F_n(F_{n+2}-1)+F_{n+1}(F_{n+3}-1)-F_{n+1}=F_{2n+3}-F_{n+3}$$
$$F_n(F_{n+2}-1)+F_{n+1}(F_{n+3}-1)=F_{2n+3}-F_{n+3}+F_{n+1}$$

$$F_n(F_{n+2}-1)+F_{n+1}(F_{n+3}-1)=F_{2n+3}-F_{n+2} \tag{3.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.27) eşitliğinde $n \geq 1$ için Teorem 2.4 dikkate alınırsa,

$$F_n\sum_{i=1}^{n}F_i+F_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}F_i=F_{2n+3}-F_{n+2}$$

bulunur. ■

Kısım 2.4.3'te özdeğerleri, $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olan 2×2 boyutlu K matrisi incelenmişti. Şimdi K matrisi, bu özelliklere sahip herhangi bir matris olsun. (3.1) matris denklemi, Q matrisi yerine K matrisi alınarak, yeniden incelenebilir:

$$aK^n+bK^m=K^k \tag{3.28}$$

K matrisinin özdeğerleri farklı iki reel değer olduğu için K matrisi köşegenleştirilebilirdir. Buradan genelliği bozmaksızın, S tersinir matris ve

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

olmak üzere $K=S\Lambda S^{-1}$ şeklinde yazılabilir. K matrisinin bu şekli, (3.28) eşitliğinde yazılırsa,

$$a\left(S\Lambda^nS^{-1}\right)+b\left(S\Lambda^mS^{-1}\right)=S\Lambda^kS^{-1} \tag{3.30}$$

elde edilir. Sonra (3.30) eşitliği düzenlenirse,

$$S\left(a\Lambda^n + b\Lambda^m\right)S^{-1} = S\Lambda^k S^{-1}$$

veya denk olarak,

$$a\Lambda^n + b\Lambda^m = \Lambda^k \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31)'de, (3.29) dikkate alındığında,

$$a\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n + b\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k$$

veya denk olarak,

$$a\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \alpha^m & 0 \\ 0 & \beta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

olur. (3.32) düzenlenerek,

$$\begin{pmatrix} a\alpha^n + b\alpha^m & 0 \\ 0 & a\beta^n + b\beta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix}$$

veya denk olarak,

$$\begin{aligned} a\alpha^n + b\alpha^m &= \alpha^k \\ a\beta^n + b\beta^m &= \beta^k \end{aligned} \tag{3.33}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sistemi ile, (3.28) matris denklemi denktir. (3.33) denklem sisteminde, Yardımcı Teorem 2.7 ve Sonuç 2.8 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}a(\alpha F_n + F_{n-1}) + b(\alpha F_m + F_{m-1}) &= \alpha F_k + F_{k-1}\\ a(\beta F_n + F_{n-1}) + b(\beta F_m + F_{m-1}) &= \beta F_k + F_{k-1}\end{aligned} \tag{3.34}$$

sistemi elde edilir. (3.34) sistemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\alpha(aF_n + bF_m) + aF_{n-1} + bF_{m-1} &= \alpha F_k + F_{k-1}\\ \beta(aF_n + bF_m) + aF_{n-1} + bF_{m-1} &= \beta F_k + F_{k-1}\end{aligned} \tag{3.35}$$

ve (3.35) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(\alpha - \beta)(aF_n + bF_m) = (\alpha - \beta)F_k$$

$$aF_n + bF_m = F_k \tag{3.36}$$

elde edilir. Yine, (3.35) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve (3.36) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(aF_n + bF_m) + 2aF_{n-1} + 2bF_{m-1} &= (\alpha + \beta)F_k + 2F_{k-1}\\ (aF_n + bF_m) + 2aF_{n-1} + 2bF_{m-1} &= F_k + 2F_{k-1}\\ F_k + 2aF_{n-1} + 2bF_{m-1} &= F_k + 2F_{k-1}\end{aligned}$$

yani,

$$aF_{n-1} + bF_{m-1} = F_{k-1} \tag{3.37}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.28) matris denklemi veya denk olarak (3.33) denklem sisteminin,

$$\begin{aligned}aF_n + bF_m &= F_k\\ aF_{n-1} + bF_{m-1} &= F_{k-1}\end{aligned} \tag{3.38}$$

denklem sistemine denk olduğu görülür. Böylece, (3.1) matris denklemi ile (3.28) matris denklemlerinin denk olduğu görülür.

(3.28) denklemi için köşegenleştirme yardımıyla yapılan ispat (3.1) denklemi için de yapılabilir. Çünkü Q matrisi de yukarıdaki K matrisinin özel bir halidir. Diğer bir deyişle, (3.1) matris denklemi (3.28) matris denkleminin özel halidir.

3.2. $aRQ^n + bRQ^m = RQ^k$ Matris Denkleminin Çözümleri

(3.1) denkleminin çözümleri kullanılarak, bazı eşitliklerin bulunabileceği görülmüştür. Şimdi buna benzer olarak Q ve R matrislerini içeren benzer denklemler incelenecektir.

n, m ve k birer tamsayı ve $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$aRQ^n + bRQ^m = RQ^k \tag{3.39}$$

denklemini inceleyelim. R matrisi tersinir olduğundan, (3.39) denkleminin her iki yanı soldan R^{-1} ile çarpılırsa ve (3.39) düzenlenirse,

$$R^{-1}R(aQ^n + bQ^m) = R^{-1}RQ^k$$

veya denk olarak,

$$aQ^n + bQ^m = Q^k$$

elde edilir. Buradan, (3.39) matris denklemi ve (3.1) matris denkleminin denk olduğu görülür. Yani bu matris denklemleri aynı çözüme sahiptirler. Öte yandan, Teorem 2.24 ve (3.39) denklemi dikkate alınırsa,

$$a\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

denklemine dönüştüğü görülür. (3.40) matris eşitliği

$$\begin{aligned} &aL_{n+1} + bL_{m+1} = L_{k+1} \\ &aL_n + bL_m = L_k \\ &aL_{n-1} + bL_{m-1} = L_{k-1} \end{aligned} \tag{3.41}$$

denklem sistemini verir. (3.41) sistemindeki ikinci ve üçüncü denklemler taraf tarafa toplanırsa birinci denklem elde edilir. Yani, ilk denklem, diğer iki denklemle lineer bağımlıdır. O halde sadece ikinci ve üçüncü denklem alınarak elde edilen,

$$\begin{aligned} &aL_n + bL_m = L_k \\ &aL_{n-1} + bL_{m-1} = L_{k-1} \end{aligned} \tag{3.42}$$

denklem sistemi (3.41) denklem sistemine denktir. Sonuç olarak, (3.42) sistemi ile (3.5) sistemi aynı çözüme sahip olacaktır. Buradan yola çıkılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.11. $n, m, k, c \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq m$ için $\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}} L_{n+c} + \frac{F_{k-n}}{F_{m-n}} L_{m+c} = L_{k+c}$ ’dir.

İspat. (3.18)’de elde edilen,

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n-1} + \frac{F_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m-1} = F_{k-1}$$

ve

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n+1} + \frac{F_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m+1} = F_{k+1}$$

eşitlikleri, önce sırasıyla taraf tarafa toplanırsa ve daha sonra Teorem 2.13 kullanılırsa,

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}(F_{n-1}+F_{n+1})+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}(F_{m-1}+F_{m+1})=F_{k-1}+F_{k+1}$$

ve

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}L_n+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}L_m=L_k \tag{3.43}$$

elde edilir. (3.43) eşitliğinde, n yerine $n+c$, m yerine $m+c$ ve k yerine $k+c$ yazılırsa,

$$\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}L_{n+c}+\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}L_{m+c}=L_{k+c}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.11 kullanılarak bazı özelliklerin ispatı aşağıdaki gibidir.

Sonuç 3.11’de n yerine p, m yerine $p-1$, k yerine r ve $c=0$ konur ve Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınırsa, [8] çalışmasındaki, 88. sayfadaki 7. özellik olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.12. Her $r, p \in \mathbb{Z}$ için $L_r = L_p F_{r-p+1} + L_{p-1} F_{r-p}$ ’dir [8].

Sonuç 3.11’de önce m yerine $n+1$, k yerine $2n$, $c=0$ alınırsa ve sonra Yardımcı Teorem 2.6 kullanılırsa, [8] çalışmasındaki, Corollary 32.3 eşitliğinin, $n=m$ için özel hali olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.13. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $L_{2n} = F_{n-1}L_n + F_n L_{n+1}$ ’dir [8]

Sonuç 3.11'de önce n yerine $p+2r$, m yerine p, k yerine $2p+2r$, ve $c=0$ alınırsa ve sonra Yardımcı Teorem 2.6 dikkate alınırsa,

$$F_{2p+2r} = \frac{F_{p+2r}}{F_{2r}} F_{p+2r} + \frac{F_p}{F_{-2r}} F_p = \frac{F_{p+2r}}{F_{2r}} F_{p+2r} + \frac{F_p}{(-1)^{2r+1} F_{2r}} F_p$$

$$F_{2p+2r} = \frac{F_{p+2r}}{F_{2r}} F_{p+2r} - \frac{F_p}{F_{2r}} F_p = \frac{F_{p+2r}^2 - F_p^2}{F_{2r}} \qquad (3.44)$$

veya (3.44) eşitliğine denk olan ve [8] çalışmasında; 90. sayfadaki 55. özellik olarak geçen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.14. Her $r, p \in \mathbb{Z}$ için, $F_{p+2r}^2 - F_p^2 = F_{2p+2r} F_{2r}$'dir [8].

