T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SUMUDU DÖNÜŞÜMLERİNİN BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma KAYA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Yalçın YILMAZ**

Ocak 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SUMUDU DÖNÜŞÜMLERİNİN BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma KAYA

Enstitü Anabilim Dalı	MATEMATİK
Enstitü Bilim Adı	Uygulamalı Matematik

Bu tez 10/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yalçın YILMAZ Jüri Başkanı	Doç. Dr. Metin YAMAN Üye	Dr. Öğrt. Üyesi Engin CAN Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Fatma KAYA

10.01.2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda bilgi ve desteği ile yanımda olan, her soru ve sorunuma çözümler üreterek desteğini eksik etmeyen, bu çalışmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarda yardımını esirgemeyen, teşvik eden, aynı hassasiyetle, beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Yalçın YILMAZ'a teşekkürlerimi sunarım. Ders aldığım dönem boyunca ve sonrasında bilgi ve deneyimleri ile yanımda olan aynı zamanda samimiyetle tüm sorunlarımı dinleyen, çözüm bulmaya çalışan Prof. Dr. Şevket GÜR ile birlikte değerli bilgilerinden yararlandığım tüm hocalarıma, Sakarya Üniversitesinin tüm personeline ve öğrencilerime teşekkür ederim.

Tüm eğitimim boyunca maddi ve manevi destekleri ile yanımda olan hayallerimin kalbinden tutmayı, pes etmemeyi öğreten başta annem Alya KAYA ve babam Hüseyin KAYA olmak üzere aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$F(\lambda)$	:Karakteristik polinom
$F(s)$	: Bir fonksiyonun Laplace dönüşümü
$F_n(u)$	: Laplace dönüşümünün n. mertebeden türevi
$f*g$	: f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu
$G(u)$	: Bir fonksiyonunun Sumudu dönüşümü
$G^{-1}\ f(t)$	: Sumudu dönüşümünün ters dönüşümü
$G^{1}(u)$	: Sumudu dönüşümünün integrali
$G_n(u)$	: Sumudu dönüşümünün n. mertebeden türevi
$L[f(t)]$	: f fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$L^{-1}\ f(t)$	: Laplace dönüşümünün ters dönüşümü
$S\ f(t)$	: f fonksiyonunun Sumudu dönüşümü
$S[y(x,t)]$	: $y(x,t)$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü
$\Gamma(p)$	: Gama fonksiyonu ya da genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyon
$Y(x,u)$	: Bir fonksiyonun Sumudu dönüşümü

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Laplace dönüşümü, Sumudu dönüşümü, Sumudu dönüşümünün türevi, Sumudu dönüşümünün integrali, integral dönüşüm, diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklem, konvolüsyon.

Bu çalışmada integral dönüşümü olan Sumudu dönüşümünün özellikleri ve uygulandığı alanlar anlatılmışır.Ayrıca Laplace dönüşümü ve özellikleri ele alınarak; Sumudu ve Laplace dönüşümleri arasındaki ilişki incelenmiş, bu ilişkiyi gösteren teorem ile lemmalar verilmiştir.Sumudu dönüşümü [5] makalesi ile G.K. Watugala tarafından 1993 yılında sunulmuş bir dönüşüm olup, konrol mühendisliğinde bazı adi diferansiyel denklemlerin çözülmesinde önemli yere sahiptir.Bu çalışmada Sumudu dönüşümü adi diferansiyel denklemlere ve kısmı diferansiyel denklemlere uygulanarak denklem sistemleri daha basit bir şekilde çözüldüğü görülmüştür.Çalışmanın ilk bölümlerinde integral dönüşümleri için gerekli temel bilgiler, Laplace ve Sumudu dönüşümlerinin temel özellikleri ile aralarındaki ilişkiye yer verilmiştir. Sumudu dönüşümün türevi ve integralleri alınmıştır.Sonraki bölümlerde Sumudu dönüşümü uygun adi diferansiyel denklemlere ve kısmı diferansiyel denklemlere uygulanarak denklem sistemlerin çözümleri elde edilmiştir.Özellikle birinci ve ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere Sumudu dönüşümü uygulanılarak çalışmanın amacına uygun hareket edilmiştir.

APPLICATIONS OF SUMUDU TRANSFORMATION TO SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Laplace transform, Sumudu transform, derivative of Sumudu transform, integral of Sumudu transform, integral transforms, differential equation, partial differential equation, convolution.

In this study, the properties of Sumudu transform and its applications are explained. In addition, the Laplace transform and its properties are considered; The relationship between Sumudu and Laplace transformations is examined and the theorem which shows this relation is given. Sumudu transform with the article [5], it is a transformation presented by Watugala in 1993 and has an important role in solving some ordinary differential equations in control engineering. In this study, Sumudu transformation is applied to ordinary differential equations and partial differential equations and equations systems are solved in a simpler way**.** In the first parts of the study, the basic information for the integral transformations, the basic properties of the Laplace and Sumudu transformations are given Derivatives and integrals of Sumudu transformation were taken. In the following chapters, the solution of equation systems was obtained by applying the Sumudu transform to appropriate ordinary differential equations and partial differential equations. Particularly the first and second order partial differential equations were applied to Sumudu transformations and they were carried out for the purpose of the study.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Adi diferansiyel ve kısmi türevli denklem sistemlerinin çözümünde integral dönüşüm metotlarının önemi Laplace ve Fourier dönüşümleri ile ortaya çıkmıştır. Sumudu, Elzaki vs. integral dönüşümleri ise bu dönüşümler baz alınarak tanımlanmış dönüşümlerdir. Bu dönüşümler ile verilen diferansiyel denklem sistemleri cebirsel sistemlere dönüştürülerek çözülmeye çalışılmıştır. 1993'te Watugala'nın [5] makalesi ile tanımladığı yeni bir dönüşüm olan Sumudu dönüşümü ile diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerin çözümünde kullanılmaya başlamıştır. Özellikle kontrol mühendisliğinde önemli bir yere sahip olan Sumudu dönüşümü bu çalışmada kısmi diferansiyel denklem ve adi diferansiyel denklem sistemlerindeki bazı önemli problemlere uygulanmıştır. Bazı problemlerde diğer dönüşümlerin çaresiz kaldığı durumlarda Sumudu dönüşümünün kısa çözümlere sahip olduğu, aynı zamanda bazı problemlerde ise çözüme ulaşılamadığı problemlerin olduğu durumlar vardır. Özellikle kontrol mühendisliğinde yer alan adi diferansiyel denklemlerde Sumudu dönüşümünün Laplace dönüşümüne göre daha pratik sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada Sumudu dönüşümü hem adi hem de kısmi diferansiyel denklemlere uygulanarak çözümler elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, ilerde problemler çözülürken kullanılacak ön bilgilere yer verilecektir.

Tanım 2.1. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun. Verilen her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına $|x - p| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in A$ için $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ olmak üzere bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ sayısı karşılık getirebilirse, f fonksiyonu p noktasında süreklidir denir. δ sayısı ε ve p ye bağlıdır. f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonun A kümesi üzerinde süreklidir denir [17].

Teorem 2.2. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun. f fonksiyonu p noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$ olmasıdır [17].

İspat. f fonksiyonu p noktasında sürekli olsun. Limit tanımından

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$: $0 < |x - p| < \delta$ $x \in A$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ olur. Limit tanımına

göre bu eşitsizlik çifti, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$ biçiminde yazılır.

Tersine, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$ olsun. Limit tanımından,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$: $0 < |x - p| < \delta$ $x \in A$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$

yazılabilir. Son eşitsizlik çifti, f nin p noktasında sürekli olduğunu ifade eder.

Sonuç 2.3. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun. f nun p noktasında sürekli olması için aşağıdaki koşullar gerçeklenmelidir.

1) f , p noktasında tanımlı olmalıdır

2) f fonksiyonunun p noktasında limitinin var olmalıdır.

3) $f(p)$ ve $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ değerleri birbirine eşit olmalıdır [17].

Teorem 2.4. $A \subset \mathbb{R}$ **,** $f: A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun. $x_p \in A$ ve $(x_n) \to p$ olma üzere her (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ ise f fonksiyonu p noktasında süreklidir [17].

Teorem 2.5. $f: A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun. f fonksiyonu p noktasında süreksiz olması için gerek ve yeter koşul, A kümesinde p ye yakınsayan bir (x_n) dizisi var fakat $(f(x_n))$ dizisinin $f(p)$ ye yakınsamamasıdır [17].

Teorem 2.6. $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$**,** $f: B \to \mathbb{R}$ ve $f(A) \subset B$ olsun. f fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli ve g fonksiyonu $b = f(a) \in B$ noktasında sürekli ise $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonu a noktasında süreklidir [17].

İspat. $(x_n) \to a$ olsun. Varsayıma göre $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ ve böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \text{ gof } (x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = \text{ gof } (a) \ .$$

Tanım 2.7. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun.

a) $x \geq p$ ve $\lim_{x\to p^+} f(x_n) = f(p)$ ise f fonksiyonu p noktasında sağdan süreklidir denir.

b) $x \leq p$ ve $\lim_{x\to p^-} f(x_n) = f(p)$ ise f fonksiyonu p noktasında soldan süreklidir denir [17].

Bir f fonksiyonunun $x = p$ noktasındaki süreksizliği varsa, iki durumla karşılaşılır.

Tanım 2.8.

1. $f(p^+)$ ile $f(p^-)$ var ve $f(p)$ tanımsız ise p noktasında 1.türden süreksizlik vardır.

a) $\lim_{x\to p} f(x)$ var ve $\lim_{x\to p} f(x) \neq f(p)$ ise süreksizliğe kaldırılabilir süreksizlik denir.

b) $f(p^{+}) \neq f(p^{-})$ ise süreksizliğe sıçramalı süreksizlik denir.

2. $f(p^{+})$ veya $f(p^{-})$ limitleri yoksa ya da $\pm\infty$ ise süreksizliğe 2.türden süreksizlik (kesin süreksizlik) denir [17].

Lemma 2.10. Eğer herhangi bir p reel sayısı için A^{p} varsa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{p} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{p} = A^{p}$ dir [19].

Lemma 2.11. Eğer herhangi bir p reel sayısı için p^{A} varsa $\lim\limits_{n\to\infty} p^{a_n} = p^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = p^{A}$ dir [19].

Lemma 2.12. f fonksiyonu $(n+1)$ boyutlu uzayın bir B bölgesinde tanımlı olsun. y nin t ye göre k. mertebeden türevi $y^{(k)}$, $(k=1,2,...n)$ ve n. basamaktan diferansiyel denklemi

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n+1)}) \tag{2.1}$$

verilmiş olsun. Aşağıdaki üç koşul gerçeklediğinde $y = y(t)$ fonksiyonuna, I aralığı üzerinde (2.1) denkleminin çözümüdür denir.

(i)Her $t \in I$ için $y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)$ fonksiyonları tanımlıdır.

(ii) Her $t \in I$ için $(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n-1)}(t))$ noktası B dedir.

(iii) Her $t \in I$ için $y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n-1)}(t))$ gerçeklenir.

Bu koşullar kısaca "I aralığı üzerinde $y = y(t)$, (1.2) denklemini sağlar." Biçiminde ifade edilebilir. Buna göre n. basamaktan bir diferansiyel denklemin çözümü denince bir aralık üzerinde en az n.mertebeden türetilebilen ve verilen denklemi sağlayan bir fonksiyon anlaşılır [18].

Örneğin $y'' + 5y' + 4y = 0$ diferansiyel denkleminde $f(t, y, y') = -5y' - 4y$ dir. $-\infty < t < \infty$ aralığındaki t 'ler için $y(t) = e^{-t}$ verilen denklemin bir çözümüdür. y nin üç koşulu sağladığı açıktır.

Genel olarak diferansiyel denklemin birçok çözümü vardır. Denklemin bir çözümü elde edilmek istenirse denklemle birlikte başlangıç koşulları olarak adlandırılan bir takım kısıtlamaların da verilmesi gerekir ve başlangıç koşulları verilen denklem bir başlangıç değer problemi oluşturur.

Lemma 2.13. a_0, a_1, a_2 bir I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ve her $t \in I$ için $a_0(t) \neq 0$ olsun. O halde,

$$a_0(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = 0 \tag{2.2}$$

diferansiyel denkleminin, aralığı üzerinde tanımlı ve lineer bağımsız $y_{1,}y_2$ olmak üzere iki çözümü vardır. $y = y(t)$ (2.2) denkleminin bir çözümü ise her $t \in I$ için,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{2.3}$$

olacak biçimde tek türlü c_1 ve c_2 sabiti vardır [18].

Lemma 2.14. a_0, a_1, a_2 bir I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ve her $t \in I$ için $a_0(t) \neq 0$ olsun.

$$a_0(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = 0 \tag{2.4}$$

denkleminin y_1 ve y_2 gibi çözümünün I aralığında lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul her $t \in I$ için

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.5}$$

olmasıdır [18].

Örnek 2.15. $y'' - 4y = 0$ denkleminin e^{2t} ve e^{-2t} fonksiyonları lineer bağımsız çözümüdür. Gerçekten,

$$W(e^{2t}, e^{-2t}) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

dır. O halde denkleminin genel çözümü,

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

olarak yazılır.

Homogen diferansiyel bazı denklemlerin çözümleri aşağıda bazı yöntemlerle bulunmuştur.

Örnek 2.16. $y'' - 5y' + 6y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
Verilen denklemin karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

ve karakteristik kökleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$ dir. Buna göre, verilen denklem için $y_1 = e^{2t}$, $y_2 = e^{3t}$ çözümleri $W(y_1, y_2) = e^{5t} \neq 0$ olduğundan, lineer bağımsızdır ve denklemin genel çözümü c_1, c_2 sabit katsayıları olmak üzere,

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

biçimindedir.

Örnek 2.17. $y''' - 3y' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
Verilen denklemin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$$

ve karakteristik kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ dir. Buna göre, denklemin genel çözümleri, $y_1 = e^t$, $y_2 = te^t$, $y_3 = e^{-2t}$ ve $W(e^t, te^t, e^{-2t}) \neq 0$ olduğundan, bulunan özel çözümleri lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-2t} \ .$$

Örnek 2.19. $y'' + 2y' - 3y = 3t^2 - t + 5$ denklemini çözünüz.
Karakteristik denklemi,

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$$

Kökleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ olup homogen kısmın çözümü

$$y_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t$$

biçimindedir. Verilen diferansiyel denklemin sağ yanı $f(t) = 3t^2 - t + 5$ ikinci dereceden bir polinom olduğundan;

$$y_ö(t) = at^2 + bt + c$$

biçiminde bir özel çözüm aranır. $y_ö'(t) = 2at + b$, $y_ö''(t) = 2a$ değerleri verilen diferansiyelde yerine yazılırsa

$$-3at^2 + (4a - 3b)t + 2a + 2b - 3c = 3t^2 - 2t + 5$$

katsayılar eşitliğinden $a=-1$, $b=-1$ $c=-3$ bulunur. Buna göre özel çözüm

$$y_ö(t)=-t^2-t-3$$

olduğundan verilen denklemin genel çözümü,

$$y(t)=y_ö+y_h=c_1e^{-3t}+c_2e^t-t^2-t-3$$

bulunur.

Örnek 2.20. $y''-y'-2y=2e^{-t}$ denklemini çözünüz.
Karakteristik denklemi,

$$F(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$

Ve kökleri $\lambda_1=-1, \lambda_2=2$ dir. Buna göre,

$$y_h=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$$

olur. Özel çözümü,

$$y_ö=ate^{-t}$$

biçiminde alınıp, $y_ö'=a(1-t)e^{-t}$, $y_ö''=a(t-2)e^{-t}$ değerleri yerine yazılırsa

$$(a(t-2)-a(1-t)-2at)e^{-t}=2e^{-t}$$

den $a=-2/3$ olur. Böylece özel çözüm $y_ö=-2/3\, te^{-t}$ ve genel çözüm

$$y=y_h+y_ö=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}-2/3\, te^{-t}.$$

Doğrusal diferansiyel denklemler, integral dönüşümleri yardımıyla da çözülebilir. verilen bir f fonksiyonundan integral yardımı ile yeni bir fonksiyonun tanımlanması bir integral dönüşümüdür. Örneğin, f bilinen bir fonksiyon olmak üzere,

$$F(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonu, f nin dönüşümüdür. K fonksiyonuna dönüşüm çekirdeği denir [18]. Dönüşümde amaç f bilinmeyen fonksiyonuna bağlı olan bir diferansiyel denklemi, daha kolay çözülebilen ve F ye bağlı olan bir probleme dönüştürmektir [18]. Aşağıda integral dönüşümlerinden Laplace dönüşümü incelenecektir. Laplace dönüşümü ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir. Laplace dönüşümü gibi Sumudu dönüşümü de bir integral dönüşümü olup benzer yanları daha açık görülmesi sağlanacaktır.

