T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYONLAR VE HİPERBOLİK SPİNORLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa TARAKÇIOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	GEOMETRİ
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR

Kasım 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYONLAR VE HİPERBOLİK SPİNORLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa TARAKÇIOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**

Bu tez 20/11/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Doç. Dr.**	**Dr. Öğr. Üyesi**
Mehmet Ali GÜNGÖR	**Mahmut AKYİĞİT**	**Önder Gökmen YILDIZ**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

mustafa

Mustafa TARAKÇIOĞLU

20.11.2018

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımcı olan Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR'e teşekkürü borç bilirim.

Desteğini her zaman yanımda hissettiğim, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan annem Mahmure TARAKÇIOĞLU, babam İbrahim TARAKÇIOĞLU ve ablalarım Derya KOKAL ve Dilek YILDIZ'a tez yazımındaki yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu Minkowski uzayı
V	: Vektör uzayı
ψ , Υ , Q	: Spinorlar
$\overline{\Upsilon}$	: Υ spinorunun eşleniği
$\Upsilon^\dagger$	: Υ spinorunun eşlenik transpozu
$\hat{\Upsilon}$	: Υ spinorunun eşi
$\langle\ ,\ \rangle$	: Öklid iç çarpım
$\langle\ ,\ \rangle_L$	: Lorentz iç çarpım
$\Vert\ \Vert_L$	: Lorentz anlamda norm
$\wedge_L$	: Lorentz vektörel çarpım
$O(n)$	: Ortogonal grup
$SO(n)$	: Özel ortogonal grup
$U(n)$	: Üniter grup
$SU(n)$	: Özel üniter grup
$SU(2,\mathrm{H})$	: Özel üniter grup
$SO(1,3)$	: $\mathbb{R}_1^3$ de özel ortogonal grup
H_0^2	: Hiperbolik birim küre
S_1^2	: Lorentz birim küre
Λ	: Null koni
H	: Reel kuaterniyon uzayı
H'	: Split kuaterniyon uzayı
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik sayı cümlesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hiperbolik Spinor, Lie Grupları, Split Kuaterniyon, Kinematik

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Minkowski uzayında temel tanımlar ve gerekli teoremler verilmiştir. Ayrıca Hiperbolik sayı sistemi tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında yeni bir yaklaşım olan reel kuaterniyon ve bir indeksli spinorlar arasındaki ilişkiler verildi. Dördüncü bölümde vektör kinematiği ve split kuaterniyon kinamatiği tanıtılmıştır.

Beşinci bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Tezin orijinal kısmı iki alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci alt bölümde hiperbolik spinor ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci alt bölümde split kuaterniyonlar ve hiperbolik spinorlar, Euler teoreminin vektör formülasyonundan türetilmiştir. Bu teori Minkowski uzayında sabit bir cismin genel bir yer değiştirmesiyle ilgilidir. Hiperbolik spinorlar ile split kuaterniyonlar arasındaki ilişki bu vektör formülasyonu ile verilir. Dahası, split kuaterniyonların bir uzantısı olan bir hiperbolik spinor formülasyon elde edildi.

Altıncı bölümde bu tezin bir değerlendirilmesi yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

SPLIT QUATERNIONS AND HYPERBOLIC SPINORS

SUMMARY

Keywords: Hyperbolic spinors, Lie groups, Split quaternions, Kinematics

This thesis consists of six chapters. The first chapter is for preface. In the second chapter basic definitions and neccessary theorems at Minkowski space have been given. Also hyperbolic number system is intoroduced. In the third chapter, relations between the real quaternion and the indexed spinors were given as a new approach in the 3-dimensional Euclidean space. In the fourth section vector kinematics and split quaternion kinematics are introduced.

The fifth section comprises the original part of thesis. This section is organized as two subsections. In the first subsection information about hyperbolic spinor is given.

In the second subsection, the split quaternions and the hyperbolic spinors are derived from the vector formulation of the Euler's teorem. This theory is on the general displacement of a rigid body with a fixed point in the Minkowski space $\mathbb{R}_1^3$. Then, the relationship between the hyperbolic spinors and the split quaternions is given by this vector formulation. Moreover, a hyperbolic spinor formulation of rotations which is an extension of the split quaternions is obtained.

In the sixth chapter the general evaluation of thesis and recommendations for new researches are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramını içermeyen mekaniğin bir dalı olarak Müller tarafından 1963 yılında ortaya çıkmıştır. Yani kinematik, sadece bir nokta veya nokta sisteminin zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler [1]. Kuaterniyonlar Hamilton tarafından 1843 yıllarında tanımlanmış ve kinematikte hareketlerin incelenmesinde önemli bir rol oynadığı birçok araştırmada ifade edilmiştir.

1979 yılında reel kuaterniyonların uzay Kinematiğine uygulamaları Bottema ve Roth tarafından ifade edilmiştir. Ayrıca hareket matrislerinin formlarını vermişlerdir [2]. Hacısalihoğlu tarafından 1983 yılında reel kuaterniyonları ve sağladıkları özelliklleri teoremlerle ifade etmiştir [3]. Karger ve Novak tarafından 1985 yılında reel kuaterniyonlar yardımıyla E^3 Öklid uzayında bir eksen etrafında dönmeyi adjoint gösterimiyle ifade etmişlerdir [4]. Ward tarafından 1997 yılında 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında reel kuaterniyonlar kullanılarak dönme matrisleri kuaterniyonik anlamda verilmiştir [5].

Inoguchi tarafından 1998 yılında split (bölünmüş) kuaterniyonları tanımlamış ve Minkowski 3-uzayında sabit ortalama eğrilikli timelike (zamansı) yüzeylerin temel denklemleri split (bölünmüş) kuaterniyonlar yardımıyla yeniden formüle edilmiştir [6]. Kula tarafından 2003 yılında timelike (zamansı) birim split (bölünmüş) kuaterniyonların Lie grubu ve onun Lie cebirini elde etmiştir. H' split (bölünmüş) kuaterniyonlar uzayının E_2^4 yarı Öklidyen uzayına ve Lie grubunu Lie cebirinin E_1^3 Minkowski 3-uzayına özdeşlenmesi, bu iki uzayda çalışma imkanı oluşturmuştur. Kula, bu özdeşleşme ile Minkowski 3-uzayında dönme matrislerini, dönme ekseninin spacelike (uzaysı) ve timelike (zamansı) olmasına göre elde etmiştir [7].

Rooney 1977 yılında sabit bir nokta etrafında bir cismin dönme hareketini metodlar halinde ifade etmiş, yani 3 x 3 reel ortogonal matrisler, 2 x 2 üniter matrisler, Pauli spin matrisleri ve 3 x 3 özel üniter matrisler yardımıyla bir eksen etrafında dönme matrislerini sınıflandırmıştır [8].

Spinorlar fizikte Quantum mekaniğinde de kullanılmaktadır. Spinorlar Quantum mekaniğinde, bir spinorun bileşenlerinden başka bir şey olmayan dört dalga fonksiyonları ve elektron için ünlü Dirac denklemlerini oluşturur. Brauer ve Weyl tarafından yapılan çalışma temel olmak üzere bu alanda bir çok çalışma yayınlanmıştır [9]. Fakat bu çalışmaların çoğunda spinorlar, sezgisel bir geometrik görüş olmadan tanıtıldığı için spinorlarla ilgili mevcut literatürün anlaşılması bir hayli güçtür. Fakat son yıllarda geometrik anlamda konu üzerine daha anlaşılır birkaç çalışma yapılmıştır. Spinorlar hakkında, ilk kez modern bir çalışmayı Fransız matematikçi Cartan yapmıştır. Cartan'ın çalışmasındaki temel amaçlardan biri Lie gruplarının sadece geometrik tanımını vererek sistematik olarak spinor teorisini geliştirmektir ve bununla birlikte diferensiyel geometri, grup teorisi ve matematiksel fiziğe önemli katkılarda bulunmaktır [10].

3-boyutlu Öklid uzayında orthogonal birim vektörlerden oluşan üçlüyü, iki kompleks bileşenden oluşan tek bir spinor vektörüne karşılık getiren çalışmayı Castillo ve Barrales yapmıştır [11]. Ayrıca diğer bir çalışmada ise yönlendirilmiş bir yüzey üzerinde verilen Darboux çatısının spinor formülasyonu ve Frenet ile Darboux çatılarının spinor gösterimleri arasındaki ilişki Kişi ve Tosun tarafından verilmiştir [12]. Benzer olarak $\mathbb{E}^3$, Öklid uzayında eğrilerin spinor Bishop denklemleri ve Bishop ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler [13]'deki çalışmada verilmiştir. Ek olarak Ketenci ve ark. Minkowski uzayında null olmayan regüler bir eğrinin hiperbolik spinor formülünü vermiştir. Erişir ve ark. Frenet çatısına alternatif bir çatıya karşılık gelen hiperbolik spinorların geometrisini incelemiştir [14].

Diğer yandan, üç boyutlu Öklid uzayında katı bir cismin yer değiştirmesiyle ilgili Euler teoreminin vektör formülasyonundan türetilen bir-indeksli spinorlara ve kuaterniyonlara yeni bir yaklaşımda bulunan Vivarelli, kuaterniyonlar ve bir-indeksli spinorlar arasında lineer ve birebir bir bağıntı tanıtmıştır [15].

Bu çalışmanın amacı $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında dönme hareketlerinin hiperbolik spinor temsilini vermektir. Bunun için öncelikle H' split (bölünmüş) kuaterniyonlar tanıtılmıştır. Daha sonra split kuaterniyonlar ve hiperbolik spinorlar arasında lineer ve birebir benzerlikler sunulmuştur. Diğer taraftan Minkowski 3-boyutlu uzayda bir eksen etrafında dönme hareketi split kuaterniyon matrisleri tarafından ifade edilmiştir. Böylece split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasında ilişki kurularak $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki dönme denklemlerinin yeni ve kısa bir ifadesi elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. TANIMLAR

2.1. Lie Grupları

Bu bölümde bize gerekli olan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. Bir Lie grubu, diferensiyellenebilir grup operatörlerine sahip olan diferensiyellenebilir bir manifolddur; yani G deki grup operatörü olan

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab$$

ve G deki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \to G, \ \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin ikisi de diferensiyellenebilirdir. G Lie grubunun bir otomorfizmi hem diffeomorfizim hem de grup izomorfizimi olan

$$\begin{aligned} \phi : G &\to G \\ a &\to \phi(a) \end{aligned}$$

dönüşümüdür. Otomorfizimler Lie grubunun üzerindeki özellikleri korur [16].

Tanım 2.1.2. G Lie grubunun bir elemanı a olsun. Her $g \in G$ için $l_a(g) = ag$ olarak tanımlanan $l_a : G \to G$ dönüşümüne G Lie grubunun sol çarpımı denir. l_a sol çarpımı bir diffeomorfizimdir. Her $g \in G$ için $r_a(g) = ga$ olarak tanımlanan

$r_a : G \to G$ dönüşümüne G Lie grubunun sağ çarpımı denir. r_a sağ çarpımı bir diffeomorfizimdir [17].

Tanım 2.1.3. V bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] \quad : \quad & V \times V \to V \\ & (\vec{u}, \vec{v}) \to [\ ,\ ](\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] \end{aligned}$$

biçimindeki bir dönüşüm $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa bu dönüşüme Bracket operatörü, $(V, [\ ,\ ])$ ikilisine de bir Lie cebiri denir.

$i)$ $[\ ,\ ]$ ikilineer,

$ii)$ $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$ (antisimetrik),

$iii)$ $[[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}] + [[\vec{v}, \vec{w}], \vec{u}] + [[\vec{w}, \vec{u}], \vec{v}] = \vec{0}$,

[17].

Tanım 2.1.4. Eğer $\forall a, g \in G$ için $dl_a(\vec{X}_g) = \vec{X}_{ag}$ ise G Lie grubu üzerindeki $\vec{X}$ vektör alanı sol invaryanttır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} l_a : \ & G \to G \\ & g \to l_a(g) = ag \end{aligned}$$

sol çarpımının

$$\begin{aligned} dl_a : \ & T_G(g) \to T_G(ag) \\ & \vec{X}_g \to dl_a(\vec{X}_g) = \vec{X}_{ag} \end{aligned}$$

türev dönüşümü $\vec{X}$ vektör alanının oluşturduğu tanjant vektörleri yer değiştirir. Sol invaryant vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

G Lie grubundaki sol invaryant vektör alanlarının cümlesi $X_l G$ olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skalar ile çarpma işlemleri $X_l G$ cümlesini bir vektör uzayı yapar. $X_l G$'de [,] Bracket operatörü de tanımlanarak $X_l G$ bir Lie cebiri olur. $X_l G$ Lie cebiri $n = \text{boy}G$ (sonlu) boyutuna sahiptir [18].

Lemma 2.1.5. $\vec{X} \in X_l G$ elemanını $\vec{X}_e \in T_G(e)$ elemanına dönüştüren $f : X_l G \to T_G(e)$ fonksiyonu bir lineer izomorfizimdir. Burada e, G Lie grubunun grup işlemine göre birim elemanıdır.

$\phi : G \to G$ bir otomorfizim olsun. $\vec{X} \in X_l G$ ise $d\phi(\vec{X}) \in X_l G$ dir ve $d\phi : X_l G \to X_l G$ Lie cebiri izomorfizimine ϕ'nin diferensiyeli denir. $d\phi$ diferensiyeli $d\phi_e : T_G(e) \to T_G(e)$ dönüşümü ile ifade edilir [18].

Tanım 2.1.6. $a \in G$ olmak üzere g elemanını aga^{-1} elemanına dönüştüren

$$\begin{aligned} C_a &: G \to G \\ g &\to C_a(g) = aga^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda C_a bir diffeomorfizim olup onun diferensiyeli Ad_a ile gösterilir. O halde $dC_a = Ad_a$ dir. $a, b \in G$ olduğunda $C_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1}$ dir. Böylece $C_{ab} = C_a \circ C_b$ olur. Diferensiyel alındığında ise

$$Ad_{ab} = Ad_a \circ Ad_b$$

elde edilir. $a \to Ad_a$ grup homomorfizmine G'nin adjoint gösterimi denir [18].

Tanım 2.1.7. V bir reel vektör uzayı üstünde, $\langle\ ,\ \rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna ikilineer form, eğer bu ikilineer form simetrik ise $\langle\ ,\ \rangle$ formuna simetrik ikilineer form denir [17].

Tanım 2.1.8. $\langle\ ,\ \rangle_L$, V üstünde ikilineer form olsun.

i) $\forall\vec{v}\in V,\ \vec{v}\neq 0 \Rightarrow \langle\vec{v},\vec{v}\rangle_L > 0$ önermesi doğru ise $\langle\ ,\ \rangle_L$ formuna pozitif tanımlı,

ii) $\forall\vec{v}\in V,\ \vec{v}\neq 0 \Rightarrow \langle\vec{v},\vec{v}\rangle_L < 0$ önermesi doğru ise $\langle\ ,\ \rangle_L$ formuna negatif tanımlı,

iii) $\forall\vec{v}\in V$, $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle_L \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle_L$ formuna yarı pozitif tanımlı,

iv) $\forall\vec{v}\in V$, $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle_L \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle_L$ formuna yarı negatif tanımlı,

v) $\forall\vec{w}\in V,\ \langle\vec{v},\vec{w}\rangle_L = 0 \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$ oluyor ise $\langle\ ,\ \rangle_L$ formuna non-dejenere bir form denir. $\langle\ ,\ \rangle_L$, V vektör uzayının alt uzayına indirgenebilir. Bu indirgenen simetrik ikilineer form dejenere veya non-dejeneredir [18].

Tanım 2.1.9. V vektör uzayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} q &: V\to\mathbb{R} \\ \vec{v} &\to q(\vec{v}) = \langle\vec{v},\vec{v}\rangle_L \end{aligned}$$

fonksiyonuna $\langle\ ,\ \rangle_L$ formundan elde edilen kuadratik form denir. q kuadratik formu verildiğinde, $\langle\ ,\ \rangle_L$ simetrik ikilineer formu verilmiş demektir. Gerçekten,

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle_L = \frac{1}{2}\left[q(\vec{v}+\vec{w}) - q(\vec{v}) - q(\vec{w})\right]$$

dir. V nin bir bazı $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ olmak üzere, $g_{ij} = \langle\vec{e}_i,\vec{e}_j\rangle$ diyelim. $\left[g_{ij}\right]$ matrisine, g nin $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ bazına göre bileşenlerinin matrisi denir. g simetrik olduğundan $\left[g_{ij}\right]$ matrisi de simetriktir [18].