Sonuç 3.11'de m yerine $n+1$, k yerine $2n+2$ ve $c=0$ alınırsa,

$$F_{n+1} L_n + F_{n+2} L_{n+1} = L_{2n+2} \qquad (3.45)$$

elde edilir. (3.45) eşitliği ile Sonuç 3.13'te verilen eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$L_n (F_{n-1} + F_{n+1}) + L_{n+1} (F_n + F_{n+2}) = L_{2n} + L_{2n+2} \qquad (3.46)$$

olur. (3.46) eşitliğinde, Teorem 2.13 dikkate alınırsa, [8] çalışmasındaki, 93. sayfada bulunan 130. özellik olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.15. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n} + L_{2n+2}$'dir [8].

3.3. $aQ^n + bQ^m = RQ^k$ Matris Denkleminin Çözümleri

n, m ve k birer tamsayı olsun. Kısım 3.1'de $aQ^n + bQ^m = Q^k$ ve Kısım 3.2'de

$aRQ^n + bRQ^m = RQ^k$ lineer bileşimleri ele alınmıştı. Bu kısımda ise

$$aQ^n + bQ^m = RQ^k \tag{3.47}$$

lineer bileşimi ele alınacak ve benzer inceleme yapılacaktır.

(3.47) denklemi düzenlenirse,

$$a\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{pmatrix}$$

veya denk olarak,

$$\begin{pmatrix} aF_{n+1} + bF_{m+1} & aF_n + bF_m \\ aF_n + bF_m & aF_{n-1} + bF_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} aF_{n+1} + bF_{m+1} &= L_{k+1} \\ aF_n + bF_m &= L_k \\ aF_{n-1} + bF_{m-1} &= L_{k-1} \end{aligned} \tag{3.48}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.48) sisteminin

$$\begin{aligned} aF_n + bF_m &= L_k \\ aF_{n-1} + bF_{m-1} &= L_{k-1} \end{aligned} \tag{3.49}$$

lineer denklem sistemine denk olduğu açıktır. (3.49) denklem sisteminin matris biçimi,

$$\begin{pmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k \\ L_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

olur. (3.50) sisteminin katsayılar matrisi ile (3.6) sisteminin katsayılar matrisi aynıdır. Bu matrisin determinantı $n=m$ için sıfır ve $n\neq m$ için sıfırdan farklıdır. Şimdi, bu iki durumu yine ayrı ayrı ele alalım:

***Durum I**. $n=m$ Durumu*

Bu durumda, (3.49) denklem sistemi,

$$\begin{aligned}(a+b)F_n &= L_k\\ (a+b)F_{n-1} &= L_{k-1}\end{aligned} \qquad (3.51)$$

denklem sistemine dönüşür. (3.51) sisteminde;

$n=0$ için; $(a+b)F_n=L_k$ denkleminde $(a+b)F_0=L_k$ ve $0=L_k$ çelişkisi,
$n=1$ için; $(a+b)F_{n-1}=L_{k-1}$ denkleminde $(a+b)F_0=L_{k-1}$ ve $0=L_{k-1}$ çelişkisi

elde edilir. Yani $n=0$ ve $n=1$ için (3.51) denklem sisteminin çözümü yoktur.

Şimdi, $n\neq 0$ ve $n\neq 1$ olsun. (3.51) denklem sisteminde,

$$a+b=\frac{L_{k-1}}{F_{n-1}}=\frac{L_k}{F_n} \qquad (3.52)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.52) eşitliğinden,

$$L_{k-1}F_n-L_kF_{n-1}=0 \qquad (3.53)$$

elde edilir. (3.53) eşitliğinde $a=n$, $b=k-1$, $c=n-1$, $d=k$ ve $r=n-1$ alarak, Sonuç 2.17 dikkate alınırsa,

$$0=L_{k-1}F_n-L_kF_{n-1}=(-1)^{n-1}(L_{k-n}F_1-L_{k-n+1}F_0)=(-1)^{n-1}L_{k-n}$$

ve buradan, $L_{k-n}=0$ olur. Fakat Lucas sayılarında sıfır olmadığı için, bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak, $n=m$ için (3.47) matris denklemini veya denk olarak (3.48) lineer denklem sistemini sağlayan a ve b sayıları yoktur.

Durum II. *$n\neq m$ Durumu*

$n\neq m$ için katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan (3.49) sisteminin tek çözümü vardır. Bu sistem, Sonuç 2.17 de dikkate alınarak, Cramer metodu ile çözülürse,

$$a=\frac{\begin{vmatrix} L_k & F_m \\ L_{k-1} & F_{m-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1}\end{vmatrix}}=\frac{L_kF_{m-1}-F_mL_{k-1}}{F_nF_{m-1}-F_mF_{n-1}}=\frac{(-1)^{m-1}(L_{k-m+1}F_0-F_1L_{k-m})}{(-1)^{m-1}(F_{n-m+1}F_0-F_1F_{n-m})}=\frac{(-1)^mL_{k-m}}{(-1)^mF_{n-m}}=\frac{L_{k-m}}{F_{n-m}}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} F_n & L_k \\ F_{n-1} & L_{k-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & F_m \\ F_{n-1} & F_{m-1}\end{vmatrix}}=\frac{F_nL_{k-1}-L_kF_{n-1}}{F_nF_{m-1}-F_mF_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}(F_1L_{k-n}-L_{k-n+1}F_0)}{(-1)^{n-1}(F_1F_{m-n}-F_{m-n+1}F_0)}=\frac{(-1)^{n-1}L_{k-n}}{(-1)^{n-1}F_{m-n}}=\frac{L_{k-n}}{F_{m-n}}$$

elde edilir. Yani $n\neq m$ için (3.47) matris denkleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm, $a=\dfrac{L_{k-m}}{F_{n-m}}$ ve $b=\dfrac{L_{k-n}}{F_{m-n}}$ ’dir.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış oldu.

Teorem 3.16. $aQ^n+bQ^m=RQ^k$ matris denklemi,

(i) $n=m$ olması durumunda çözüme sahip değildir.

(ii) $n\neq m$ olması durumunda her tamsayı için yalnızca, $a=\dfrac{L_{k-m}}{F_{n-m}}$ ve $b=\dfrac{L_{k-n}}{F_{m-n}}$ tek çözümüne sahiptir.

Bulunan a ve b değerleri (3.48) denklem sisteminin de çözümü olacaktır. Bu değerler (3.48) denklem sisteminde yerine yazılırsa $n \neq m$ için,

$$\begin{aligned} &\frac{L_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n+1} + \frac{L_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m+1} = L_{k+1} \\ &\frac{L_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n} + \frac{L_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m} = L_{k} \\ &\frac{L_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n-1} + \frac{L_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m-1} = L_{k-1} \end{aligned} \tag{3.54}$$

eşitlikleri elde edilir.

Sonuç 3.17. $n, m, k, c \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq m$ için $\frac{L_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n+c} + \frac{L_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m+c} = L_{k+c}$'dir.

İspat. $n, m, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n \neq m$ için (3.48) denklem sisteminin tek çözümün olduğu gösterilmiş ve bunun sonucu olarak da (3.54)'te $\frac{L_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n} + \frac{L_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m} = L_{k}$ eşitliği elde edilmişti. Bu eşitlikte, $c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, n yerine $n+c$, m yerine $m+c$ ve k yerine $k+c$ yazılırsa,

$$\frac{L_{(k+c)-(m+c)}}{F_{(n+c)-(m+c)}} F_{n+c} + \frac{L_{(k+c)-(n+c)}}{F_{(m+c)-(n+c)}} F_{m+c} = L_{k+c}$$

veya denk olarak,

$$\frac{L_{k-m}}{F_{n-m}} F_{n+c} + \frac{L_{k-n}}{F_{m-n}} F_{m+c} = L_{k+c}$$

elde edilir. ■

3.4. $aQ^n + bRQ^m = Q^k$ Matris Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda, n, m ve k birer tamsayı olmak üzere;

$$aQ^n + bRQ^m = Q^k \tag{3.55}$$

matris denklemini ele alacağız. (3.55) matris denklemi düzenlenirse,

$$a\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

veya denk olarak,

$$\begin{pmatrix} aF_{n+1} + bL_{m+1} & aF_n + bL_m \\ aF_n + bL_m & aF_{n-1} + bL_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

elde edilir. (3.56) eşitliği,

$$\begin{aligned} aF_{n+1} + bL_{m+1} &= F_{k+1} \\ aF_n + bL_m &= F_k \\ aF_{n-1} + bL_{m-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.57}$$

lineer denklem sistemine dönüşür. (3.57) lineer denklemler sisteminin,

$$\begin{aligned} aF_n + bL_m &= F_k \\ aF_{n-1} + bL_{m-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.58}$$

lineer denklemler sistemine denk olduğu kolayca görülür. Bu sistemin matris gösterimi,

$$\begin{pmatrix} F_n & L_m \\ F_{n-1} & L_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