Lemma 2.21. $t>0$ için tanımlanan $f(t)$ fonksiyonunun $L[f(t)]$ veya $F(s)$ ile gösterilen Laplace dönüşümü $(s>0)$

$$L[f(t)]=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{2.6}$$

denklemi ile tanımlanır [18].

Tanım 2.22. Bir $f(t)$ fonksiyonu $(t\geq T)$ için

$$e^{-\alpha t}\left|f(t)\right|<M \tag{2.7}$$

gerçeklenmek üzere α, M ve T sabitleri $(M>0, T>0)$ bulunabilirse, $f(t)$ fonksiyonuna $t\to\infty$ için α.mertebeden üstel mertebelidir denir ya da kısaca üstel mertebelidir denir [18].

Teorem 2.23. $f(t)$ kısmi sürekli ve üstel mertebeli ise

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{2.8}$$

ile tanımlanan $F(s)$ Laplace dönüşümü var ve mutlak yakınsaktır denir [18].

İspat. Teoremin ispatı için

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \left| e^{-st} f(t) \right| dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left| f(t) \right| e^{-st} dt \tag{2.9}$$

integralinin varlığı gösterilmelidir. $f(t)$ üstel mertebeli olduğundan M_1 ve T keyfi pozitif sabitleri ve keyfi bir α sayısı, her $t > T$ için

$$e^{-\alpha t} \left| f(t) \right| < M_1 \tag{2.10}$$

gerçeklenmek üzere vardır. $f(t)$ kısmi sürekli olduğundan, $0 \le t \le T$ sonlu aralığı üzerinde sınırlıdır. Böylece, $0 \le t \le T$ için

$$\left| f(t) \right| < M_2 = (Me^{-\alpha t})e^{\alpha t} \tag{2.11}$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir M_2 pozitif tamsayısı vardır. $\max\{M_1, M_2, M_2 e^{-\alpha t}\} = M$ ise her $t \ge 0$ için $\left| f(t) \right| < Me^{\alpha t}$ gerçeklenir ve

$$I = \int_0^b \left| f(t) \right| e^{-st} dt \le \int_0^b Me^{\alpha t} e^{-st} dt = M \int_0^b e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{M}{s-\alpha}(1 - e^{-(s-\alpha)b}) \tag{2.12}$$

olur. I integrali b nin artan bir fonksiyonudur. $s > \alpha$ için son ifade artandır ve $b \to \infty$ için $\dfrac{M}{s-\alpha}$ değerine yakınsar. Bu nedenle,

$$1 \leq \frac{M}{s-\alpha}, \qquad (s > \alpha) \tag{2.13}$$

dır ve $b \to \infty$ için I sonlu bir limite yakınsar. Elde edilen sonuca göre

$$\left| \int_0^b f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^b |f(t)| e^{-st} dt \leq \frac{M}{s-\alpha} \tag{2.14}$$

olur. Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 2.24. $f(t)$ kısmi sürekli ve üstel mertebeli ise her s ve α için,

$$|L[f(t)]| \leq \frac{M}{s-\alpha}, \qquad (s > \alpha) \tag{2.15}$$

dır. Burada M sabiti s e bağlı değildir [18].

Sonuç 2.25. $f(t)$ kısmi sürekli ve üstel mertebeli ise $\lim_{s \to \infty} L[f(t)] = 0$ dır [18].

Örnek.2.26. $f(t) = 1$ $(t \geq 0)$ olsun. O halde,

$$L[f(t)] = L[1] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \ (s > 0).$$

Örnek.2.27. $f(t) = e^{at}$, $(t \geq 0)$ olsun. Tanımdan, $s > a$ için,

$$L[f(t)] = L\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}.$$

Örnek.2.28. $f(t) = \cos at$, $t \geq 0$ olsun. Laplace dönüşümü tanımından

$$L[f(t)] = L[\cos at] = \int_0^\infty e^{-st}\cos at dt$$

dir. Kısmı integrasyonla

$$L[\cos at] = \frac{-\cos at e^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} a \sin at dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin at dt$$

$$L[\cos at] = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left\{\frac{-\sin at e^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos at dt\right\}$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)L[\cos at] = \frac{1}{s}$$

dir. Buradan,

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad (s > 0) \text{ bulunur.}$$

Örnek.2.29. $f(t) = t$, $(t \geq 0)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.
Laplace dönüşümü tanımından,

$$L[t] = \int_0^\infty te^{-st}dt = \left\{\frac{-te^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty te^{-st}dt\right\} = \frac{1}{s^2} \quad .$$

Teorem 2.30. f_1 ve f_2 sırasıyla $s > \alpha_1$ ve $s > \alpha_2$ için Laplace dönüşümleri var olan iki fonksiyon olsun. $s > \max(\alpha_1, \alpha_2)$, c_1 ve c_2 keyfi sabitleri için

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)] \tag{2.16}$$

dir [18].

Tanım 2.31. Gama fonksiyonu ya da genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyon adı verilen fonksiyon $p > 0$ için,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \tag{2.17}$$

integrali ile tanımlanır [18]. Bu genelleştirilmiş integral her $p > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun gerçeklediği temel bağıntıyı elde etmek için (2.17) ye kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\Gamma(p) = \frac{t^p}{p} e^{-t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty t^p e^{-t} dt$$

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \Gamma(p+1) \tag{2.18}$$

veya

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \qquad (p>0) \tag{2.19}$$

bulunur [18]. Örneğin,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty t e^{-t} dt = -te^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

bulunur ve (2.19) dan

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2.20}$$

elde edilir. $f(t) = t^p$ biçimindeki fonksiyonların Laplace dönüşümleri, Gamma fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak hesaplanır. $p > -1$ ve $s > 0$ için, $st = u$ dönüşümü yapılırsa,

$$L[t^p]=\int_0^\infty t^p e^{-st}dt=\int_0^\infty t^p e^{-st}dt=\int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^p e^{-u}\frac{1}{s}du$$
$$=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty u^p e^{-u}du=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \tag{2.21}$$

bulunur. Özel olarak $p=n$ pozitif tamsayı ise (2.20) den

$$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (n=1,2,...) \tag{2.22}$$

olur. $n=0$ için $L[1]$ örnekten bulunmuştu.

Teorem 2.32. Herhangi bir $[0,A]$ aralığı üzerinde f sürekli ve f' türevi kısmi sürekli olsun. M, a ve T sabitleri, $t\geq T$ için $|f(t)|\leq Me^{at}$ gerçeklenmek üzere var olsun. $(M>0,T>0)$. Bu koşullar altında $s>a$ için $L[f'(t)]$ vardır ve

$$L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0) \tag{2.23}$$

bağıntısı ile verilir [18].

İspat. f' türevinin $[0,A]$ aralığındaki süreksizlik noktaları $t_1,t_2,...,t_n$ olsun. İntegrali alınıp daha sonra kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$I=\int_0^A f'(t)e^{-st}dt=\int_0^{t_1} f'(t)e^{-st}dt+\int_{t_1}^{t_2} f'(t)e^{-st}dt+...+\int_{t_n}^{A} f'(t)e^{-st}dt$$
$$=f(t)e^{-st}\Big|_0^{t_1}+f(t)e^{-st}\Big|_{t_1}^{t_2}+...+f(t)e^{-st}\Big|_{t_n}^{A} \tag{2.24}$$
$$+s\ \int_0^{t_1} f(t)e^{-st}dt+\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-st}dt+..+\int_{t_n}^{A} f(t)e^{-st}dt$$

elde edilir. f sürekli olduğundan,

$$I=e^{-sA}f(A)-f(0)+s\int_{t_n}^{A} f(t)e^{-st}dt \tag{2.25}$$

$$\lim_{A\to\infty} e^{-sA} f(A) = 0 \quad (s > a) \tag{2.26}$$

olduğundan, $A \to \infty$ için (2.25) nin limiti alınırsa, $(s > a)$

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A f'(t)e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty} e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A f(t)e^{-st}dt \tag{2.27}$$

veya

$$L[f'(t)] = sL\ f(t)\ - f(0) \tag{2.28}$$

olur.

Teorem 2.33. Bir $[0, A]$ aralığında $f(t)$ ve $f'(t)$ sürekli ve üstel mertebeli $f''(t)$ kısmi sürekli ise $s > a$ için $f''(t)$ türevinin Laplace dönüşümü vardır ve

$$L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0) \tag{2.29}$$

ile verilir [18].

Bu teorem, genel halde n. mertebeden $f^{(n)}$ türevinin Laplace dönüşümü için aşağıdaki gibi verilir.

Sonuç 2.34. Herhangi bir $[0, A]$ aralığında $f, f', f'', ..., f^{(n-1)}$ fonksiyonu sürekli ve $f^{(n)}$ kısmi sürekli olsun. Bundan, $t \geq T$ için $|f(t)| \leq Me^{at}$, $|f'(t)| \leq Me^{at}$, ... , $|f^{(n-1)}(t)| \leq Me^{at}$ gerçeklenmek üzere M, T ve a sabitleri var olsun. Bu koşullar altında $s > a$ için $L[f^{(n)}(t)]$ dönüşümü vardır ve

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{2.30}$$

bağıntısı ile verilir [18].

Lemma 2.35. f ve g fonksiyonlarının $[0,T]$ biçimindeki her aralık üzerinde kısmi sürekli ve üstel mertebeli oldukları varsayılacaktır. Bu koşullar altında f ve g fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri vardır. Bu dönüşümler sırasıyla $F(s)$ ve $G(s)$ ile gösterilirse Laplace dönüşümünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

(A) $L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$, $\quad (s>a)$

(B) $g(t) = \begin{cases} 0 & ,0<t<a \\ f(t-a) & ,t>a \end{cases}$ ise $\quad L[g(t)] = e^{-as}F(s)$ dir.

(C) $L[f(at)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $\quad (a>0)$ (2.31)

(D) $L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)$ $\quad (n=1,2,...)$

(E) $L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(s)}{s}$

gerçeklenir [18].

Örnek.2.36. $L\left[t^3e^t\right]$ dönüşümünü hesaplayınız.

Öncelikle $f(t)=t^3$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü Tablo 1.1.'den $F(s) = L\left[t^3\right] = \dfrac{3!}{s^4}$. (A) özelliği kullanılarak

$$L\left[e^{at}t^3\right] = F(s-1) = \frac{3!}{(s-1)^4}$$

bulunur. Aynı zamanda (D) özelliğinden yararlanarak da bulunabilir.

Örnek.2.37. $L\left[e^{-2t}\sin 3t\right]$ dönüşümünü hesaplayınız.

$f(t) = \sin 3t$ alınıp Laplace dönüşümü bulunursa,

$$F(s) = L[f(t)] = L[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 3^2}, \ (s > 0)$$

olduğundan, (A) özelliğine göre,

$$L\left[e^{-2t}f(t)\right] = L\left[e^{-2t}\sin 3t\right] = F(s+2) = \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}, \qquad (s > 0).$$

Şimdi ters Laplace dönüşümü ile ilgili bilgilere yer verilsin. Laplace dönüşümü $F(s)$ olan $f(t)$ fonksiyonuna, $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü denir [20]. Ters Laplace dönüşümü L^{-1} ile gösterilir. Ters Laplace dönüşümü de lineerdir. Ters Laplace dönüşümü incelenirken fonksiyonun $F(s)$ Laplace dönüşümü biliniyorsa $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü nasıl hesaplanacağı ve $F(s)$ nin ters dönüşümünün tek olup olmadığı gibi sorularla karşılaşılır. Aşağıda bu sorular için açıklama yapılmıştır.

Lemma. 2.39. Teorem 2.24 sonucuna göre f kısmı sürekli ve üstel mertebeli ise

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \tag{2.32}$$

dur. Bu artan s ler ile birlikte sıfıra giden F fonksiyonlarının bir ters Laplace dönüşümü olduğunu ifade eder [16].

Örneğin; $F(s)=\dfrac{s(s+1)}{s^2+4}$ fonksiyonu ele alınsın. Burada bu foksiyonun limiti $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\left(\dfrac{s(s+1)}{s^2+4}\right)=1$ işlemleri yapılarak çıkan sonuç; F fonksiyonun ters dönüşümünün olmadığını gösterir.

Teorem 2.40. (Lerch Teoremi) f fonksiyonu, her sonlu $[0,N]$ aralığı içinde parçalı sürekli ve $t \geq N$ için üstel mertebeli ise $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü tektir [20].

Ters Laplace dönüşümü daha önce verilen elemanter fonksiyonların Laplace dönüşümleri ve Laplace dönüşümü için verilen özelliklerden yararlanarak bulunur. Dolayısıyla, bazı elemanter fonksiyonların ters Laplace dönüşümleri,

$$
\begin{aligned}
& L^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right]=\frac{t^n}{n!} \quad , \quad (n=0,1,...) \\
& L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at} \quad , \quad (s>a) \\
& L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\sin at \quad , \quad (s>0) \\
& L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at \quad , \quad (s>0)
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

biçimindedir. Laplace dönüşümü için verilenlerin sonucu olarak ters Laplace dönüşümünün özellikleri hemen yazılabilir. Örneğin, $L^{-1}[F(s)]=f(t)$ ile (A) ve (B) özelliklerinden

$$
\begin{aligned}
& L^{-1}[F(s-a)]=e^{at} f(t) \\
& L^{-1}[F^{(n)}(s)]=(-1)^n t^n f(t)
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

gibi özellikler yazılabilir [18]. Aşağıda Laplace dönüşümü bilinen bazı fonksiyonların ters Laplace dönüşümü bulunacaktır.

Örnek.2.41. $F(s)=\dfrac{s}{s^2+3s+2}$ nin ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Verilen fonksiyon basit kesirlere ayrılırsa

$$F(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}$$

olur. Her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=2e^{-2t}-e^{-t}$$

elde edilir.

Tanım 2.43. f ve g her sonlu $[0,N]$ kapalı aralığı üzerinde kısmi sürekli ve üstel mertebeli iki fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^t f(t-u)g(u)du$$

İntegrali ile tanımlanan ve $f*g$ ile gösterilen fonksiyona f ve g fonksiyonlarının konvolusyonu denir [18].

Lemma 2.44. $*$ işlemi, bayağı çarpma işleminin bazı özelliklerine sahiptir [18].

1) $f*(g*h)=f*g*h$

2) $f*g=g*f$ (2.35)

3) $f*(g+h)=f*g+f*h$

Teorem 2.45. (Konvolusyon Teoremi) f ve g fonksiyonlarının $s>a$ için Laplace dönüşümleri var olan iki fonksiyon ise

$$L[f].L[g]=L[f*g] \tag{2.36}$$

dır [18].

İspat. f **ve** g fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri için Laplace dönüşümü tanımından $F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ ve $G(s)=\int_0^\infty e^{-sz}g(z)dz$ alınırsa

$$F(s).G(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx.\int_0^\infty e^{-sz}g(z)dz) \tag{2.37}$$

olur. Bu çarpım,

$$F(s).G(s)=\int_0^\infty g(z)\left(\int_0^\infty e^{-sz}e^{-sx}f(x)dx\right)dz=\int_0^\infty g(z)\left(\int_0^\infty e^{-s(x+z)}f(x)dx\right)dz$$

biçiminde yazılabilir. Bu integralde $x=t-z$ dönüşümü yapılırsa,

$$F(s).G(s)=\int_{z=0}^\infty g(z)\left(\int_{t=z}^\infty e^{-st}f(t-z)dt\right)dz \tag{2.38}$$

elde edilir. Buradan

$$F(s).G(s)=\int_{t=0}^\infty e^{-st}\left(\int_{z=0}^\infty f(t-z)g(z)dz\right)dt=L\ f*g \tag{2.39}$$

bulunur.

Örne.2.46. $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+3^2)^2}\right]$ dönüşümünü hesaplayınız.

Ters dönüşümü alınacak fonksiyon çarpanlar şeklinde yazılır ve denk gelen Laplace dönüşümü yazılırsa,

$$\frac{1}{(s^2+3^2)^2}=\frac{1}{(s^2+3^2)}.\frac{1}{(s^2+3^2)}=L\left[\frac{1}{3}\sin 3t\right]L\left[\frac{1}{3}\sin 3t\right]$$

elde edilir. Buradan $f(t)=g(t)=\frac{1}{3}\sin 3t$ alınarak konvolusyon teoremine göre,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+3^2)^2}\right]=(f*g)(t)=\int_0^t f(t-u)g(u)du=\frac{1}{3}\int_0^t \sin 3(t-u)\frac{1}{3}\sin 3udu$$
$$=\frac{1}{18}\int_0^t \cos(6u-3t)-\cos 3t\ \ du=\frac{1}{18}\left\{\frac{1}{3}\sin 3t-t\cos 3t\right\}$$

bulunur.

