

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLERİN LİNEER  
BİLEŞİMLERİNİN KARAKTERİZASYONU İÇİN BİR  
YÖNTEM VE ÖZEL TİPLİ MATRİSLERE UYGULAMALARI**

**DOKTORA TEZİ**  
**Emre Kişi**

**Enstitü Anabilim Dalı** : **MATEMATİK**  
**Enstitü Bilim Dalı** : **UYGULAMALI MATEMATİK**  
**Tez Danışmanı** : **Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**

**Mayıs 2018**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLERİN LİNEER  
BİLEŞİMLERİNİN KARAKTERİZASYONU İÇİN BİR  
YÖNTEM VE ÖZEL TIPLI MATRİSLERE UYGULAMALARI


DOKTORA TEZİ


Emre Kişi


Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK


Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

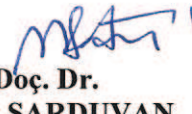
Bu tez 24/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

  
Prof. Dr.  
Ahmet Yaşar ÖZBAN  
Jüri Başkanı

  
Prof. Dr.  
Halim ÖZDEMİR  
Üye

  
Prof. Dr.  
Halis AYGÜN  
Üye

  
Doç. Dr.  
Nesrin GÜLER  
Üye

  
Doç. Dr.  
Murat SARDUVAN  
Üye

## **BEYAN**

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Emre KİŞİ

24/05/2018

## ÖNSÖZ

Doktora çalışmam süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmada ortaya koyulan algoritmanın Mathematica 9.0 paket programındaki uygulama kodlarının yazımında yardımcı olan Sayın Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, hayatım boyunca beni devamlı destekleyen sevgili eşim İlim KİŞİ'ye ve dualarıyla ayakta durmamı sağlayan aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	iv
TABLolar LİSTESİ .....	vi
ÖZET .....	vii
SUMMARY .....	viii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Özeti.....	1
1.3. Ele Alınan Problem.....	5
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER.....	6
2.1. Matrisler, Rank ve Lineer Denklem Sistemleri .....	6
2.2. Matrislerin Köşegenleştirilmesi.....	12
2.3. Bazı Özel Tipli Matrisler ve Bu Matrislerin Bazı Özellikleri.....	14
BÖLÜM 3.	
SONLU SAYIDA DEĞİŞMELİ KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN SPEKTRUMLARININ KARAKTERİZE EDİLMESİ.....	19
3.1. Giriş.....	19
3.2. Sonlu Sayıda Değişmeli Köşegenleştirilebilir Matrisin Lineer Bileşiminin Spektrumunu Karakterize Etmek İçin Bir Kombinatorik	

Yöntem.....	18
3.3. Kombinatorik Yöntemin Algoritması.....	27
BÖLÜM 4.	
BAZI ÖZEL TIPLİ MATRİSLERİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN KARAKTERİZASYONU .....	29
4.1. Giriş .....	29
4.2. Değişmeli İki Kübik Matrisin Lineer Bileşiminin Kübikliği.....	29
4.3. Değişmeli İki Kuadripotent Matrisin Lineer Bileşiminin Kuadripotentliği.....	36
4.4. Değişmeli Üç Tripotent Matrisin Lineer Bileşiminin Tripotentliği...	38
4.5. Değişmeli Dört İnvolutif Matrisin Lineer Bileşiminin Tripotentliği..	44
BÖLÜM 5.	
TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR .....	50
EKLER .....	53
ÖZGEÇMİŞ .....	115

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^n$	: $n$ boyutlu karmaşık vektörler kümesi
$\mathbb{C}_{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$I_n$	: $n \times n$ boyutlu birim matris
$\mathbf{0}$	: Uygun boyutlu sıfır matris
$i$	: $\sqrt{-1}$
$A^T$	: $A$ matrisinin devriği
$\bar{A}$	: $A$ matrisinin karmaşık eşlenik
$A^*$	: $A$ matrisinin eşlenik devriği
$A^{-1}$	: $A$ matrisinin tersi
$A^\#$	: $A$ matrisinin grup tersi
$A^\dagger$	: $A^\dagger$ matrisinin Moore Penrose tersi
$A^D$	: $A^D$ matrisinin Drazin tersi
$\sigma(A)$	: $A$ matrisinin spektrumu
$A \oplus B$	: $A$ ve $B$ matrislerinin direkt toplamı
$rk(A)$	: $A$ matrisinin rankı
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\subseteq$	: Alt kümesidir
$\cup$	: Birleşim