şeklindedir. (3.59) sisteminin katsayılar matrisinin determinantı,

$$\begin{vmatrix} F_n & L_m \\ F_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix} = F_n L_{m-1} - L_m F_{n-1} \tag{3.60}$$

dır. (3.60) eşitliğinde, Sonuç 2.17 dikkate alınırsa,

$$F_n L_{m-1} - L_m F_{n-1} = (-1)^{n-1}(F_1 L_{m-n} - L_{m-n+1} F_0) = (-1)^{n-1} L_{m-n}$$

veya denk olarak

$$\begin{vmatrix} F_n & L_m \\ F_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} L_{m-n} \neq 0$$

elde edilir. Yani (3.58) lineer denklemler sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. O halde bu sistem tek çözüme sahiptir. Buradan Cramer metodu ile a ve b çözülür ve sırasıyla Sonuç 2.17 ve Teorem 2.13 dikkate alınırsa,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} F_k & L_m \\ F_{k-1} & L_{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & L_m \\ F_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix}} = \frac{F_k L_{m-1} - L_m F_{k-1}}{F_n L_{m-1} - L_m F_{n-1}} = \frac{(-1)^{m-1}(F_{k-m+1} L_0 - L_1 F_{k-m})}{(-1)^{m-1}(F_{n-m+1} L_0 - L_1 F_{n-m})}$$

$$= \frac{2F_{k-m+1} - F_{k-m}}{2F_{n-m+1} - F_{n-m}} = \frac{F_{k-m+1} + F_{k-m-1}}{F_{n-m+1} + F_{k-m-1}} = \frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}$$

ve

$$b = \frac{\begin{vmatrix} F_n & F_k \\ F_{n-1} & F_{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & L_m \\ F_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix}} = \frac{F_n F_{k-1} - F_k F_{n-1}}{F_n L_{m-1} - L_m F_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}(F_1 F_{k-n} - F_{k-n+1} F_0)}{(-1)^{n-1}(F_1 L_{m-n} - L_{m-n+1} F_0)} = \frac{(-1)^{n-1} F_{k-n}}{(-1)^{n-1} L_{m-n}} = \frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}$$

elde edilir. Yani (3.55) matris denkleminin $a=\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}$ ve $b=\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}$ şeklinde tek çözümü bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış oldu.

Teorem 3.18. $aQ^n+bRQ^m=Q^k$ matris denkleminin her $n,m,k,c\in\mathbb{Z}$ için yalnız ve yalnız bir çözümü vardır ve bu çözüm $a=\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}$ ve $b=\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}$ 'dir.

Şimdi, $a=\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}$ ve $b=\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}$ değerleri, (3.57) lineer denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n+1}+\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m+1}=F_{k+1}\\
&\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n}+\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m}=F_{k}\\
&\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n-1}+\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m-1}=F_{k-1}
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerinin genel hali ile aşağıdaki sonuç da verilebilir.

Sonuç 3.19. $n,m,k,c\in\mathbb{Z}$ için $\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n+c}+\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m+c}=F_{k+c}$ 'dir.

İspat. $n,m,k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $aQ^n+bRQ^m=Q^k$ denkleminin tek çözümün olduğu gösterilmiş ve bu denklemin sonucu olarak (3.61) eşitliklerinde;

$$\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n}+\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m}=F_{k}$$

eşitliği elde edilmişti. Bu eşitlikte $c\in\mathbb{Z}$ için; n yerine $n+c$, m yerine $m+c$ ve k

yerine $k+c$ yazılırsa,

$$\frac{L_{(k+c)-(m+c)}}{L_{(n+c)-(m+c)}}F_{n+c}+\frac{F_{(k+c)-(n+c)}}{L_{(m+c)-(n+c)}}L_{m+c}=F_{k+c}$$

$$\frac{L_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n+c}+\frac{F_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m+c}=F_{k+c}$$

elde edilir. ■

3.5. $aQ^n + bRQ^m = RQ^k$ Matris Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda n, m ve k birer tamsayı olmak üzere

$$aQ^n + bRQ^m = RQ^k \tag{3.62}$$

matris denklemini ele alacağız.

Teorem 2.18 ve Teorem 2.24 dikkate alınarak, (3.62) denkleminin

$$a\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{pmatrix}$$

veya denk olarak,

$$\begin{pmatrix} aF_{n+1}+bL_{m+1} & aF_n+bL_m \\ aF_n+bL_m & aF_{n-1}+bL_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

denklemine denk olduğu görülür. (3.63)'ten

$$\begin{aligned} aF_{n+1}+bL_{m+1} &= L_{k+1} \\ aF_n+bL_m &= L_k \\ aF_{n-1}+bL_{m-1} &= L_{k-1} \end{aligned} \tag{3.64}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Önceki kısımlardakine benzer şekilde (3.64) lineer denklem sisteminin

$$\begin{aligned} aF_n + bL_m &= L_k \\ aF_{n-1} + bL_{m-1} &= L_{k-1} \end{aligned} \tag{3.65}$$

denklem sistemine denk olduğu açıktır. (3.65) sisteminin matris biçimi,

$$\begin{pmatrix} F_n & L_m \\ F_{n-1} & L_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k \\ L_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

dır. (3.66) sisteminin katsayılar matrisi ile (3.59) sisteminin katsayılar matrisi aynıdır. Dolayısıyla benzer irdeleme ile, (3.66) sisteminin de tek çözümü vardır. Bu sistem Cramer metodu ile çözüldüğünde,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} L_k & L_m \\ L_{k-1} & L_{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_n & L_m \\ F_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix}} = \frac{L_k L_{m-1} - L_m L_{k-1}}{F_n L_{m-1} - L_m F_{n-1}} \tag{3.67}$$

olur. Teorem 2.13 dikkate alındığında, (3.67) eşitliğinden

$$a = \frac{(F_{k-1} + F_{k+1})L_{m-1} - (F_{m-1} + F_{m+1})L_{k-1}}{F_n L_{m-1} - L_m F_{n-1}}$$

$$= \frac{(F_{k-1}L_{m-1} - F_{m-1}L_{k-1}) + (F_{k+1}L_{m-1} - F_{m+1}L_{k-1})}{F_n L_{m-1} - L_m F_{n-1}} \tag{3.68}$$

bulunur. (3.68) eşitliğinin payındaki iki parantezde ve paydasında ayrı ayrı Sonuç 2.17 kullanılırsa

$$a=\frac{(-1)^{m-1}(F_{k-m}L_0-F_0L_{k-m})+(-1)^{m-1}(F_{k-m+2}L_0-F_2L_{k-m})}{(-1)^{m-1}(F_{n-m+1}L_0-L_1F_{n-m})}$$
$$=\frac{2F_{k-m}+2F_{k-m+2}-L_{k-m}}{2F_{n-m+1}-F_{n-m}}=\frac{2(F_{k-m}+F_{k-m+2})-L_{k-m}}{F_{n-m+1}+F_{n-m-1}}$$

olur. Buradan, önce Teorem 2.13 ve sonra Teorem 2.14 uygulanırsa,

$$a=\frac{2L_{k-m+1}-L_{k-m}}{L_{n-m}}=\frac{L_{k-m+1}+L_{k-m-1}}{L_{n-m}}=\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}$$

elde edilir. Yine Cramer metodu ile (3.66)'dan

$$b=\frac{\begin{vmatrix}F_n & L_k\\ F_{n-1} & L_{k-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_n & L_m\\ F_{n-1} & L_{m-1}\end{vmatrix}}=\frac{F_nL_{k-1}-L_kF_{n-1}}{F_nL_{m-1}-L_mF_{n-1}}$$

bulunur. Buradan Sonuç 2.17 dikkate alınırsa,

$$b=\frac{(-1)^{n-1}(F_1L_{k-n}-L_{k-n+1}F_0)}{(-1)^{n-1}(F_1L_{m-n}-L_{m-n+1}F_0)}=\frac{(-1)^{n-1}L_{k-n}}{(-1)^{n-1}L_{m-n}}=\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}$$

olur.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış olur.

Teorem 3.20. $aQ^n+bRQ^m=RQ^k$ matris denkleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm $a=\dfrac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}$ ve $b=\dfrac{L_{k-n}}{L_{m-n}}$'dir.

$a=\dfrac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}$ ve $b=\dfrac{L_{k-n}}{L_{m-n}}$ değerleri (3.64) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n+1}+\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m+1}=L_{k+1}\\
&\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n}+\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m}=L_{k}\\
&\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n-1}+\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m-1}=L_{k-1}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

eşitlikleri elde edilir. Öte yandan (3.69) eşitliklerini de içeren genel sonuç aşağıdaki gibidir.

Sonuç 3.21. $n,m,k,c\in\mathbb{Z}$ için $\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n+c}+\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m+c}=L_{k+c}$ ’dir.