Lemma 2.48. x, y bağımsız; z bağımlı değişken olmak üzere birinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemin genel şekli

$$A(x,y)z_x+B(x,y)z_y+C(x,y)z=G(x,y) \tag{2.40}$$

formundadır [18]. Burada $A,B,C\in C^1[D]$, $A^2+B^2\neq 0$, $G\in C[D]$ ve D, $\mathbb{R}^2$ nin sınırlı, basit irtibatlı bir alt bölgesi veya yerine göre $\mathbb{R}^2$ nin tamamıdır. Eğer,

$$L=A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+C(x,y) \tag{2.41}$$

operatörünü kullanılırsa (2.40) denklemi

$$L_z=G(x,y) \tag{2.42}$$

şeklinde yazılabilir. (2.41) ile verilen L operatörü, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler ve $f, g \in \mathbb{C}^1[D]$

keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$L[c_1 f + c_2 g] = c_1 L[f] + c_2 L[g]$$

lineerlik koşulunu sağlar [16].

Tanım 2.49. (2.40) denkleminde $G(x, y) \equiv 0$ ise o zaman ortaya çıkan denklemine**,** (2.42) denklemine ilişkin homogen denklem denir. $z = \varphi(x, y)$ fonksiyonu (2.40) denkleminin bir özel çözümü ise

$$A\varphi_x + B\varphi_y + C\varphi = G \tag{2.44}$$

özdeşliği sağlanır [16].

Tanım 2.50. (2.40) denklemini sağlayan en az birinci basamaktan sürekli türetilebilir $z = \varphi(x, y)$ fonksiyonuna (2.40) denkleminin bir integral yüzeyi denir [16].

Tanım 2.51. Bir türetilebilir keyfi fonksiyon kapsayan ve keyfi fonksiyonunun her seçimi için (2.43) denklemini sağlayan bir yüzey ailesine homogen denkleminin genel çözümü denir [16].

Tanım 2.52. (2.43) homogen denkleminin genel çözümü z_h ve (2.42) homogen olmayan denklemin bir özel çözümü z_p ise

$$z = z_h + z_p \tag{2.45}$$

yüzey ailesine (2.42) ile verilen homogen olmayan denklemin genel çözümü denir [16].

Örnek.2.53. $z_x + z = x$ denklemi göz önüne alınsın. Bu denkleme karşı gelen homogen denklem $z_x + z = 0$ dır. Bu denklemin her iki tarafı e^x ile çarpılırsa

$$e^x z_x + e^x z = \frac{\partial}{\partial z}(e^x z) = 0$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın x e göre integralinin alınmasıyla homogen kısmının genel çözümü

$$e^x z = f(y)$$

ya da

$$z_h = e^{-x} f(y) \quad f \in C^1[D]$$

olarak bulunur. Buna homogen denklem için bir integral yüzeyi de denir.

Lemma 2.54. İkinci basamaktan, iki bağımsız değişkenli hemen-hemen lineer denklemin en genel şekli

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + H(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \tag{2.46}$$

dir. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x,y) := B(x,y)^2 - 4A(x,y)C(x,y) \tag{2.47}$$

fonksiyonunu tanımlayalım [16].

Tanım 2.55. (2.46) denklemine

1) $\Delta(x,y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik,

2) $\Delta(x,y) = 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda parabolik (2.48)

3) $\Delta(x,y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik,

tiptendir denir [16].

Örnek.2.56. $(x^2+y^2)z_{xx} - 3z_{xy} + z_{yy} + z_x + z_y = 0$ denkleminin tipini belirtiniz.

$A(x,y) = x^2 + y^2$, $B(x,y) = -3$, $C(x,y) = 1$ olduğundan $\Delta(x,y)$ fonksiyonu

$$\Delta(x,y) = (-3)^2 - 4(x^2+y^2)(1) = 9 - 4(x^2+y^2)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen denklem

$D_1 = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < \frac{9}{4}, x,y \in \mathbb{R}\right\}$ bölgesinde hiperbolik,

$D_2 = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = \frac{9}{4}, x,y \in \mathbb{R}\right\}$ çemberi üzerinde parabolik,

$D_3 = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 > \frac{9}{4}, x,y \in \mathbb{R}\right\}$ açık diskinde eliptik tiptendir.

Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden olan Δ Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.49}$$

şeklinde tanımlanır ve bunlar sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir. Benzer şekilde n-boyutlu Laplace operatörü de tanımlanabilir [16].

Tanım 2.58. Δ operatörü, (2.49) daki gibi olmak üzere hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \tag{2.50}$$

şeklindeki bir denkleme Δ nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir [8,18].

(2.50) denkleminde c pozitif bir reel sabit ve genellikle aksi söylenmedikçe t zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca Δu, t y göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{2.51}$$

$$u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \tag{2.52}$$

$$u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \tag{2.53}$$

formundadır [8,18]. Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Tanım 2.59. Dalga denklemlerinin u çözümlerine dalga fonksiyonu denir [16].

Tanım 2.60.

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = F \tag{2.54}$$

şeklindeki denkleme homogen olmayan dalga denklemi denir [18]. (2.54) deki F fonksiyonu sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olup bu bilinen bir dış kuvveti veya bir dalga kaynağını ifade eder. Yine (2.54) daha genel bir hali olan

$$u_{tt} + \gamma u_t - c^2 \Delta u = F, \ (\gamma \text{sabit}) \tag{2.55}$$

hiperbolik denklemi sönümlü dalga denklemi olarak bilinir.

Tanım 2.61. t zaman değişkenini ve u da aranan fonksiyonu göstermek üzere, $t = 0$ için u ve u_t değerlerinin denklemle birlikte verilmesi halinde bu probleme başlangıç değer problemi denir [16].

Tanım 2.62. Denklemle birlikte aranan fonksiyonun, tanımlı olduğu bölgenin sınırı üzerindeki değerinin önceden verilmesi halinde buna da bir sınır değer problemi denir [16].

Tanım 2.63. Denklemle birlikte başlangıç ve sınır değerlerinin önceden verilmesi halinde buna da bir başlangıç ve sınır değer problemi denir [16].

Çoğu zaman her üç probleme Cauchy problemi de denir.

Lemma 2.64. Aşağıda dalga ve ısı denklemleri örnek olarak verilsin.

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\
&u(x,0) = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \\
&u_t(x,0) = g(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

şeklinde bir Cauchy problemi verilsin. Burada $u(x,t)$, t anındaki x yer değişkenine göre dalganın konumunu; $f(x)$ dalganın $t = 0$ anındaki başlangıç durumunu, ise dalganın başlangıç hızını göstermektedir.

Ayrıca, burada $f(x)$ in tanımlı olduğu yerde en az iki defa türetilebilir ve ikinci basamaktan türevinin sürekli, $g(x)$ in en az birinci basamaktan türeve sahip ve bu türevinin de sürekli olduğu kabul edilir. Çözümlerin varlığı için bu hipotezler gereklidir [16].

Lemma 2.65. Uzunluğu L olan bir metal çubuğun, x ekseninin bir $[0,L]$ alt aralığına yerleştirildiği varsayılsın. Çubuk boyunca zamana bağlı bir ısı yayılması olduğu düşünülsün. Eğer çubuk üzerinde ısı üreten bir kaynak yoksa ve çubuğun uç noktalarında ısı sıfır ise bu takdirde yüzeyi izole edilmiş çubuktaki ısı yayılması t zaman değişkenini göstermek üzere,

$$\begin{array}{llll} u_t - ku_{xx} = 0 & , \quad 0 < x < L & , \quad t > 0 & \\ u(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 & , \quad (\text{sınır koşulu}) & \\ u(L,t) = 0 & , \quad t \geq 0 & , \quad (\text{sınır koşulu}) & \\ u(x,0) = f(x) & , \quad 0 \leq x \leq L & , \quad (\text{başlangıç koşulu}) & \end{array} \tag{2.57}$$

şeklinde bir Cauchy problemidir. Burada $u(x,t)$, herhangi t anında çubuğun üzerindeki bir x noktasında mevcut olan ısı miktarını, $f(x)$ ise başlangıç ısısını veren fonksiyonlardır. k ise çubuğun termal geçirgenliği ile ilgili bir sabittir [16].

Tanım 2.66. u bağımlı; x, y, z bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$\begin{array}{l} \Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ \Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \end{array} \tag{2.58}$$

denklemleri sırasıyla iki ve üç boyutlu Laplace denklemleri olarak isimlendirilir. Δ ya ise Laplace operatörü denir. Bu şekilde daha yüksek boyutlu Laplace denklemleri benzer biçimde verilebilir [16].

Teorem 2.67. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı ve integrallebilir ise $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ fonksiyonu $[a,b]$ de süreklidir [19].

Teorem 2.68. (Diferansiyel ve İntegral Hesabının Esas Teoremi) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ fonksiyonu türevlidir ve her $x \in [a,b]$ için $F'(x) = f(x)$ dir [19].

Tanım 2.69. $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $F'=f$ ise F fonksiyonuna $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu denir [19].

Teorem 2.70. (Diferansiyel ve İntegral Hesabının Esas Teoreminin 1.Versiyonu) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $G:[a,b]\to\mathbb{R}$, f fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu ise aşağıdaki eşitlik gerçeklenir.

$$\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a) = G(x)\Big|_{x=a}^{b} \tag{2.59}$$

Teorem 2.71. (Esas Teoreminin 2.Versiyonu) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitlik gerçeklenir [19].

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a) \tag{2.60}$$

Sonuç 2.72. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise her $x\in[a,b]$ için $\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a)$ gerçeklenir [19].

Teorem 2.73. (Kısmi İntegrasyon) $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli türetilebilir ise

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{2.61}$$

dir.[19].

Eğer integral bölgesi $[a,b]$ sonlu değilse veya $f(x)$ $[a,b]$ nin bir veya daha çok noktalarında tanımlı değil ya da sınırlı değilse o zaman bu bölge üzerinden $f(x)$ in integrali bir genelleştirilmiş integral olarak adlandırılır. Alışılmış limit işlemleri ile bu şekildeki integraller tanımlanabilir.

Örnek.2.74. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \arctan x\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} \arctan M = \frac{\pi}{2}$

bulunur.

Lemma 2.75. $f(x)$ her sonlu $a \le x \le b$ aralığında sınırlı ve integrallenebilir olsun. O zaman

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{2.62}$$

tanımlanır. Sol taraftaki integral sağ taraftaki limitin var olmasına veya olmamasına bağlı olarak yakınsak ya da ıraksak olarak adlandırılır [21].

Örnek.2.76. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$ dolayısıyla $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ integrali 1'e yakınsar.

Örnek.2.77. $\int_{-\infty}^{u} \cos x dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^u \cos x dx = \lim_{b\to-\infty} \sin u - \sin b$ limiti olmadığından $\int_{-\infty}^{u} \cos x dx$ integrali ıraksaktır.

BÖLÜM 3. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜNÜN TANIMI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1. [1] ve [3] makaleleri gözönüne alınarak üstel mertebeli fonksiyonuna bir integral dönüşümü olan Sumudu dönüşümü uygulanır. Dönüşümün uygulanacağı fonksiyonuaşağıda verilen A kümesinden tanımlanır.

$$A=\{f(t)\,|\,\exists M,\tau_1,\tau_2>0,\ |f(t)|<Me^{|t|/\tau_j},\ \text{eğer } t\in(-1)^j\times[0,\infty)\} \tag{3.1}$$

kümesinden alınan bir fonksiyon için M sabit sonlu bir sayı iken τ_1 ve τ_2 sonlu ya da sonsuz olabilecek sabit sayılardır. A kümesinden alınan bir $f(t)$ fonksiyonu için Sumudu dönüşümü [1], [3] ve [5] makaleleri gözönünde bulundurularak tanımlanır:

$$G(u)=S[f(t)]=\int_0^{\infty} f(ut)e^{-t}dt \quad , \quad u\in(-\tau_1,\tau_2) \tag{3.2}$$

$$G(u)=S[f(t)]=\frac{1}{u}\int_0^{\infty} f(t)e^{-\frac{t}{u}}dt \ , \ u\in(-\tau_1,\tau_2) \tag{3.3}$$

şeklinde farklı formlarda yazılır. Ayrıca, Sumudu dönüşümü bu çalışmada kısmi türevli denklemlerde kullanılacağı için [2] makalesinden yararlanarak aşağıdaki şekilde de tanımlanır. $f(x,t)$ parçalı sürekli ve üstel mertebeli olduğunu varsayalım, $f(x,t)$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü

$$G(x,u)=S[f(x,t)]=\int_0^{\infty}\frac{1}{u}f(x,t)e^{-\frac{t}{u}}dt \tag{3.4}$$

olarak tanımlanır.

Notasyon 3.2. Bu çalışmada $f(t)$ fonksiyonu t bağımsız değişkenine bağlı bir fonksiyondur. $f(t)$ fonksiyonuna uygulanılan Laplace dönüşümü ile oluşan yeni fonksiyon s değişkenine bağlı olarak F(s) ile gösterilecektir. Ayrıca $f(t)$ fonksiyonuna Sumudu dönüşümü uygulanarak oluşturulacak yeni fonksiyon u değişkenine bağlı olup $G(u)$ ile gösterilecektir.

Sumudu dönüşümü bazı elemanter fonksiyonlara uygulanılarak oluşan yeni fonksiyonlar çalışmanın sonunda Tablo 1.1.'de bulunmaktadır. Bu fonksiyonlardan bazılarının Sumudu dönüşümleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.3. $f(t)=1$ fonksiyonuna Sumudu dönüşümü uygulansın.

Burada (2.3) de $f(t)=1$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$S[1]=\int_0^{\infty} 1e^{-t}dt=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1 \tag{3.5}$$

bulunur.

Örnek 3.4. $f(t)=\cos(at)$ $t\geq 0$ fonksiyonuna Sumudu dönüşümü uygulansın.

f(x) fonksiyonuna (2.3) den ve integrale ara işlemlerde kısmi integrasyonun uygulanması ile

$$\begin{aligned} S[\cos(at)] &= \int_0^{\infty} \cos(uat)e^{-t}dt=-\cos(uat)e^{-t}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty} ua\sin(uat)e^{-t}dt \\ &= 1-ua\ \ -e^{-t}\sin(uat)+au\int_0^{\infty}\cos(uat)e^{-t}dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitliği düzenlenerek;

$$\int_0^{\infty} \cos(aut)e^{-t}dt = 1-(au)^2\int_0^{\infty} \cos(aut)e^{-t}dt$$

$$1+a^2u^2 \int_0^{\infty} \cos(aut)e^{-t}dt = 1 \tag{3.7}$$

$$\int_0^{\infty} \cos(aut)e^{-t}dt = \frac{1}{1+a^2u^2} \tag{3.8}$$

bulunur.

Örnek 3.5. $f(t)=e^{at}\quad t\geq 0$ Sumudu dönüşümü uygulayalım.

Fonksiyona (2.3) deki Sumudu dönüşümü uygulanılarak;

$$S\left[e^{at}\right] = \int_0^{\infty} e^{uat}.e^{-t}dt = \int_0^{\infty} e^{t(ua-1)}dt = \frac{1}{ua-1}e^{t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-ua} \tag{3.9}$$

$$S\left[e^{at}\right] = \frac{1}{1-ua} \tag{3.10}$$

bulunur.

Örnek 3.6. Sumudu dönüşümü $t=0$ Birim dürtü fonksiyonunun Sumudu dönüşümünü bulalım.

$f(t)=\delta(t)$ Sumudu dönüşümü uygulanırsa (3.3) ile

$$G(u) = S[\delta(t)] = \frac{1}{u}\int_0^{\infty} \delta(t)e^{-\frac{t}{u}}dt = \frac{1}{u}e^{-\frac{t}{u}}\Big|_{t=0} = \frac{1}{u} \tag{3.11}$$

Örnek 3.7. Birim basamak fonksiyonuna Sumudu Dönüşümü uygulayalım.

$$f(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0 \\ \\ 1 & , \quad t\geq 0\end{cases}$$

Birim basamak fonksiyonuna Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$G(u)=S[f(t)]=1 \tag{3.12}$$

elde edileceği aşikârdır. Burada $f(t)$ fonksiyonuna Sumudu dönüşümü uygulanarak elde edilen yeni fonksiyonun fonksiyon kendisine eşit olduğu bir durum ortaya çıkar.

Teorem 3.8. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümleri sırasıyla $S[f(t)]$ ve $S[g(t)]$ olsun. Sumudu dönüşümü a ve b sabit olmak üzere lineer bir dönüşüm

$$S[af(t)+bg(t)]=aS[f(t)]+bS[g(t)] \tag{3.13}$$

dir [4].