$\binom{n}{r}$  :  $n$  nin  $r$  li kombinasyonu

$(a,b)$  :  $a, b$  sıralı ikilisi

$\Rightarrow$  : Gerektirir

$\Leftrightarrow$  : Gerekli ve yeterli koşul



## TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.1. (1.1) Lineer bileşimine ilişkin bazı çalışmalar .....	2
Tablo 1.2. (1.2) Lineer bileşimine ilişkin bazı çalışmalar .....	3
Tablo 4.1. (4.6) ifadesi ile temsil edilen sonuçlar .....	39
Tablo 5.1. Bazı açık problemler.....	49

## ÖZET

Anahtar Kelimeler: Köşegenleştirilebilir matrisler, değişmelilik, spektrum, algoritma, lineer denklem sistemleri

İlk bölümde, bazı özel tipli matrislerin uygulamalı bilimlerdeki kullanım alanlarından bahsedilmektedir. Ayrıca literatürde birçok yazar tarafından çalışılan özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu problemleri ile ilgili sonuçlar, tablolar yardımıyla özetlenmektedir. İkinci bölümde, tezin esas sonuçlarının ortaya konduğu üçüncü ve dördüncü bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar ve bazı teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölüm çalışmanın omurgasını oluşturmaktadır. Bu bölümde, sonlu sayıda değişmeli köşegenleştirilebilir matrisin lineer bileşiminin spektrumunu karakterize etmek için bir kombinatorik yöntem verilmekte ve bu yöntem temel alınarak bir algoritma geliştirilmektedir.

Dördüncü bölümde, iki değişmeli kübik matrisin lineer bileşiminin kübikliği, iki değişmeli kuadripotent matrisin lineer bileşiminin kuadripotentliği, karşılıklı değişmeli üç tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği, ve karşılıklı değişmeli dört involutif matrisin lineer bileşiminin tripotentliği problemleri üçüncü bölümde geliştirilen Algoritma 3.1 yardımıyla çözülmektedir.

# **A METHOD FOR CHARACTERIZING THE LINEAR COMBINATIONS OF DIAGONALIZABLE MATRICES AND ITS APPLICATIONS TO SPECIAL TYPES OF MATRICES**

## **SUMMARY**

Keywords: Diagonalizable matrices, commutativity, spectrum, algorithm, systems of linear equations

In the first chapter, the usage areas of some special types of matrices in applied sciences are mentioned. Moreover, the results related to the problems of characterizing the linear combinations of special types of matrices which are studied by many authors in the literature are summarized with the help of the tables. In the second chapter, the basic concepts and some theorems that will be used in the third and fourth chapters where the main results of the thesis are established are given.

The third chapter forms the backbone of the study. In this chapter, a combinatorial method for characterizing the spectrum of the linear combinations of finitely many commutative diagonalizable matrices is given and then an algorithm which is based on this method is developed.

In the fourth chapter, the problems of cubicity of linear combinations of two commutative cubic matrices, quadripotency of linear combinations of two commutative quadripotent matrices, tripotency of linear combinations of three tripotent matrices that mutually commute, and tripotency of linear combinations of four involutive matrices that mutually commute are solved via the Algorithm 3.1 that developed in the third chapter.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