İspat. $n,m,k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $aQ^n+bRQ^m=RQ^k$ matris denkleminin tek çözüme sahip olduğu gösterilmiş ve bu çözümün $a=\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}$ ve $b=\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}$ olduğu Teorem 3.20’de verilmiştir. Sonra (3.69) eşitliklerinde görüldüğü gibi,

$$\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n}+\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m}=L_{k}$$

elde edilmişti. Bu eşitlikte $c\in\mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere, n yerine $n+c$, m yerine $m+c$ ve k yerine $k+c$ yazılarak,

$$\frac{5F_{(k+c)-(m+c)}}{L_{(n+c)-(m+c)}}F_{n+c}+\frac{L_{(k+c)-(n+c)}}{L_{(m+c)-(n+c)}}L_{m+c}=L_{k+c}$$

veya denk olarak

$$\frac{5F_{k-m}}{L_{n-m}}F_{n+c}+\frac{L_{k-n}}{L_{m-n}}L_{m+c}=L_{k+c}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.21 kullanılarak elde edilebilecek sonuçlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Sonuç 3.21'de $m=n$, $k=0$ ve $c=0$ koyulur ve Yardımcı Teorem 2.6 ile Yardımcı Teorem 2.12 kullanılırsa,

$$\frac{5F_{-n}}{L_0}F_n+\frac{L_{-n}}{L_0}L_n=L_0$$

yani,

$$\frac{5(-1)^{n+1}F_n}{2}F_n+\frac{(-1)^nL_n}{2}L_n=2 \tag{3.70}$$

olur. (3.70) eşitliğinden, [15] çalışmasının, 29. sayfasındaki 10. özellik olarak verilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.22. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $L_n^2-4(-1)^n=5F_n^2$ eşitliği vardır [15].

$a\in\mathbb{Z}$ olmak üzere Sonuç 3.21'de $n=m=2a$, $k=c=0$ yazılır ve Yardımcı Teorem 2.6 ile Yardımcı Teorem 2.12 dikkate alınırsa, [24] çalışmasında yer alan (24) eşitliğinin özel hali olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.23. Her $a\in\mathbb{Z}$ için $L_{2a}^2=5F_{2a}^2+4$'dir [24].

Şimdi de Sonuç 3.21'de m yerine n, k yerine $2n$ ve $c=0$ yazılarak, [24] çalışmasında; (22) eşitliği olarak verilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.24. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $L_{2n}=\frac{1}{2}(5F_n^2+L_n^2)$ 'dir [24].

3.6. $aRQ^n+bRQ^m=Q^k$ Matris Denkleminin Çözümleri

n, m ve k birer tamsayı olmak üzere

$$aRQ^n + bRQ^m = Q^k \tag{3.71}$$

matris denklemini ele alalım. R matrisi ve Teorem 2.8 dikkate alınırsa, (3.71) eşitliği

$$a\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{pmatrix} aL_{n+1} + bL_{m+1} & aL_n + bL_m \\ aL_n + bL_m & aL_{n-1} + bL_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

eşitliğine dönüşür. (3.72) eşitliği de

$$\begin{aligned} aL_{n+1} + bL_{m+1} &= F_{k+1} \\ aL_n + bL_m &= F_k \\ aL_{n-1} + bL_{m-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.73}$$

denklem sistemine denktir. (3.73) denklem sisteminin,

$$\begin{aligned} aL_n + bL_m &= F_k \\ aL_{n-1} + bL_{m-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.74}$$

denklem sistemine denk olduğu kolaylıkla görülür. (3.74) denklem sisteminin matris biçimi

$$\begin{pmatrix} L_n & L_m \\ L_{n-1} & L_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

olur. (3.75) sisteminde katsayılar matrisinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{vmatrix} L_n & L_m \\ L_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix} = L_n L_{m-1} - L_m L_{n-1}$$

bulunur. Buradan, Teorem 2.13, Sonuç 2.17 ve Teorem 2.14 dikkate alınarak

$$\begin{vmatrix} L_n & L_m \\ L_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix} = (F_{n-1} + F_{n+1})L_{m-1} - (F_{m-1} + F_{m+1})L_{n-1}$$

$$= (F_{n-1}L_{m-1} - F_{m-1}L_{n-1}) + (F_{n+1}L_{m-1} - F_{m+1}L_{n-1})$$

$$= (-1)^{m-1}(F_{n-m}L_0 - F_0 L_{n-m}) + (-1)^{m-1}(F_{n-m+2}L_0 - F_2 L_{n-m})$$

$$= (-1)^{m-1}(2F_{n-m} + 2F_{n-m+2} - L_{n-m}) = (-1)^{m-1}(2L_{n-m+1} - L_{n-m}) = (-1)^{m-1}(L_{n-m+1} + L_{n-m-1})$$

yani

$$\begin{vmatrix} L_n & L_m \\ L_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix} = 5(-1)^{m-1} F_{n-m} \tag{3.76}$$

elde edilir. Şimdi (3.76) determinantı $n = m$ ve $n \neq m$ durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

Durum I. $n = m$ *Durumu*

$n = m$ için (3.74) denklem sistemi;

$$\begin{aligned} (a+b)L_n &= F_k \\ (a+b)L_{n-1} &= F_{k-1} \end{aligned} \tag{3.77}$$

sistemine dönüşür. (3.77) denklem sisteminde,

$$(a+b)=\frac{F_{k-1}}{L_{n-1}}=\frac{F_k}{L_n}$$

ve buradan da

$$F_{k-1}L_n - F_k L_{n-1} = 0 \tag{3.78}$$

elde edilir. (3.78) eşitliğinde Sonuç 2.17 dikkate alınırsa

$F_{k-1}L_n - F_k L_{n-1} = (-1)^{k-1}(F_0 L_{n-k+1} - F_1 L_{n-k}) = (-1)^k L_{n-k} = 0$ ve buradan $L_{n-k} = 0$ çelişkisi elde edilir. Yani (3.74) denklem sisteminin ve (3.71) matris denkleminin $m = n$ için çözüme sahip olmadığı görülür.

***Durum II**. $n \neq m$ Durumu*

$n \neq m$ için (3.74) denklem sisteminin katsayılar matrisinin (3.76) ile elde edilen determinantı sıfır değildir. Dolayısıyla (3.74) denklem sisteminin tek çözümü vardır. Bu sistem Cramer metodu ile çözüldüğünde,

$$a=\frac{\begin{vmatrix} F_k & L_m \\ F_{k-1} & L_{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_n & L_m \\ L_{n-1} & L_{m-1} \end{vmatrix}}=\frac{F_k L_{m-1} - L_m F_{k-1}}{L_n L_{m-1} - L_m L_{n-1}} \tag{3.79}$$

bulunur. (3.79) eşitliğinde sırasıyla Sonuç 2.17, (3.83) eşitliği ve Teorem 2.13 dikkate alınırsa,

$$a=\frac{(-1)^{m-1}(F_{k-m+1}L_0 - L_1 F_{k-m})}{5(-1)^{m-1}F_{n-m}}=\frac{2F_{k-m+1}-F_{k-m}}{5F_{n-m}}=\frac{F_{k-m+1}+F_{k-m-1}}{5F_{n-m}}=\frac{L_{k-m}}{5F_{n-m}}$$

olur. (3.74) sisteminden, Cramer metodu ile

$$b=\frac{\begin{vmatrix} L_n & F_k \\ L_{n-1} & F_{k-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_n & L_m \\ L_{n-1} & L_{m-1}\end{vmatrix}}=\frac{L_nF_{k-1}-F_kL_{n-1}}{L_nL_{m-1}-L_mL_{n-1}} \tag{3.80}$$

bulunur. (3.80) eşitliğinde sırasıyla Sonuç 2.17, Teorem 2.13 ve Teorem 2.14 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
b&=\frac{(-1)^{n-1}(L_1F_{k-n}-F_{k-n+1}L_0)}{(F_{n-1}+F_{n+1})L_{m-1}-(F_{m-1}+F_{m+1})L_{n-1}}\\
&=\frac{(-1)^{n-1}(F_{k-n}-2F_{k-n+1})}{F_{n-1}L_{m-1}+F_{n+1}L_{m-1}-F_{m-1}L_{n-1}-F_{m+1}L_{n-1}}\\
&=\frac{(-1)^{n}(2F_{k-n+1}-F_{k-n})}{(F_{n-1}L_{m-1}-F_{m-1}L_{n-1})+(F_{n+1}L_{m-1}-F_{m+1}L_{n-1})}\\
&=\frac{(-1)^{n}(F_{k-n-1}+F_{k-n+1})}{(-1)^{n-1}(F_0L_{m-n}-F_{m-n}L_0)+(-1)^{n-1}(F_2L_{m-n}-F_{m-n+2}L_0)}\\
&=\frac{(-1)^{n}L_{k-n}}{(-1)^{n-1}(-2F_{m-n})+(-1)^{n-1}(L_{m-n}-2F_{m-n+2})}\\
&=\frac{(-1)^{n}L_{k-n}}{(-1)^{n}(2F_{m-n})+(-1)^{n}(2F_{m-n+2}-L_{m-n})}=\frac{(-1)^{n}L_{k-n}}{(-1)^{n}(2F_{m-n}+2F_{m-n+2}-L_{m-n})}\\
&=\frac{(-1)^{n}L_{k-n}}{(-1)^{n}(2F_{m-n}+2F_{m-n+2}-L_{m-n})}=\frac{L_{k-n}}{2L_{m-n+1}-L_{m-n}}=\frac{L_{k-n}}{L_{m-n+1}+L_{m-n-1}}\\
&=\frac{L_{k-n}}{5F_{m-n}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $n\neq m$ için, (3.74) denklem sisteminin veya denk olarak (3.71) matris denkleminin, $a=\dfrac{L_{k-m}}{5F_{n-m}}$ ve $b=\dfrac{L_{k-n}}{5F_{m-n}}$ şeklindeki tek çözümü bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış oldu

Teorem 3.25. $aRQ^n+bRQ^m=Q^k$ matris denklemi $n,m,k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere,

(i) $n = m$ olması durumunda çözüme sahip değildir.