Teorem 3.9. $f(t)\in A$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere,

$$S\left[\frac{1}{t}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{u}\int_0^u G(v)dv \tag{3.14}$$

vardır [1].

İspat. (2.1) de verilen A kümesinden alınan bir $f(t)$ fonksiyonu olsun. (2.3) Sumudu dönüşümü kullanılarak

$$\frac{1}{u}\int_0^u G(v)dv=\frac{1}{u}\int_0^u\int_0^\infty f(vt)e^{-t}dtdv=\frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t}\int_0^u f(vt)dvdt \tag{3.15}$$

sağ taraftaki integralde $w=vt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{u}\int_0^{ut} f(w)\frac{dw}{t}dt = \int_0^\infty \frac{1}{ut}e^{-t}\int_0^{ut} f(w)dwdt$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{ut}\left[\int f(w)dw\right]_0^{ut} e^{-t}dt = S\left[\frac{1}{t}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]. \tag{3.16}$$

Teorem 3.10. $f(t)\in A$ fonksiyonu verilsin. $\lim_{t\to 0} f(t)$ veya $\lim_{t\to\infty} f(t)$ var olduklarını varsayalım.

$$\lim_{u\to 0} G(u) = \lim_{t\to 0} f(t) \tag{3.17}$$

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = \lim_{t\to\infty} f(t) \tag{3.18}$$

vardır [1].

İspat. İlk limiti aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lim_{u\to 0} G(u) = \lim_{u\to 0}\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt = \int_0^\infty \lim_{u\to 0} f(ut)\, e^{-t}dt \tag{3.19}$$

Sağ taraftaki limitte $ut = w$ yazılırsa,

$$\lim_{u\to 0} G(u) = \int_0^\infty \lim_{w\to 0} f(w)\, e^{-t}dt = \lim_{w\to 0} f(w)\int_0^\infty e^{-t}dt$$

$$= \lim_{w\to 0} f(w)\ \ -e^{-t}\Big|_0^\infty \ = \lim_{w\to 0} f(w) \tag{3.20}$$

elde edilir. Aynı şekilde (2.19) aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = \lim_{u\to\infty}\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt = \int_0^\infty \lim_{u\to\infty} f(ut)\, e^{-t}dt \tag{3.21}$$

sağ taraftaki limitte $ut = v$ yazılırsa

$$\lim_{u\to\infty} G(u) = \int_0^{\infty} \lim_{v\to\infty} f(v)\, e^{-t} dt = \lim_{v\to\infty} f(v) \int_0^{\infty} e^{-t} dt$$

$$= \lim_{v\to\infty} f(v)\ \left. -e^{-t} \right|_0^{\infty} = \lim_{v\to\infty} f(v) \tag{3.22}$$

(2.19) limit eşitliğine benzer işlemler yapılarak

$$\lim_{u\to-\infty} G(u) = \lim_{t\to-\infty} f(t) \tag{3.23}$$

olacağı aşikârdır

Teorem 3.11. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere

$$S\left[e^{at} f(t)\right] = \frac{1}{1-au} G\left(\frac{u}{1-au}\right) \tag{3.24}$$

vardır.[1].

İspat. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü (3.2) den yazılırsa,

$$S\left[e^{at} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{aut} f(ut) e^{-t} dt = \int_0^{\infty} f(ut) e^{-t(1-au)} dt \tag{3.25}$$

$w = t(1-au)$, $\left(t = \dfrac{w}{(1-au)} \right)$ değişken değiştirme yapılırsa,

$$S\left[e^{at} f(t)\right] = \int_0^{\infty} f\left(\frac{uw}{1-au}\right) e^{-w} \frac{dw}{1-au}$$

$$= \frac{1}{1-au} \int_0^{\infty} f\left(\frac{uw}{1-au}\right) e^{-w} dw \tag{3.26}$$

$$= \frac{1}{1-au} G\left(\frac{u}{1-au}\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.12. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere,

$$S\left[t\frac{df(t)}{dt}\right] = u\frac{dG(u)}{du} \tag{3.27}$$

vardır [1].

İspat. $f(t) \in A$ fonksiyonu olsun. Sumudu dönüşümünün (3.2) deki tanımı kullanılarak eşitliğin sağ yanında yazılır.

$$\frac{dG(u)}{du} = \frac{d}{du}\int_0^{\infty} f(ut)e^{-t}dt = \int_0^{\infty}\frac{d}{du}f(ut)e^{-t}dt = \int_0^{\infty} te^{-t}\frac{d}{dt}f(ut)dt \tag{3.28}$$

sağ tarafı u ile çarpılıp bölünerek

$$\frac{dG(u)}{du} = \frac{1}{u}\int_0^{\infty}(ut)\frac{df(ut)}{dt}e^{-t}dt = \frac{1}{u}\int_0^{\infty}(ut)f'(ut)e^{-t}dt = \frac{1}{u}S\left[t\frac{df(t)}{dt}\right] \tag{3.29}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ İLE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Diferansiyel ve kısmi türevli denklemi soruları integral dönüşümleri yardımı ile çözülebil-mektedir. İntegral dönüşümlerden bugüne kadar daha çok Laplace dönüşümü kullanılmak-tadır. Laplace dönüşümüne benzerliği ile dikkat çeken Sumudu dönüşümü diferansiyel ve kısmi türevli denklem sorularının çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Bu dönüşümler yardımı ile fonksiyonlar ve denklemler farklı fonksiyonlara, denklemlere dönüşürek çözümün bulunması kolaylaştırılır. Bu bölümde Laplace veSumudu dönüşümleri arasındaki derin ilişkiye yer verilecektir. Bu ikili ilişki ile çözümlerde bağlantı kurularak sonuca ulaşılır.

Örnek4.1. $f(t)=\sin t$ ile $g(t)=\cos t$ fonksiyonlarının Sumudu ve Laplace dönüşümlerini bularak aralarında ikili ilişkiyi gözlemleyelim.

$f(t)=\sin t$ fonksiyonunun (3.2) den Sumudu dönüşümü alınır ve ara işlemlerde kısmi integrasyon uygulanılarak

$$S\left[\sin t\right]=\int_0^\infty \sin(ut)e^{-t}dt=\left(-\sin(ut)e^{-t}\right)\Big|_0^\infty+u\int_0^\infty \cos(ut)e^{-t}dt$$

$$\int_0^\infty \sin(ut)e^{-t}dt=u-u^2\int_0^\infty \sin(ut)e^{-t}dt \tag{4.1}$$

$$\int_0^\infty \sin(ut)e^{-t}dt=\frac{u}{1+u^2}$$

buradan

$$S\left[\sin t\right]=\frac{u}{1+u^2} \tag{4.2}$$

bulunur. Benzer işlemlerle

$$S\left[\cos t\right]=\frac{1}{1+u^2} \tag{4.3}$$

bulunur. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini bulunur, ara işlemlerde kısmi integrasyon uygulanılarak,

$$L\left[\sin t\right]=\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt=\left(-\frac{1}{s}\sin(t)e^{-st}\right)\Bigg|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt$$

$$\begin{aligned}
L\left[\sin t\right]&=\frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s}\left(\left(-\frac{1}{s}\cos(t)e^{-st}\right)\Bigg|_0^\infty-\frac{1}{s}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt\right)\\
\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt&=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt\\
\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt&=\frac{1}{1+s^2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

buradan,

$$L\left[\sin(t)\right]=\frac{1}{1+s^2} \tag{4.5}$$

bulunur. Benzer işlem kullanılarak

$$L\left[\cos(t)\right]=\frac{s}{1+s^2} \tag{4.6}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.2), (4.3), (4.5) ve (4.6) dan $f(t)=\sin t$ ile $g(t)=\cos t$ fonksiyonlarının Laplace ve Sumudu dönüşümleri uygulandığında aralarındaki ilişki aşağıda görülmektedir.

$$S\left[\sin t\right] = L\left[\cos t\right] = \frac{u}{1+u^2}$$

$$S\left[\cos t\right] = L\left[\sin t\right] = \frac{1}{1+u^2} \tag{4.7}$$

Teorem 4.2. $f(t) \in A$ olsun. $f(t)$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü $G(u)$, Laplace dönüşümü $F(s)$ olmak üzere;

$$G(u) = \frac{F\left(1/u\right)}{u} \tag{4.8}$$

vardır [1].

İspat. $f(t) \in A$ ve $-\tau_1 < u < \tau_2$ olsun.(3.2) den $f(t)$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü,

$$G(u) = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt \tag{4.9}$$

yazılır. Eğer integalin sağ tarafına $w = ut$ $\left(t = w/u\right)$ değişken değişken değiştirme yapılır ve yerine yazılırsa,

$$G(u) = \frac{1}{u}\int_0^\infty f(w)e^{-\frac{w}{u}}dt \tag{4.10}$$

elde edilecektir. Burada Laplace dönüşümü gözönünde bulundurulursaa (4.10) nun sağ tarafında $F\left(1/u\right)$ olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$G(u) = \frac{1}{u}F\left(1/u\right) = \frac{F\left(1/u\right)}{u} \tag{4.11}$$

elde edilir.

Laplace ve Sumudu dönüşümlerinde $u = s = 1$ olması $G(1) = F(1)$ olduğunu gerektirğini gözlemleyebiliriz.(3.2) ve Laplace dönüşümü kullanılarak $u = s = 1$ durumunda;

$$F(1) = \int_0^\infty f(t)e^{-t}dt \tag{4.12}$$

$$G(1) = \int_0^\infty f(t)e^{-t}dt \tag{4.13}$$

$G(1) = F(1)$ eşitliğinin bulunduğu aşikardır. Ayrıca, $x > 0$ için Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{4.14}$$

olarak verilir. t^{x-1} fonksiyonunun Laplace dönüşümü $L[t^{x-1}]$ $s = 1$ iken ve Sumudu dönüşümü $S[t^{x-1}]$ $u = 1$ iken eşittir. Gerçekten; (2.21) de $s = 1$ ve (3.2) de $u = 1$ alınması ile t^{x-1} fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümleri

$$\begin{aligned} L[t^{x-1}] &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \\ S[t^{x-1}] &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \end{aligned} \tag{4.15}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\begin{aligned} L[t^{x-1}] &= \Gamma(x) \\ S[t^{x-1}] &= \Gamma(x) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Nitekim (4.14) de eşitliğin her iki yanı u^{x-1} çarpılarak aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 4.3. t^{x-1} fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $x>0$ için,

$$G(u)=S[t^{x-1}]=\Gamma(x)u^{x-1} \tag{4.17}$$

dir [1].

İspat. (4.14) de eşitliğin her iki yanı u^{x-1} çarpılırsa

$$u^{x-1}\Gamma(x)=u^{x-1}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty u^{x-1}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty (ut)^{x-1}e^{-t}dt=S\left[t^{x-1}\right] \tag{4.18}$$

$$u^{x-1}\Gamma(x)=S\left[t^{x-1}\right]=G(u) \tag{4.19}$$

bulunur. Aslında Sumudu ve Laplace dönüşümleri arasında derin bağlantılar vardır. Bu nedenle, (4.8) de F ve G nin rolleri yerdeğiştirebillir.

Sonuç 4.4. $f(t)\in A$, $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü ile Sumudu dönüşümü sırasıyla $F(s)$ ve $G(u)$ olmak üzere;

$$F(s)=\frac{G\left(1/s\right)}{s} \tag{4.20}$$

dir [1].

İspat. (4.8) de $u=1/s$ yazılarak (4.20) denklemi elde edilir.

$$G\left(\tfrac{1}{s}\right)=\frac{F\left(1/\tfrac{1}{s}\right)}{\tfrac{1}{s}}=\frac{F(s)}{\tfrac{1}{s}}=sF(s)$$
$$F(s)=\frac{G\left(\tfrac{1}{s}\right)}{s} \qquad (4.21)$$

(4.8) ve (4.13) formları, bu iki dönüşümden biri bilindiğinde diğerini alabilmede çift ilişkileri hizmet eder.

[1] makalesinden yararlanılarak oluşturulan Tablo 1.1.'de bazı temel ve elemanter fonksiyonların Laplace ve Sumudu dönüşümleri verilmiştir.

Teorem4.5. $f(t)\in A$, $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü ile Sumudu dönüşümü sırasıyla $F(s)$ ve $G(u)$ olmak üzere;

$$S\left[f(at)\right]=G(au) \qquad (4.22)$$

vardır [1].

İspat. Sumudu dönüşümü $f(at)$ fonksiyonuna uygulanırsa (3.2) den

$$S\left[f(at)\right]=\int_0^\infty f(uat)e^{-t}dt=G(au) \qquad (4.23)$$

İntegrale uygulanacak işlemlerle ve (4.8) den ispat tamamlanır. İntegrale $uat=w$ $\left(t=\dfrac{w}{ua}\right)$ değişken değiştirme yapılır,

$$S\left[f(at)\right]=\int_0^\infty f(uat)e^{-t}dt=\frac{1}{ua}\int_0^\infty f(w)e^{-\frac{w}{au}}dt=\frac{1}{ua}F\left(\frac{1}{au}\right)=G(au)\,. \qquad (4.24)$$

Teorem 4.6. $f(t) \in A$, $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü ile Sumudu dönüşümü sırasıyla $F(s)$ ve $G(u)$ olsun.

$$h(t) = \begin{cases} f(t-a) & , \quad t > a \\ 0 & , \quad t < a \end{cases} \tag{4.25}$$

fonksiyonun Sumudu dönüşümü

$$S\left[h(t)\right] = e^{\frac{-a}{u}} G(u) \tag{4.26}$$

olmak üzere vardır [1].

İspat. Heaviside fonksiyonu

$$H(t-a) = \begin{cases} 1 & , \quad t > a \\ 0 & , \quad t < a \end{cases} \tag{4.27}$$

olmak üzere, $h(t) = H(t-a) f(t-a)$ yazılsın ve $h(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\left[h(t)\right] = e^{-as} F(s) \tag{4.28}$$

kullanılır.(4.8) yardımı ile

$$S\left[h(t)\right] = \frac{L\left[h(t)\right]}{u} = \frac{e^{-as} F(s)}{u} \tag{4.29}$$

bulunan eşitliğin sağ tarafında $s = 1/u$ yazılırsa,

$$S\left[h(t)\right]=\frac{e^{-\frac{a}{u}}F\left(1\big/u\right)}{u}=e^{-\frac{a}{u}}G(u) \tag{4.30}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 4.7. $f(t)\in A$ ve T-periyodik fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü

$$S\left[f(t)\right]=\frac{\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t} f(ut)dt}{1-e^{-\frac{T}{u}}} \tag{4.31}$$

dir [4].

İspat. $f(t)$ Periyodik fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\left[f(t)\right]=\frac{\int_0^{T} e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sT}} \tag{4.32}$$

verilir. (4.8) ikili ilişkisi kullanılarak

$$G(u)=\frac{L\left[f(t)\right]_{s=\frac{1}{u}}}{u}=\frac{\int_0^{T} e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt}{u\left(1-e^{-\frac{T}{u}}\right)} \tag{4.33}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ yanında bulunan integrale $w=t\big/u$ $(t=uw)$ değişken değiştirme yapılıp yerine yazılırsa,

$$\int_0^{T} e^{-\frac{t}{u}} f(t)dt=u\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-w} f(uw)dw \tag{4.34}$$

elde edilir. Elde edilen bu form (4.33) de yerine yazılır.

$$G(u)=\frac{u\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t} f(ut)dt}{u\left[1-e^{-\frac{T}{u}}\right]}=\frac{\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t} f(ut)dt}{1-e^{-\frac{T}{u}}} \tag{4.35}$$

dolayısıyla (4.31) bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.8. $f(t)\in A$ fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümleri sırasıyla $F(s)$ ve $G(s)$ olsun. $f(t-a)$ öteleme fonksiyonun Sumudu dönüşümü,

$$S[H(t-a)f(t)]=e^{\frac{-a}{u}}G(u) \tag{4.36}$$

vardır [4].

İspat. f(t-a) fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki şekildedir.

$$L[f(t-a)]=L[H(t-a)f(t)]=e^{-as}F(s) \tag{4.37}$$

f(t-a) fonksiyonunun Sumudu dönüşümü (4.37) de Laplace-Sumudu ilişkisi (4.8) eşitliği yazılarak,

$$S[f(t-a)]=\frac{L[f(t-a)]_{s=\frac{1}{u}}}{u}=\frac{e^{-\frac{a}{u}}F(1/u)}{u} \tag{4.38}$$

$$S[f(t-a)]=e^{-\frac{a}{u}}G(u) \tag{4.39}$$

bulunur.