Teorem 2.1.10. $\langle\ ,\ \rangle_L$ simetrik ikilineer formu non-dejeneredir gerek ve yeter şart V vektör uzayının bir bazına göre $\langle\ ,\ \rangle_L$ formuna karşılık gelen matrisin determinantı sıfırdan farklıdır [18].

Tanım 2.1.11. V vektör uzayı üstünde simetrik, non-dejenere bir $\langle\ ,\ \rangle_L$ ikilineer formuna V üstünde bir skalar çarpım denir. $\langle\ ,\ \rangle_L$, V üstünde bir pozitif tanımlı skalar çarpım ise $\langle\ ,\ \rangle_L$ formuna V vektör uzayı üstünde bir iç çarpım denir [17].

Tanım 2.1.12. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere V üstünde bir skalar çarpım varsa V vektör uzayına skalar çarpımlı vektör uzayı denir [17].

Tanım 2.1.13. V skalar çarpımlı bir vektör uzay ve $\vec{v} \in V$ olsun.

$$\|\vec{v}\|_L = \sqrt{\left|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L\right|}$$

eşitliğiyle belirli $\|\vec{v}\|_L$ sayısına $\vec{v}$ vektörünün normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör adı verilir [18].

Teorem 2.1.14. $V \neq \{\vec{0}\}$ olmak üzere, V skalar çarpımlı bir vektör uzayı ise V vektör uzayının ortonormal bazı vardır [18].

V skalar çarpımlı vektör uzayının ortonormal bir $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ bazına göre $\left[g_{ij}\right]$ matrisi köşegensel bir matristir. Çünkü $\left\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \right\rangle_L = \delta_{ij}\varepsilon_j$ dir. Burada $\varepsilon_j = \left\langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \right\rangle_L$, -1 veya 1dir. V vektör uzayının ortonormal bir bazı sıralı olarak göz önüne alındığında, ε_j sayıları negatif olan vektörlerin ilk sırada yazıldığını varsayacağız.

Teorem 2.1.15. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, V nin ortonormal bir bazı olsun. V nin her $\vec{v}$ elemanı

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left\langle \vec{v}, \vec{e}_i \right\rangle_L \ \vec{e}_i$$

biçiminde bir ve yalnız bir türlü yazılabilir [18].

Teorem 2.1.16. V nin ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ bazı için $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ cümlesindeki negatif sayıların sayısı, $\langle \ , \ \rangle_L$ formunun indeksine eşittir. $\langle \ , \ \rangle_L$ formunun indeksine v indeksi denir [18].

Teorem 2.1.17. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üstündeki non-dejenere, sabit indeksli ve $(0,2)$ tipindeki $\langle \ , \ \rangle_L$ tensör alanına bir metrik tensör denir [18].

Teorem 2.1.18. M diferensiyellenebilir manifoldu üstünde bir $\langle \ , \ \rangle_L$ metrik tensörü varsa M manifolduna bir yarı-Riemann manifoldu denir. $\langle \ , \ \rangle_L$ metrik tensörünün v indeksine $(M, \langle \ , \ \rangle_L)$ yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. M manifoldunun boyutu n olmak üzere, M yarı-Riemann manifoldu M_v^n ile gösterilir [18].

Tanım 2.1.19. $(M, \langle \ , \ \rangle_L)$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $v = 1$ ise M_v^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir [18].

Tanım 2.1.20. M yarı-Riemann manifoldu ve $\langle \ , \ \rangle_L$ formu da M üstünde bir metrik tensör olsun. Bu durumda M de bir $\vec{v}$ tanjant vektörü için,

$i)$ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L > 0$ veya $\vec{v} = \vec{0}$ ise $\vec{v}$ vektörüne spacelike vektör,

$ii)$ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L < 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne timelike vektör,

$iii)$ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L = 0$ ve $\vec{v} \neq 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne null vektör

denir [18].

Tanım 2.1.21. İndeksi 1 ve $boyV \geq 2$ olan V skalar çarpım uzayına Lorentz vektör uzayı denir. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı ve $\langle\ ,\ \rangle_L$, V üstündeki skalar çarpım olsun. Bu durumda, $\langle\ ,\ \rangle_L\big|_W$ pozitif tanımlı (yani W iç çarpım uzayı) ise W alt vektör uzayına spacelike alt uzayı, $\langle\ ,\ \rangle_L\big|_W$ 1 indeksine sahip non-dejenere ise W alt vektör uzayına timelike alt uzayı, $\langle\ ,\ \rangle_L\big|_W$ dejenere ise W alt vektör uzayına null alt uzayı denir [18].

Lemma 2.1.22. $\vec{v}$, V Lorentz vektör uzayında spacelike bir vektör ise $Sp\{\vec{v}\}^{\perp}$ alt uzayı timelike ve $V = Sp\{\vec{v}\} \oplus Sp\{\vec{v}\}^{\perp}$ dir.

W alt uzayının timelike olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ uzayının spacelike olmasıdır.
W nin lightlike olması için gerek ve yeter koşul $W^{\perp}$ lightlike olmasıdır.

W spacelike alt uzayının her alt uzayı da spacelike ve Schwarz eşitsizliği $\left|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\right|_L \leq \|\vec{v}\|_L \|\vec{w}\|_L$ olarak elde edilir. Bu eşitsizliğin eşit olması için gerek ve yeter koşul $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır [18].

Tanım 2.1.23. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

$i)$ W spacelike'tır. Böylece W nın kendisi de Lorentz vektör uzayıdır,

$ii)$ W lineer bağımsız iki null vektör içerir,

$iii)$ W timelike vektör içerir

[18].

Lemma 2.1.24. W, V Lorentz vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

$i)$ W lightlike'tır. Yani dejenere olur,

$ii)$ W null vektör içerir fakat timelike vektör içermez,

$iii)$ $W \cap \Lambda = L - \{\vec{0}\}$ dir. Burada L bir boyutlu alt uzaydır ve Λ, V Lorentz uzayının null konisidir [18].

Tanım 2.1.25. F, V Lorentz vektör uzayındaki spacelike vektörlerin cümlesi olsun. $\vec{u} \in F$ için

$$C(\vec{u}) = \left\{ \vec{u} \in F \mid \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L < 0 \right\}$$

cümlesi $\vec{u}$ vektörünü içeren V Lorentz uzayının time konisidir. Karşıt time konisi

$$C(-\vec{u}) = -C(\vec{u}) = \left\{ \vec{u} \in F \mid \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L > 0 \right\}$$

dir. $\{\vec{u}\}^{\perp}$ spacelike olduğundan, F bu iki time konisinin bileşimidir [18].

Lemma 2.1.26. Lorentz vektör uzayında $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ timelike vektörlerinin aynı time konide olmaları için gerek ve yeter koşul $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle < 0$ olmasıdır [18].

Teorem 2.1.27: $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ Minkowski 3-uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

$i)$ $\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$ii)$ $(\vec{u} \wedge_L \vec{v}) \wedge_L \vec{w} = -\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \vec{v} + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L \vec{u}$

$iii)$ $\vec{u} \wedge_L (\vec{v} \wedge_L \vec{w}) = -\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \vec{v} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \vec{w}$

$iv)$ $\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \rangle_L = 0 \quad ve \quad \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{v} \rangle_L = 0$

$v)\quad \left\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \wedge_L \vec{v} \right\rangle_L = -\left\langle \vec{u},\vec{u} \right\rangle_L \left\langle \vec{v},\vec{v} \right\rangle_L - \left\langle \vec{u},\vec{v} \right\rangle_L^{\ 2}$

eşitlikleri mevcuttur.

Burada $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$\vec{u} \wedge_L \vec{v} = \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

ve

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

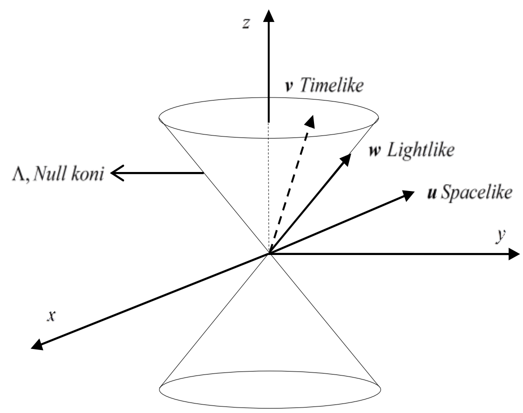
dir [18].

Tanım 2.1.28. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında

$$\Lambda = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}_1^3 : \left\langle \vec{u},\vec{u} \right\rangle_L = 0, \vec{u} \neq \vec{0} \right\}$$

ile verilen cümleye null koni adı verilir [18].

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki timelike vektörler Λ konisinin içinde, lightlike (null) vektörler Λ konisinin üzerinde ve spacelike vektörlerde Λ konisinin dışında bulunurlar. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1. Minkowski uzayında vektörler

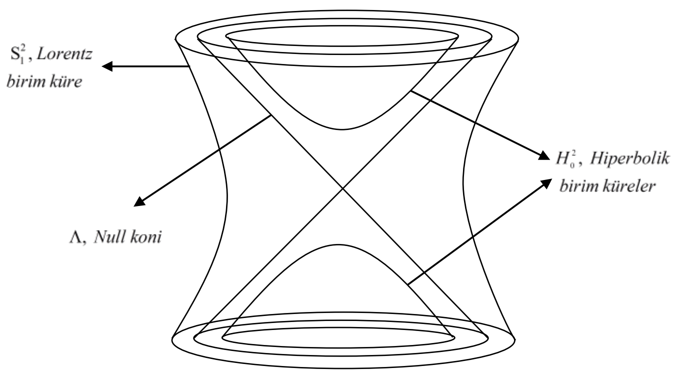
Tanım 2.1.29. $\mathbb{R}_1^3$ de Lorentz ve Hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}_1^3 \;\middle|\; \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}_1^3 \;\middle|\; \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = -1 \right\}$$

ile verilir [18]. (Şekil 2.2.)



Şekil 2.2. Minkowski uzayında birim küreler

Tanım 2.1.30. $\vec{u} \in \mathbb{R}_1^3$ de bir timelike vektör ve $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ olsun. Eğer

$i)$ $\langle \vec{u}, \vec{e}_3 \rangle_L < 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne future-pointing timelike vektör,

$ii)$ $\langle \vec{u}, \vec{e}_3 \rangle_L > 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne past-pointing timelike vektör

denir [12].

Tanım 2.1.31. $\vec{u},\,\vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin Lorentz skaler çarpımı aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ future-pointing (past-pointing) timelike vektörler olsun. Bu durumda,

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle_L = -\|\vec{u}\|_L \|\vec{v}\|_L \cosh\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir [12].

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ spacelike vektörler olsun. Bu vektörlerin gerdiği alt vektör uzayının timelike olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle_L = \|\vec{u}\|_L \|\vec{v}\|_L \cosh\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir [12].

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ spacelike vektörler olsun. Bu vektörlerin gerdiği alt vektör uzayının spacelike olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle_L = \|\vec{u}\|_L \|\vec{v}\|_L \cos\varphi$$

olacak şekilde bir tek φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) reel sayısı vardır. Bu sayıya $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir [12].

$\vec{u}$ bir spacelike vektör ve $\vec{v}$ bir timelike vektör olsun. Bu durumda,

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle_L = \|\vec{u}\|_L \|\vec{v}\|_L \sinh\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu φ sayısına $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki timelike açı denir [12].

Tanım 2.1.32. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{R}_1^3 \\ s &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında eğri adı verilir. Eğer $\vec{\alpha}'(s)$ hız vektör alanı için

$i)$ $\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle_L = 1$ ise α ya birim hızlı spacelike eğri,

$ii)$ $\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle_L = -1$ ise α ya birim hızlı timelike eğri,

$iii)$ $\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle_L = 0$ ise α ya null (lightlike) eğri

adı verilir [11].

Teorem 2.1.33. $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için aşağıdaki önermeler denktir.

$i)$ $A \in O_v(n)$,

$ii)$ $A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$ eşitliğini sağlayan matrise Lorentz anlamda ortogonal matris denir,

$iii)$ A nın sütunlarının cümlesi (satırlarının cümlesi) $\mathbb{R}_v^n$ uzayı için ortonormal bir bazdır,

$iv)$ A, $\mathbb{R}_v^n$ nin ortonormal bir bazını yine ortonormal bir baza dönüştürür.

Burada işaret matrisi $\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir [11,18].

Teorem 2.1.34. $O_v(n)$ in Lie cebiri, $C^T = -\varepsilon C \varepsilon$ eşitliğini sağlayan C matrislerinin cümlesidir. Böyle C matrisleri

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada $A^T = -A$, $D^T = -D$, $A_{v\times v}$, $D_{(n-v)\times(n\times v)}$ ve $B_{v\times(n-v)}$ biçiminde matrislerdir. $O_v(n)$ 'nin Lie cebiri $O_v(n)$ ile gösterilir. $boy\, O_v(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ dir [18].

2.2. Hiperbolik Sayı Sistemi

İngiliz geometrici ve matematikçi Clifford, $j^2 = 1$ eşitliğini kullanarak split karmaşık sayılar veya double karmaşık sayılar olarak da adlandırılan hiperbolik sayıları tanıttı [19]. Clifford'un yaptığı hiperbolik sayıların mekaniğe uygulamaları, non-Öklid geometriye uygulamalar tarafından desteklenmektedir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. O halde $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Z = (x, y)$ ikilisine sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{H}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{H} = \left\{(x, y) : x + jy,\ x, y \in \mathbb{R},\ j^2 = 1,\ j \neq \mp 1\right\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır [20].

Tanım 2.2.2. $Z = (x, y) \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayı olmak üzere x reel sayısına Z sayısının reel kısmı y reel sayısına da Z sayısının hiperbolik kısmı denir [20].

Tanım 2.2.3. $Z_1 = (x_1, y_1)$, $Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{H}$ olmak üzere Z_1 ile Z_2 eşittir denir ve $Z_1 = Z_2$ şeklinde gösterilir [20].

Tanım 2.2.4. $Z_1=(x_1,y_1),\ Z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{H}$ olmak üzere

$$\oplus:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$$

iç işlemi

$$Z_1\oplus Z_2=(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{H}$ deki toplama olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.2.5. $Z=(x,y)\in\mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z\oplus X=Z$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanan X hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$ de $\oplus$ işleminin birim elemanı (etkisiz elemanı) denir ve $0=(0,0)$ ile gösterilir [20].

Tanım 2.2.6. $Z=(x,y)\in\mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z\oplus W=0$$

denkleminde W ile gösterilen hiperbolik sayıya $\mathbb{H}$ de $\oplus$ işleminin ters elemanı denir ve $W=(-x,-y)$ ile gösterilir [20].

Önerme 2.2.7. $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı sisteminde toplama işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $Z_1\oplus Z_2=Z_2\oplus Z_1$ (Değişme özelliği),

ii) $Z_1\oplus(Z_2\oplus Z_3)=(Z_1\oplus Z_2)\oplus Z_3$ (Birleşme Özelliği)

[20].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.8. $(\mathbb{H},\oplus)$ ikilisi bir abel grubudur [20].

Tanım 2.2.9. $Z_1=(x_1,y_1),\ Z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{H}$ olmak üzere

$$\odot:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$$

iç işlemi

$$Z_1\odot Z_2=(x_1,y_1)\odot(x_2,y_2)=(x_1x_2+y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{H}$ ’de çarpma olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.2.10. $Z=(x,y)\in\mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z\odot Y=Z$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanan Y hiperbolik sayısına $\mathbb{H}$ ’de $\odot$ işleminin birim elemanı (etkisiz elemanı) denir ve $1=(1,0)$ ile gösterilir [20].

Tanım 2.2.11. $Z=(x,y)\in\mathbb{H}$ olmak üzere

$$Z\odot Z^{-1}=1$$

denkleminde Z^{-1} ile gösterilen hiperbolik sayıya $\mathbb{H}$ ’de $\odot$ işleminin ters elemanı denir [20].

Tanım 2.2.12. $(0,1)$ hiperbolik sayısı j ile gösterilecektir yani $(0,1)=j$ alınacak ve hiperbolik birim olarak adlandırılacaktır [20].