(ii) $n \neq m$ olması durumunda yalnızca $a = \dfrac{L_{k-m}}{5F_{n-m}}$ ve $b = \dfrac{L_{k-n}}{5F_{m-n}}$ çözümüne sahiptir.

Teorem 3.25'te bulunan $a = \dfrac{L_{k-m}}{5F_{n-m}}$ ve $b = \dfrac{L_{k-n}}{5F_{m-n}}$ değerleri (3.73) sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{L_{k-m}}{5F_{n-m}} L_{n+1} + \frac{L_{k-n}}{5F_{m-n}} L_{m+1} = F_{k+1} \\
&\frac{L_{k-m}}{5F_{n-m}} L_{n} + \frac{L_{k-n}}{5F_{m-n}} L_{m} = F_{k} \\
&\frac{L_{k-m}}{5F_{n-m}} L_{n-1} + \frac{L_{k-n}}{5F_{m-n}} L_{m-1} = F_{k-1}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

eşitlikleri elde edilir. Öte yandan (3.81) eşitliklerini de içeren genel sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.26. $n \neq m$ olmak üzere $n, m, k, c \in \mathbb{Z}$ için $\dfrac{L_{k-m}}{5F_{n-m}} L_{n+c} + \dfrac{L_{k-n}}{5F_{m-n}} L_{m+c} = F_{k+c}$ eşitliği doğrudur.

İspat. $n \neq m$ olmak üzere her $n, m, k \in \mathbb{Z}$ için $aRQ^n + bRQ^m = Q^k$ denkleminin tek çözüme sahip olduğu gösterilmiş ve bu denklemin sonucu olarak (3.81) eşitliklerinde,

$$\frac{L_{k-m}}{5F_{n-m}} L_{n} + \frac{L_{k-n}}{5F_{m-n}} L_{m} = F_{k}$$

elde edilmişti. Bu eşitlikte $c \in \mathbb{Z}$ için, n yerine $n+c$, m yerine $m+c$ ve k yerine $k+c$ yazılırsa,

$$\frac{L_{(k+c)-(m+c)}}{5F_{(n+c)-(m+c)}}L_{n+c}+\frac{L_{(k+c)-(n+c)}}{5F_{(m+c)-(n+c)}}L_{m+c}=F_{k+c}$$

$$\frac{L_{k-m}}{5F_{n-m}}L_{n+c}+\frac{L_{k-n}}{5F_{m-n}}L_{m+c}=F_{k+c}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.26 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 3.27. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $L_n^2+L_{n+1}^2=5F_{2n+1}$'dir.

İspat. Sonuç 3.26'da m yerine $n+1$, k yerine $2n+1$ ve $c=0$ alınırsa,

$$F_{2n+1}=\frac{L_n}{5F_{-1}}L_n+\frac{L_{n+1}}{5F_1}L_{n+1}=\frac{L_n}{5}L_n+\frac{L_{n+1}}{5}L_{n+1}=\frac{L_n^2+L_{n+1}^2}{5}$$

veya denk olarak,

$$L_n^2+L_{n+1}^2=5F_{2n+1} \tag{3.82}$$

elde edilir. ■

(3.82) eşitliği [8] çalışmasındaki, 97. sayfadaki 37. özelliktir.

Sonuç 3.28. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $L_{n-1}L_{n+1}-L_n^2=5(-1)^{n-1}$ eşitliği vardır.

İspat. Sonuç 3.26'da m yerine $n+1$, $k=1$ ve $c=0$ alınırsa

$$\frac{L_{-n}}{5F_{-1}}L_n+\frac{L_{1-n}}{5F_1}L_{n+1}=F_1$$

olur. Yardımcı Teorem 2.12 dikkate alınarak

$$\frac{(-1)^n L_n}{5} L_n + \frac{(-1)^{n-1} L_{n-1}}{5} L_{n+1} = 1$$

ve buradan

$$(-1)^n L_n^2 + (-1)^{n-1} L_{n-1} L_{n+1} = 5$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $(-1)^{n-1}$ ile çarpılarak

$$(-1)^{2n-1} L_n^2 + (-1)^{2n-2} L_{n-1} L_{n+1} = 5(-1)^{n-1}$$

veya denk olarak,

$$L_{n-1} L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1} \tag{3.83}$$

eşitliği elde edilir. ■

(3.83) eşitliği, [8] çalışmasındaki, 97. sayfadaki 38. özelliktir.

Sonuç 3.29. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $L_{a+1}^2 - L_{a-1}^2 = 5F_{2a}$'dir.

İspat. Sonuç 3.26'da n yerine $a+1$, m yerine $a-1$, k yerine $2a$ ve $c=0$ alınırsa,

$$F_{2a} = \frac{L_{a+1}}{5F_2} L_{a+1} + \frac{L_{a-1}}{5F_{-2}} L_{a-1} = \frac{L_{a+1}^2}{5} - \frac{L_{a-1}^2}{5}$$

veya denk olarak

$$L_{a+1}^2 - L_{a-1}^2 = 5F_{2a} \tag{3.84}$$

eşitliği elde edilir. ■

(3.84) eşitliği, [8] çalışmasındaki, 97. sayfadaki 44. özelliktir.

Sonuç 3.30. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $L_n L_{n+2} + 4(-1)^n = 5F_{n-1}F_{n+3}$ eşitliği doğrudur.

İspat. Öncelikle, $n = 1$ için,

$$L_1 L_3 + 4(-1)^1 = 5F_0 F_4$$

yani

$$0 = 0$$

olup eşitlik $n = 1$ için doğrudur. $n \neq 1$ olsun. Sonuç 3.26'da m yerine 1, k yerine $n+3$ ve $c = 0$ alınırsa

$$F_{n+3} = \frac{L_{n+2}}{5F_{n-1}} L_n + \frac{L_3}{5F_{1-n}} L_1 = \frac{L_{n+2}}{5F_{n-1}} L_n + \frac{4}{5F_{-(n-1)}} = \frac{L_{n+2}}{5F_{n-1}} L_n + \frac{4}{5(-1)^n F_{n-1}}$$

ve buradan

$$L_n L_{n+2} + 4(-1)^n = 5F_{n-1}F_{n+3} \tag{3.85}$$

eşitliği elde edilir. ■

(3.85) eşitliği [8] çalışmasının, 91. sayfasındaki, 93. özelliktir.

BÖLÜM 4. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLİ 3×3 TİPİNDE ÖZEL MATRİSLER

Bölüm 2'de kuvvetleri Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili olan, 2×2 tipindeki bazı özel matrisler incelemişti. Bu tür özel matrislerin, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili özelliklerin ispatlarında önemli bir yeri olduğu görülmektedir. Örneğin, Q matrisinin determinantı sayesinde; Teorem 2.20 ile verilen eşitliğin ispatlanabildiği görülmüştür. Yine, Sonuç 2.27 ve Sonuç 2.28'de iki özel matris gösterilmişti ve Sonuç 2.27'de bulunan matrisin determinantı kullanılarak farklı bir özellik elde edilmişti.

Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili olan, özel matrisler elde etmenin önemi görülmektedir. Bu bölümde, 3×3 boyutlu benzer özellikteki matrislerin örnekleri verilmeye çalışılacaktır.

Teorem 2.22'de, Q matrisinin özdeğerlerinin α ve β olduğu gösterildi. Daha sonra özdeğerleri, α ve β olan 2×2 tipindeki matrislerin kuvvetlerinin Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğu incelenmişti. Şimdi, özdeğerleri $\lambda_1=\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_3=0$ olan 3×3 tipindeki matrisleri inceleyelim.

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ matrisi özdeğerleri α, β ve 0 olacak şekilde bir matris olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ olsun. Buradan özdeğer özvektör ikililerini genelliği bozmaksızın, $\left(\alpha,\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\beta,\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)$, $\left(0,\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$ ile gösterelim.

Özdeğer ve özvektör tanımından $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}$, $\boldsymbol{A}\mathbf{y} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{y}$ ve $\boldsymbol{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden sırasıyla,

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= \alpha x_1 \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 &= \alpha x_2 \\ gx_1 + hx_2 + ix_3 &= \alpha x_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} ay_1 + by_2 + cy_3 &= \beta y_1 \\ dy_1 + ey_2 + fy_3 &= \beta y_2 \\ gy_1 + hy_2 + iy_3 &= \beta y_3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned} az_1 + bz_2 + cz_3 &= 0 \\ dz_1 + ez_2 + fz_3 &= 0 \\ gz_1 + hz_2 + iz_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

A matrisi özdeğerleri farklı ve reel olduğundan köşegenleştirilebilirdir. Bu durumda genelliği bozmaksızın,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

ve S tersinir bir matris olmak üzere

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan her $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$A^n = S\Lambda^n S^{-1}$$

olur. Buradan, (4.4), Yardımcı Teorem 2.7 ve Sonuç 2.8 dikkate alınarak,

$$A^n = S\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S\begin{pmatrix} F_n\alpha + F_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & F_n\beta + F_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$A^n = S\left(F_n\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + F_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) S^{-1}$$

$$= S\left(F_n\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + F_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) S^{-1}$$

$$= S\left(F_n\Lambda + F_{n-1}\mathrm{I} - F_{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) S^{-1}$$

$$= F_n(S\Lambda S^{-1}) + F_{n-1}(S\mathrm{I}S^{-1}) - F_{n-1}\left(S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}\right)$$

olur. Böylece

$$A^n = F_n A + F_{n-1}\mathrm{I} - F_{n-1}\left(S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}\right) \qquad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) eşitliğinden görüldüğü üzere, A matrislerinin kuvvetleri Fibonacci sayıları ile ilişkilidir. Bu şekilde bulunacak olan A matrislerinin determinantı 0 olacağı için bu matrislerin tersi yoktur. Dolayısıyla (4.5) eşitliği $n \geq 1$ için geçerlidir.