Laplace-Sumudu dönüşümü arasındaki ilişkiyi kullanarak Ters Sumudu dönüşümü için bir formül temin edilebilir. Bromwhich İntegral formülü vasıtasıyla Ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)ds \tag{4.40}$$

dür [4].

Teorem 4.9. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olsun.

(i) $\frac{G(1/u)}{u}$, bir meromorphic bir fonksiyon ile $\mathrm{Re}(u) < \gamma$ tekilliği vardır.

(ii) Γ, yarıçapı R olan dairesel bir bölge M ve K pozitif sabitler öyle ki

$$\left|\frac{G(1/u)}{u}\right| < MR^{-k} \tag{4.41}$$

$f(t)$ fonksiyonu,

$$S^{-1}[G(u)] = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ut}\frac{G(1/u)}{u}du = \sum \mathrm{Residues}\left[e^{ut}\frac{G(1/u)}{u}\right] \tag{4.42}$$

verilir [3,4].

İspat. $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s) = L[f(t)]$ ve Sumudu dönüşümü $G(u) = S[f(t)]$ olsun. Makale [3] den $t > 0$ için $f(t)$ Laplace dönüşümü**,**

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)ds \tag{4.43}$$

yazılır. Buradan $F(s) = \frac{G(1/s)}{s}$ (4.20) kullanarak,

$$f(t) = S^{-1}[G(s)] = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} G\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s} \tag{4.44}$$

bulunur.

Makale [4] den By Lerch’s teoreminden $G(u)$ Sumudu dönüşümünün Ters Sumudu dönüşümü $S^{-1}[G(u)]$ dir.

Örneğin, Laplace ve Sumudu dönüşümleri arasındaki ilişki ile Heaviside ile Dirac fonksiyonları sırasıyla $H(t)$ ve $\delta(t)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &S^{-1}[1] = L^{-1}[\delta(t)] = H(t) \\ &S^{-1}\left[\frac{1}{u}\right] = L^{-1}[1] = \delta(t). \end{aligned} \tag{4.45}$$

BÖLÜM 5. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜNÜN TÜREVİ, İNTEGRALİ VE KONVOLUSYON

Sumudu dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasında kuvvetli ilişkiler bu çalışmada önce belirtilmişti. Bu bölümde Sumudu dönüşümünün türev ve integralleri verilirken bu ilişki Laplace dönüşümünün türev ve integralleri kullanılacaktır.

Notasyon 5.1. Bu çalışmada Sumudu dönüşümünün n.mertebeden türevleri $G_n(u)$ $(n \geq 1)$, integrali ise $G^1(u)$ ile gösterilecektir.

Teorem 5.2. $F_1(u)$ **ve** $G_1(u)$ sırasıyla $f(t) \in A$ fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümlerinin türevleri olmak üzere,

$$G_1(u) = \frac{G(u) - f(0)}{u} \tag{5.1}$$

vardır [1].

İspat. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün türevi,

$$F_1(s) = sF(s) - f(0) \tag{5.2}$$

yazılır. Burada Sumudu ve Laplace dönüşümleri arasındaki ikili ilişki (4.8) kullanılarak,

$$G_1(u) = \frac{F_1(1/u)}{u} = \frac{\frac{1}{u}F(1/u) - f(0)}{u} \tag{5.3}$$

$$G_1(u)=\frac{F_1(1/u)}{u}=\frac{G(u)-f(0)}{u} \tag{5.4}$$

bulunur.

Örnek 5.3. $\sin t$ ve $\cos t$ fonksiyonlarının türevlerinin Sumudu dönüşümleri incelensin.

$$S[\sin t]=S\left[(-\cos t)^{'}\right]=\frac{S[-\cos t]-f(0)}{u}=\frac{-\dfrac{1}{1+u^2}+1}{u}=\frac{u}{1+u^2} \tag{5.5}$$

$$S[\cos t]=S\left[(\sin t)^{'}\right]=\frac{S[\sin t]-f(0)}{u}=\frac{\dfrac{u}{1+u^2}}{u}=\frac{1}{1+u^2} \tag{5.6}$$

Örnek 5.4. $f(t)=1$, $g(t)=e^{at}$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümleri, Sumudu dönüşümlerinin türevleri ile bulunabilir.

Burada Tablo 1.1. eşitlikleri ve (5.1) kullanılarak $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümleri bulunur. O halde,

$$S[f(t)]=S[1]=S\left[t^{'}\right]=\frac{S[t]-f(0)}{u}=\frac{1}{u} \tag{5.7}$$

$$S[g(t)]=S\left[e^{at}\right]=S\left[\left(\frac{e^{at}}{a}\right)^{'}\right]=\frac{S\left[\dfrac{e^{at}}{a}\right]-f(0)}{u}=\frac{\dfrac{1}{a(1-au)}-\dfrac{1}{a}}{u}=\frac{1}{1-au} \tag{5.8}$$

bulunur.

Teorem 5.5. $n\geq 1$ için $f(t)$ fonksiyonunun n.mertebeden türevinin Laplace ve Sumudu dönüşümleri sırasıyla $F_n(u)$ ve $G_n(u)$ olmak üzere,

$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}} \tag{5.9}$$

vardır [1].

İspat. $f^{(n)}(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü yazılırsa,

$$F_n(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-(k+1)} f^{(k)}(0) \tag{5.10}$$

olur ve burada $s = 1/u$ alınırsa,

$$F_n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^n} F\left(\frac{1}{u}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-(k+1)}} \tag{5.11}$$

elde edilir. $0 \le k \le m$ için $G_k(u) = F_k(1/u)/u$ yerine yazılarak,

$$G_n(u) = \frac{F_n(1/u)}{u} = \frac{\dfrac{1}{u^n} F(1/u) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-(k+1)}}}{u}$$

$$= \frac{1}{u^n} \frac{F(1/u)}{u} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}} \tag{5.12}$$

$$= \frac{1}{u^n} G(u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}$$

elde edilir.

n. mertebeden türeve sahip $f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümünden yararlanarak diferansiyel denklemlerde daha çok kullanılan $f'(t)$ ve $f''(t)$ fonksiyonların Sumudu dönüşümleri bulunur. Dolayısıyla

$$S\left[f^{'}(t)\right]=G_1(u)=\frac{G(u)-f(0)}{u}$$

$$S\left[f^{''}(t)\right]=G_2(u)=\frac{G(u)}{u^2}-\frac{f(0)}{u^2}-\frac{f^{'}(0)}{u} \tag{5.13}$$

$$S\left[f^{'''}(t)\right]=G_3(u)=\frac{G(u)}{u^3}-\frac{f(0)}{u^3}-\frac{f^{'}(0)}{u^2}-\frac{f^{''}(0)}{u}$$

yazılabilir.

Teorem 5.6. $G^1(u)$ ve $F^1(u)$ sırasıyla f fonksiyonunun Sumudu ve Laplace dönüşümleri olmak üzere f fonksiyonu integral altında $W(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ olarak tanımlansın. O halde

$$G^1(u)=S[W(t)]=uG(u) \tag{5.14}$$

vardır [1].

İspat. Laplace dönüşümü $W(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ için tanımlanırsa,

$$F^1(u)=L[W(t)]=\frac{F(s)}{s} \tag{5.15}$$

yazılır. Bu eşitlikte Laplace ve Sumudu arasındaki ilişkiden

$$G^1(u)=\frac{F^1(1/u)}{u}=\frac{uF(1/u)}{u}=F(1/u)=uG(u) \tag{5.16}$$

elde edilir.

Teorem 5.7. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere $tf(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$S[tf(t)] = u\frac{d(uG(u))}{du} \tag{5.17}$$

vardır [3].

İspat. $f(t) \in A$ olsun. $tf(t)$ fonksiyonuna Sumudu dönüşümü alınıp kısmı integrasyon uygulanarak (5.17) eşitliği bulunur. Buradan [1] makalesindeki tablodan $tf^{'}(t)$ nin Sumudu dönüşümü

$$S\left[tf^{'}(t)\right] = u\frac{dG(u)}{du} \tag{5.18}$$

göz önünde bulundurulur.

$$S[tf(t)] = \int_0^\infty utf(ut)e^{-t}dt = u\int_0^\infty \frac{d}{dt}\ tf(ut)\ e^{-t}dt - u\left[tf(ut)e^{-t}\right]\Big|_0^\infty$$

$$\begin{aligned} &= u\int_0^\infty \frac{d}{dt}\ tf(ut)\ e^{-t}dt = u\int_0^\infty\ f(ut) + utf^{'}(ut)\ e^{-t}dt \\ &= u\left(\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt + \int_0^\infty utf^{'}(ut)e^{-t}dt\right) \\ &= u\left(\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt + u\int_0^\infty tf^{'}(ut)e^{-t}dt\right) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Sumudu dönüşümü tanımı ile (5.18) den

$$S[tf(t)] = u\left[G(u) + u\frac{dG(u)}{du}\right] = u\frac{d\ uG(u)}{du} \tag{5.20}$$

elde edilir.

Teorem 5.8. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$, $f^{(n)}(t)$ n. mertebeden türeve sahip fonksiyonun Sumudu dönüşümü $G_n(u)$ belirtilmek üzere, $t^n f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$S\left[t^n f^{(n)}(t)\right] = u^n G_n(u) \tag{5.21}$$

şeklindedir [3].

İspat. $f(t) \in A$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$G(u) = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt \tag{5.22}$$

$n = 1, 2, 3...$ için

$$G_n(u) = \int_0^\infty \frac{d^n f(ut)}{du^n} e^{-t}dt = \int_0^\infty t^n f^{(n)}(ut)e^{-t}dt \tag{5.23}$$

eşitliğin sağ yanı u^n ile çarpılıp bölünürse,

$$G_n(u) = \frac{1}{u^n}\int_0^\infty u^n t^n f^{(n)}(ut)e^{-t}dt = \frac{1}{u^n}\int_0^\infty (ut)^n f^{(n)}(ut)e^{-t}dt = \frac{1}{u^n} S\left[t^n f^{(n)}(t)\right] \tag{5.24}$$

Buradan eşitliğin her iki yanı u^n ile çarpılarak,

$$u^n G_n(u) = S\left[t^n f^{(n)}(t)\right] \tag{5.25}$$

elde edilir.

Bu çalışmada Sumudu dönüşümünün kısmi diferansiyel denklem sorularına uygulanması ele alınacaktır. Daha sonraki bölümlerde kullanmak amacıyla kısmi türev fonksiyonlarına Sumudu dönüşümünün uygulanması ele alınsın. [2] den kısmi türev fonksiyonlarına Sumudu dönüşümünün uygulanması ile oluşacak eşitlikler aşağıda verilmiştir.

Lemma 5.9. $f(x,t)$ üstel mertebeli ve parçalı sürekli bir fonksiyon ve Sumudu dönüşümü

$Y(x,u)$ olmak üzere kısmi türevlerinin Sumudu dönüşümleri aşağıda vardır:

$$\text{(i)}\, S\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{1}{u}[Y(x,u) - f(x,0)] \tag{5.26}$$

$$\text{(ii)}\, S\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{d[Y(x,u)]}{dx} \tag{5.27}$$

$$\text{(iii)}\, S\left[\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right] = \frac{1}{u^2}Y(x,u) - \frac{1}{u^2}f(x,0) - \frac{1}{u}\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} \tag{5.28}$$

$$\text{(iv)}\, S\left[\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2[Y(x,u)]}{dx^2} \tag{5.29}$$

yazılır [2].

İspat. $f(x,t)$ fonksiyonun parçalı sürekli ve üstel mertebeli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $f(x,t)$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü (3.4) de

$$Y(x,u) = S\ f(x,t)\ = \int_0^\infty \frac{1}{u} f(x,t) e^{-\frac{t}{u}} dt \tag{5.30}$$

olarak yazılır. Aşağıda yapılan işlemlerde kısmı integrasyon ve (5.25) kullanılarak istenilene ulaşılır.

$$S\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right]=\int_0^\infty \frac{1}{u}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}e^{-\frac{t}{u}}dt=\lim_{p\to\infty}\int_0^p \frac{1}{u}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}e^{-\frac{t}{u}}dt$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left(\left(\frac{1}{u}e^{-\frac{t}{u}}f(x,t)\right)\Big|_0^p+\frac{1}{u^2}\int_0^p f(x,t)e^{-\frac{t}{u}}dt\right)$$

$$=-\frac{1}{u}f(x,0)+\frac{1}{u}Y(x,u) \tag{5.31}$$

$$=\frac{1}{u}[Y(x,u)-f(x,0)]$$

(ii) eşitliği bulunurken Leibniz kuralı kullanılır.

$$S\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right]=\int_0^\infty \frac{1}{u}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}e^{-\frac{t}{u}}dt=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \frac{1}{u}f(x,t)e^{-\frac{t}{u}}dt\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\ Y(x,u)\ =\frac{d}{dx}Y(x,u) \tag{5.32}$$

(iii) $\partial f/\partial t=g$ alınsın ve (5.26) dan,

$$S\left[\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right]=S\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)\right]=S\left[\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{1}{u}\ G(x,u)-g(x,0)\ =\frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{t}{u}}g(x,t)dt-g(x,0)\right] \tag{5.33}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $g=\partial f/\partial t$ yazılır ve yine (5.26) eşitliği kullanılarak,

$$S\left[\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right]=\frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \frac{1}{u}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}e^{-\frac{t}{u}}dt-\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{1}{u}\left[\frac{1}{u}\ Y(x,u)-f(x,0)\ -\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right] \qquad (5.34)$$

$$=\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{1}{u^2}f(x,0)-\frac{1}{u}\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}$$

bulunur.

(iv) Sumudu dönüşümü (5.30) tanımından ve Leibniz kuralından,

$$S\left[\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right]=\int_0^\infty \frac{1}{u}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}e^{-\frac{t}{u}}dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^\infty \frac{1}{u}f(x,t)e^{-\frac{t}{u}}dt\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ Y(x,u)\ =\frac{d^2}{dx^2}Y(x,u) \qquad (5.35)$$

bulunur.

Aynı şekilde 3.mertebeden kısmi türevli denklemleri çözmek için 3. Mertebeden türevli fonksiyonların Sumudu dönüşümleri bulunabilir. f(x,t) parçalı sürekli ve üstel mertebeli bir fonksiyon olsun.

(a) $$S\left[\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3}\right]=\int_0^\infty \frac{1}{u}\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3}e^{-\frac{t}{u}}dt=\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\int_0^\infty \frac{1}{u}f(x,t)e^{-\frac{t}{u}}dt\right)$$

$$=\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ Y(x,u)\ =\frac{d^3}{dx^3}Y(x,u) \qquad (5.36)$$

Dolayısıyla

$$S\left[\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3}\right]=\frac{d^3}{dx^3}Y(x,u) \tag{5.37}$$

vardır.

(b) (5.26) eşitliği ve $\partial^2 f/\partial t^2 = h$ alınmak üzere,

$$S\left[\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial t^3}\right]=S\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right)\right]=S\left[\frac{\partial}{\partial t}h(x,t)\right]=\frac{1}{u}[H(x,u)-h(x,0)] \tag{5.38}$$

elde edilir. Sağ tarafta (5.26) den

$$\begin{aligned} S\left[\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial t^3}\right]&=\frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \frac{1}{u}h(x,t)e^{-\frac{t}{u}}dt-h(x,0)\right] \\ &=\frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \frac{1}{u}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}e^{-\frac{t}{u}}dt-\frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial t^2}\right] \end{aligned} \tag{5.39}$$

olur. Buradan sağ tarafta (5.28) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} S\left[\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial t^3}\right]&=\frac{1}{u}\left[\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{1}{u^2}f(x,0)-\frac{1}{u}\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}-\frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial t^2}\right] \\ S\left[\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial t^3}\right]&=\frac{1}{u^3}Y(x,u)-\frac{1}{u^3}f(x,0)-\frac{1}{u^2}\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}-\frac{1}{u}\frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{5.40}$$

elde edilir.

$f\in A$ ve $g\in A$ fonksiyon çiftinin konvolusyonu $f*g$ ile gösterilmek üzere aşağıdaki integral ile tanımlanır.

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{5.41}$$

konvolusyonun Laplace ve Sumudu dönüşümlerinde kullanılışı ile ilgili teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.10. $f(t)$ ve $g(t)$ A kümesinden alınan fonksiyonlar ve Sumudu dönüşümleri sırasıyla $M(u)$ ve $N(u)$ olsun. $f*g$ konvolusyonun Sumudu dönüşümü ile f ile g fonksiyonlarının Sumudu dönüşümleri,

$$S\ (f*g)(t)\ =uM(u)N(u) \tag{5.42}$$

şeklinde birlikte verilir [1,4].