Sonuç 2.2.13. $j^2=1$ dir [20].

Önerme 2.2.14. $\mathbb{H}$ hiperbolik sayı sisteminde çarpma işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$i)$ $Z_1 \odot Z_2 = Z_2 \odot Z_1$ (Değişme Özelliği),

$ii)$ $Z_1 \odot (Z_2 \odot Z_3) = (Z_1 \odot Z_2) \odot Z_3$ (Birleşme Özelliği),

$iii)$ $Z_1 \odot (Z_2 \oplus Z_3) = (Z_1 \odot Z_2) \oplus (Z_1 \odot Z_3)$ (Dağılma Özelliği)

[20].

O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.2.15. $(\mathbb{H},\oplus,\odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır [20].

Teorem 2.2.16. $(\mathbb{H},\oplus,\odot)$ üçlüsü bir cisim değildir [20].

Tanım 2.2.17. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{H}$ cümlesine hiperbolik sayı sistemi ve $\forall (x,y) \in \mathbb{H}$ elemanına da bir hiperbolik sayı denir [20].

Tanım 2.2.18. x ve y reel sayı olmak üzere $Z = x + jy \in \mathbb{H}$ olsun. Bu takdirde $x - jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısına Z hiperbolik sayısının eşleniği denir ve $\overline{Z}$ ile gösterilir [20].

Teorem 2.2.19. Z_1 ve Z_2 iki hiperbolik sayı olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

$i)$ $\overline{Z_1 \oplus Z_2} = \overline{Z_1} \oplus \overline{Z_2}$,

$ii)$ $\overline{\overline{Z_1}} = Z_1$,

$iii)$ $\overline{Z_1 \odot Z_2} = \overline{Z_1} \odot \overline{Z_2}$,

$iv)$ $Z_2 \neq 0$ olmak üzere $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}\right)$,

$v)$ $Z_1 \oplus \overline{Z_1} = 2\operatorname{Re}(Z_1)$, $Z_1 - \overline{Z_1} = 2j\operatorname{Im}(Z_1)$

[20].

Teorem 2.2.20. $Z = (x, y)$ hiperbolik sayıların bütününe hiperbolik düzlem denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir. Her bir (x, y) ikilisine de hiperbolik düzlemin bir noktası denir [20].

Tanım 2.2.21. $Z = x + jy \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayı olmak üzere

$$|Z| = \sqrt{\left|Z \odot \overline{Z}\right|} = \sqrt{\left|x^2 - y^2\right|}$$

reel sayısına $Z \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının modülü denir [20].

Tanım 2.2.22. $Z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{H}$ ve $Z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{H}$ iki hiperbolik sayı olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $|Z_1|^2 = Z_1 \odot \overline{Z_1}$, $|Z_1| = \sqrt{\left|Z_1 \odot \overline{Z_1}\right|}$,

ii) $|Z_1 \odot Z_2| = |Z_1||Z_2|$,

iii) $Z_2 \neq 0$ *olmak üzere* $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

[20].

Tanım 2.2.23. $Z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{H}$ ve $Z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{H}$ iki hiperbolik sayı olmak üzere hiperbolik düzlemde bu iki hiperbolik sayı arasındaki uzaklık $|Z_1 - Z_2|$ ile gösterilir ve

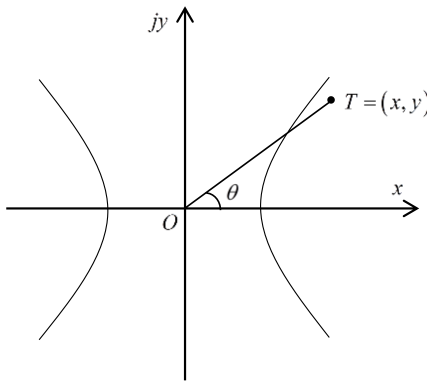
$$|Z_1 - Z_2| = \sqrt{\left|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2\right|}$$

olarak hesaplanır [20].

Tanım 2.2.24. $\mathbb{H}$ hiperbolik düzlemde açı

$$\theta = \operatorname{arctanh} \frac{y}{x}$$

şeklinde tanımlanır [20]. (Şekil 3.1.)



Şekil 3.1. Bir hiperbolik sayının hiperbolik düzlemde gösterimi [20]

Tanım 2.2.25. $\mathbb{H}$ hiperbolik düzlemde Maclaurin serisi yardımıyla Euler formülü

$$e^{j\theta} = \cosh\theta + j\sinh\theta$$

şeklindedir [20].

Tanım 2.2.26. $Z \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının kutupsal ve üstel formu

$$Z = r\left(\cosh\theta + j\sinh\theta\right) = re^{j\theta}$$

şeklinde elde edilir. Burada $r = \left|Z\right|$ ve θ ifadeleri, sırasıyla, Z hiperbolik sayısının büyüklüğü ve argümenti denir [20].

Tanım 2.2.27. $\mathbb{H}$ hiperbolik düzlemde $e^{j\theta}$ tarafından tanımlanan dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

şeklindedir [20].

BÖLÜM 3. REEL KUATERNİYON VE SPİNORLAR

Bu bölümde, normu 1 olan kuaterniyonların Lie grubu ve onun Lie cebiri yardımıyla reel uzayda dönme matrisleri elde edilmiştir. Şimdi

$$H = \left\{ q = a_0 1 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad : \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\left\{1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ birimlerinin çarpımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
1	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_1$	-1	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	-1	$-\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_1$	-1

Tablo 3.1. Reel kuaterniyonların birimlerinin çarpımı

H nin her bir elemanına bir kuaterniyon adı verilir. Burada a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q reel kuaterniyonunun bileşenleri denir. Bundan sonraki bölümlerde, bir kuaterniyon için $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ gösterimi kullanılacaktır. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Dolayısıyla bir $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ kuaterniyonu S_q skaler kısım ve $\vec{V}_q$ vektörel kısım olmak üzere iki kısıma ayrılır ve

$$q = S_q + \vec{V}_q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_q = a_0, \quad \vec{V}_q = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

dır.

$q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $p = b_0 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ kuaterniyonların toplamı

$$\begin{aligned} q + p &= (S_q + S_p) + (\vec{V}_q + \vec{V}_p) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda q = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iki işlemle birlikte H cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Ayrıca $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $p = b_0 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ kuaterniyonlarının çarpımı:

$$\begin{aligned} \times : H \times H &\to H \\ (q, p) &\to q \times p = qp \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup

$$qp = S_q S_p - \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q + \vec{V}_q \wedge \vec{V}_p$$

olarak tanımlanır.

3.1. Vektör Kinematiği

3-boyutlu Öklid uzayında katı bir cismin yer değiştirmesi, vektör cebiri tarafından kolayca kurulabilir. Euler'in teoremine göre dönme, sabit bir nokta O, birim bir vektör $\vec{n}$ ve sağa doğru dönen bir açı φ ile karakterize edilir. O halde $\vec{x}$ vektöre dönme uygulanırsa,

$$\vec{x}' = \cos\varphi.\vec{x} + (1-\cos\varphi) < \vec{n}, \vec{x} > \vec{n} + \sin\varphi(\vec{n} \wedge \vec{x}) \tag{3.1}$$

elde edilir. φ dönme açısıyla birlikte bu dönme $\vec{x}$ vektörünü $\vec{x}'$ vektörüne dönüştürür. Bu ifadeye gerekli işlemler yapılarak aşağıdaki denklem ifade edilmiştir.

$$\vec{x}' = (2\beta_0{}^2 - 1)\vec{x} - 2 < \vec{\beta}, \vec{x} > \vec{\beta} + 2\beta_0(\vec{\beta} \wedge \vec{x}) \tag{3.2}$$

Sabit bir çatı $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ referansa göre (3.2) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\vec{x}' = B\vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2 + \beta_0\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3 - \beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3 - \beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3 + \beta_0\beta_1) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Burada B dönüşüm matrisi $B = B(\beta_0, \vec{\beta})$ ile gösterilir. Ayrıca 3x3 tipinde reel, semi- ortogonal bir matristir. B matrisindeki β_i $(0 \le i \le 3)$ parametreleri

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \tag{3.4}$$

şartını sağlar. B matrisi

$$B=\begin{pmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2-\beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3+\beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2+\beta_0\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3+\beta_0\beta_1) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

şeklindedir. Burada B matrisi cismin pozisyonunu verir ve $G=SO(3)$ Lie grubunun bir elemanıdır. Ayrıca $\varphi=0$, $\beta_0=1$ ve $\beta_h=0$,$(h=1,2,3)$ olduğunda birim matrisi veren B matrisi, bu durumda $(0;e_h)$ ortonormal çatısını oluşturur.

Şimdi bir eğriye $SO(3)$ üretici uzayında katı cismin hareketi $t\to B(t)$ karşılık gelsin. O halde eğrinin tanjantı olan $\dot{B}=\dfrac{dB}{dt}$, B matrisinin birinci sütunu T teğet vektörünü verirse dönme hız vektörü $B(t)$ noktasında $TSO(3)_B$ tanjant uzayının bir elemanıdır. B semi-ortogonal bir matris olduğundan

$$B(t)B^T(t)=I \tag{3.6}$$

denklemi yazılabilir.

W açısal hız matrisi için

$$W=\dot{B}(\mathrm{t})B^T(t)=\dot{B}(\mathrm{t})B^{-1}(t) \tag{3.7}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayı ve antisimetrik matrisler uzayı arasındaki izomorfizm sayesinde $\vec{\omega}$ ani açısal hız vektörü ile W birim matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$W=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \to \vec{\omega}=\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

üstelik

$$\vec{x}' = W\vec{x} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} \tag{3.8}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece 3-boyutlu Öklid uzayında bir cismin yer değiştirmesiyle ilgili üretilen denklemler aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\vec{x}' = B\vec{x} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2-\beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3+\beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2+\beta_0\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3+\beta_0\beta_1) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = W\vec{x} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$W = \dot{B}B^{-1} \qquad W \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{W} = B^{-1}\dot{B} \qquad \tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

Tablo 3.2. Vektör Kinematiği

3.2. Kuaterniyon Kinematiği

Şimdi kuaterniyonlara yeni bir yaklaşım vereceğiz. Bu yaklaşımı Euler teoreminin vektör formülasyonundan türeteceğiz. O halde (3.2) denklemini göz önüne alalım. (3.2) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{x}' = \beta_0 < \vec{\beta}, \vec{x} > - < \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} + (\vec{\beta} \wedge \vec{x}) > + \beta_0 \{\beta_0 \vec{x} + (\vec{\beta} \wedge \vec{x})\} + < \vec{\beta}, \vec{x} > \vec{\beta} \\ + \{\vec{\beta} \wedge (\beta_0 \vec{x} + (\vec{\beta} \wedge \vec{x}))\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

burada

$$s_1 = \beta_0, \quad \vec{v}_1 = \vec{\beta}; \quad s_2 =< \vec{\beta}, \vec{x} >, \quad \vec{v}_2 = \beta_0 \vec{x} + (\vec{\beta} \wedge \vec{x})$$

olarak alalım. O halde son denklem

$$\vec{x}' = s_1 s_2 - < \vec{v}_1, \vec{\mathrm{v}}_2 > + s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + v_1 \wedge v_2 \tag{3.10}$$

olarak yazılabilir.

Böylece (3.9) denklemi iki kuaterniyon çarpımına karşılık gelir. Yani

$$q_1 = s_1 + \vec{v}_1 = \beta_0 + \beta \quad ve \quad q_2 = s_2 + \vec{v}_2 =< \vec{\beta}, \vec{x} > + (\beta_0 \vec{x} + (\vec{\beta} \wedge \vec{x}))$$

olarak alındığında

$$\vec{x} = q_1 q_2 \tag{3.11}$$

olarak yazılabilir.

Hatta $q_2 = q_3 q_4 = (0 + \vec{x})(\beta_0 - \beta)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\vec{x}' = (\beta_0 + \vec{\beta})(0 + \vec{x})(\beta_0 - \vec{\beta}) \tag{3.12}$$

elde edilir.

Böylece vektör cebiri yardımıyla $\mathbb{R}^3$ ün dönmesine karşılık gelen $\vec{x}'$ kuaterniyonlar cinsinden yazarak kuaterniyon cebirinin bir otomorfizmine ulaştık.

O halde, $\vec{x}' = (\beta_0 + \vec{\beta})(0 + \vec{x})(\beta_0 - \vec{\beta})$, $q_1 = \beta_0 + \vec{\beta}$ ve $q_1^{-1} = \beta_0 - \vec{\beta}$ olarak alındığında $\vec{x}'$ ile $x' \to q_1 x q_1^{-1}$ şeklinde $\mathbb{R}^3 \to H$ izomorfizmi elde edilir. Yani $\vec{x}$ vektörünü $\vec{x} = (0 + \vec{x})$ vektörü şeklinde bir kuaterniyon olarak yazılır ve $x' \to q_1 x q_1^{-1}$ olarak H nin bir otomorfizmine ulaşırız. Burada $G = \{q \in H : N_q = 1\}$ olmak üzere $x, q_1 \in G$ dir. G bir Lie grubudur.

O halde aşağıdaki tanımlamaları yapabiliriz.
i) Dönmeyi karakterize eden

$$b = \beta_0 + \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$$

birim kuaterniyonlarına karşılık gelen sütun matrisi

$$b = col(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = col(\beta_0, \vec{\beta})$$

olarak yazılırsa q_1^{-1} olarak tanımlanan eşlenik kuaterniyon

$$b^{-1} = col(\beta_0, -\vec{\beta})$$

şeklinde sütun matris olarak yazılabilir.

ii) $\vec{x}$ yer vektörüne karşılık gelen " yer kuaterniyonu" $x = col(0,\vec{x})$ ve $\vec{\omega}$ açısal hız vektörüne karşılık gelen "açısal hız kuaterniyonu" $\omega = col(0,\vec{\omega})$ olarak tanımlanır.

iii) $\hat{b},\ \hat{x}$ ve $\hat{\omega}$ 4x4 kuaterniyon matris denkleminde verilen $h(b),\ h(x)$ ve $h(\omega)$ 'ye karşılık gelen $4x4$ tipinde kuaterniyon matrislerdir.

Böylece aktif dönmeyi sol gösterim yardımıyla $x' = \hat{b}\hat{x}b^{-1}$ şeklinde gösterebiliriz.

Tablo 3.3. kuaterniyon formunda dönme kinematiğinin ana formüllerini gösterir.

$$x' = \hat{b}\hat{x}b^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_3 & 0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ -\beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{b} = \frac{1}{2}\hat{\omega}b \qquad \begin{bmatrix} \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\omega = 2\hat{\dot{b}}b^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \dot{\beta}_0 & -\dot{\beta}_1 & -\dot{\beta}_2 & -\dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_0 & -\dot{\beta}_3 & \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_3 & \dot{\beta}_0 & -\dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_3 & -\dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ -\beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\omega} = 2\hat{b}^{-1}\dot{b} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -\beta_1 & \beta_0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & -\beta_3 & \beta_0 & \beta_1 \\ -\beta_3 & \beta_2 & -\beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}$$

Tablo 3.3. Kuaterniyon Kinematiği

3.3. Spinor Kinematiği

3-boyutlu Öklid uzayında spinor teorisine yaklaşım gerçekleştirmenin 4 bilinen yolu vardır: Cartan'ın izotropik vektörleri, Pauli matrisleri tarafından örneklenen Clifford cebiri, spinor halka cebiri son olarak da sterografik izdüşüm.

Bu bölümde Öklid uzayında beşinci olduğu düşünülen ve Euler teoreminden direkt olarak türevini aldığmız spinorlara farklı bir yaklaşım sunulmuştır.

Başlangıç noktamız, üç sütundan oluşan sütun matrisinin sıralı olarak $B(\vec{c},\vec{d},\vec{a})$ derlemesi göz önünde bulundurulmak suretiyle dik ortogonal B matrisidir. Bu vektörler aktif dönme altında $\vec{e}_h$ nin 3 baz vektörünün görüntüsüdür. Bu yüzden kısaca " B çatısı" olarak göstereceğiz.

$$B=\begin{pmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2-\beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3+\beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2+\beta_0\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3+\beta_0\beta_1) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 \end{pmatrix}$$

B çatısında $\vec{a}$ vektörünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\vec{a}=\vec{c}\wedge\vec{d}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(\beta_1\beta_3+\beta_0\beta_2) \\ a_2 &= 2(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1) \\ a_3 &= \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

dir.