Şimdi S matrisinin sütunları, A matrisinin α, β ve 0 özdeğerlerine ilişkin lineer bağımsız vektörler olmak üzere,

$$D = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}S^{-1} \tag{4.6}$$

olsun. Buradan genelliği bozmaksızın $S = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}S^{-1} \tag{4.7}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$S^{-1} = \frac{1}{|S|}\begin{pmatrix} y_2z_3 - z_2y_3 & z_1y_3 - y_1z_3 & y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_2x_3 - x_2z_3 & x_1z_3 - z_1x_3 & z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_2y_3 - y_2x_3 & y_1x_3 - x_1y_3 & x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

olduğundan, (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden,

$$D = \frac{1}{|S|}\begin{pmatrix} z_1(x_2y_3 - y_2x_3) & z_1(x_3y_1 - x_1y_3) & z_1(x_1y_2 - y_1x_2) \\ z_2(x_2y_3 - y_2x_3) & z_2(x_3y_1 - x_1y_3) & z_2(x_1y_2 - y_1x_2) \\ z_3(x_2y_3 - y_2x_3) & z_3(x_3y_1 - x_1y_3) & z_3(x_1y_2 - y_1x_2) \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

olduğu görülür. Öte yandan,

$$|S| = z_1(x_2y_3 - y_2x_3) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2) \tag{4.10}$$

eşitliği vardır.

Amacımız elemanları ve kuvvetleri Fibonacci ve Lucas Sayıları olan matrisler bulmaktır. Bunun için (4.1), (4.2) ve (4.3) denklem sistemlerini sağlayan uygun $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri bulmalıyız. Bunun için birtakım özel koşullarla inceleme yapmak kolaylık sağlayacaktır.

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ vektörleri (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemlerini sağlayacak vektörler olsun. Ayrıca, (4.10) determinantında bulunan, $(x_2y_3 - y_2x_3)$, $(x_3y_1 - y_3x_1)$, $(x_1y_2 - y_1x_2)$ ifadelerini birbirlerinin eşiti ya da negatifi olacak şekilde seçerek, (4.9)'daki D matrisinin elemanları tam sayı yapılmaya çalışılabilir.

Sonuç 2.23'te Q matrisinin özvektörlerinin, α ve β özdeğerlerini içerdiği görülmektedir. Yine istenilen A matrislerini, özvektörleri α ve β değerlerini içerecek şekilde bulmak, istenilen şartlara ulaşmayı kolaylaştırabilir.

4.1. $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ Seçimi

$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse, bu vektörlerin A matrisinin özvektörleri olması için (4.1), (4.2), ve (4.3) denklemlerini sağlamaları gerekmektedir.

İlk olarak (4.1) ve (4.2) sistemlerindeki ilk denklemlerin sağlanması için,

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-c=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-c=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \tag{4.11}$$

olmalıdır. (4.11)'deki denklemler taraf tarafa sırasıyla toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned} a+b-2c&=3 \\ a-b&=1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonra (4.1) ve (4.2) sistemlerindeki ikinci denklemlerin sağlanması için,

$$d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+e\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-f=-1$$
$$d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+e\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-f=-1 \tag{4.13}$$

olmalıdır. (4.13)'teki denklemler taraf tarafa sırasıyla toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned} d+e-2f&=-2 \\ e-d&=0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

denklem sistemi elde edilir. Son olarak (4.1) ve (4.2) sistemindeki üçüncü denklemlerin sağlanması için

$$g\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-i=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$g\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-i=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \tag{4.15}$$

olmalıdır. Buradan, (4.15)'teki denklemler taraf tarafa sırasıyla toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned} g+h-2i&=-1 \\ g-h&=-1 \end{aligned} \tag{4.16}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.12), (4.14) ve (4.16) denklemlerinin sağlanması demek (4.1) ve (4.2) denklem sistemlerindeki denklemlerin sağlanması demektir.

Seçilen $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{y}_1$ vektörleri için $(x_2y_3-y_2x_3)=\sqrt{5}$, $(x_3y_1-y_3x_1)=\sqrt{5}$ ve $(x_1y_2-y_1x_2)=\sqrt{5}$ olur. Şimdi $\mathbf{z}$ vektörünü istenilen koşullara göre değerlendirelim.

A matrisinin özdeğerlerinden biri 0 olduğundan (4.3) homojen denklem sistemi sonsuz çoklukta çözüme sahiptir. Bu durumda $\mathbf{z}$ vektörünü (4.3) sistemini sağlayacak şekilde farklı biçimlerde seçebiliriz. Bu şekilde her bir seçimle oluşacak sistem ve (4.12), (4.14) ve (4.16) sistemleri sağlanmalıdır. Bu nedenle $\mathbf{z}$ vektörünün değişik seçimleri ile birlikte bahsi geçen tüm sistemleri sağlayacak şekilde farklı A matrisleri bulunabilir. Şimdi $\mathbf{z}$ vektörünün özel seçimleri için birkaç A matrisi türeteceğiz ve Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkilerini ortaya koyacağız.

Seçim I. $k\in\mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1=k$, $z_2=k$, $z_3=-k$ olsun:

Bu seçime göre (4.9)'daki D matrisi

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. $z_1=k$, $z_2=k$, $z_3=-k$ şeklinde seçildiği için (4.3) denklemi,

$$\begin{aligned} a+b-c&=0\\ d+e-f&=0\\ g+h-i&=0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

halini alır. Buradan; (4.12), (4.14), (4.16) ve (4.17) denklem sistemlerinin sağlanması gereklidir. Diğer bir deyişle, dokuz bilinmeyenli dokuz denklemli lineer denklem sisteminin sağlanması gerekir. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Bu durumda A matrisinin elemanları tek türlü olarak belirlenebilir. Buradan,

$$A_1=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

bulunur. (4.18)'de bulunan matris için (4.5) eşitliği kullanılarak her $n\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} A_1^n &= F_n\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + F_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -F_n & -2F_n-F_{n-1} & -3F_n-F_{n-1}\\ F_n-F_{n-1} & F_n & 2F_n-F_{n-1}\\ F_{n-1} & F_n+F_{n-1} & F_n+2F_{n-1} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -F_n & -F_{n+2} & -L_{n+1}\\ F_{n-2} & F_n & L_{n-1}\\ F_{n-1} & F_{n+1} & L_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış oldu.

Teorem 4.1. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise, $A^n = \begin{pmatrix} -F_n & -F_{n+2} & -L_{n+1} \\ F_{n-2} & F_n & L_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n+1} & L_n \end{pmatrix}$'dir.

Seçim II. $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = k$, $z_2 = -k$, $z_3 = k$ olsun:

Seçim I'deki tartışmalar göz önüne alınarak (4.9) ile verilen D matrisi,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur ve (4.3) denklem sistemi

$$\begin{aligned} a - b + c &= 0 \\ d - e + f &= 0 \\ g - h + i &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

sistemine dönüşür. (4.12), (4.14), (4.16) ve (4.19) denklemlerinin oluşturduğu sistemin çözümünden,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

matrisi elde edilir. (4.20)'de bulunan matris için (4.5) eşitliği dikkate alınarak her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$A_2^n = F_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^n = \begin{pmatrix} F_n & -F_{n-1} & -F_n - F_{n-1} \\ -F_n + F_{n-1} & -F_n + 2F_{n-1} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_n - F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & -F_{n-1} & -F_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış oldu.

Teorem 4.2. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise, $A^n = \begin{pmatrix} F_n & -F_{n-1} & -F_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$'dir.

Seçim III. $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = -k$, $z_2 = k$, $z_3 = k$ olsun:

$z_1 = -k$, $z_2 = k$, $z_3 = k$ şeklinde seçilirse yine Seçim I'deki tartışmalar göz önüne alınarak, (4.9) ile verilen D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur ve (4.3) denklem sistemi

$$\begin{aligned} -a + b + c &= 0 \\ -d + e + f &= 0 \\ -g + h + i &= 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

şeklini alır. Buradan (4.12), (4.14), (4.16) ve (4.21) denklemlerinden oluşan lineer denklemler sistemi çözüldüğünde,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

matrisi elde edilir. (4.22)’de bulunan matris için (4.5) eşitliği dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} A_3^n &= F_n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3F_n + 2F_{n-1} & 2F_n + F_{n-1} & F_n + F_{n-1} \\ -F_n - F_{n-1} & -F_n & -F_{n-1} \\ -2F_n - F_{n-1} & -F_n - F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış oldu.

Teorem 4.3. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix}$’dir.

4.2. $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{-\beta} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{-\alpha} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ Seçimi

$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse bu vektörlerin A matrisinin özvektörleri olması için (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemlerini sağlamaları gerekmektedir.