İspat. f ve g fonksiyonları A kümesinden alınan Sumudu dönüşümleri sırasıyla $M(u)$ ve $N(u)$ ile f ve g fonksiyonlarının konvolusyonun Sumudu dönüşümü $S\ (f*g)(t)$ olsun. Sumudu dönüşümü tanımı kullanılarak (3.2),

$$uM(u)N(u)=u\int_0^\infty e^{-v}f(uv)dv.\int_0^\infty e^{-w}g(uw)dw \tag{5.43}$$

yazılsın. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}uM(u)N(u)&=u\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-v}f(uv)e^{-w}g(uw)dvdw\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(v+w)}f(uv)g(uw)udvdw\end{aligned} \tag{5.44}$$

elde edilen bu integralde $v+w=t$ $(w=t-v)$ değişken değiştirme uygulansın.

$$\begin{aligned}uM(u)N(u)&=u\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}f(uv)g(u(t-v))d(uv)dt\\&=\int_0^\infty e^{-t}\int_0^t f(uv)g(ut-uv)d(uv)dw\end{aligned} \tag{5.45}$$

Burada $\tau = uv$ $(d\tau = udv)$ alınsın ve v $[0,t]$ aralığında olduğundan uv $[0,ut]$ aralığında olup,

$$uM(u)N(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} \int_0^{ut} f(\tau)g(ut-\tau)d\tau dt \tag{5.46}$$

konvolusyon tanımı (5.41) ve Sumudu dönüşümü tanımı kullanılarak,

$$uM(u)N(u) = S\ (f * g)(t) \tag{5.47}$$

ispat tamamlanır.
Bu teoremin doğrudan sonucu olarak $g(t) = 1$ alınarak integral fonksiyonunun Sumudu dönüşümü, $W(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ olmak üzere

$$S[W(t)] = S\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = uG(u) \tag{5.48}$$

şeklinde tanımlanır.
Aşağıdaki denklem bu sonucu integraller için genelleştirmektedir.

Sonuç 5.11. $f(t) \in A$ fonksiyonu olsun ve $n \geq 1$ için $G(u)$ Sumudu dönüşümü k. mertebeden $f(t)$ fonksiyonu için,

$$W^n(t) = \int_0^t \int_0^t \ldots \int_0^t f(\tau)(d\tau)^n \tag{5.49}$$

oluşturulan fonksiyonun $f(t)$ k. mertebeden ters türevlenebilen fonksiyonlar integre edilerek

$$G^n(u) = S\left[W^n(t)\right] = u^n G(u) \tag{5.50}$$

şeklinde elde edilir [4].

İspat. f n. Mertebeden integrallenebilir bir fonksiyon ve Sumudu dönüşümü $G^n(u)$ olsun. İndüksiyon yöntemi ile $n \geq 2$ için (5.50) eşitliğine ulaşılır.
$n = 1$ için (5.48) olacağı aşikardır

$$G^1(u) = S\left[W^1(t)\right] = u^1 G(u) \tag{5.51}$$

$n = k$ için

$$G^k(u) = S\left[W^k(t)\right] = u^k G(u) \tag{5.52}$$

doğru olsun.
$n = k+1$ için

$$G^{k+1}(u) = S\left[W^{k+1}(t)\right] = u^{k+1} G(u) \tag{5.53}$$

doğruluğu gösterilsin. Eşitliğin sağ yanında (5.52) yerine yazılırsa,

$$u^{k+1} G(u) = uu^k G(u) = uG^k(u) = G^{k+1}(u) \tag{5.54}$$

elde edilir.

Sonuç 5.12. f ve g fonksiyonlarının Sumudu dönüşümleri sırasıyla M ve N olsun. Teorem (5.10) dan,

$$S^{-1}[M(u)N(u)] = \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau = f * g' \ (t) \tag{5.55}$$

eşitliği vardır. Özellikle

$$M^2(u) = S\left[(f * f^{'})(t)\right] \tag{5.56}$$

vardır [4].

İspat. Sumudu Konvolusyon Teoremi, (5.48) ve Temel Matematik teoreminden,

$$\begin{aligned}
S^{-1}[M(u)N(u)] &= \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)\frac{d}{dt}g(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)g^{'}(t-\tau)d\tau \\
&= (f * g^{'})(t)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

elde edilir.

Özellikle $f = g$ alınırsa (5.56) dan

$$S^{-1}\left[M^2(u)\right] = \int_0^t f(\tau)f^{'}(t-\tau)d\tau = (f * f^{'})(t) \tag{5.58}$$

bulunur. Örneğin, (5.42) ve (5.58) den

$$\begin{aligned}
S[\sin t * \cos t] &= uS[\sin t]S[\cos t] = u\frac{u}{1+u^2}.\frac{1}{1+u^2} \\
S[\sin t * \cos t] &= \left(\frac{u}{1+u^2}\right)^2 = S(\sin t)^{\;2}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

eşitliğinin her iki yanına Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\sin t * \cos t = S^{-1}\left[\ S(\sin t)\ ^{2}\right] \tag{5.60}$$

elde edilir.

BÖLÜM 6. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Laplace dönüşümü ile benzerliği olan Sumudu dönüşümü ile diferansiyel denklemlerin çözümü verilecektir. Bununla birlikte ilk soruda diferansiyel denklemin hem Sumudu hem Laplace dönüşümü ile çözümü bulunmuştur.

Örnek 6.1. $y'(t)+2y(t)=e^{-t}$, $y(0)=2$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü ve Sumudu dönüşümü yardımı ile çözünüz.

Çözüm. Denklemin öncelikle Laplace dönüşümünü çözmek için her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L[y'(t)+2y(t)]=L\left[e^{-t}\right] \tag{6.1}$$

olur. Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği ile $L[y(t)]=F(s)$ alınmak üzere ve $L\left[e^{-t}\right]=\dfrac{1}{s+1}$ eşitliğinden

$$\begin{gathered} L[y'(t)]+2L[y(t)]=L\left[e^{-t}\right] \\ sF(s)-y(0)+2F(s)=\frac{1}{s+1} \end{gathered} \tag{6.2}$$

elde edilir. Başlangıç koşulu $y(0)=2$ yerine yazılırsa denklem,

$$sF(s)-2+2F(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$F(s)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \tag{6.3}$$

olur. Burada eşitliğin sağ yanı basit kesirlere ayrılırsa

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2} \tag{6.4}$$

dönüşür. Eşitliğin her iki yanına Ters Laplace dönüşümü uygulanır ve sağdaki terimler sırasıyla e^{-t} ve e^{-2t} nin Laplace dönüşümleri $L\left[e^{-t}\right]=\frac{1}{s+1}$ ve $L\left[e^{-2t}\right]=\frac{1}{s+2}$ olup, (6.4) den

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$y(t)=e^{-t}+e^{-2t} \tag{6.5}$$

denklemin çözümü bulunur.

Şimdi verilen denklemin her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanır ve $S[y(t)]=G(u)$ olarak alınırsa,

$$S[y'(t)+2y(t)]=S\left[e^{-t}\right] \tag{6.6}$$

olur. Burada Sumudu dönüşümünün lineerlik özelliği, (5.1) ve Tablo 1.1.'den $S\left[e^{-t}\right]=\frac{1}{1+u}$ olmasından,

$$S\ y'(t)\ + 2S\ y(t)\ = S\left[e^{-t}\right]$$
$$\frac{G(u) - y(0)}{u} + 2G(u) = \frac{1}{1+u} \tag{6.7}$$

elde edilir. Başlangıç koşulu bu eşitlikte yerine yazılır, eşitliğin her iki yanı u ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\frac{G(u) - 2}{u} + 2G(u) = \frac{1}{1+u}$$
$$G(u) - 2 + 2uG(u) = \frac{u}{1+u}$$
$$(1+2u)G(u) = \frac{3u+2}{1+u} \tag{6.8}$$
$$G(u) = \frac{3u+2}{(1+u)(1+2u)}$$

olur. Eşitliğin sağ yanı basit kesirlere ayrılarak

$$G(u) = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+2u} \tag{6.9}$$

elde edilir. Burada Tablo 1.1.'den eşitliğin sağ yanındaki terimlerin sırasıyla e^{-t} ve e^{-2t} fonksiyonlarının Laplace dönüşümü olduğu aşikârdır. Her iki yanına Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S^{-1}[G(u)] = S^{-1}\left[\frac{1}{1+u}\right] + S^{-1}\left[\frac{1}{1+2u}\right]$$
$$y(t) = e^{-t} + e^{-2t} \tag{6.10}$$

bulunur.

Örnek 6.2. $y''(t)+y'(t)-2y(t)=3t$, $(t \geq 0)$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Denklemin her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanır, Sumudu dönüşümünün lineerlik özelliğinden,

$$\begin{aligned} &S[y''(t)+y'(t)-2y(t)]=S[3t] \\ &S[y''(t)]+S[y'(t)]-2S[y(t)]=S[3t] \end{aligned} \tag{6.12}$$

olur. Tablo 1.1.'den $S[3t]=3u$ ile (5.1) ve (5.13) eşitlikleri kullanılıp, $G(u)=S[y(t)]$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{G(u)}{u^2}-\frac{y(0)}{u^2}-\frac{y'(0)}{u}+\frac{G(u)-y(0)}{u}-2G(u)=3u \tag{6.13}$$

elde edilir. Başlangıç koşulları yerlerine koyularak

$$\frac{G(u)}{u^2}-\frac{3}{u^2}+\frac{G(u)-3}{u}-2G(u)=3u \tag{6.14}$$

olur. Gerekli düzenlemeler ile denklem

$$G(u)=\frac{3u^3+3u+3}{-2u^2+u+1} \tag{6.15}$$

ve basit kesirlere ayırarak,

$$G(u)=-\frac{3}{2}u-\frac{3}{4}+\frac{3}{4(2u+1)}+\frac{3}{1-u} \tag{6.16}$$

elde edilir. Denklemin her iki yanına Ters Sumudu dönüşümü uygulanır ve

Tablo 1.1.'den, $S[1]=1$, $S[t]=u$, $S\left[e^{at}\right]=\dfrac{1}{1-au}$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$S^{-1}[G(u)]=S^{-1}\left[-\frac{3}{2}u-\frac{3}{4}+\frac{3}{4(2u+1)}+\frac{3}{1-u}\right]$$

$$S^{-1}[G(u)]=-\frac{3}{2}S^{-1}[u]-\frac{3}{4}S^{-1}[1]+\frac{3}{4}S^{-1}\left[\frac{1}{2u+1}\right]+3S^{-1}\left[\frac{1}{1-u}\right] \tag{6.17}$$

$$y(t)=-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}e^{-2t}+3e^{t}$$

bulunur.

Örnek 6.3. $y'''+6y''+11y'+6y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Denklemin her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanır ve Sumudu dönüşümünün lineerlik özelliğinden,

$$\begin{aligned} &S\left[y'''+6y''+11y'+6y\right]=S[0] \\ &S\left[y'''\right]+6S\left[y''\right]+11S\left[y'\right]+6S[y]=0 \end{aligned} \tag{6.18}$$

olur. Burada (5.4) ve (5.13) eşitliklerden,

$$\begin{aligned} &\frac{G(u)}{u^3}-\frac{y(0)}{u^3}-\frac{y'(0)}{u^2}-\frac{y''(0)}{u}+6\left(\frac{G(u)}{u^2}-\frac{y(0)}{u^2}-\frac{y'(0)}{u}\right) \\ &+11\left(\frac{G(u)-y(0)}{u}\right)+6G(u)=0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

olur ve burada başlangıç koşulları yerlerine konulur.

$$\frac{G(u)}{u^3}-\frac{2}{u^3}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{6G(u)}{u^2}-\frac{12}{u^2}-\frac{6}{u}+\frac{11G(u)}{u}-\frac{22}{u}+6G(u)=0$$

$$G(u)\left(\frac{6u^3+11u^2+6u+1}{u^3}\right)=\frac{27u^2+13u+2}{u^3} \tag{6.20}$$

Buradan

$$G(u)=\frac{27u^2+13u+2}{6u^3+11u^2+6u+1} \tag{6.21}$$

eşitliğin sağ yanı basit kesirlerine ayrılarak,

$$G(u)=\frac{8}{u+1}-\frac{9}{2u+1}+\frac{3}{3u+1} \tag{6.22}$$

elde edilen (6.22) nin her iki yanına Ters Sumudu dönüşümü uygulanır ve Tablo 1.1. den $S\left[e^{at}\right]=\dfrac{1}{1-au}$ eşitliği göz önünde bulundurularak,

$$S^{-1}[G(u)]=8S^{-1}\left[\frac{1}{u+1}\right]-9S^{-1}\left[\frac{1}{2u+1}\right]+3S^{-1}\left[\frac{1}{3u+1}\right] \tag{6.23}$$

eşitliğinden verilen diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t)=8e^{-t}-9e^{-2t}+3e^{-3t} \tag{6.24}$$

denklemin çözümüne ulaşılır.

BÖLÜM 7. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Örnek 7.1.

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < 3,\ t > 0 \tag{7.1}$$

$$y(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \quad , \quad 0 \le x \le 3 \tag{7.2}$$

$$y_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 3 \tag{7.3}$$

$$y(0,t) = 0 \qquad , \ t \ge 0 \tag{7.4}$$

$$y(3,t) = 0 \qquad , \ t \ge 0 \tag{7.5}$$

başlangıç-sınır değer problemini çözünüz.

Çözüm. y nin Sumudu dönüşümü

$$S\left[y(x,t)\right] = \frac{1}{u}\int_0^{\infty} y(x,t)e^{\frac{-t}{u}}dt = Y(x,u) = Y \tag{7.6}$$

olarak alınacaktır. (7.1) in her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &S\left[y_{tt} - c^2 y_{xx}\right] = S[0] \\ &S\left[y_{tt}\right] - c^2 S\left[y_{xx}\right] = 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

elde edilir. Burada Lemma 5.9. daki eşitlikler yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{u^2}Y(x,u) - \frac{1}{u^2}y(x,0) - \frac{1}{u}\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) - c^2\frac{d^2Y}{dx^2}(x,u) = 0 \tag{7.8}$$

bulunur. Bu eşitlikte (7.2) ve (7.3) koşulları denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{1}{u^2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)-c^2\frac{d^2}{dx^2}Y(x,u)=0$$

$$\frac{1}{u^2}Y-\frac{1}{u^2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)-c^2Y_{xx}=0 \tag{7.9}$$

$$Y-\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)-c^2u^2Y_{xx}=0$$

buradan

$$c^2u^2Y_{xx}-Y=-\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \tag{7.10}$$

denklemi bulunur. (7.10) denkleminin homogen kısmı

$$Y_h(x,u)=c_1e^{\frac{1}{cu}x}+c_2e^{\frac{-1}{cu}x} \tag{7.11}$$

olarak bulunur. (7.10) denkleminin özel çözümü ise,

$$Y_p(x,u)=A\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)+B\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$

$$Y_p^{'}(x,u)=A\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)-B\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \tag{7.12}$$

$$Y^{''}{}_p(x,u)=-A\frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)-B\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$

olmak üzere (7.7) eşitliklerini, (7.6) denkleminde yerine yazılır.

$$u^2c^2\left(-A\frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)-B\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)-A\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$
$$-B\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \qquad (7.13)$$

Denkleminden

$$-A\left(u^2c^2\frac{\pi^2}{9}+1\right)=-1, \quad -B\left(u^2c^2\frac{\pi^2}{9}+1\right)=0 \qquad (7.14)$$

eşitlikleri bulunur ve buradan

$$A=\frac{1}{u^2c^2\frac{\pi^2}{9}+1}, \qquad B=0 \qquad (7.15)$$

katsayıları bulunur. (7.6) denkleminin genel çözümü,

$$Y(x,u)=Y_h(x,u)+Y_p(x,u)$$
$$Y(x,u)=c_1e^{\frac{1}{cu}x}+c_2e^{\frac{-1}{cu}x}+\frac{1}{u^2c^2\frac{\pi^2}{9}+1}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \qquad (7.16)$$

olarak yazılır. (7.4) ve(7.5) koşullarına Sumudu dönüşümü uygulanır.

$$S[y(0,t)]=Y(0,u)=\frac{1}{u}\int_0^\infty y(0,t)e^{\frac{-t}{u}}dt=\frac{1}{u}\int_0^\infty 0e^{\frac{-t}{u}}dt=0$$
$$S[y(3,t)]=Y(3,u)=\frac{1}{u}\int_0^\infty y(3,t)e^{\frac{-t}{u}}dt=\frac{1}{u}\int_0^\infty 0e^{\frac{-t}{u}}dt=0 \qquad (7.17)$$

Bu koşullar (7.8) denkleminde yerine yazılır ve

$$Y(0,u) = c_1 + c_2 = 0$$
$$Y(3,u) = c_1 e^{\frac{1}{cu}} + c_2 e^{\frac{-1}{cu}} = 0 \tag{7.18}$$

buradan $c_1 = c_2 = 0$ bulunur.

$$Y(x,u) = \frac{1}{u^2c^2\frac{\pi^2}{9}+1}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \tag{7.19}$$

(7.19) genel çözümünün her iki yanına Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S^{-1}\left[Y(x,u)\right] = S^{-1}\left[\frac{1}{u^2c^2\frac{\pi^2}{9}+1}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right] \tag{7.20}$$

$$y(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi c}{3}t\right) \tag{7.21}$$

bulunur.