Burada $\vec{a}$ birim vektördür. Dolayısıyla

$$\|\vec{a}\| = 1$$

dir.

a_2 nin içinde "$-\beta_0\beta_1$" terimi yerine

$$i^2\beta_0\beta_1 = i(\mathrm{i}\,\beta_0)\beta_1$$

terimi yazılabilir. Böylelikle $\vec{a}$ vektörünün bileşenlerini aynı iki kompleks sayı cinsinden yazılabilir. Şöyleki

$$\begin{aligned} a_1 &= (\beta_3 + i\beta_0)(\beta_1 - i\beta_2) + (\beta_1 + i\beta_2)(\beta_3 - i\beta_0) \\ a_2 &= i[(\beta_3 + i\beta_0)(\beta_1 - i\beta_2) - (\beta_1 + i\beta_2)(\beta_3 - i\beta_0)] \\ a_3 &= (\beta_3 + i\beta_0)(\beta_3 - i\beta_0) - (\beta_1 + i\beta_2)(\beta_1 - i\beta_2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

dir.

Burada özel olarak

$$\Upsilon_1 = \beta_3 + i\beta_0 \quad , \quad \Upsilon_2 = \beta_1 + i\beta_2$$

seçilirse a_h $(h = 1, 2, 3)$ elemanları

$$\begin{aligned} a_1 &= \Upsilon_1\overline{\Upsilon}_2 + \overline{\Upsilon}_1\Upsilon_2 \\ a_2 &= i(\Upsilon_1\overline{\Upsilon}_2 - \overline{\Upsilon}_1\Upsilon_2) \\ a_3 &= \Upsilon_1\overline{\Upsilon}_1 - \Upsilon_2\overline{\Upsilon}_2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

biçiminde elde ederiz.

Benzer şekilde B çatısındaki $\vec{c}$ ve $\vec{d}$ vektörlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2}(\Upsilon_2^2 + \bar{\Upsilon}_2^2 - \Upsilon_1^2 - \bar{\Upsilon}_1^2) \quad , \qquad & d_1 &= \frac{i}{2}(\Upsilon_1^2 - \bar{\Upsilon}_1^2 - \Upsilon_2^2 + \bar{\Upsilon}_2^2) \\
c_2 &= \frac{i}{2}(\bar{\Upsilon}_1^2 + \bar{\Upsilon}_2^2 - \Upsilon_1^2 - \Upsilon_2^2) \quad , \qquad & d_2 &= -\frac{1}{2}(\Upsilon_1^2 + \bar{\Upsilon}_1^2 + \Upsilon_2^2 + \bar{\Upsilon}_2^2) \\
c_3 &= \Upsilon_1\Upsilon_2 + \bar{\Upsilon}_1\bar{\Upsilon}_2 \quad , \qquad & d_3 &= i(\bar{\Upsilon}_1\bar{\Upsilon}_2 - \Upsilon_1\Upsilon_2)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

burada bulduğumuz Υ_1 ve Υ_2 sayı çifti B çatısıyla ilişkilidir ve

$$
\Upsilon = \Upsilon_A = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_3 + i\beta_0 \\ \beta_1 + i\beta_2 \end{pmatrix}
\tag{3.17}
$$

birim spinoruna karşılık gelir.

Eğer $\vec{a}$ vektörünün bileşenlerini bir matris çarpımı olarak ifade edersek, uygun bir seçimle quantum mekaniğinden tanıdık gelen Pauli matrisleri yardımıyla;

Pauli matrisleri $P_1, \quad P_{2,} \quad P_3$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_2 & \bar{\Upsilon}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_1 & \bar{\Upsilon}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \Upsilon^{\dagger} P_2 \Upsilon \\
a_2 &= i\begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_2 & -\bar{\Upsilon}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_1 & \bar{\Upsilon}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \Upsilon^{\dagger} P_1 \Upsilon \\
a_3 &= \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_1 & -\bar{\Upsilon}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_1 & \bar{\Upsilon}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \Upsilon^{\dagger} P_3 \Upsilon
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

olarak yazılabilir.

B çatısının bir dönmesi birim spinorun davranışını belirler. Gerçektende B çatısı vektörlerinin uç noktaları O merkezli $\mathbb{R}^3$ içerisindeki bir S^2 küresini $\left\{S^2 = \vec{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ karakterize eder. Özellikle üçüncü vektör olan $\vec{a}$ vektörünün (a_1, a_2, a_3) uç noktasının iki kompleks bileşenli spinorun $\zeta = \dfrac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$ oranı ile tanımlanan kompleks düzlemde birebir bir ilişki mevcuttur.

Bu ilişki, $x_3 = 0$ ekvator düzlemi üzerinde S^2 nin $(0,0,-1)$ güney kutbundan P noktasının steografik izdüşümü sayesinde kolayca görülebilir. Şöyleki

$$\zeta = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1} \quad , \quad \Upsilon_2 = -B_1 + jB_2 \quad \Upsilon_1 = B_0 + jB_3$$

olduğundan

$$\zeta = \frac{a_1 - ia_2}{1 + a_3} \quad , \quad \bar{\zeta} = \frac{a_1 + ia_2}{1 + a_3} \tag{3.19}$$

veya

$$a_3 + 1 = \frac{a_1 + ia_2}{\zeta} = \frac{a_1 - ia_2}{\bar{\zeta}} \tag{3.20}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ olduğundan

$(a_3 + 1)^2 = \dfrac{(1 + a_3)(1 - a_3)}{\zeta\bar{\zeta}}$ denkleminde $1 + a_3$ çarpanlarını sadeleştirirsek

$$a_3 = \frac{1 - \zeta\bar{\zeta}}{1 + \zeta\bar{\zeta}} \tag{3.21}$$

bulunur. O halde (3.20) den $a_1 + ia_2 = \zeta(1+a_3)$ ve $a_1 - ia_2 = \bar{\zeta}(1+a_3)$ ifadesini kullanırsak

$$a_1 = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})(1+a_3)\ ,\ a_2 = -\frac{i}{2}(\zeta - \bar{\zeta})(1+a_3) \tag{3.22}$$

elde ederiz.

$\zeta = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$ değerini (3.21) ve (3.22) denkleminde yerine koyulursa

$$\begin{aligned} a_1 &= \Upsilon_1 \bar{\Upsilon}_2 + \bar{\Upsilon}_1 \Upsilon_2 \\ a_2 &= i(\Upsilon_1 \bar{\Upsilon}_2 - \bar{\Upsilon}_1 \Upsilon_2) \\ a_3 &= \Upsilon_1 \bar{\Upsilon}_1 - \Upsilon_2 \bar{\Upsilon}_2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

eşitlikleri elde edilir.

B çatısı ya da S^2 nin bir dönmesi homografik dönüşüm altında $\zeta = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$ oranını oluşturur.

O halde spinorlar için

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{-\bar{b}\zeta + \bar{a}} = \frac{(\beta_0 + i\beta_3)\zeta + (\beta_2 - \mathrm{i}\,\beta_1)}{-(\beta_2 + \mathrm{i}\,\beta_1)\zeta + (\beta_0 - i\beta_3)} \tag{3.24}$$

yazılır.

Burada $a\bar{a}+b\bar{b}=1$ olmak üzere parantez içindeki kompleks sayılar Cayley Klein parametreleri olarak adlandırılır.

Eğer (3.24) denkleminde $\zeta=\dfrac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$ yerine yazılırsa (3.24) denklemi bir sonraki spinor şeklinde yazdığımız iki homojen yer değiştirmeler olarak ayrılır. Yani

$$\Upsilon'=\begin{pmatrix}\beta_0-i\beta_3 & -(\beta_2+\mathrm{i}\,\beta_1)\\ \beta_2-i\beta_1 & \beta_0+i\beta_3\end{pmatrix}\Upsilon \tag{3.25}$$

dir. Şimdi yukarıdaki açıklamalar ışığı altında kuaterniyonlar ile spinorlar arasındaki ilişkiyi verelim.

Bunun için q kuaterniyonu ile Q spinorunu

$$\begin{aligned} f: H &\to S\\ q &\to Q\end{aligned}$$

$$f(q_0+\vec{e}_1q_1+\vec{e}_2q_2+\vec{e}_3q_3)=\begin{pmatrix}q_3+iq_0\\ q_1+iq_2\end{pmatrix}\equiv Q \tag{3.26}$$

yardımıyla ilişkilendirebiliriz. Böylelikle kuaterniyon formülasyonu genişletilerek dönmelerin kinematiğinin spinor formülasyonunu elde ederiz.

Bu fonksiyon lineer ve birebirdir. Şöyle ki

$$f(q+p)=f(q)+f(p)$$
$$f(\lambda q)=\lambda f(q) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

S nin birim elemanı sıfır olduğundan ancak sıfır kuaterniyonu $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ spinoruna karşılık gelir. Dolayısıyla $\text{çek}\, f=\{0\}$ dır.

$\bar{q}q$ kuaterniyonunun normu $Q^{\dagger}Q = \bar{Q}_1 Q_1 + \bar{Q}_2 Q_2$ spinorunun normuna eşittir.

q birim kuaterniyonunun eşleniği için

$$f(q^{-1}) = f(q_0 - \vec{e}_1 q_1 - \vec{e}_2 q_2 - \vec{e}_3 q_3) = \begin{pmatrix} -q_3 + iq_0 \\ -q_1 - iq_2 \end{pmatrix} \equiv Q^{-1} \tag{3.27}$$

olur.

Şimdi qp şeklinde iki kuaterniyon çarpımını ya da $\hat{q}p$ kuaterniyon-matris çarpımını bir spinor matris çarpımı yardımıyla ile ilişkilendirelim. Yani

$$qp \to \hat{q}p \to -i\hat{Q}q \tag{3.28}$$

qp kuaterniyonuna karşılık gelen spinordur. Yani Q (3.26) üzerinden p kuaterniyonu ile ilişkili spinordur. Ayrıca, $\hat{Q}$ kompleks, birimsel, kare matristir ve

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} q_3 + iq_0 & q_1 - jq_2 \\ q_1 + iq_2 & -q_3 + iq_0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanır.

P_α lar $\hat{P}_\alpha$ Pauli matrislerinin ilk sütunu olsun. Bu durumda f sayesinde $1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri sırasıyla $i\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ karşılık gelir. Ayrıca bir kuaterniyona

$$f(q_0 + \vec{e}_1 q_1 + \vec{e}_2 q_2 + \vec{e}_3 q_3) = \begin{pmatrix} q_3 + iq_0 \\ q_1 + iq_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir spinor karşılık geldiğinden $h(q)p$ kuaterniyonuna f dönüşümü sayesinde, $h(q)p = \hat{Q}q$ dır. O halde $\hat{q}p \to \hat{Q}q$ ilişkilendirilebilir. Yani $\begin{pmatrix} \Upsilon & \hat{\Upsilon} \end{pmatrix}$ matris formunda

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_1 & -\bar{\Upsilon}_2 \\ \Upsilon_2 & \bar{\Upsilon}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 \\ -\beta_1 + j\beta_2 & \beta_0 - j\beta_3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matris $\hat{Q}$ matrisidir.

Daha genel olarak bir Q spinoru ile $\hat{Q}$ kare matrisi arasında

$$Q = \hat{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ilişkisi mevcuttur.

Gerçekten de,

$$\hat{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 + iq_0 & q_1 - jq_2 \\ q_1 + iq_2 & -q_3 + iq_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 + iq_0 \\ q_1 + iq_2 \end{pmatrix} = Q$$

dir.

Kuaterniyon ve spinorlar arasındaki f dönüşümü; kuaterniyon kinematiği bölümünde birim q_1 kuaterniyonu ile ilişkili spin uzayda katı bir cismin dönmesini simgelememize izin verir. ω açısal hız kuaterniyonu olmak üzere

$$q_1 \mapsto \Upsilon = \begin{pmatrix} \beta_3 + i\beta_0 \\ \beta_1 + i\beta_2 \end{pmatrix} \to \hat{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \beta_3 + i\beta_0 & \beta_1 - i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & -\beta_3 + i\beta_0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$\omega \mapsto \Omega = \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_1 + i\omega_2 \end{pmatrix} \to \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix}$$

o halde $\hat{q}p \to \hat{Q}p$ ve üsttekilerin bir sonucu olarak $x' = \hat{q}_1 \hat{x} q_1^{-1}$ ifadesi

$$x' = (-i)\Upsilon_1(\mathrm{i})\hat{x}\Upsilon_1^{-1} = -\hat{\Upsilon}\hat{x}\Upsilon^{-1} \tag{3.30}$$

biçiminde yazılır. Böylece 3-boyutlu Öklid uzayında bir cismin yer değiştirmesiyle ilgili spinor denklemleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$$x' = -\hat{\Upsilon}\hat{X}\Upsilon^{-1} \qquad \begin{pmatrix} x_3' \\ x_1' + ix_2' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \beta_3 + i\beta_0 & \beta_1 - i\beta_2 \\ \beta_1 + i\beta_2 & -\beta_3 + i\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_3 + i\beta_0 \\ -\beta_1 - i\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Upsilon} = -\frac{1}{2} i\hat{\Omega}\Upsilon \qquad \begin{pmatrix} \dot{\beta}_3 + i\dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 + i\dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} i \begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_3 + i\beta_0 \\ \beta_1 + i\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = -2i\dot{\hat{\Upsilon}}\Upsilon^{-1} \qquad \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_1 + i\omega_2 \end{pmatrix} = -2i \begin{pmatrix} \dot{\beta}_3 + i\dot{\beta}_0 & \dot{\beta}_1 - i\dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 + i\dot{\beta}_2 & -\dot{\beta}_3 + i\dot{\beta}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_3 + i\beta_0 \\ -\beta_1 - i\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Omega} = -2i\hat{\Upsilon}^{-1}\dot{\Upsilon} \qquad \begin{pmatrix} r \\ p + iq \end{pmatrix} = -2i \begin{pmatrix} -\beta_3 + i\beta_0 & -\beta_1 + i\beta_2 \\ -\beta_1 - i\beta_2 & \beta_3 + i\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_3 + i\dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 + i\dot{\beta}_2 \end{pmatrix}$$

Tablo 3.4. Spinor Kinematiği

BÖLÜM 4. SPLİT KUATERNİYONLAR

Bu bölümde, normu 1 olan bölünmüş kuaterniyonların Lie grubu ve onun Lie cebiri yardımıyla Minkowski 3-uzayında spacelike ve timelike eksenli dönme matrisleri elde edilmiştir.

$$H' = \{ q = a_0 1 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad : \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ birimlerinin çarpımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
1	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_1$	-1	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	1	$-\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_1$	1

Tablo 4.1. Split kuaterniyonların birimlerinin çarpımı

H' nün her bir elemanına bir split kuaterniyon adı verilir (Inoguchi 1908). Burada a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q split kuaterniyonunun bileşenleri denir. Bundan sonraki bölümlerde, bir split kuaterniyon için $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ gösterimi kullanılacaktır. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3-boyutlu minkowski uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Dolayısıyla bir $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ split kuaterniyonu S_q ile gösterilen skaler kısım ve $\vec{V}_q$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısıma ayrılır.

$$q = S_q + \vec{V}_q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_q = a_0, \quad \vec{V}_q = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

dır.

$q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \; p = b_0 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ split kuaterniyonların toplamı

$$\begin{aligned} q + p &= (S_q + S_p) + (\vec{V}_q + \vec{V}_p) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda q = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iki işlemle birlikte H' cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Ayrıca $q = a_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $p = b_0 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ split kuaterniyonlarının çarpımı:

$$\begin{aligned} \times : H' \times H' &\to H' \\ (q, p) &\to q \times p = qp \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup

$$qp = (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)\vec{e}_1$$
$$+ (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_0b_3 + a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2)\vec{e}_3$$

veya

$$qp = S_qS_p + \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle_L + S_q\vec{V}_p + S_p\vec{V}_q + \vec{V}_q \wedge_L \vec{V}_p$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\langle\, ,\rangle_L : \quad \operatorname{Im} H' \times \operatorname{Im} H' \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{V}_q, \vec{V}_p) \to \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle_L = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\wedge_L : \quad \operatorname{Im} H' \times \operatorname{Im} H' \to \operatorname{Im} H'$$
$$(\vec{V}_q, \vec{V}_p) \to \vec{V}_q \wedge_L \vec{V}_p = \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= (a_3b_2 - a_2b_3)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3$$

dır. Bu çarpma işlemiyle birlikte H' ye split kuaterniyon cebiri denir.