## 1.1. Giriş

Özel tipli matrisler matematik, fen ve mühendislik gibi bilimlerin birçok alt bilim dalında karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, istatistikte  $A$   $n \times n$  boyutlu reel ve simetrik bir matris ve  $\mathbf{x}$  vektörü de çok değişkenli  $N_n(\mathbf{0}, I_n)$  normal dağılımına sahip  $n \times 1$  boyutlu rastgele bir reel vektör ise, bu durumda  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  kuadratik formunun ki-kare dağılımına sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A$  matrisinin idempotent, iki bağımsız ki-kare dağılımının farkı olarak yazılabilesinin gerekli ve yeterli koşulu  $A$  matrisinin tripotent olmasıdır [1]. Kuantum mekaniğinde kullanılan Pauli spin matrisleri  $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  involutiftir [2, p. 495]. Ayrıca, kriptolojide Hill yöntemiyle şifreleme yaparken involutif matris kullanılması tavsiye edilir. Çünkü Hill yönteminde şifreli metni çözmek için anahtar matrisin tersinin bulunması gerekmektedir ve anahtar matris olarak tersi kendisine eşit olan bir matris seçmek çok kullanışlı olacaktır [3].  $k$ -potent matrisler ise dijital görüntü şifrelemede karşımıza çıkmaktadır [4].

## 1.2. Literatür Özeti

Bu kısımda literatür bilgisi kısaca özetlenecektir. Özel tipli matrislerin lineer bileşimleri ne zaman yine bir özel tipli matris olur? Bu problem son yıllarda birçok yazar tarafından farklı özel tipli matrisler için ele alındı ve birçok çalışma yapıldı. Bu sonuçları aşağıdaki tablolar ile özetlemek istiyoruz. Önce literatürde ele alınan başlıca lineer bileşimleri belirtelim.  $X_1, X_2$  ve  $X_3 \in \mathbb{C}_n$  olmak üzere

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 \tag{1.1}$$

veya

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 \quad (1.2)$$

olsun. Tablo 1.1. (1.1) lineer bileşimi için verilen sonuçları ve Tablo 1.2. (1.2) lineer bileşimi için verilen sonuçları özetlemektedir. Tablolarda, genel olarak  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$  ve  $k = 2, 3, 4, \dots$  şeklindedir.

Tablo 1.1. (1.1) lineer bileşimine ilişkin bazı çalışmalar

	$X_1 X_2 = X_2 X_1$	$X_1 X_2 \neq X_2 X_1$
$X^2 = X$	$X_i^2 = X_i$ [5]	$X_i^2 = X_i$ [5]
	$X_1^2 = X_1$ ve $X_2^3 = X_2$ [6]	$X_1^2 = X_1$ ve $X_2^3 = X_2$ [6]
	$X_i^2 = I_n$ [7]	$X_i^2 = I_n$ [7]
	$X_1^3 = X_1$ ve $X_2^2 = I_n$ [8]	$X_1^3 = X_1$ ve $X_2^2 = I_n$ [8]
	$X_i^3 = X_i$ [9]	
	$X_1^2 = X_1$ ve $X_2^k = X_2$ [10]	$X_1^2 = X_1$ ve $X_2^k = X_2$ [11]
$X^2 = I_n$	$X_i^2 = X_i$ [7]	$X_i^2 = X_i$ [7]
	$X_i^2 = I_n$ [7]	$X_i^2 = I_n$ [7]
	$X_i^3 = X_i$ [7]	
	$X_1^3 = X_1$ ve $X_2^2 = I_n$ [8]	$X_1^3 = X_1$ ve $X_2^2 = I_n$ [8]
$X = X^\#$	$X_i^2 = X_i$ [12] [13]	$X_i^2 = X_i$ [12] [13]
$X = X^\dagger$	$X_i = X_i^\dagger$ [14]	$X_i = X_i^\dagger$ [14]
$X^3 = X$	$X_i^2 = I_n$ [7]	
	$X_i^3 = X_i$ [9] [15]	
$X^2 = X^*$	$X_i^2 = X_i^*$ [16] [17]	$X_i^2 = X_i^*$ [16] [17]
$X^2 = X^\dagger$	$X_i^2 = X_i^\dagger$ [18]	

Tablo 1.1. (Devamı)