Örnek 7.2.

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \tag{7.22}$$
$$y(x,0) = \sin x \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{7.23}$$
$$y_t(x,0) = \cos x \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{7.24}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: y nin Sumudu dönüşümü

$$S[y(x,t)]=\frac{1}{u}\int_0^\infty y(x,t)e^{\frac{-t}{u}}dt=Y(x,u)=Y \tag{7.25}$$

olarak alınacaktır. (7.10) denkleminin her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&S\left[y_{tt}-c^2y_{xx}\right]=S[0]\\ &S[y_{tt}]-c^2S[y_{xx}]=0\end{aligned} \tag{7.26}$$

elde edilir. Burada Lemma 5.9 eşitliklerinden yararlanarak

$$\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{1}{u^2}y(x,0)-\frac{1}{u}\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=c^2\frac{d^2Y}{dx^2}(x,u) \tag{7.27}$$

bulunur. Bu eşitlikte (7.23) ve (7.24) koşulları denklemde yerine yazılır,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{1}{u^2}\sin x-\frac{1}{u}\cos x-c^2Y_{xx}(x,u)=0\\ &\frac{1}{u^2}Y-\frac{1}{u^2}\sin x-\frac{1}{u}\cos x-c^2Y_{xx}=0\\ &u^2c^2Y_{xx}-Y=-\sin x-u\cos x\end{aligned} \tag{7.28}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin homogen kısmının genel ve özel çözümü

$$\begin{aligned}&Y_h(x,u)=c_1e^{\frac{1}{cu}x}+c_2e^{\frac{-1}{cu}x}\\ &Y_p(x,u)=A\sin x+B\cos x\end{aligned} \tag{7.29}$$

olarak alınıp türevleri bulunur.

$$\begin{aligned}&Y_p(x,u)=A\sin x+B\cos x\\ &Y'_p(x,u)=A\cos x-B\sin x\\ &Y''_p(x,u)=-A\sin x-B\cos x\end{aligned} \tag{7.30}$$

(7.28) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa A ve B katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$u^2c^2\left(-A\sin x - B\cos x\right) - \left(A\sin x + B\cos x\right) = -\sin x - u\cos x \tag{7.31}$$

$$-Au^2c^2 - A = -1, \quad -Bu^2c^2 - B = -u$$
$$A = \frac{1}{c^2u^2+1} \quad , \qquad B = \frac{u}{c^2u^2+1} \tag{7.32}$$

A ve B katsayıları (7.29) dekleminde yerlerine koyularak özel çözüme ulaşılır.

$$Y_p(x,u) = \frac{1}{c^2u^2+1}\sin x + \frac{u}{c^2u^2+1}\cos x \tag{7.33}$$

O halde $Y(x,u)$ fonksiyonunun genel çözümü

$$Y(x,u) = c_1 e^{\frac{1}{cu}x} + c_2 e^{\frac{-1}{cu}x} + \frac{1}{c^2u^2+1}\sin x + \frac{u}{c^2u^2+1}\cos x \tag{7.34}$$

elde edilir.(7.11) ve (7.12) koşullarına Sumudu dönüşümü uygulanılarak,

$$S\left[y(x,0)\right] = Y(x,0) = \frac{1}{u}\int_0^\infty y(x,0)e^{\frac{-t}{u}}dt = \frac{1}{u}\int_0^\infty (\sin x)e^{\frac{-t}{u}}dt = \frac{1}{u}\sin x\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}dt = \sin x$$

$$S\left[y_t(x,0)\right] = Y_u(x,0) = \frac{1}{u}\int_0^\infty y_t(x,0)e^{\frac{-t}{u}}dt = \frac{1}{u}\int_0^\infty (\cos x)e^{\frac{-t}{u}}dt = \frac{1}{u}\cos x\int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}}dt = \cos x$$

bulunur. Bu koşullar kullanılarak c_1 ve c_2 katsayıları bulunur.

$$Y_u(x,u) = -c_1\frac{x}{cu^2}e^{\frac{1}{cu}x} + c_2\frac{x}{cu^2}e^{\frac{-1}{cu}x} - \frac{2uc^2}{\left(c^2u^2+1\right)^2}\sin x + \frac{1-u^2c^2}{\left(c^2u^2+1\right)^2}\cos x \tag{7.35}$$

$$Y(x,0) = c_1 + c_2 + \sin x = \sin x$$

buradan $c_1 + c_2 = 0$ ve $Y(x,0) = \cos x$

koşullarının sağlanması ve Y fonksiyonun $x \to \infty$ da sınırlı olması için c_1 ve c_2 katsayıları 0 alınırsa, genel çözüm

$$Y(x,u) = \frac{1}{c^2u^2+1}\sin x + \frac{u}{c^2u^2+1}\cos x \tag{7.36}$$

olarak bulunur. Bulunan genel çözümün her iki yanına Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S^{-1}\left[Y(x,u)\right] = S^{-1}\left[\frac{1}{c^2u^2+1}\sin x + \frac{u}{c^2u^2+1}\cos x\right]$$
$$S^{-1}\left[Y(x,u)\right] = (\sin x)S^{-1}\left[\frac{1}{c^2u^2+1}\right] + \cos x S^{-1}\left[\frac{u}{c^2u^2+1}\right] \tag{7.37}$$

elde edilir. Tablo 1.1.'deki formüller kullanılarak y fonksiyonun genel çözümü bulunur. O halde, verilen koşulları sağlayan çözüm

$$y(x,t) = \sin x\cos(ct) + \frac{1}{c}\cos x\sin(ct)\,.$$

Örnek 7.3.

$$y_t = 2y_{xx} \quad , \quad 0 < x < 5 \quad , \quad t > 0 \tag{7.38}$$
$$y(0,t) = 0 = y(5,t) \quad , \quad t \ge 0 \tag{7.39}$$
$$y(x,0) = 10\sin(4\pi x) \quad , \quad 0 \le x \le 5 \tag{7.40}$$

başlangıç-sınır değer problemini Sumudu dönüşümü uygulayarak çözünüz.

Çözüm. (7.38) denkleminin her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S\left[y_t\right] = 2S\left[y_{xx}\right] \tag{7.41}$$

elde edilir. Lemma 5.9 daki eşitlikler yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{u}\left[Y(x,u)-y(x,0)\right]=2\frac{d^2}{dx^2}Y(x,u) \tag{7.42}$$

elde edilir. (7.39) ve (7.40) koşulları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{u}\left[Y(x,u)-10\sin(4\pi x)\right]=2\frac{d^2}{dx^2}Y(x,u)\\
&\frac{1}{u}\left[Y-10\sin(4\pi x)\right]=2Y_{xx}\\
&Y_{xx}-\frac{1}{2u}Y=-\frac{5}{u}\sin(4\pi x)
\end{aligned} \tag{7.43}$$

denklemi elde edilir. Denklemin homogen kısmının çözümü

$$Y_h(x,u)=c_1e^{\frac{1}{\sqrt{2u}}x}+c_2e^{\frac{-1}{\sqrt{2u}}x} \tag{7.44}$$

şeklinde bulunur ve özel çözümü,

$$Y_p(x,u)=A\sin(4\pi x)+B\cos(4\pi x) \tag{7.45}$$

olarak kabul edilir. Bu özel çözümün türevleri alınır;

$$\begin{aligned}
&Y_p^{'}(x,t)=4\pi A\cos(4\pi x)-4\pi B\sin(4\pi x)\\
&Y_p^{''}(x,t)=-16\pi^2A\sin(4\pi x)-16\pi^2B\cos(4\pi x)
\end{aligned} \tag{7.46}$$

eşitlikleri (7.43) de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler ile A ve B katsayıları bulunur.

$$-16\pi^2A\sin(4\pi x)-16\pi^2B\cos(4\pi x)-\frac{1}{2u}\left(A\sin(4\pi x)+B\cos(4\pi x)\right)=\frac{-5}{u}\sin(4\pi x)$$

$$\sin(4\pi x)\left(-16\pi^2 A-\frac{A}{2u}\right)+\cos(4\pi x)\left(-16\pi^2 B-\frac{B}{2u}\right)=\frac{-5}{u}\sin(4\pi x)$$

$$A\left(-16\pi^2-\frac{1}{2u}\right)=\frac{-5}{u} \quad , \quad B\left(-16\pi^2-\frac{1}{2u}\right)=0$$

$$A=\frac{10}{32\pi^2 u+1} \quad , \quad B=0 \tag{7.47}$$

bulunan A ve B katsayılarının (7.23) de yerine yazılması ile Y fonksiyonunun özel çözümü,

$$Y_p(x,u)=\frac{10}{32\pi^2 u+1}\sin(4\pi x) \tag{7.48}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla denklemin genel çözümü,

$$Y(x,u)=Y_h(x,u)+Y_p(x,u)$$

$$Y(x,u)=c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2u}}x}+c_2 e^{\frac{-1}{\sqrt{2u}}x}+\frac{10}{32\pi^2 u+1}\sin(4\pi x) \tag{7.49}$$

elde edilir. y fonksiyonu için verilen başlangıç ve sınır değer koşullarına Sumudu dönüşümü uygulanır. Dolayısıyla Y fonksiyonu için başlangıç-sınır değer koşulları bulunur.

$$S\left[y(0,t)\right]=Y(0,u)=\frac{1}{u}\int_0^\infty y(0,t)e^{\frac{-t}{u}}dt=0$$

$$S\left[y(x,0)\right]=Y(x,0)=\frac{1}{u}\int_0^\infty y(x,0)e^{\frac{-t}{u}}dt=\frac{1}{u}\int_0^\infty 10\sin(4\pi x)e^{\frac{-t}{u}}dt=10\sin(4\pi x)$$

$$S\left[y(5,t)\right]=Y(5,u)=\frac{1}{u}\int_0^\infty y(5,t)e^{\frac{-t}{u}}dt=0$$

Y fonksiyonu için bulunan koşullar (7.24) denklemine uygulanır,

$$Y(0,u) = c_1 + c_2 + 0 = 0$$
$$Y(5,u) = c_1 e^{\frac{5}{\sqrt{2u}}} + c_2 e^{\frac{-5}{\sqrt{2u}}} + \frac{10}{32\pi^2 u + 1}\sin(20\pi) = 0$$
$$Y(x,0) = 10\sin(4\pi x) \tag{7.50}$$

reel keyfi sabitler $c_1 = c_2 = 0$ olarak elde edilir. Bulunan sabitler yardımı ile Y fonksiyonun genel çözümü

$$Y(x,u) = \frac{10}{32\pi^2 u + 1}\sin(4\pi x) \tag{7.51}$$

olarak bulunur. Bu çözümün her iki yanına Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S^{-1}\left[Y(x,u)\right] = S^{-1}\left[\frac{10}{32\pi^2 u + 1}\sin(4\pi x)\right]$$
$$S^{-1}\left[Y(x,u)\right] = 10\sin(4\pi x) S^{-1}\left[\frac{1}{32\pi^2 u + 1}\right] \tag{7.52}$$

halini alır. Buradan başlangıç ve sınır değer koşullarını sağlayan y fonksiyonun genel çözümü

$$y(x,t) = 10\sin(4\pi x) e^{(-32\pi^2 t)}.$$

Örnek 7.4.

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + \sin(\pi x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0 \tag{7.53}$$
$$y(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1 \tag{7.54}$$
$$y_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1 \tag{7.56}$$

başlangıç ve sınır değer problemini çözünüz.

Çözüm. (7.53) denkleminin her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S\left[y_{tt}\right]=c^2S\left[y_{xx}\right]+S\left[\sin(\pi x)\right] \tag{7.57}$$

elde edilir. Burada Lemma 5.9 eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{1}{u^2}y(x,0)-\frac{1}{u}\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=c^2\frac{d^2Y}{dx^2}(x,u)+\sin(\pi x) \tag{7.58}$$

elde edilir. Bulunan eşitlikte başlangıç ve sınır değer koşulları yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{u^2}Y(x,u)=c^2\frac{d^2Y}{dx^2}(x,u)+\sin(\pi x)$$

$$u^2c^2Y_{xx}-Y=-u^2\sin(\pi x) \tag{7.59}$$

denklemine dönüşür. (7.59) un homogen ve özel çözümü

$$Y_h(x,u)=c_1e^{\frac{1}{cu}x}+c_2e^{\frac{-1}{cu}x} \tag{7.60}$$

$$Y_p=A\sin(\pi x)+B\cos(\pi x) \tag{7.61}$$

olarak alınıp türevleri bulunursa,

$$Y_p=A\sin(\pi x)+B\cos(\pi x)$$

$$Y_p'=\pi A\cos(\pi x)-\pi B\sin(\pi x)$$

$$Y_p''=-\pi^2A\cos(\pi x)-\pi^2B\cos(\pi x)$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan eşitlikler (7.31) denkleminde yerine yazılırsa

$$u^2c^2\left(-\pi^2A\sin(\pi x)-\pi^2B\cos(\pi x)\right)-\left(A\sin(\pi x)+B\cos(\pi x)\right)=-u^2\sin(\pi x)$$

$$-\pi^2u^2c^2A\sin(\pi x)-\pi^2u^2c^2B\cos(\pi x)-A\sin(\pi x)-B\cos(\pi x)=-u^2\sin(\pi x)$$

$$\sin(\pi x)\left(-A\pi^2u^2c^2-A\right)+\cos(\pi x)\left(-B\pi^2u^2c^2-B\right)=-u^2\sin(\pi x)$$

elde edilirek A ve B katsayıları bulunur.

$$-Au^2c^2\pi^2 - A = -u^2 \qquad\qquad -Bu^2c^2\pi^2 - B = 0$$
$$-A\left(u^2c^2\pi^2+1\right) = -u^2 \quad , \quad -B\left(u^2c^2\pi^2+1\right) = 0$$
$$A = \frac{u^2}{u^2c^2\pi^2+1} \qquad\qquad B = 0 \tag{7.62}$$

(7.61) de A ve B katsayıları yerleştirilerek,

$$Y_p = \frac{u^2}{u^2c^2\pi^2+1}\sin(\pi x) \tag{7.63}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (7.31) probleminin genel çözümü,

$$Y(x,u) = Y_h(x,u) + Y_p(x,u)$$
$$Y(x,u) = c_1 e^{\frac{1}{cu}x} + c_2 e^{\frac{-1}{cu}x} + \frac{u^2}{u^2c^2\pi^2+1}\sin(\pi x) \tag{7.64}$$

bulunur. y başlangıç sınır değer problemi için verilen başlangıç ve sınır değer koşullarına Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S\left[y(0,t)\right] = Y(0,u) = \frac{1}{u}\int_0^\infty y(0,t)e^{\frac{-t}{u}}dt = \frac{1}{u}\int_0^\infty 0e^{\frac{-t}{u}}dt = 0$$
$$S\left[y(1,t)\right] = Y(1,u) = \frac{1}{u}\int_0^\infty y(1,t)e^{\frac{-t}{u}}dt = \frac{1}{u}\int_0^\infty 0e^{\frac{-t}{u}}dt = 0 \tag{7.65}$$

Y için koşullar bulunur. Bulunan bu koşullar ile

$$Y(0,u) = c_1 + c_2 = 0$$
$$Y(1,u) = c_1 e^{\frac{1}{cu}} + c_2 e^{\frac{-1}{cu}} = 0$$

eşitlikleri elde edilerek $c_1 = c_2 = 0$ reel katsayı sabitleri bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$Y(x,u) = \frac{u^2}{1+u^2c^2\pi^2}\sin(\pi x) \tag{7.66}$$

olarak bulunur. Bulunan çözüme Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} S^{-1}\left[Y(x,u)\right] &= S^{-1}\left[\frac{u^2}{1+u^2c^2\pi^2}\sin(\pi x)\right] \\ y(x,t) &= \sin(\pi x) S^{-1}\left[\frac{u^2}{1+u^2c^2\pi^2}\right] \end{aligned} \tag{7.67}$$

elde edilir. Tablo.1.1 den

$$S\left[\frac{1}{w^2}\left(1-\cos(wt)\right)\right] = \frac{u^2}{1+u^2w^2}$$
$$S^{-1}\left[\frac{u^2}{1+u^2w^2}\right] = \frac{1}{w^2}\left(1-\cos(wt)\right)$$

kullanarak y fonksiyonunun genel çözümü bulunur. Dolayısıyla, verilen başlangıç ve sınır değer problemlerini sağlayan y fonksiyonunun genel çözümü

$$y(x,t) = \sin(\pi x)\frac{1}{(c\pi)^2}\left(1-\cos(c\pi t)\right).$$

Örnek 7.5.