4.1. Vektör Kinematiği

Minkowski uzayında katı bir cismin yer değiştirmesi, vektör cebiri tarafından kolayca kurulabilir. Euler'in teoremine göre dönme, sabit bir nokta O, birim bir vektör $\vec{n}$ ve sağa doğru dönen bir açı ϕ ile karakterize edilir. O halde şimdi Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ uzayında katı bir cisim alalım. Bu katı cismin üzerinde alınan bir P noktasının yer vektörü $\vec{X} = \overrightarrow{OP}$ spacelike vektörü olsun. Hiperbolik dönme açısı φ olmak üzere $\vec{n}$ vektörü birim spacelike vektörü olsun. O halde aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

1) $\vec{n}$ spacelike vektörü ile $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n}$ vektörü paraleldir.

2) $\vec{n}$ spacelike vektör ile $\vec{x} - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n}$ timelike vektörleri,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{n}, \vec{x} - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n} \rangle_L &= \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L - \langle \vec{n}, \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n} \rangle_L \\
&= \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_L \\
&= \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan ortogonaldir.

Diğer taraftan

$$\langle \vec{x} - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n}, \vec{x} - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n} \rangle_L = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L - \langle \vec{x}, \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n} \rangle_L - \langle \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n}, \vec{x} \rangle_L + \langle \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n}, \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n} \rangle_L$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle_L - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L + \left[\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \right]^2 \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_L \\
&= 1 - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle_L - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L + \left[\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \right]^2 .1 \\
&= 1 - \left[\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \right]^2 - \left[\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \right]^2 + \left[\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \right]^2 \\
&= 1 - \left[\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \right]^2 \quad (\vec{n} \text{ ile } \vec{x} \text{ arasındaki açı } \theta \text{ olsun}) \\
&= 1 - \cosh^2 \theta
\end{aligned}$$

cosh fonksiyonu $\left[1, +\infty\right)$ olduğundan $\cosh^2 \theta > 1$ dir. Dolayısıyla yukarıdaki ifade yani $\langle \vec{x} - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n}, \vec{x} - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n} \rangle_L < 0$ dır.

O halde $\vec{x} - \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle_L \vec{n}$ vektörü timeliketır.

Şimdi katı cismin P noktasının $\vec{x}$ spacelike yer vektörüne bir dönme uygulayalım.

Böylece Adq dönüşümü sayesinde $\vec{x}'$ vektörü

$$\vec{x}' = \cosh\varphi.\vec{x} + (1-\cosh\varphi)\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L \vec{n} + \sinh\varphi(\vec{n}\wedge_L \vec{x}) \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir. φ dönme açısıyla birlikte bu dönme $\vec{x}$ spacelike vektörünü $\vec{x}'$ spacelike vektörüne dönüştürür.

$$\vec{x}' = \cosh\varphi.\vec{x} + (1-\cosh\varphi)\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L \vec{n} + \sinh\varphi(\vec{n}\wedge_L \vec{x})$$

denkleminde $1-\cosh\varphi = -2\sinh^2\dfrac{\varphi}{2}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\vec{x}' = \cosh\varphi.\vec{x} - 2\sinh^2\frac{\varphi}{2}\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L \vec{n} + \sinh\varphi(\vec{n}\wedge_L \vec{x})$$

olarak yazılır. O halde

$$\beta_0 = \cosh\frac{\varphi}{2} \quad \text{ve} \quad \vec{\beta} = \sinh\frac{\varphi}{2}\vec{n}$$

olarak seçilirse $\cosh\varphi = 2\cosh^2\dfrac{\varphi}{2} - 1 = 2\beta_0{}^2 - 1$ dir. Ayrıca

$$\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L = \langle\sinh\frac{\varphi}{2}\vec{n},\vec{x}\rangle_L = \sinh\frac{\varphi}{2}\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L$$

olduğundan

$$\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L \vec{\beta} = \sinh\frac{\varphi}{2}\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L \vec{\beta} = \sinh\frac{\varphi}{2}\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L \sinh\frac{\varphi}{2}\vec{n} = \sinh^2\frac{\varphi}{2}\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L \vec{n}$$

olur. Buna ek olarak $\sinh\varphi = 2\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}$ olduğundan

$$\vec{x}' = \cosh\varphi.\vec{x} - 2\sinh^2\frac{\varphi}{2}\langle\vec{n},\vec{x}\rangle_L\vec{n} + \sinh\varphi(\vec{n}\wedge_L\vec{x})$$

$$\vec{x}' = (2\beta_0{}^2 - 1)\vec{x} - 2\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta} + 2\sinh\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{\varphi}{2}\varphi(\vec{n}\wedge_L\vec{x})$$

$$\vec{x}' = (2\beta_0{}^2 - 1)\vec{x} - 2\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta} + 2\cosh\frac{\varphi}{2}\varphi(\sinh\frac{\varphi}{2}\vec{n}\wedge_L\vec{x})$$

$$\vec{x}' = (2\beta_0{}^2 - 1)\vec{x} - 2\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta} + 2\beta_0(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x}) \tag{4.2}$$

bulunur. (4.2) denkleminde β spacelike vektörünü $(0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ sabit bir çatı referansa göre $\vec{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$ veya $\vec{\beta} = col(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ sütün matrisi ile ifade edelim.

O halde (4.2) denklemi

$$\vec{x}' = B\vec{x} \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada B dönüşüm matrisi $B = B(\beta_0,\vec{\beta})$ ile gösterilir. Ayrıca 3x3 tipinde reel, semi- ortogonal bir matristir. B matrisi Tanım 2.1.6 denkleminde verilen Ad_β dönüşümüne karşılık gelen semi- ortogonal matristir. Ayrıca buradaki β parametreleri

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 = 1 \tag{4.4}$$

şartını sağlar. Böylece B matrisi

$$B=\begin{bmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 & 2(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2) & -2(\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_3+\beta_1\beta_2) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 & -2(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3) \\ 2(-\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3) & 2(\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

şeklindedir. Burada B matrisi cismin pozisyonunu verir ve $G=SO(1,3)$ lie grubunun bir elemanıdır. Ayrıca $\varphi=0$, $\beta_0=1$ ve $\beta_h=0$, $(h=1,2,3)$ olduğunda birim matrisi veren B matrisi, bu durumda $(0;e_h)$ ortonormal çatısını oluşturur.

Şimdi spacelike bir eğriye $SO(1,3)$ üretici uzayında katı cismin hareketi $t\rightarrow B(t)$ karşılık gelsin. O halde eğrinin tanjantı olan $\dot{B}=\dfrac{dB}{dt}$ spacelike olduğundan eğri spaceliketır. Çünkü, B matrisinin birinci sütunu T teğet vektörünü verirse dönme hız vektörü B noktasında $TSO(1,3)_B$ tanjant uzayının bir elemanıdır. B semi-ortogonal bir matris olduğundan

$$B(t)\varepsilon B^T(t)\varepsilon=I \quad , \quad \varepsilon=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

denklemi yazılabilir. Bu denklemin zamana bağlı diferensiyeli alınırsa

$$(B(t)\varepsilon)'(B^T(t)\varepsilon)+(B(t)\varepsilon)(B^T(t)\varepsilon)'=0$$

bulunur. Bu ifade

$$\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon+\varepsilon(\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon)^T\varepsilon=0$$

şeklinde yazılabilir. Gerçekten de

$$\varepsilon(\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon)^T\varepsilon=\varepsilon(\varepsilon^T(B^T)^T\varepsilon^T\dot{B}^T)\varepsilon=\varepsilon(\varepsilon B\varepsilon\dot{B}^T)\varepsilon=B\varepsilon\dot{B}^T\varepsilon$$

olur. O halde

$$\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon = -\varepsilon(\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon)^T\varepsilon \tag{4.7}$$

yazılabilir. Burada parantez içindeki ifade antisimetriktir ve açısal hız matrisi olarak adlandırılır.

O halde gerçektende

$$\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon = -\varepsilon(\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon)^T\varepsilon$$

bulduğumuzdan

$$A = \dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon$$

olmak üzere

$$A = -\varepsilon A^T\varepsilon$$

veya

$$-\varepsilon A = A^T\varepsilon$$
$$A^T = -\varepsilon A\varepsilon$$

dir. Dolayısıyla $\dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon$ Lorentz anlamda antisimetrik matristir.

W açısal hız matrisi için

$$W = \dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon$$

olarak tanımlayabiliriz.

Lorentz anlamda yarı ortogonallikten

$$A^T = \varepsilon A^{-1}\varepsilon$$

olduğu biliniyor. O halde

$$W = \dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon = \dot{B}\varepsilon(\varepsilon B^{-1}\varepsilon)\varepsilon = \dot{B}\varepsilon\varepsilon B^{-1}\varepsilon\varepsilon$$

$$\varepsilon.\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$W = \dot{B}\varepsilon B^T\varepsilon = \dot{B}B^{-1} \tag{4.8}$$

yazılabilir.

$\mathbb{R}^3_1$ vektör uzayı ve antisimetrik matrisler uzayı arasındaki izomorfizm sayesinde $\vec{\omega}$ ani açısal hız vektörü ile W birim matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

o halde

$$\dot{\vec{x}} = W\vec{x} = \vec{\omega} \wedge_L \vec{x}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_3 x_2 - \omega_2 x_3 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ -\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 \end{bmatrix}$$

ve diğer taraftan

$$\vec{\omega} \wedge_L \vec{x} = \begin{bmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_3 x_2 - \omega_2 x_3 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ -\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece split kuaterniyonlar üzerinde bir cismin hareketiyle ilgili denklemler aşağıdaki tablodaki gibi verilebilir.

$\vec{x}' = B\vec{x}$	$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 & 2(\beta_0\beta_3 - \beta_1\beta_2) & -2(\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_3 + \beta_1\beta_2) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 & -2(\beta_0\beta_1 + \beta_2\beta_3) \\ 2(-\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_2) & 2(\beta_0\beta_1 - \beta_2\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
$\dot{\vec{x}} = W\vec{x}$	$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
$W = \dot{B}B^{-1}$	$W \equiv \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$
$\tilde{W} = B^{-1}\dot{B}$	$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$

Tablo 4.2. Vektör Kinematiği

4.2. Split Kuaterniyon Kinematiği

Şimdi split kuaterniyonlara yeni bir yaklaşım vereceğiz. Bu yaklaşımı Euler teoreminin vektör formülasyonundan türeteceğiz. O halde (4.2) denklemini göz önüne alalım. (4.2) denkleminde

$2\beta_0^2 - 1 = \beta_0^2 + \beta_0^2 - 1$ ve $\beta_0 = \cosh\dfrac{\varphi}{2}$ olduğundan $\beta_0^2 = \cosh^2\dfrac{\varphi}{2}$ dir. O halde

$2\beta_0^2 - 1 = \beta_0^2 + \cosh^2\dfrac{\varphi}{2} - 1 = \beta_0^2 + \sinh^2\dfrac{\varphi}{2}$ dir. Diğer taraftan

$$\langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle_L = \langle \sinh^2\frac{\varphi}{2}\vec{n}, \sinh^2\frac{\varphi}{2}\vec{n} \rangle_L = \sinh^2\frac{\varphi}{2}\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_L = \sinh^2\frac{\varphi}{2}.1 = \sinh^2\frac{\varphi}{2}$$

eşitlikleri vardır.

O halde

$$2\beta_0^2 - 1 = \beta_0^2 + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle_L$$

yazılabilir.

O halde (4.2) denklemi

$$\vec{x} = \beta_0^2\vec{x} + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle_L \vec{x} - 2\langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L \vec{\beta} + 2\beta_0(\vec{\beta} \wedge_L \vec{x})$$

şeklinde yazılabilir.

Lorentz anlamda vektörel çarpım için

$$\vec{a}\wedge_L(\vec{b}\wedge_L\vec{c})=-\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L\vec{b}+\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L\vec{c}$$

olduğu biliniyor. O halde

$$\vec{x}=\beta_0^2\vec{x}+\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle_L\vec{x}-\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta}-\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta}+2\beta_0(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})$$

eşitliğinde

$$\vec{\beta}\wedge_L(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})=-\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta}+\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle_L\vec{x}$$

dir. Yani

$$\vec{x}=\beta_0(\beta_0\vec{x}+\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})+\vec{\beta}\wedge_L(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})-\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta}+\beta_0(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x}) \tag{4.9}$$

(4.2) ile (4.9) arasındaki temel fark (4.9) denkleminin $\vec{\beta}\wedge_L(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})$ çarpımı içermesidir. Onun dışındaki bütün terimler aynıdır.

Ayrıca $\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\wedge_L\vec{x}\rangle_L$ çarpımı sıfır olduğundan (4.9) denklemine ekleyebiliriz.

$$\vec{x}=\beta_0(\beta_0\vec{x}+\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})+\vec{\beta}\wedge_L(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})-\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta}+\beta_0(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})+\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\wedge_L\vec{x}\rangle_L$$

ayrıca

$$\beta_0(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})=\vec{\beta}\wedge_L\beta_0\vec{x}$$

olduğundan

$$\vec{x}=\beta_0(\beta_0\vec{x}+\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})+\vec{\beta}\wedge_L(\vec{\beta}\wedge_L\vec{x})-\langle\vec{\beta},\vec{x}\rangle_L\vec{\beta}+(\vec{\beta}\wedge_L\beta_0\vec{x})+\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\wedge_L\vec{x}\rangle_L$$

yazılabilir. $\vec{\beta} \wedge_L (\vec{\beta} \wedge_L \vec{x})$ ve $\vec{\beta} \wedge_L \beta_0 \vec{x}$ ifadeleri birleştirilirse

$$\vec{x} = \beta_0 (\beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) + \vec{\beta} \wedge_L [(\vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) + \beta_0 \vec{x}] - \langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L \vec{\beta} + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \wedge_L \vec{x} \rangle_L$$

olur. Son olarak $\pm \langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} \rangle_L$ ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned}\vec{x} = \beta_0 (\beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) + \vec{\beta} \wedge_L [(\vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) + \beta_0 \vec{x}] - \langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L \vec{\beta} + \langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} \rangle_L - \langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} \rangle_L \\ + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \wedge_L \vec{x} \rangle_L\end{aligned}$$

ve

$$\langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} \rangle_L = \beta_0 \langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L$$

olduğundan

$$\vec{x} = \beta_0 (\beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) + \vec{\beta} \wedge_L [(\vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) + \beta_0 \vec{x}] - \langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L \vec{\beta} + \langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} \rangle - \beta_0 \langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \wedge_L \vec{x} \rangle_L$$

ve

$$\langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \wedge_L \vec{x} \rangle_L = \langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x} \rangle_L$$

eşitliğinden

$$\vec{x} = -\beta_0 \langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L + \langle \vec{\beta}, \beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x} \rangle_L + \beta_0 (\beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) - \langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L \vec{\beta} + \vec{\beta} \wedge_L [(\vec{\beta} \wedge_L \vec{x}) + \beta_0 \vec{x}] \quad (4.10)$$

elde edilir.

Şimdi burada

$$s_1 = \beta_0 \quad , \quad \vec{v}_1 = \vec{\beta} \quad ; \quad s_2 = -\langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L \quad , \quad \vec{v}_2 = \beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}$$

olarak alalım. O halde son denklem

$$\vec{x} = s_1 s_2 + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_L + s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \wedge_L \vec{v}_2 \tag{4.11}$$

olarak yazılabilir.

Bilindiği üzere (4.5) denklemi (4.11) denkleminde verilen iki split kuaterniyon çarpımına karşılık gelir. Yani

$$q_1 = s_1 + \vec{v}_1 = \beta_0 + \vec{\beta} \quad \text{ve} \quad q_2 = s_2 + \vec{v}_2 = -\langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L + \beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}$$

olarak alındığında

$$\vec{x}' = q_1 \times q_2 \tag{4.12}$$

olarak yazılabilir.