Öncelikle (4.1) ve (4.2) sistemlerindeki ilk denklemlerin sağlanması için

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+c&=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\\ a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c&=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

olmalıdır. (4.23)’teki denklemler taraf tarafa sırasıyla toplanarak ve çıkarılarak,

$$\begin{aligned} a-b+2c&=3\\ a+b&=1 \end{aligned} \tag{4.24}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonra (4.1) ve (4.2) deki ikinci denklemlerin sağlanmaları için

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-e\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+f&=1\\ d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-e\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+f&=1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

olmalıdır. (4.25)’teki denklemler sırasıyla taraf tarafa toplanarak ve çıkarılarak,

$$\begin{aligned} d-e+2f&=2\\ e+d&=0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

denklem sistemi elde edilir. Son olarak (4.1) ve (4.2) sistemindeki üçüncü denklemlerin sağlanması için;

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+i&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\\ g\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+i&=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.27}$$

olmalıdır. (4.27)'deki denklemler sırasıyla taraf tarafa toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned} g-h+2i&=1\\ g+h&=1 \end{aligned} \tag{4.28}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.24), (4.26) ve (4.28) denklemlerinin sağlanması demek (4.1) ve (4.2) denklem sistemlerindeki denklemlerin sağlanması demektir.

Seçilen $\mathbf{x}_2$ ve $\mathbf{y}_2$ vektörleri için $(x_2y_3-y_2x_3)=\sqrt{5}$, $(x_3y_1-y_3x_1)=-\sqrt{5}$, $(x_1y_2-y_1x_2)=-\sqrt{5}$ olur. Şimdi yine $\mathbf{z}$ vektörünü istenilen koşullara göre değerlendirelim.

Seçim I. $k\in\mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1=k$, $z_2=k$, $z_3=k$ olsun:

Bu seçime göre (4.9)'daki D matrisi

$$D=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

olur. $z_1=k$, $z_2=k$, $z_3=k$ şeklinde seçildiği için (4.3) denklemi

$$\begin{aligned} a+b+c&=0\\ d+e+f&=0\\ g+h+i&=0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

şekline gelir. (4.24), (4.26), (4.28) ve (4.29) denklemlerinin çözümüyle oluşan matris

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

şeklindedir. (4.30)'da bulunan matris için (4.5) eşitliği kullanılarak her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} A_4^n &= F_n \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3F_n + 2F_{n-1} & -2F_n - F_{n-1} & -F_n - F_{n-1} \\ F_n + F_{n-1} & -F_n & -F_{n-1} \\ 2F_n + F_{n-1} & -F_n - F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & -F_n & -F_{n-1} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 4.4. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & -F_n & -F_{n-1} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix}$'dir.

Seçim II. $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = k$, $z_2 = k$, $z_3 = -k$ olsun:

Bu seçime göre (4.9)'daki D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ve (4.3) denklem sistemi

$$\begin{aligned} a+b-c &= 0 \\ d+e-f &= 0 \\ g+h-i &= 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

halini alır. (4.24), (4.26), (4.28) ve (4.31) denklemlerinin oluşturduğu sistemin çözümünden

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

matrisi elde edilir. (4.32)'deki matris için (4.5) eşitliği dikkate alınarak her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} A_5^n &= F_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & F_n + F_{n-1} \\ F_n - F_{n-1} & -F_n + 2F_{n-1} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n - F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & F_{n+1} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispat edilmiş oldu.

Teorem 4.5. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & F_{n+1} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$’dir.

Seçim III. $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = k$, $z_2 = -k$, $z_3 = k$ olsun:

Bu seçime göre (4.9)’daki D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur ve (4.3) denklem sistemi

$$\begin{aligned} a - b + c &= 0 \\ d - e + f &= 0 \\ g - h + i &= 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

sistemine dönüşür. (4.24), (4.26), (4.28) ve (4.33) denklemlerinin çözümüyle oluşan matris

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

şeklindedir. (4.34)’deki matris için (4.5) eşitliği kullanılırsa

$$A_6^n = F_n \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_6^n = \begin{pmatrix} -F_n & 2F_n + F_{n-1} & 3F_n + F_{n-1} \\ -F_n + F_{n-1} & F_n & 2F_n - F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_n + F_{n-1} & F_n + 2F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -F_n & F_{n+2} & L_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_n & L_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n+1} & L_n \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} -F_n & F_{n+2} & L_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_n & L_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n+1} & L_n \end{pmatrix}$'dir.

4.3. $\mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{y_3} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-\boldsymbol{\beta}} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **Seçimi**

$\mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y_3} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak seçelim. Yine bu vektörlerin A matrisinin özvektörleri olması için (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemlerini sağlaması gerekmektedir.

(4.1) ve (4.2) sistemlerindeki ilk denklemlerin sağlanması için

$$\begin{aligned} -a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c &= \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ -a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c &= \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{4.35}$$

olmalıdır. (4.35)'teki denklemler sırasıyla taraf tarafa toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned} a-b-2c&=3 \\ a+b&=1 \end{aligned} \tag{4.36}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonra (4.1) ve (4.2)'deki ikinci denklemlerin sağlanması için

$$\begin{aligned} -d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+e\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+f&=-1 \\ -d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+e\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+f&=-1 \end{aligned} \tag{4.37}$$

olmalıdır. (4.37)'deki denklemleri sırasıyla taraf tarafa toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned} d-e-2f&=2 \\ d+e&=0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

denklem sistemi elde edilir. Yine (4.1) ve (4.2) sistemindeki üçüncü denklemlerin sağlanması için;

$$\begin{aligned} -g\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+i&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ -g\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+i&=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

olmalıdır. (4.39)'daki denklemler sırasıyla taraf tarafa toplanarak ve çıkarılarak

$$\begin{aligned} g-h-2i&=-1 \\ g+h&=-1 \end{aligned} \tag{4.40}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.36), (4.38) ve (4.40) denklemlerinin sağlanması ile

(4.1) ve (4.2) denklem sistemleri sağlanır.

Seçilen $\mathbf{x_3}$ ve $\mathbf{y_3}$ vektörleri için $(x_2y_3 - y_2x_3) = -\sqrt{5}$, $(x_3y_1 - y_3x_1) = \sqrt{5}$, $(x_1y_2 - y_1x_2) = -\sqrt{5}$ olur. Şimdi $\mathbf{z}$ vektörünü istenilen koşullara göre değerlendirelim.

Seçim I. $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = k$, $z_2 = k$, $z_3 = k$ olsun:

Bu seçime göre (4.9)'daki D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. $z_1 = k$, $z_2 = k$, $z_3 = k$ şeklinde seçildiği için (4.3) denklem sistemi,

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ g+h+i &= 0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

şekline gelir. (4.36), (4.38), (4.40) ve (4.41) denklem sistemlerinin çözümüyle oluşan matris

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

şeklindedir. (4.42)'deki matris için (4.5) eşitliği kullanılarak

$$A_7^n = F_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & -F_n - F_{n-1} \\ F_n - F_{n-1} & -F_n + 2F_{n-1} & -F_{n-1} \\ -F_{n-1} & -F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & -F_{n+1} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_{n-1} \\ -F_{n-1} & -F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 4.7. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & -F_{n+1} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_{n-1} \\ -F_{n-1} & -F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$'dir.

Seçim II. $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = k$ **,** $z_2 = k$ **,** $z_3 = -k$ olsun:

Bu seçime göre (4.9)'daki D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ve (4.3) denklem sistemi

$$\begin{aligned} a + b - c &= 0 \\ d + e - f &= 0 \\ g + h - i &= 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklinde elde edilir. (4.36), (4.38), (4.40) ve (4.43) denklemlerinin çözümüyle oluşan matris,

$$A_8 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

şeklindedir. (4.44)'teki matris için (4.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} A_8^n &= F_n \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3F_n + 2F_{n-1} & -2F_n - F_{n-1} & F_n + F_{n-1} \\ F_n + F_{n-1} & -F_n & F_{n-1} \\ -2F_n - F_{n-1} & F_n + F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & -F_n & F_{n-1} \\ -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.8. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & -F_n & F_{n-1} \\ -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix}$'dir.

Seçim III. $k \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $z_1 = -k$, $z_2 = k$, $z_3 = k$ olsun:

Bu seçime göre (4.9)'daki D matrisi

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur ve (4.3) denklem sistemi

$$\begin{aligned} &a-b-c=0 \\ &d-e-f=0 \\ &g-h-i=0 \end{aligned} \qquad (4.45)$$

olur. (4.36), (4.38), (4.40) ve (4.45) denklemlerinin çözümüyle oluşan matris

$$A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.46)$$

şeklindedir. (4.46)'daki matris için (4.5) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} A_9^n &= F_n \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -F_n & 2F_n + F_{n-1} & -3F_n - F_{n-1} \\ -F_n + F_{n-1} & F_n & -2F_n + F_{n-1} \\ F_{n-1} & -F_n - F_{n-1} & F_n + 2F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -F_n & F_{n+2} & -L_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_n & -L_{n-1} \\ F_{n-1} & -F_{n+1} & L_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu şekilde aşağıdaki teorem ispat edilmiş oldu.

Teorem 4.9. $n \geq 1$ için $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} -F_n & F_{n+2} & -L_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_n & -L_{n-1} \\ F_{n-1} & -F_{n+1} & L_n \end{pmatrix}$'dir.

Bulunan bu matrisler kullanılarak, bazı özelliklerin ispatları yapılabilir. Şimdi Teorem 4.2'deki $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım.