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = e^t \quad , \quad -\infty < x < \infty , \quad t > 0 \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned} & y(x,0) = 5 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ & y_t(x,0) = x^2 \quad , \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{7.69}$$

homogen olmayan başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: y fonksiyonun Sumudu dönüşümü

$$S\left[y(x,t)\right]=\frac{1}{u}\int_0^\infty y(x,t)e^{\frac{-t}{u}}dt=Y(x,u)=Y$$

alınmak üzere (7.68) denkleminin her iki yanına Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S\left[y_{tt}\right]-c^2S\left[y_{xx}\right]=S\left[e^t\right]$$

elde edilir. Burada Lemma 5.9 daki eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{1}{u^2}y(x,0)-\frac{1}{u}\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)-c^2\frac{d^2Y}{dx^2}(x,u)=\frac{1}{1-u} \tag{7.70}$$

olur, burada (7.38) koşulları kullanılarak

$$\frac{1}{u^2}Y(x,u)-\frac{5}{u^2}-\frac{1}{u}x^2-c^2\frac{d^2Y}{dx^2}(x,u)=\frac{1}{1-u}$$

$$u^2c^2Y_{xx}(x,u)-Y(x,u)=-5-ux^2-\frac{u^2}{1-u} \tag{7.71}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan denklemin homogen kısmının genel ve özel çözümü

$$Y_h(x,u)=c_1e^{\frac{1}{cu}x}+c_2e^{\frac{-1}{cu}x} \tag{7.72}$$

şeklinde bulunur. (7.71) denkleminin özel bir çözümü ise

$$Y_p(x,u)=Ax^2+Bx+C \tag{7.73}$$

alınır ve türevleri bulunup

$$Y_p(x,u) = Ax^2 + Bx + C$$

$$Y_p^{'}(x,u) = 2Ax + B$$

$$Y_p^{''}(x,u) = 2A$$

(7.71) de yerine yazılırsa A,B ve C katsayıları bulunur.

$$2Au^2c^2 - Ax^2 - Bx - C = -5 - ux^2 - \frac{u^2}{1-u}$$

$$A = u\,, \qquad B = 0\,, \qquad C = 5 + 2u^3c^2 + \frac{u^2}{1-u}$$

Buradan Y fonksiyonu için genel çözüm

$$Y(x,u) = c_1 e^{\frac{1}{cu}x} + c_2 e^{\frac{-1}{cu}x} + ux^2 + 5 + 2u^3c^2 + \frac{u^2}{1-u} \tag{7.74}$$

oluşacaktır. y fonksiyonu için verilen koşullara Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S[y(x,0)] = Y(x,0) = \frac{1}{u}\int_0^\infty y(x,0)e^{\frac{-t}{u}}dt = 5$$

$$S[y_t(x,0)] = Y_u(x,0) = \frac{1}{u}\int_0^\infty y_t(x,0)e^{\frac{-t}{u}}dt = \frac{1}{u}\int_0^\infty x^2e^{\frac{-t}{u}}dt = x^2$$

eşitlikleri elde edilir. Bu koşullar ile

$$Y_u(x,0) = x^2$$

$$Y(x,0) = 5$$

elde edilen eşitliklerin sağlanması ve Y fonksiyonun $x \to \infty$ da sınırlı olması için $c_1 = c_2 = 0$ alınır. Dolayısıyla Y fonksiyonun genel çözümü

$$Y(x,u) = ux^2 + 5 + u^3c^2 + \frac{u^2}{1-u} \tag{7.75}$$

bulunur. Burada (7.46) çözümüne Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} S^{-1}\left[Y(x,u)\right] &= S^{-1}\left[ux^2 + 5 + 2u^3c^2 + \frac{u^2}{1-u}\right] \\ S^{-1}\left[Y(x,u)\right] &= S^{-1}\left[ux^2 + 5 + 2u^3c^2 - u - 1 + \frac{1}{1-u}\right] \\ S^{-1}\left[Y(x,u)\right] &= S^{-1}\left[ux^2 + 4 + 2u^3c^2 - u + \frac{1}{1-u}\right] \end{aligned} \tag{7.76}$$

eşitliği oluşur. Tablo 1.1. formülleri kullanılarak y fonksiyonun genel çözümü bulunur. Dolayısıyla, verilen koşulları sağlayan y fonksiyonunun Sumudu dönüşümü yapılarak genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur

$$y(x,t) = tx^2 + 4 + \frac{2t^3c^2}{3!} - t + e^t.$$

BÖLÜM 8. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde, [5] makalesi ile G. K. Watugala'nın 1993' te tanımladığı bir dönüşüm olan Sumudu dönüşümünün adi diferansiyel denklemlere ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması ile elde edilen çözümlere yer verildi. Aynı zamanda kontrol mühendisliğinde daha çok kullanılan Sumudu dönüşümünün temel özellikleri, uygulandığı özel fonksiyonlar, Sumudu dönüşümü kullanılan fonksiyonların temel özelliklerinden bahsedildi. Ayrıca temel benzerlikleri nedeni ile Laplace dönüşümünden de bahsedilerek iki dönüşüm arasındaki ilişkiye değinildi. Sumudu dönüşümü ile ilgili yapılan çalışmalar gözönüne alınarak bu çalışmada olabildiğince farklı kısmı türevli ve adi diferansiyel denklemlere yer verilerek dönüşümün kullanım alanları ve sağladığı yararlar gösterilmeye çalışıldı. Bu çalışmada özellikle Sumudu dönüşümünün kısmı türevli denklemlerin çözümünde sağladığı yararlar baz alınarak birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevli denklemlere dönüşüm uygulandı. Sumudu dönüşümü üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabilir.

Tablo 1.1. Özel bazı fonksiyonların Laplace ve Sumudu dönüşümleri

	$f(t)$	$F(s)=L\ f(t)$	$G(u)=S\ f(t)$
1	1	$\frac{1}{s}$	1
2	t	$\frac{1}{s^2}$	u
3	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n=1,2,...$	$\frac{1}{s^n}$	u^{n-1}
4	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, n>0$	$\frac{1}{s^n}$	u^{n-1}
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{1-au}$
6	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, n=1,2,...$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
7	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
8	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
9	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
10	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{u}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
11	$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
12	$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{u}{1-a^2u^2}$
13	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{1-a^2u^2}$
14	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{u}{(1-ua)^2}$
15	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}$
16	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}, a\neq b$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{u}{(1-bu)(1-au)}$

Tablo 1.1. (Devamı)

17	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a},\ a\neq b$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{1}{(1-bu)(1-au)}$
18	$\dfrac{t\sin at}{2a}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{u^2}{(1+a^2u^2)^2}$
19	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$\dfrac{1}{s^{3/2}}$	$\sqrt{u}$
20	$\dfrac{1}{w^2}(1-\cos wt)$	$\dfrac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\dfrac{u^2}{1+w^2u^2}$
21	$\dfrac{1}{w^3}(wt-\sin wt)$	$\dfrac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\dfrac{u^3}{1+w^2u^2}$
22	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt),\ (a^2\neq b^2)$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{u^2}{(1+a^2u^2)(1+b^2u^2)}$
23	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\ e^{bt}-e^{at}$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\dfrac{\sqrt{1-au}-\sqrt{1-bu}}{u^{3/2}}$
24	$e^{-(a+b)t/2}I_0(\dfrac{a-b}{2}t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+au}\sqrt{1+bu}}$
25	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+au^2}}$
26	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\dfrac{u^3}{u^{1/2}(1-au)^{3/2}}$
27	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at),\ (k>0)$	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k}$	$\dfrac{u^{2k-1}}{(1-a^2u^2)^k}$
28	$H(t-a)$	$\dfrac{1}{s}e^{-as}$	$e^{-a/u}$
29	$J_0(2\sqrt{kt})$	$\dfrac{1}{s}e^{-k/s}$	e^{-ku}
30	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{u}}e^{-ku}$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{kt}$	$\dfrac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}$	$\sqrt{u}e^{ku}$
32	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t},\ (k>0)$	$e^{-k\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{u}e^{-k/\sqrt{u}}$

Tablo 1.1. (Devamı)

33	$\ln t + \gamma \, (\gamma \cong 0.5772...)$	$-\frac{1}{s}\ln s$	$\ln u$
34	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{u}\ln\frac{1-au}{1-bu}$
35	$\frac{2}{t}(1-\cos at)$	$\ln \frac{s^2+a^2}{s^2}$	$\frac{1}{u}\ln(1+u^2a^2)$
36	$\frac{1}{2a^3}(\sinh at - \sin at)$	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{u^3}{1-a^4u^4}$
37	$\frac{1}{2a^2}(\cosh at - \cos at)$	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{u^2}{1-a^4u^4}$
38	$\frac{1}{t}\sin at$	$\arctan \frac{w}{s}$	$\frac{1}{u}\,\mathrm{ar}\tan(au)$
39	$\mathrm{Si}(t)$	$\frac{1}{s}\,\mathrm{arccot}\, s$	$\mathrm{func}\,\mathrm{arccot}\,\frac{1}{u}$
40	$\delta(t-a)$	e^{-as}	$\frac{e^{\frac{-a}{u}}}{u}$

Tablo 1.2. Sumudu dönüşümünün bazı temel özellikleri

Formül-Özellik	Formül Adı
$G(u)=S[f(t)]=\int_0^{\infty} f(ut)e^{-t}dt, \quad -\tau_1<u<\tau_2$	Sumudu dönüşüm tanımı $f\in A$
$G(u)=\dfrac{F(1/u)}{u}, \quad F(s)=\dfrac{G(1/s)}{s}$	Laplace-Sumudu dönüşümleri Arasındaki ilişki
$S[af(t)+bg(t)]=aS[f(t)]+bS[g(t)]$	Lineerlik özelliği
$G_1(u)=S[f^{'}(t)]=\dfrac{G(u)-f(0)}{u}=\dfrac{G(u)}{u}-\dfrac{f(0)}{u}$ $G_2(u)=S[f^{''}(t)]=\dfrac{G(u)}{u^2}-\dfrac{f(0)}{u^2}-\dfrac{f^{'}(0)}{u}$ $G_n(u)=S[f^{n}(t)]=\dfrac{G(u)}{u^n}-\dfrac{f(0)}{u^n}-...-\dfrac{f^{(n-1)}(0)}{u}$	Türevli fonksiyonlar için Sumudu dönüşümü
$S\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=uG(u)$	İntegrali alınan bir fonksiyon için Sumudu dönüşümü
$S\ f(at)\ =G(au)$	Birinci dereceden koruma teoremi
$S\left[t\dfrac{df(t)}{dt}\right]=u\dfrac{dG(u)}{du}$	İkinci dereceden koruma teoremi
$S\left[e^{at}f(t)\right]=\dfrac{1}{1-au}G\left(\dfrac{u}{1-au}\right)$	Birinci öteleme teoremi
$S\ f(t-a)H(t-a)\ =e^{-a/u}G(u)$	İkinci öteleme teoremi
$S\left[\dfrac{1}{t}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\dfrac{1}{u}\int_0^t f(v)dv$	Ortalama koruma teoremi
$\lim\limits_{u\to 0}G(u)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)$	Başlangıç değer teoremi
$\lim\limits_{u\to\pm\infty}G(u)=\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)$	Ortalama değer teoremi
$S\ f(t)\ =\dfrac{\int_0^{T/u} f(ut)e^{-t}dt}{1-e^{-T/u}}$	Bir T-periyodik fonksiyon için Sumudu dönüşümü
$S[f*g]=uS(f(t))S(g(t))$	Sumudu konvolüsyon teoremi
$S[f*g]=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	Sumudu konvolüsyon tanımı

KAYNAKLAR

[1] Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., and Kalla, S.L.,Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations. Mathemetical Problems in Engineering, no.3,103-118, 2003.

[2] Weerakoon, S.,Application of Sumudu transform to partial differential equations. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., vol.25, no.2, 277-283, 1994.

[3] Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., Sumudu transform fundamental properties investigations and applications.Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematic and Stochstic Analysis Volume, Article ID 91083, 1-23,DOI 10.1155/JAMSA/2006/91083, 2006.

[4] Belgacem, F. B. M., Introducing and analysing deeper Sumudu properties. Nonlinear Studies, vol. 13, no. 1, 23-41, 2006.

[5] Watugala, G. K., Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, no.1, 35-43, 1993.

[6] Eltayeb, H., Kılıçman, A., A note on the Sumudu transforms and differential equations., Applied Mathematical Sciences, 4(22), 1089-1098, 2010.

[7] Kılıçman, A., Gadain, H. E., An application of double Laplace transform and double Sumudu transform. Lobachevskii Journal of Mathematics, 30.3: 214-223, 2009.

[8] Singh, J., Kumar, D., Homotopy perturbation Sumudu transform method for nonlinear equations. Adv. Theor. Appl. Mech, *4*(4), 165-175, 2011.

[9] Belgacem, Fethi Bin Muhammad, Sumudu applications to Maxwell's equations. PIERS Online, 5.4: 355-360, 2009.

[10] Asiru, Muniru Aderemi, Classroom note: application of the Sumudu transform to discrete dynamic systems. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34.6: 944-949, 2003.

[11] Eltayeb, H., Kılıçman, A., Fisher, B., A new integral transform and associated distributions. Integral Transforms and Special Functions, 21(5), 367-379, 2010.

[12] Jarad, F., & Taş, K. (2012, September). On Sumudu transform method in discrete fractional calculus. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2012). Hindawi Publishing Corporation, 2012, September.

[13] Gençoğlu, M. T., Kriptolojide İntegral Dönüşümünün Kullanımı. Fırat Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 28(2), 2016.

[14] Hasanov, A. H., Kısmi Türevli Denklemler, Literatür Yayıncılık Dağıtım Pazarlama San. ve Tic. Ltd. Şti., İstanbul, 87-181, 2010.

[15] Asiru, M. A., Further properties of the Sumudu transform and its applications. International Journal of Mathematical Education in, Taylor&Francis, 2002.

[16] Koca, K., Kısmi Türevli Denklemler, Gazi Kitabevi, Ankara, 1-231, 2013.

[17] Dernek, A., Analiz dersleri, Nobel Yayın ve Dağıtım, 1-275, 2003.

[18] Dernek, A., Dernek, A. N., Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, İstanbul, 2001.

[19] Spıegel, Murray R., Schaum's Outlıne Series İleri Matematik Teori ve Problemleri Metrik baskı, Rensselaer Center, Nobel Yayın Dağıtım LTD.ŞTİ. (Türkçe Basım) 1997.

[20] Deniz, S., Bildik, N., Optimial Perturbation Iteration Method for Bratu-Type Problems. Journal of King Saud University-Science, 2016.

[21] Koçak, Z. F., Bulut, H., Koç, D. A., Başkonuş, H. M., Prototype Traveling Wave Solutions of New Coupled Konno-Onno Equation. Optik 127, 10786-10794, 2016.

[22] Deniz, S., Bildik, N., Application of Adomian Decomposition Method for Singularly Perturbed Fourth order Boundary Value Problems. AIP Conference Proceedings 1738, doi:10.1063/1.4952089, 290017 (2016).

[23] Koçak, Z. F., Koç, D. A., Application of Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method to Linear and Nonlinear Schrödinger equations. AIP Conference Proceedings 1738, doi: 10.1063/1.4952272, 480036 (2016).

[24] Elbeleze, A. A., Kılıçman, A., Taib, B. M., Modified Homotopy Perturbation Method for Solving Linear Second-Order Fredholm Integro-Differential Equations. Published by Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia,1823-1831, doi: 10.2298/FIL1607823E, Filomat 30:7 (2016)

[25] Rahman, N. A. A., Ahmad, M. Z., Fuzzy Sumudu transform for solving fuzzy partial differential equations. Journal of Nonlinear Science and Applications Vol., 000-000, 2016.

[26] Hamzaoğlu, M.,Çözümlü :Diferansiyel Denklemler(2.Baskı), Tunca Kitabevi, İstanbul, 2006.

[27] Zeren Akgün, L.,Çözümlü Yüksek Matematik Problemleri-1, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma Kaya, 05.03.1988'de Üsküdar'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2004 yılında Üsküdar Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında başladığı Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2009 yılında bitirdi. 2013 yılında MEB te Matematik öğretmenliğine başladı. Halen İstanbul'da Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.