Hatta $q_2 = -\langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L + \beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}$ split kuaterniyonu

$$q_3 = 0 + \vec{x} = s_3 + \vec{v}_3 \; , q_4 = \beta_0 - \vec{\beta} = s_4 + \vec{v}_4$$

olarak seçersek

$$q_2 = 0.\beta_0 - \langle \vec{x}, \vec{\beta} \rangle_L - 0.\vec{\beta} + \beta_0 \vec{x} - \vec{x} \wedge_L \vec{\beta} = q_3 \times q_4$$
$$q_2 = -\langle \vec{\beta}, \vec{x} \rangle_L + \beta_0 \vec{x} + \vec{\beta} \wedge_L \vec{x}$$

olduğundan

$$q_2 = q_3 \times q_4$$

olarak yazılabilir.

Dolayısıyla

$$\vec{x}' = q_1 \times q_3 \times q_4 = (\beta_0 + \vec{\beta}) \times (0 + \vec{x}) \times (\beta_0 - \vec{\beta}) \tag{4.13}$$

olarak yazılabilir.

Böylece vektör cebiri yardımıyla $\mathbb{R}_1^3$ ün dönmesine karşılık gelen $\vec{x}'$ vektörünü split kuaterniyonlar cinsinden yazarak split kuaterniyon cebirinin bir otomorfizmine ulaştık.

O halde

$$\vec{x}' = (\beta_0 + \vec{\beta}) \times (0 + \vec{x}) \times (\beta_0 - \vec{\beta})$$
$$q_1 = \beta_0 + \vec{\beta}$$
$$q_1^{-1} = \beta_0 - \vec{\beta}$$

olarak alındığında

$\vec{x}'$ ile $x \to q_1 \times q_1^{-1}$ şeklinde $\mathbb{R}_1^3 \to H'$ izomorfizmini kullanarak $\vec{x}$ vektörünü $\vec{x} = (0 + \vec{x})$ vektörü şeklinde bir split kuaterniyon olarak yazarak $x \to q_1 \times q_1^{-1}$ olarak H' nün bir otomorfizmine ulaşırız. Burada $G = \{q \in H' : N_q = 1\}$ olmak üzere x, $q_1 \in G$ dir. G bir Lie grubudur.

O halde aşağıdaki tanımlamaları yapabiliriz.

i) Dönmeyi karakterize eden

$$b = \beta_0 + \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$$

birim kuaterniyonlarına karşılık gelen sütun matrisi

$$b = col(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = col(\beta_0 + \vec{\beta})$$

olarak yazılırsa q_1^{-1} olarak tanımlanan eşlenik split kuaterniyon

$$b^{-1} = col(\beta_0, -\vec{\beta})$$

şeklinde sütun matris olarak yazılabilir.

ii) $\vec{x}$ yer vektörüne karşılık gelen "yer kuaterniyonu" $x = col(0, \vec{x})$ ve $\vec{\omega}$ açısal hız vektörüne karşılık gelen "açısal hız kuaterniyonu" $\omega = \mathrm{col}(0, \vec{\omega})$ olarak tanımlanır.

iii) $\hat{b}$, $\hat{x}$ ve $\hat{\omega}$ denkleminde verilen $h(b)$, $h(x)$ ve $h(\omega)$ ye karşılık gelen 4x4 tipinde split kuaterniyon matrislerdir.

Böylece aktif dönmeyi sol gösterim yardımıyla $x' = \hat{b}\hat{x}b^{-1}$ şeklinde gösterebiliriz.

Tablo 4.3. split kuaterniyon formunda dönmenin kinematiğinin ana formülünü gösterir.

$$x' = \hat{b}\hat{x}b^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & -\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_3 & 0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{b} = \frac{1}{2}\hat{\omega}b \qquad \begin{bmatrix} \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\omega = 2\hat{\dot{b}}b^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \dot{\beta}_0 & -\dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_0 & \dot{\beta}_3 & -\dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_3 & \dot{\beta}_0 & -\dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_3 & -\dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ -\beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\omega} = 2\hat{b}^{-1}\dot{b} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ -\beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ -\beta_2 & -\beta_3 & \beta_0 & \beta_1 \\ -\beta_3 & \beta_2 & -\beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}$$

Tablo 4.3. Split Kuaterniyon Kinematiği

BÖLÜM 5. HİPERBOLİK SPİNOR KİNEMATİĞİ

5.1. Hiperbolik Spinor

Bu bölümde ortonormal taban yardımıyla hiperbolik spinorlar tanıtılmıştır.

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında orijin etrafındaki dönmelerin grubu olan $SO(1,3)$, 2×2 tipinde üniter matrisler grubu olan $SU(2,H)$ ye homomorfiktir. $SO(1,3)$ ün elemanları 3 reel bileşenli vektörleri harekete geçirirken, $SU(2,H)$ nin elemanları hiperbolik spinorları harekete geçirirler.

Bu homomorfizm spinorlar aracılığıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilir. Her

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

spinoru

$$\vec{a} + j\vec{b} = \psi^t \sigma \psi \qquad \vec{c} = -\hat{\psi}^t \sigma \psi \tag{5.2}$$

eşitlikleri yardımıyla $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerini tanımlar. Burada $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, bileşenleri, hiperbolik, simetrik, 2×2 tipinde matrisler olan bir vektördür. Öyle ki,

$$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli matrisleri $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisiyle, sırasıyla, soldan çarpılırsa $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ vektörünün $\sigma_i, 1\le i\le 3$ bileşenleri

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2=\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \qquad \sigma_3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$\hat{\psi}=-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\overline{\psi}=-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\psi_1} \\ \overline{\psi_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\overline{\psi_2} \\ \overline{\psi_1} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

elde edilir. Burada $\hat{\psi}$, ψ nin eşini $\overline{\psi}$, ψ nin hiperbolik eşleniğini göstermektedir. Şimdi (5.2) denklemini göz önüne alalım. $\vec{a}+j\vec{b}=(x_1,x_2,x_3)$ olmak üzere $x_i, 1\le i\le 3$ bileşenlerini araştıralım. (5.1), (5.2), (5.3) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
x_1&=\psi^t\sigma_1\psi=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}=\psi_1^2-\psi_2^2\\
x_2&=\psi^t\sigma_2\psi=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j\psi_1 \\ j\psi_2 \end{pmatrix}=j(\psi_1^2+\psi_2^2)\\
x_3&=\psi^t\sigma_3\psi=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix}=-2\psi_1\psi_2
\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. Burada t de transpozu göstermektedir. Benzer şekilde $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ olmak üzere $c_i, 1\le i\le 3$ bileşenleri

$$c_1=-\hat{\psi}^t\sigma_1\psi=-\begin{pmatrix}-\overline{\psi}_2 & \overline{\psi}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}=\psi_1\overline{\psi}_2+\overline{\psi}_1\psi_2$$

$$c_2 = -\hat{\psi}^t \sigma_2 \psi = -\begin{pmatrix} -\overline{\psi}_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = j(\psi_1 \overline{\psi}_2 - \overline{\psi}_1 \psi_2) \tag{5.6}$$

$$c_3 = -\hat{\psi}^t \sigma_3 \psi = -\begin{pmatrix} -\overline{\psi}_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \vec{a} + \mathrm{j}\vec{b} &= (\psi_1^2 - \psi_2^2, j(\psi_1^2 + \psi_2^2), -2\psi_1\psi_2) \\ \vec{c} &= (\psi_1\overline{\psi}_2 + \overline{\psi}_1\psi_2, j(\psi_1\overline{\psi}_2 - \overline{\psi}_1\psi_2), |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \end{aligned} \tag{5.7}$$

olur. Şimdi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin boylarını hesaplayalım.

$$\overline{\vec{c}} = (\overline{\psi}_1\psi_2 + \overline{\psi}_2\psi_1, j(\psi_1\overline{\psi}_2 - \overline{\psi}_1\psi_2), |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = \vec{c}$$

olduğundan $\vec{c} \in \mathbb{R}_1^3$ dür. O halde

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|_L &= \sqrt{\left((\psi_1\overline{\psi_2} + \overline{\psi_1}\psi_2)^2 - j^2(\psi_1\overline{\psi_2} - \overline{\psi_1}\psi_2)^2 + (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2\right)} \\ &= \overline{\psi}^t\psi \end{aligned} \tag{5.8}$$

dir. $\vec{a} + j\vec{b}$ vektörü izotropik vektörü olduğundan $\vec{a}, \vec{b}$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} + j\vec{b}, \vec{a} + j\vec{b} \rangle_L &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \langle \vec{a}, j\vec{b} \rangle_L + \langle j\vec{b}, \vec{a} \rangle_L + \langle j\vec{b}, j\vec{b} \rangle_L \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + j\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + j\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle_L + jj\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_L \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2j\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_L \\ &= \vec{0} + j\vec{0} \end{aligned}$$

dir. Buradan görüleceği üzere

$$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle_L + \langle \vec{b},\vec{b}\rangle_L = \vec{0}$$

yani

$$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle_L = -\langle \vec{b},\vec{b}\rangle_L$$

dir. Ayrıca,

$$\|\vec{a}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{a},\vec{a}\rangle_L|} \qquad \|\vec{a}\|_L^{\,2} = |\langle \vec{a},\vec{a}\rangle_L|$$

$$\|\vec{b}\|_L^{\,2} = |\langle \vec{b},\vec{b}\rangle_L| = \pm\langle \vec{b},\vec{b}\rangle_L$$

olmak üzere,

$$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle_L = -\langle \vec{b},\vec{b}\rangle_L$$

$$|\langle \vec{a},\vec{a}\rangle_L| = |\langle \vec{b},\vec{b}\rangle_L|$$

$$\|\vec{a}\|_L^{\,2} = \|\vec{b}\|_L^{\,2} \tag{5.9}$$

dir. Aynı zamanda

$$2j\langle \vec{a},\vec{b}\rangle_L = \vec{0}\,j$$

yani

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle_L = \vec{0} \tag{5.10}$$

dir. Şimdi $\vec{a} + j\vec{b}$ vektörünün boyunu hesaplayalım.

$$\|\vec{a} + j\vec{b}\|_L^{\,2} = \langle (\vec{a} + j\vec{b}), \overline{(\vec{a} + j\vec{b})}\rangle_L$$

$$= \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$$

dir. Son denklem ve (5.7) denklemi göz önüne alınırsa

$$\left\|\vec{a}+j\vec{b}\right\|_L^2 = \langle(\vec{a}+j\vec{b}),\overline{(\vec{a}+j\vec{b})}\rangle_L$$
$$= 2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2 \tag{5.11}$$

bulunur. O halde (5.9) denklemi ve (5.8) denklemlerinden

$$\|\vec{a}\|_L = \|\vec{b}\|_L = \|\vec{c}\|_L = \bar{\psi}^t\psi$$

dir. Yani $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin boyları eşittir. (5.7) denklemini göz önünde bulundurarak $\langle(\vec{a}+j\vec{b}),\vec{c}\rangle_L$ iç çarpımını hesaplayalım.

$$\langle(\vec{a}+j\vec{b}),\vec{c}\rangle_L = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L + j\langle\vec{b},\vec{c}\rangle_L$$
$$= 0$$

dır. Bu son denklem ve (5.10) denkleminden

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L = \langle\vec{b},\vec{c}\rangle_L = 0$$

dır. O halde $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}_1^3$ vektörleri Lorentz anlamda ikişer ikişer ortogonaldir. Ek olarak $\langle\vec{a}\wedge_L\vec{b},\vec{c}\rangle_L = det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$ dır. O halde $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ sıralı üçlüsü bir sağ sistemdir.

Tersine; aynı büyüklükte verilen ikişer ikişer ortogonal ve $\langle\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{c}\rangle>0$ olan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}_1^3$ vektörlerine $\vec{a}+j\vec{b}=\psi^t\sigma\psi,\quad \vec{c}=-\bar{\psi}^t\sigma\psi$ denklemleriyle verilen bir ψ hiperbolik spinoru karşılık gelir.

Ayrıca $\hat{\psi}$ hiperbolik spinoru da aynı ψ hiperbolik spinornda olduğu gibi $SU(2,H)$ dönüşümü altında yeni bir hiperbolik spinora dönüşür. Yani herhangi bir $U \in SU(2,H)$ için $U\psi = U\hat{\psi}$ dir.

Diğer taraftan $U \in SU(2,H)$ matrisi için $\psi' = U\psi$ hiperbolik spinoru

$$\overline{\psi'}^t \psi' = \overline{(U\psi)}^t U\psi = \overline{\psi}^t \overline{U}^t U\psi = \overline{\psi}^t \psi$$

dir. Böylece, ψ' hiperbolik spinorunun tanımında kullanılan $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ vektörlerinin büyüklüğü ψ hiperbolik spinorunun tanımında kullanılan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin büyüklüğüne eşittir. Bu yüzden $SU(2,H)$ nın her bir elemanı $\mathbb{R}_1^3$ ün $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ortogonal tabanını $\{\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$ ortogonal tabanına dönüştüren bir dönüşüm oluşturur. Bu dönüşüm ikiye-birdir. Yani $SU(2,H)$ nın U ve $-U$ şeklinde iki elemanı $\mathbb{R}_1^3$ ün aynı sıralı üçlüsünü oluşturur. $SU(2,H)$ den aldığımız U elemanı ψ' hiperbolik spinorunu oluştururken $-U$ elemanı $-\psi'$ hiperbolik spinorunu oluşturur. (5.7) denkleminde ψ hiperbolik spinoru yerine $-\psi$ hiperbolik spinorunu aldığımız takdirde sonuç değişmemektedir. Gerçekten de,

$$\vec{a} + j\vec{b} = \left((-\psi_1)^2 - (-\psi_2)^2, \, j((-\psi_1)^2 + (-\psi_2)^2), -2(-\psi_1)(-\psi_2) \right)$$

$$\vec{c} = \left((-\psi_1)(-\overline{\psi}_2) + (-\overline{\psi}_1)(-\psi_2), \, j\left[(-\psi_1)(-\overline{\psi}_2) - (-\overline{\psi}_1)(-\psi_2) \right], \left|-\psi_1\right|^2 - \left|-\psi_2\right|^2 \right)$$

şeklinde olup (5.7) denklemiyle aynı sonucu vermektedir. O halde homomorfizm ikiye-bir tipindedir.

Önerme 5.1.1. φ ve ψ keyfi iki hiperbolik spinor ve λ, μ herhangi iki hiperbolik sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$i)\ \overline{\varphi^t \sigma \psi} = -\hat{\varphi}^t \sigma \hat{\psi}$

$ii)\ \widehat{\left(\lambda\varphi + \mu\psi\right)} = \bar{\lambda}\hat{\varphi} + \bar{\mu}\hat{\psi}$

$iii)\ \hat{\hat{\psi}} = -\psi$

Önerme 5.1.2. Herhangi φ ve ψ hiperbolik spinor çiftleri için $\varphi^t \sigma \psi = \psi^t \sigma \varphi$ dir.

Örnek 5.1.3. Özel olarak $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ seçilirse $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olur. Bu seçim (5.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{a} + j\vec{b} &= (\psi_1^2 - \psi_2^2,\ j(\psi_1^2 + \psi_2^2), -2\psi_1\psi_2) \\ &= (1^2 - 0^2,\ j(1^2 + 0^2), -2.1.0) = (1, j, 0) = (1,0,0) + j(0,1,0) \end{aligned}$$

$$\vec{c} = (\bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{\psi}_2\psi_1,\ j(\psi_1\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1\psi_2), \left|\psi_1\right|^2 - \left|\psi_2\right|^2) = (1.0 + 0.1,\ \mathrm{j}(1.0 - 1.0), 1 - 0) = (0,0,1)$$

$\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ üçlüsü $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayının kanonik bazını oluşturur.

Önerme 5.1.4. Eğer ψ sıfırdan farklı bir hiperbolik spinorsa $\left\{\psi, \psi\right\}$ lineer bağımsızdır .

5.2. Hiperbolik Spinor Kinematiği

B yarı ortogonal matris olmak üzere

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 & 2(\beta_0\beta_3 - \beta_1\beta_2) & -2(\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_3 + \beta_1\beta_2) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 & -2(\beta_0\beta_1 + \beta_2\beta_3) \\ 2(-\beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_2) & 2(\beta_0\beta_1 - \beta_2\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$B\varepsilon B^T \varepsilon = I$ bağıntısı geçerlidir.