$n \geq 1$ ve $m \geq 1$ pozitif tamsayıları için $A^n=\begin{pmatrix} F_n & -F_{n-1} & -F_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$ ve $A^m=\begin{pmatrix} F_m & -F_{m-1} & -F_{m+1} \\ -F_{m-2} & F_{m-3} & F_{m-1} \\ -F_{m-1} & F_{m-2} & F_m \end{pmatrix}$ yazılabilir. Buradan, matris çarpımı tanımına göre $A^{n+m}=A^nA^m$ eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} F_{n+m} & -F_{n+m-1} & -F_{n+m+1} \\ -F_{n+m-2} & F_{n+m-3} & F_{n+m-1} \\ -F_{n+m-1} & F_{n+m-2} & F_{n+m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_n & -F_{n-1} & -F_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_m & -F_{m-1} & -F_{m+1} \\ -F_{m-2} & F_{m-3} & F_{m-1} \\ -F_{m-1} & F_{m-2} & F_m \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu eşitlikten bazı eşitlikler türetilebilir. Örneğin, eşitliğin sağ tarafındaki matris çarpımı yapılarak ve matris eşitliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned} F_{n+m} &= F_nF_m + F_{n-1}F_{m-2} + F_{n+1}F_{m-1} \\ &= F_nF_m + F_{n-1}F_{m-2} + (F_n + F_{n-1})F_{m-1} \\ &= F_nF_m + F_{n-1}F_{m-2} + F_nF_{m-1} + F_{n-1}F_{m-1} \\ &= F_n(F_m + F_{m-1}) + F_{n-1}(F_{m-2} + F_{m-1}) \end{aligned}$$

veya denk olarak

$$F_{n+m} = F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m \tag{4.47}$$

elde edilir.

(4.47) eşitliği [8] çalışmasındaki Corollary 32.2 eşitliğidir.

Bu kısımdakine benzer şekilde, farklı A matrisleri ve bunların yardımıyla farklı özdeşlikler türetmek mümkündür.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oranın, farklı alanlarla ilişkili birçok özelliği mevcuttur. Bu konularda yapılmış önemli çalışmalar bulunmaktadır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve altın oranın bazı temel özellikleri ile bunların matrislerle olan ilişkisi incelenmiştir. Fibonacci ve Lucas sayılarının matrisler ile olan ilişkisi, öncelikle Q ve R matrislerinin özellikleri ile [8] çalışmasında gösterilmektedir. Yine Q matrisinin özdeğerlerinin, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğu bilinmektedir. Bu ilişkiden yola çıkılarak, özdeğerleri α ve β olan, 2×2 boyutlu matrislerin kuvvetlerinin, Fibonacci sayıları ile olan ilişkisi [22] çalışmasında görülmektedir. Bu tür matrislere örnek olarak, [21] ve [22] çalışmalarındaki matrisler gösterilmiştir. Elde edilen bu matrisler kullanılarak, bazı özelliklerin ispatının nasıl yapılacağı incelenmiştir. Literatürde mevcut olan bu özellik kullanılarak, 2×2 boyutlu, farklı özel matrislerin bulunması incelenebilir. Bu şekilde, özdeğerleri α ve β olan yeni matrislerin elde edilmesi, gelişime açıktır. Yine bulunacak yeni matrislerin determinant ve matris çarpımı gibi bazı özellikleri kullanılarak, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili özelliklerin elde edilebilmesi üzerinde çalışılabilir.

Q matrisinin kuvvetleri incelendiğinde, $Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2}$ özelliğinin olduğu [20] çalışmasında gösterilmiştir. Bu özellikten hareketle, çalışmanın üçüncü bölümünde, n, m ve k tamsayılar olmak üzere, öncelikle $aQ^n + bQ^m = Q^k$ eşitliğindeki a ve b sayılarının bulunması incelenmiştir. Bu temel problemden yola çıkılarak, literatür taramasında karşılaşmadığımız bazı özellikler elde edilmiştir. Bunun yanısıra, bu çözümden yararlanarak, literatürde sık karşılaşılan bazı özelliklerin farklı ispatları verilmiştir. Daha sonra bu probleme benzer olarak, $aRQ^n + bRQ^m = RQ^k$, $aQ^n + bQ^m = RQ^k$, $aQ^n + bRQ^m = Q^k$, $aQ^n + bRQ^m = RQ^k$, $aRQ^n + bRQ^m = Q^k$ denklemleri incelenerek yine literatür taramasında rastlamadığımız bazı özellikler ile, literatürde mevcut olan bazı özelliklerin farklı ispatları elde edilmiştir. Bulunan bu sonuçlar, geliştirilebilirdir. Özellikle elde edilen temel teoremler kullanılarak, yeni özelliklerin elde edilmesi ve uygulanabilirlikleri üzerinde çalışmalar yapılabilir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili olan 3×3 boyutundaki bazı özel matrisler incelenmiştir. Bu bölümde, ikinci bölümde gösterilmiş olan, α ve β özdeğerlerine sahip, 2×2 boyutlu matrislerin, Fibonacci sayıları ile ilişkisinden yola çıkılarak, özdeğerleri α, β ve 0 olan, 3×3 boyutlu matrisler incelenmiştir. Bu tür matrislerin elde edilmesi için, öncelikle matrisin köşegenleştirilmesi özellikleri kullanılarak, matris kuvveti elde edilmeye çalışılmıştır. Daha sonra elde edilen eşitlik kullanılarak α, β ve 0 özdeğerlerine karşılık gelecek özvektörlerin, bazı koşullara uygun olarak, bulunması düşünülmüştür. Bu şekilde farklı özvektör kümeleri yardımıyla farklı matrisler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen matrisler kullanılarak, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özelliklerin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu yöntemle bulunan 3×3 boyutlu matrislerin sayısı artırılabilir. Yine bu boyuttaki özel matrislerin elde edilmesi için, farklı yaklaşımlar ve yöntemler geliştirilebilir. Benzer düşüncenin daha büyük boyutlu matrislere taşınabilmesinin de mümkün olabileceği düşünülmelidir.

KAYNAKLAR

[1] Brannan, D. A., A First Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press, 2006.

[2] Anton, H., Elementary Linear Algebra, 10th Edition, John Wiley and Sons, 9-512, 2010.

[3] Harville, D. A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, New York: Springer Verlag, 1-297, 1997.

[4] Eves, H. W., Elementary Matrix Theory, Courier Corporation, 56-159, 1966.

[5] Meinke, A. M., Fibonacci Numbers and Associated Martices, Thesis Submitted to Kent States University, 2011.

[6] Grimaldi, R., Fibonacci and Catalan Numbers, John Wiley and Sons, 3-140, 2012.

[7] Burton, D. M., The History of Mathematics an Introduction, 6th Edition, A Division of The McGraw Hill Companies, 272-303, 2011.

[8] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley and Sons, 1-386, 2001.

[9] Burton, D. M., Elementary Number Theory, 6th McGraw-Hill Companies, 283-292, 2006.

[10] Smith, D., Lucas's Theorem: Great Theorem, Department of Mathematics and Statistics, Thesis Submitted to Miami University, 2007.

[11] Dunlop, R. A., The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World Scientific Publishing, 35-62, 1997.

[12] Clancy, T., The Fibonacci Numbers, Senior Project Archive, Whitman College, 2008.

[13] Hoggatt, V. E., Basin, S. L., A Primer on the Fibonacci Sequence Part I, The Fibonacci Quartely, I, 65, 1963.

[14] Barik, B., Lucas Sequence Its Properties And Generalization, Master of Science Thesis, National Institute of Technology Rourkela Odisha, 2013.

[15] Hoggatt, V. E., Fibonacci and Lucas Numbers, A Publication of The Fibonacci Association University of Santa Clara, 30-91, 1969.

[16] Mekonnen, T., On The Fibonacci Numbers, Thesis Submitted to Addis Ababa University, 2013.

[17] Danese, A. E., Everman, D., Venkannayah, K., Scheuer, E. M., The American Mathematical Monthly, Problem E1396, 67, 694, 1960.

[18] Sadek, J., Russ Euler, Elementary Problems and Solutions, Fibonacci Quarterly, 42, 370-377, 2004.

[19] Gould, H. W., A History of The Fibonacci Q Matrix and A Higher Dimensional Problem, Fibonacci Quarterly, 19, 250-256, 1981.

[20] Stakhov, A. P., Fibonacci Matrices, a Generalization of Cassini Formula and a New Coding Theory, Chaos, Solitons & Fractals, 30(1), 56-66, 2005.

[21] Demirtürk, B., Fibonacci and Lucas Sums with Matrix Method, International Mathematical Forum, 5(3), 99-107, 2010.

[22] Johnson, R. C., Fibonacci Numbers and Matrices, Durham University, 2009.

[23] Ulutaş, Y., Ömür, N., New Identities for F_{2n} and F_{2n+1}, International Mathematical Forum, 3(3), 147-149, 2008.

[24] Vajda, S., Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications, Ellis Horwood Limited Publ., 9-62, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Sinan Karakaya, 03.01.1989 tarihinde Zonguldak'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Zonguldak'da tamamladı. 2007 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2012 yılında lisans eğitimini bitirdi. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'na matematik öğretmeni olarak atandı. 2016 yılında, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı. Halen matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.