B yarı ortogonal matrisinin üç sütun vektörü, sırasıyla $B(\vec{c},\vec{d},\vec{a})$ olsun. Bu vektörler aktif dönme altında $\vec{e}_H(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ baz vektörlerinin görüntüleridir. Yani

$$\vec{c} = B\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 & 2(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2) & -2(\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_3+\beta_1\beta_2) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 & -2(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3) \\ 2(-\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_2) & 2(\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 \\ 2(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2) \\ -2(\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3) \end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca

$$\vec{d} = B\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 & 2(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2) & -2(\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_3+\beta_1\beta_2) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 & -2(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3) \\ 2(-\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_2) & 2(\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\beta_0\beta_3+\beta_1\beta_2) \\ \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 \\ -2(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3) \end{bmatrix}$$

olur. Diğer taraftan

$$\vec{a} = B\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} \beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 & 2(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2) & -2(\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3) \\ 2(\beta_0\beta_3+\beta_1\beta_2) & \beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_3^2 & -2(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3) \\ 2(-\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_2) & 2(\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3) & \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_2) \\ 2(\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3) \\ \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 \end{bmatrix}$$

olur. Kısaca burada B çatısı birim, yarı ortogonal sağ el üçlüsüdür.

Şimdi B çatısında $\vec{a}$ vektörünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\vec{a} = \vec{c} \wedge_L \vec{d}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} a_1 &= -2(\beta_0\beta_2+\beta_1\beta_3) \\ a_2 &= -2(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3) \\ a_3 &= \beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

dir.

Aynı zamanda $\vec{a}$ birim vektördür. Dolayısıyla

$$\|\vec{a}\|_L = 1$$

dir.

a_2 nin içinde "$\beta_0\beta_1$" terimi yerine

$$j^2\beta_0\beta_1 = j(j\beta_0)\beta_1$$

terimi yazılabilir ki, böylelikle $\vec{a}$ vektörünün bileşenlerini aynı iki hiperbolik sayı cinsinden yazılabilir. Şöyleki

$$\begin{aligned} a_1 &= j[(\beta_0 + j\beta_3)(-\beta_1 - j\beta_2) - (\beta_0 - j\beta_3)(-\beta_1 + j\beta_2)] \\ a_2 &= (\beta_0 + j\beta_3)(-\beta_1 - j\beta_2) + (\beta_0 - j\beta_3)(-\beta_1 + j\beta_2) \\ a_3 &= (\beta_0 + j\beta_3)(\beta_0 - j\beta_3) - (-\beta_1 + j\beta_2)(-\beta_1 - j\beta_2) \end{aligned} \tag{5.13}$$

dir.

Burada özel olarak

$$\Upsilon_1 = \beta_0 + j\beta_3 \quad , \quad \Upsilon_2 = -\beta_1 + j\beta_2$$

seçilirse

$$\overline{\Upsilon}_1 = \beta_0 - j\beta_3 \quad , \quad \overline{\Upsilon}_2 = -\beta_1 - j\beta_2$$

dir. Dolayısıyla

$$a_1 = j(\Upsilon_1\overline{\Upsilon}_2 - \overline{\Upsilon}_1\Upsilon_2)$$

$$a_2 = \Upsilon_1\bar{\Upsilon}_2 + \bar{\Upsilon}_1\Upsilon_2 \qquad (5.14)$$
$$a_3 = \Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1 - \Upsilon_2\bar{\Upsilon}_2$$

ve benzer şekilde

$$c_1 = \frac{1}{2}(\Upsilon_1^2 + \bar{\Upsilon}_1^2 + \Upsilon_2^2 + \bar{\Upsilon}_2^2) \qquad d_1 = \frac{j}{2}(\Upsilon_1^2 - \bar{\Upsilon}_1^2 + \Upsilon_2^2 - \bar{\Upsilon}_2^2)$$
$$c_2 = \frac{j}{2}(\Upsilon_1^2 - \bar{\Upsilon}_1^2 - \Upsilon_2^2 + \bar{\Upsilon}_2^2) \qquad d_2 = \frac{1}{2}(\Upsilon_1^2 + \bar{\Upsilon}_1^2 - \Upsilon_2^2 - \bar{\Upsilon}_2^2)$$
$$c_3 = j(\bar{\Upsilon}_1\bar{\Upsilon}_2 - \Upsilon_1\Upsilon_2) \qquad d_3 = -(\Upsilon_1\Upsilon_2 + \bar{\Upsilon}_1\bar{\Upsilon}_2)$$

eşitlikleri mevcuttur.

Burada bulduğumuz Υ_1 ve Υ_2 hiperbolik sayı çifti B çatısıyla ilişkilidir ve

$$\Upsilon = \Upsilon_A = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + j\beta_3 \\ -\beta_1 + j\beta_2 \end{pmatrix} \qquad (5.15)$$

birim hiperbolik spinoruna karşılık gelir. Gerçektende

$$\Upsilon^\dagger \Upsilon = \mathrm{I}$$
$$\begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_1 & \bar{\Upsilon}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 - j\beta_3 & -\beta_1 - j\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 + j\beta_3 \\ -\beta_1 + j\beta_2 \end{bmatrix}$$
$$= \beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2$$
$$= I$$

olduğundan birimdir.

Eğer $\vec{a}$ vektörünün bileşenlerini bir matris çarpımı olarak ifade edersek, uygun bir seçimle P_1, P_2, P_3 Pauli matrisleri yardımıyla;

$$a_1 = j\left(\bar{\Upsilon}_2 \quad -\bar{\Upsilon}_1\right)\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \left(\bar{\Upsilon}_1 \quad \bar{\Upsilon}_2\right)\begin{bmatrix}0 & -j\\ j & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \Upsilon^{\dagger}P_2\Upsilon$$

$$a_2 = \left(\bar{\Upsilon}_2 \quad \bar{\Upsilon}_1\right)\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \left(\bar{\Upsilon}_1 \quad \bar{\Upsilon}_2\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \Upsilon^{\dagger}P_1\Upsilon \qquad (5.16)$$

$$a_3 = \left(\bar{\Upsilon}_1 \quad -\bar{\Upsilon}_2\right)\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \left(\bar{\Upsilon}_1 \quad \bar{\Upsilon}_2\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \Upsilon^{\dagger}P_3\Upsilon$$

yazılabilir.

Şimdi $\vec{a}$ vektörünü σ lar ile gösterelim.

σ matrisleri Pauli matrislerinin soldan $k = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ matrisiyle çarpımıyla oluşur.

Şöyleki

$$kP_1 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \sigma_1$$

$$kP_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -j\\ j & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}j & 0\\ 0 & j\end{bmatrix} = \sigma_2 \qquad (5.17)$$

$$kP_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \sigma_3$$

olur.

Eğer $\vec{a} = -\hat{\Upsilon}^{t}\sigma\Upsilon$ şeklinde $\vec{a}$ yı alırsak,

$$a_1 = j\left(\bar{\Upsilon}_2 \quad -\bar{\Upsilon}_1\right)\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \left(\bar{\Upsilon}_1 \quad \bar{\Upsilon}_2\right)\begin{bmatrix}j & 0\\ 0 & j\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = -\hat{\Upsilon}^{t}\sigma_2\Upsilon$$

$$a_2 = \left(\bar{\Upsilon}_2 \quad \bar{\Upsilon}_1\right)\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = \left(\bar{\Upsilon}_1 \quad \bar{\Upsilon}_2\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Upsilon_1\\ \Upsilon_2\end{pmatrix} = -\hat{\Upsilon}^{t}\sigma_1\Upsilon \qquad (5.18)$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_1 & -\bar{\Upsilon}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_1 & \bar{\Upsilon}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} = -\hat{\Upsilon}^t \sigma_3 \Upsilon$$

bulunur.

Böylece P_1, $P_{2,}$ P_3 Pauli matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned} a_1 &= \Upsilon^{\dagger} P_2 \Upsilon \\ a_2 &= \Upsilon^{\dagger} P_1 \Upsilon \\ a_3 &= \Upsilon^{\dagger} P_3 \Upsilon \end{aligned} \tag{5.19}$$

veya $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned} a_1 &= -\hat{\Upsilon}^t \sigma_2 \Upsilon \\ a_2 &= -\hat{\Upsilon}^t \sigma_1 \Upsilon \\ a_3 &= -\hat{\Upsilon}^t \sigma_3 \Upsilon \end{aligned} \tag{5.20}$$

yazılabilir.

B çatısının bir dönmesi birim hiperbolik spinorun davranışını belirler. Gerçentende B çatısı vektörlerinin uç noktaları O merkezli $\mathbb{R}_1^3$ deki bir S_1^2 Lorentz küresini $\left\{ S_1^2 = x : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$ karakterize eder. Özellikle üçüncü vektör olan $\vec{a}$ vektörünün $\left(a_1, a_2, a_3 \right)$ uç noktasının iki hiperbolik bileşenli spinorun $\zeta = \dfrac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$ oranı ile simgeleyen hiperbolik düzlemde birebir bir ilişki mevcuttur.

Bu ilişki, $x_3 = 0$ ekvator düzlemi üzerinde S_1^2 nin $\left(0, 0, -1 \right)$ güney kutbundan P noktasının steografik izdüşümü sayesinde kolayca görülebilir. Şöyleki

$$\zeta = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1} \quad , \quad \Upsilon_2 = -B_1 + jB_2 \quad \Upsilon_1 = B_0 + jB_3$$

$$\zeta = \frac{-\beta_1 + j\beta_2}{\beta_0 + j\beta_3} = \frac{(-\beta_1 + j\beta_2)(\beta_0 - j\beta_3)}{\beta_0^2 - \beta_3^2} = \frac{-\beta_0\beta_1 + j\beta_1\beta_3 + j\beta_0\beta_2 - \beta_2\beta_3}{\beta_0^2 - \beta_3^2}$$

bulunur.

$$\zeta = \frac{-(\beta_0\beta_1 + \beta_2\beta_3) + j(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2)}{\beta_0^2 - \beta_3^2} = \frac{\frac{a_2}{2} + j(-\frac{a_1}{2})}{\beta_0^2 - \beta_3^2} = \frac{a_2 - ja_1}{2(\beta_0^2 - \beta_3^2)}$$

$\beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 = 1$ olduğundan $\beta_0^2 - \beta_3^2 = 1 - \beta_1^2 + \beta_2^2$ olur. Diğer taraftan

$$\zeta = \frac{a_2 - ja_1}{(\beta_0^2 - \beta_3^2) + (\beta_0^2 - \beta_3^2)} = \frac{a_2 - ja_1}{\beta_0^2 - \beta_3^2 + (1 - \beta_1^2 + \beta_2^2)} = \frac{a_2 - ja_1}{\beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 + 1} = \frac{a_2 - ja_1}{a_3 + 1}$$

$\zeta = \dfrac{a_2 - ja_1}{a_3 + 1}$ bulunur. Ayrıca

ζ eşleniği alınırsa $\bar{\zeta} = \dfrac{a_2 + ja_1}{a_3 + 1}$ bulunur. Böylece $a_3 + 1 = \dfrac{a_2 + ja_1}{\zeta} = \dfrac{a_2 + ja_1}{\bar{\zeta}}$

yazılabilir. O halde buradan

$$(a_3 + 1)^2 = \frac{(a_2 - ja_1)(a_2 + ja_1)}{\zeta\bar{\zeta}} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{\zeta\bar{\zeta}}$$

$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ olduğundan $a_2^2 - a_1^2 = 1 - a_3^2$ yazabiliriz. Buradan

$(a_3 + 1)^2 = \dfrac{1 - a_3^2}{\zeta\bar{\zeta}} = \dfrac{(1 - a_3)(1 + a_3)}{\zeta\bar{\zeta}}$ eşitliğinde $(1 + a_3)$ çarpanlarını sadeleştirirsek

$(1+a_3)=\dfrac{1-a_3}{\zeta\bar{\zeta}}$ eşitliği elde edilir. Böylece $\zeta\bar{\zeta}=\dfrac{1-a_3}{1+a_3}$ eşitliğinden a_3 terimini

çekersek, $1+a_3=\dfrac{2}{\zeta\bar{\zeta}+1}$ ya da $a_3=\dfrac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}$ bulunur. O halde

$a_2-ja_1=\zeta(1+a_3)$ ve $a_2+ja_1=\bar{\zeta}(1+a_3)$

olduğundan taraf tarafa toplanırsa

$2a_2=(1+a_3)(\zeta+\bar{\zeta})$ ve $2ja_1=(1+a_3)(\bar{\zeta}-\zeta)$ elde edilir. Gerekli düzenlemeler

yapılırsa

$$a_2=\frac{(1+a_3)}{2}(\zeta+\bar{\zeta}),\quad a_1=\frac{\mathrm{j}(1+a_3)}{2}(\bar{\zeta}-\zeta) \tag{5.21}$$

bulunur. Son olarak

$a_1=\dfrac{\mathrm{j}(1+a_3)}{2}(\bar{\zeta}-\zeta)$ için $\zeta=\dfrac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$, $\bar{\zeta}=\dfrac{\bar{\Upsilon}_2}{\bar{\Upsilon}_1}$ ve $a_3=\dfrac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}$ yerine yazılırsa

$$a_1=\frac{\mathrm{j}}{2}(1+a_3)(\bar{\zeta}-\zeta)=\frac{\mathrm{j}}{2}\left(1+\frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}\right)\left(\frac{\bar{\Upsilon}_2}{\bar{\Upsilon}_1}-\frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}\right)=\frac{\mathrm{j}}{2}\left(1+\frac{1-\frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}\frac{\bar{\Upsilon}_2}{\bar{\Upsilon}_1}}{1+\frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}\frac{\bar{\Upsilon}_2}{\bar{\Upsilon}_1}}\right)\left(\frac{\bar{\Upsilon}_2}{\bar{\Upsilon}_1}-\frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}\right)$$

$a_1=j\left(\dfrac{\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_2-\bar{\Upsilon}_1\Upsilon_2}{\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1+\Upsilon_2\bar{\Upsilon}_2}\right)$ bulunur. Diğer taraftan

$$\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1+\Upsilon_2\bar{\Upsilon}_2=(\beta_0+j\beta_3)(\beta_0-j\beta_3)+(-\beta_1+j\beta_2)(-\beta_1-j\beta_2)=\beta_0^2-\beta_3^2+\beta_1^2-\beta_2^2=1$$

olduğundan

$a_1 = j\left(\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_2 - \bar{\Upsilon}_1\Upsilon_2\right)$ elde edilir. Benzer şekilde

$$a_2 = \frac{(1+a_3)}{2}(\zeta + \bar{\zeta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1}{\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1 + \Upsilon_2\bar{\Upsilon}_2}\right)\left(\frac{\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_2 + \bar{\Upsilon}_1\Upsilon_2}{\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1}\right) = \Upsilon_1\bar{\Upsilon}_2 + \bar{\Upsilon}_1\Upsilon_2$$

elde edilir. Son olarak

$$a_3 = \frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}} = \frac{\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1 - \Upsilon_2\bar{\Upsilon}_2}{\Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1 + \Upsilon_2\bar{\Upsilon}_2} = \Upsilon_1\bar{\Upsilon}_1 - \Upsilon_2\bar{\Upsilon}_2$$

olduğundan a_1, a_2, a_3 doğruluğu görülür.

B çatısı ya da S_1^2 nin bir dönmesi homografik dönüşüm altında $\zeta = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$ oranını oluşturur.

O halde hiperbolik spinorlar için

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{-\bar{b}\zeta + \bar{a}} = \frac{\left(\beta_0 - j\beta_3\right)\zeta + (-\beta_1 + j\beta_2)}{(\beta_1 + j\beta_2)\zeta + \left(\beta_0 + j\beta_3\right)} \tag{5.22}$$

yazılır. Burada $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ olmak üzere parantez içindeki hiperbolik sayılar Cayley Klein parametreleri olarak adlandırılır.

Eğer (5.22) denkleminde $\zeta = \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1}$ yerine yazılırsa (5.22) denklemi bir sonraki hiperbolik spinor şeklinde yazdığımız iki homojen yer değiştirmeler olarak ayrılır. Yani

$$\Upsilon' = \begin{pmatrix} \beta_0 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 \\ -\beta_1 + j\beta_2 & \beta_0 - j\beta_3 \end{pmatrix} \Upsilon \tag{5.23}$$

dir. Şimdi yukarıdaki açıklamalar ışığı altında split kuaterniyonlar ile hiperbolik spinorlar arasındaki ilişkiyi verelim.

Bunun için q kuaterniyonu ile Q spinorunu

$$f : H \to S$$
$$q \to Q$$

$$f(q_0 + \vec{e}_1 q_1 + \vec{e}_2 q_2 + \vec{e}_3 q_3) = \begin{pmatrix} q_0 + jq_3 \\ -q_1 + jq_2 \end{pmatrix} \equiv Q \tag{5.24}$$

yardımıyla ilişkilendirebiliriz. Böylelikle Bölüm 4.2 de verilen split kuaterniyon formülasyonu genişletilerek dönmelerin kinematiğinin spinor formülasyonunu elde ederiz.

Bu fonksiyon lineer ve birebirdir. Şöyleki

$$f(q+p) = \begin{pmatrix} q_0 + p_0 + j(q_3 + p_3) \\ -q_1 - p_1 + j(q_2 + p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + jp_3 \\ -p_1 + jp_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 + jq_3 \\ -q_0 + jq_2 \end{pmatrix} = f(q) + f(p)$$

$$f(\lambda q) = \begin{pmatrix} \lambda q_0 + j\lambda q_3 \\ -\lambda q_1 + j\lambda q_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} q_0 + jq_3 \\ -q_1 + jq_2 \end{pmatrix} = \lambda f(q) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

olmak üzere S nin birim elemanı sıfır olduğundan ancak sıfır kuaterniyonu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hiperbolik spinoruna karşılık gelir. Dolayısıyla $\text{\c{c}ek}\, f = \{0\}$ dır.

$\bar{q}q$ split kuaterniyonunun normu $Q^{\dagger}Q = \bar{Q}_1 Q_1 + \bar{Q}_2 Q_2$ hiperbolik spinorunun normuna eşittir. Yani

$$Q^{\dagger}Q = \begin{pmatrix} q_0 - jq_3 & -q_1 - jq_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 + jq_3 \\ -q_1 + jq_2 \end{pmatrix} = q_0^2 - q_3^2 + q_1^2 - q_2^2 = \bar{Q}_1 Q_1 + \bar{Q}_2 Q_2 \quad \text{dir.}$$

q birim kuaterniyonunun eşleniği için

$$f(q^{-1}) = f(q_0 - \vec{e}_1 q_1 - \vec{e}_2 q_2 - \vec{e}_3 q_3) = \begin{pmatrix} q_0 - jq_3 \\ q_0 - jq_2 \end{pmatrix} \equiv Q^{-1} \tag{5.25}$$

olur.

Şimdi qp şeklinde iki split kuaterniyon çarpımını ya da $\hat{q}p$ kuaterniyon-matris çarpımını bir spinor matris çarpımı yardımıyla ile ilişkilendirelim. Yani

$$qp \rightarrow \hat{q}p \rightarrow \hat{Q}q \tag{5.26}$$

qp kuaterniyonuna karşılık gelen spinordur. Yani

$$f(q) = \begin{pmatrix} q_0 + jq_3 \\ -q_1 + jq_2 \end{pmatrix} \quad ise \quad f(p) = \begin{pmatrix} p_0 + jp_3 \\ -p_1 + jp_2 \end{pmatrix}$$

$\hat{Q}$ hiperbolik, birim, kare ($-q\bar{q}$ negatif determinantlı) matristir.

P_α lar $\hat{P}_\alpha$ Pauli matrislerinin ilk sütunu olsun. Bu durumda f sayesinde $1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sırasıyla $\sigma_0, -\sigma_1, \sigma_2, j\sigma_3$ karşılık gelir. Ayrıca bir split kuaterniyona

$$f(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) = \begin{pmatrix} q_0 + jq_3 \\ -q_1 + jq_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir hiperbolik spinor karşılık geldiğinden $h(q)p$ split kuaterniyonuna f dönüşümü sayesinde,

$$h(\mathrm{q})\,p=\begin{pmatrix} p_0q_0-p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+j(p_0q_3-p_1q_2+p_2q_1+p_3q_0) \\ -p_0q_1-p_1q_0-p_2q_3+p_3q_2+j(p_0q_2+p_1q_3+p_2q_0-p_3q_1) \end{pmatrix}=\hat{Q}q \quad \text{dır. O halde}$$

$\hat{q}p\rightarrow\hat{Q}q$ ilişkilendirilebilir. Yani $\begin{pmatrix}\Upsilon & \hat{\Upsilon}\end{pmatrix}$ matris formunda

$$\begin{pmatrix}\Upsilon_1 & -\overline{\Upsilon}_2 \\ \Upsilon_2 & \overline{\Upsilon}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_0+j\beta_3 & \beta_1+j\beta_2 \\ -\beta_1+j\beta_2 & \beta_0-j\beta_3\end{pmatrix}$$ dir. Bu matris $\hat{Q}$ matrisidir.

$$f(1+0\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\sigma_0 \qquad \hat{\sigma}_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$f(0+1\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=-\sigma_1 \qquad \hat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$f(0+0\vec{e}_1+1\vec{e}_2+0\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\j\end{pmatrix}=\sigma_2 \qquad \hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&j\\j&0\end{pmatrix}$$

$$f(0+0\vec{e}_1+0\vec{e}_2+1\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=j\sigma_3 \qquad \hat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

O halde,

$$\begin{aligned} &1\rightarrow\sigma_0 \\ &\vec{e}_1\rightarrow-\sigma_1 \\ &\vec{e}_2\rightarrow\sigma_2 \\ &\vec{e}_3\rightarrow j\sigma_3 \end{aligned} \tag{5.27}$$

bulunur.

Öyleyse baz matrislerimiz $\hat{\sigma}_0,-\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2$ ve $j\sigma_3$ alınabilir.

$$\begin{aligned} &C=-\hat{\sigma}_1 \quad D=\hat{\sigma}_2 \quad E=j\sigma_3 \\ &C^2=1 \quad D^2=-1 \quad E^2=1 \quad . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Daha genel olarak bir Q hiperbolik spinoru ile $\hat{Q}$ kare matrisi arasında

$Q=\hat{Q}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ilişkisi mevcuttur.

Gerçektende,

$$Q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_0+jq_3 & q_1+jq_2\\ -q_1+jq_2 & q_0-jq_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_0+jq_3\\ -q_1+jq_2\end{pmatrix}=Q$$

dır.

Ayrıca f dönüşümü gösterir ki,

$\tau=\left[\hat{P}_0 \,\middle|\, -\hat{P} \,\middle|\, \hat{P}_2 \,\middle|\, j\hat{P}_3\right]$ $2x4$ tipindeki blok matrisi gösterir ki $Q=\tau q$ dir.

Gerçektende

$$\tau q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & j\\ 0 & -1 & j & 0\end{pmatrix}_{2x4}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}_{4x1}=\begin{pmatrix}q_0+jq_3\\ -q_1+jq_2\end{pmatrix}=Q$$

elde edilir.

Split kuaterniyon ve hiperbolik spinorlar arasındaki f dönüşümü; kuaterniyon kinematiği bölümünde birim bir q_1 split kuaterniyonu ile ilişkili spin uzayda katı bir cismin dönmesini simgelememize izin verir. ω açısal hız split kuaterniyonu olmak üzere

$$q_1 \mapsto \Upsilon = \begin{pmatrix} \beta_0 + j\beta_3 \\ -\beta_1 + j\beta_2 \end{pmatrix} \to \hat{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \beta_0 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 \\ -\beta_1 + j\beta_2 & \beta_0 - j\beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\omega \mapsto \Omega = \begin{pmatrix} j\omega_3 \\ -\omega_1 + j\omega_2 \end{pmatrix} \to \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} j\omega_3 & \omega_1 + j\omega_2 \\ -\omega_1 + j\omega_2 & -j\omega_3 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

ifadeleri karşılık gelir.

O halde $\hat{q}p \to \hat{Q}p$ ve üsttekilerin bir sonucu olarak

$x' = \hat{q}_1 \hat{x} q_1^{-1}$ ifadesi

$$x' = \hat{q}_1 \hat{x} q_1^{-1} = \hat{\Upsilon}\hat{x}\Upsilon^{-1} \tag{5.30}$$

biçiminde yazılır. Böylece 3-boyutlu Minkowski uzayında bir cismin yer değiştirmesiyle ilgili hiperbolik spinor denklemleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$x' = \hat{\Upsilon}\hat{X}\Upsilon^{-1}$	$\begin{pmatrix} jx_3' \\ -x_1' + jx_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + j\beta_3 & \beta_1 + j\beta_2 \\ -\beta_1 + j\beta_2 & \beta_0 - j\beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} jx_3 & x_1 + jx_2 \\ -x_1 + jx_2 & -jx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 - j\beta_3 \\ \beta_1 - j\beta_2 \end{pmatrix}$
$\dot{\Upsilon} = \frac{1}{2}\hat{\Omega}\Upsilon$	$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_0 + j\dot{\beta}_3 \\ -\dot{\beta}_1 + j\dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} j\omega_3 & \omega_1 + j\omega_2 \\ -\omega_1 + j\omega_2 & -j\omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 + j\beta_3 \\ -\beta_1 + j\beta_2 \end{pmatrix}$
$\Omega = 2\hat{\dot{\Upsilon}}\Upsilon^{-1}$	$\begin{pmatrix} j\omega_3 \\ -\omega_1 + j\omega_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \dot{\beta}_0 + j\dot{\beta}_3 & \dot{\beta}_1 + j\dot{\beta}_2 \\ -\dot{\beta}_1 + j\dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_0 - j\dot{\beta}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 - j\beta_3 \\ \beta_1 - j\beta_2 \end{pmatrix}$
$\tilde{\Omega} = 2\hat{\Upsilon}^{-1}\dot{\Upsilon}$	$\begin{pmatrix} jr \\ -p + jq \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \beta_0 - j\beta_3 & -\beta_1 - j\beta_2 \\ \beta_1 - j\beta_2 & \beta_0 + j\beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_0 + j\dot{\beta}_3 \\ -\dot{\beta}_1 + j\dot{\beta}_2 \end{pmatrix}$

Tablo 5.1. Hiperbolik Spinor Kinematiğ

Son olarak Minkowski uzayı, Split kuaterniyon ve Spinorlar arasındaki hız formülasyonları karşılaştırmalı olarak Tablo 5.2. de verilmiştir.

$\vec{x}' = B\vec{x}$	$\dot{\vec{x}} = W\vec{x}$	$W = \dot{B}B^{-1}$	$\tilde{W} = B^{-1}\dot{B}$
$x' = \hat{b}\hat{x}b^{-1}$	$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}\hat{\omega}b$	$\omega = 2\hat{\dot{q}}_1 q_1^{-1}$	$\tilde{\omega} = 2\hat{q}_1^{-1}\dot{q}_1$
$x' = \hat{\Upsilon}\hat{X}\Upsilon^{-1}$	$\dot{\Upsilon} = \frac{1}{2}\hat{\Omega}\Upsilon$	$\Omega = 2\hat{\dot{\Upsilon}}\Upsilon^{-1}$	$\tilde{\Omega} = 2\hat{\Upsilon}^{-1}\dot{\Upsilon}$

Tablo 5.2. Karşılaştırma

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bugün kuaterniyonlar fizik, mühendislik, uçak teknolojisi, robotik ve matematik gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ek olarak, kuaterniyonlar günümüzde teknolojiye büyük kolaylık sağlıyor. Örneğin, fizikte, ünlü Maxwell denklemleri, elektromanyetik teoride kuaterniyon açısından dört denklem yerine iki denklemde ifade edilebilir. Ayrıca, endüstriyel robot manipülatörlerinde, homojen ve kuaterniyon gösterimlerinden elde edilen ileri kinematik denklemlerin, hesaplama hızı açısından karşılaştırıldığı durumlarda, özellikle de küresel çalışma alanlarına sahip robot manipülatörler için kuaterniyon gösteriminin daha hızlı gerçekleştiği sonucuna varılmıştır.

Spinorlar bir spin gösteriminin öğeleridir. Fizik ve matematikte, spinorlar özellikle görelilik teorisi gibi birçok uygulamaya sahiptir. Spinorlar iki karmaşık bileşene sahiptir. Bu yapının yardımıyla, kuaterniyonlar daha basit bir şekilde spinorlarla ifade edilebilir. Dahası, kuaterniyonlar ve spinorlar arasındaki lineer ve enjektive bir dönüşüm oluşturulabilir. Böylece, kuaterniyonlar tarafından verilebilen Öklid 3-uzayındaki dönmeler, kuaterniyonlar ve spinorlar arasındaki ilişki aracılığıyla daha basit bir şekilde ifade edilebilir.

Bu tezde, split kuaterniyonlar ve hiperbolik spinorlar üzerinde çalıştık. Bu nedenle, bir split kuaterniyonun uygun bir transformasyonla hiperbolik bir spinora uygun hale getirilebileceğini gösterdik. 3-boyutlu Minkowski uzayındaki dönüşlerin split kuaterniyonlar aracılığıyla kolaylıkla ifade edilebileceğini gösterdik. Daha sonra, bu iki ilişkiyi kullanarak, daha da basit bir şekilde hiperbolik spinorların yardımıyla Minkowski 3-uzayda $\mathbb{R}_1^3$ 'deki dönmeleri ifade ettik. Bu nedenle, bu çalışmanın matematikçiler, fizikçiler ve mühendisler için yararlı olması beklenmektedir.

Özellikle robot teknolojisinde, bilim insanı bu çalışmanın yardımıyla basitlik ve kısalık için spinorları kullanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Müller, H.R. Kinematik dersleri. Ankara Üniversitesi Basımevi. Ankara, 1963.

[2] Bottema, O. and Roth, B., Theoretical Kinematics. Norh Holland. Publ. Company New York, 1979.

[3] Hacısalihoğlu, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teoerisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2, 1983.

[5] Karger, A. and Novak, J. Spaca Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breache Science Publishers. Switzerland, 1985.

[5] Ward, J.P. Quaternions and Cayley Numbers. Kluwer Academic Publishers. London, 1997.

[6] Inoguchi, J. Timelike Surfaces of Constant. Mean Curvature in Minkowski 3-space. Tokyo J. Math. Vol. 21 No.1. 140-152, 1998.

[7] Kula, L. Split Quaternions and Geometrical Applications, Ph.D. Thesis. Ankara University, Ankara, 2003.

[8] Rooney, J.,A Survey of Representations of Spatial Rotation About a Fixed Point.. Environment and Planning B. Vol.4, 185-210, 1977

[9] Brauer, R., Weyl, H., Spinors in n dimensions. Am. J. Math., 57(2): 425-449, 1935.

[10] Cartan, E., The Theory of Spinors, Dover Publications, New York, 1-157, 1966.

[11] Del Castillo, G. F. T., Barrales, G. S., Spinor formulation of the differential geometry of curves. Rev. Colombiana Mat., 38: 27-34, 2004.

[12] Kişi, İ., Tosun, M., Spinor Darboux equations of curves in Euclidean 3-space. Math. Morav., 19(1): 87-93, 2015.

[13] Ketenci, Z., Erişir, T., Güngör, M. A., A construction of hyperbolic spinors according to Frenet frame in Minkowski space. J. Dyn. Syst. Geom. Theor., 13(2): 179-193, 2015.

[14] Erişir, T., Güngör, M. A., Tosun, M., Geometry of the hyperbolic spinors corresponding to alternative frame. Adv. Appl. Clifford Al., 25(4): 299-810, 2015.

[15] Vivarelli, M. D., Development of spinor descriptions of rotational mechanics from Euler's rigid body displacement theorem. Celestial Mech., 32(3): 193-207, 1984.

[16] Boothby, W. M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, Kaliforniya, 1-400, 1975.

[17] Hacısalihoğlu, H.H., Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri, Milli Eğitim Basımevi, 1983.

[18] O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1983.

[19] Clifford, W. K., Mathematical papers. İçinde: Further Notes on Biquaternions, 385-394, 1882.

[20] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P., Geometry of Minkowski Space-Time, SpringerBriefs in Physics, 1-99, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa TARAKÇIOĞLU, 15.07.1990 tarihinde Geyve'de doğdu. İlköğrenimini Sakarya'nın Geyve İlçesinde Cemal Gürsel İlkokulunda, ortaöğrenimini Geyve Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 2013 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Matematik anabilim dalı Geometri bilim dalında yüksek lisansa başladı. Ayrıca Eylül 2013'te Sakarya'nın Hendek ilçesinde Anadolu Kalkınma Vakfı Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Daha sonra Sakarya'nın Kaynarca ilçesinde Kaynarca Anadolu Lisesi'nde çalıştı. Şu anda Sakarya'nın Geyve ilçesinde Geyve Anadolu İmam Hatip Lisesinde Müdür Yardımcısı olarak görevine devam etmektedir.