	$X_1X_2 = X_2X_1$	$X_1X_2 \neq X_2X_1$
$X^k = X$	$X_i^2 = I_n$ [19]	
$X^k = X^*$	$X_i^k = X_i^*$ [17]	
	$X_i^2 = X_i = X_i^*$ [17]	
$X^{k-1} = X^\#$	$X_i^2 = X_i$ [20]	$X_i^2 = X_i$ [20]
$KX^{k+1}K = X, K^2 = I_n$	$KX_i^{k+1}K = X_i, K^2 = I_n$ [21]	
$(X - \alpha I_n)(X - \beta I_n) = \mathbf{0},$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq \beta$	$(X_i - \alpha_i I_n)(X_i - \beta_i I_n) = \mathbf{0},$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha_i \neq \beta_i$ [22]	$(X_i - \alpha_i I_n)(X_i - \beta_i I_n) = \mathbf{0},$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha_i \neq \beta_i$ [22]
$(X - \alpha P)(X - \beta P) = \mathbf{0},$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq \beta, P^2 = P$	$(X_i - \alpha_i I_n)(X_i - \beta_i I_n) = \mathbf{0},$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha_i \neq \beta_i$ [23]	

Tablo 1.2. (1.2) lineer bileşimine ilişkin bazı çalışmalar

	$X_1X_2 = X_2X_1$	$X_1X_2 = X_2X_1$	$X_1X_2 = X_2X_1$	$X_1X_2 = X_2X_1$
	$X_1X_3 = X_3X_1$	$X_1X_3 = X_3X_1$	$X_1X_3 \neq X_3X_1$	$X_1X_3 \neq X_3X_1$
	$X_2X_3 = X_3X_2$	$X_2X_3 \neq X_3X_2$	$X_2X_3 = X_3X_2$	$X_2X_3 \neq X_3X_2$
$X^2 = X$	$X_j^2 = X_j$	$X_j^2 = X_j$	$X_j^2 = X_j$	$X_j^2 = X_j$
	$X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [24]	$X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [24]	$X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [24]	$X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [24]
	$X_j^2 = X_j$ [25] [26]	$X_j^2 = X_j$ [25] [26]	$X_j^2 = X_j$ [25]	$X_j^2 = X_j$ [25]
$X^3 = X$	$X_i^2 = I_n$ ve $X_3^3 = X_3$ [27] $X_i^3 = X_i$ ve $X_3^2 = I_n$ [28]			

Literatürde özel matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu problemlerinde kullanılan iki ana yöntem vardır. Birinci yöntemde lineer bileşimdeki matrisler sağdan veya soldan uygun matrisler ile çarpılarak, diğer bir deyişle doğrudan

aritmetik ve cebirsel işlemlerle ilerleyerek, matrisler ve katsayılar üzerinde bazı kısıtlayıcı eşitlikler elde edilir. Sonuçlar, elde edilen bu eşitliklerin teker teker ele alınmasıyla ortaya konulur. İkinci yöntemde ise lineer bileşimdeki matrisler benzerlik dönüşümü yardımıyla bloklara ayrılır ve problem ilgili matrislere karşılık gelen blok matrisler üzerinden çözülür. İlk yöntem sezgiye dayalı bir yöntemdir. Çünkü lineer bileşimdeki matrislerin sağdan veya soldan çarpılacağı uygun matrisleri bulmak kolay değildir. Dolayısıyla bu yöntemle ilerlemek her zaman kolay olmamaktadır. Bununla birlikte her iki yöntemde sistematik bir yapısının olmayışından ötürü problemler şu ana kadar sadece iki veya üç matris içeren lineer bileşimler için ele alınabilmiştir. Tablo 1.1. ve Tablo 1.2. ye dikkat edilirse, (1.1) lineer bileşiminin birçok farklı özel tipli matris için ele alındığı, ancak (1.2) lineer bileşiminin ise şimdilik sadece idempotent ve tripotent matrisler için çalışıldığı görülmektedir. Dört ve üzeri sayıda matris içeren lineer bileşimleri ele alan bir çalışmaya ise literatürde henüz rastlanılmamaktadır. Bununla birlikte yine Tablo 1.1. ve Tablo 1.2.'den görülmektedir ki problemler ya sadece değişmeli matrisler için ele alınmış, ya da hem değişmeli hem de değişmesiz durum ele alınmış olsa bile değişmeli durumun karakterizasyonu ile ilgili sonuçlar ayrıca verilmiştir. Her iki durumu da ele alan çalışmalar incelendiğinde, elde edilen sonuçların büyük kısmının değişmeli durumun karakterizasyonundan elde edilmiş olduğu görülmektedir.

Özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin yine ne zaman özel tipli matris olacağı problemi, karşılıklı olarak değişmelilik kabulü altında spektrumları belli kümelerin alt kümeleri olan matrislerin lineer bileşimlerinin spektrumunun ne zaman belli bir kümenin alt kümesi olacağı problemine denktir. Örneğin, 2000 yılında Baksalary ve Baksalary [5] tarafından ele alınan iki idempotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliği probleminin değişmelilik koşulunu içeren kısmı,  $\sigma(X_1) \subseteq \{1, 0\}$ ,  $\sigma(X_2) \subseteq \{1, 0\}$ , ve  $X_1 X_2 = X_2 X_1$  olacak şekilde matrislerin  $c_1 X_1 + c_2 X_2 = X$  biçimli lineer bileşiminin spektrumu  $\sigma(X)$ , ne zaman  $\sigma(X) \subseteq \{1, 0\}$  biçiminde olur problemine denktir. Tablo 1.1. ve Tablo 1.2.'de listelenen matrislerin iki ortak özelliği köşegenleştirilebilir olmaları ve spektrumlarının belli kümelerin alt kümeleri olmasıdır.

Kişi ve Özdemir bu problemi en genel haliyle ele aldı ve sonlu sayıda değişmeli köşegenleştirilebilir matrisin lineer bileşiminin spektrumunu belirlemek için bir kombinatorik yöntem geliştirdi [28]. Yöntem, katsayıları lineer bileşimdeki matrislerin spektrumlarından seçilen lineer denklem sistemlerinin çözümüne dayalıdır. Bu geliştirilen yöntem yardımıyla özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu problemleri sonlu sayıda matrisin lineer bileşimi için çözülebilmektedir. Ancak lineer bileşimdeki matrislerin sayısı arttıkça çözülmesi gereken lineer denklem sistemlerinin sayısı da üstel olarak arttığından, belli bir noktadan sonra gerekli hesaplamaların sayısı el ile yapılamayacak kadar büyük olmaktadır.

### 1.3. Ele Alınan Problem

Bu çalışmada [28] de verilen yöntem temel alınarak bir algoritma geliştirildi ve bu algoritmanın *Mathematica* 9.0 paket programındaki uygulama kodları Ek A'da verildi. Böylece özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu problemleri bilgisayar vasıtasıyla çözülebilir hale gelmiştir. Ayrıca geliştirilen algoritma yardımıyla aşağıdaki problemler çözüldü. Elde edilen sonuçlardan literatürdeki bir çok sonuç türetilmektedir. Problemler algoritma yardımıyla çözüldüğünden, ispatları program çıktısı olarak (Ek B) verilmektedir. Ele alınan problemler şunlardır:

- a. İki değişmeli kübik matrisin lineer bileşiminin kübikliği,
- b. İki değişmeli kuadripotent matrisin lineer bileşiminin kuadripotentliği,
- c. Karşılıklı değişmeli üç tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği,
- d. Karşılıklı değişmeli dört involutif matrisin lineer bileşiminin tripotentliği.

İlk problemde elde edilen sonuçlar [15] de tripotent matrisler için ortaya konan sonuçların bir genellemesidir. Kuadripotent matrislerin kümesi genelleştirilmiş ve hipergenelleştirilmiş projektör matrisler kümelerini kapsadığından, ikinci problemde elde edilen sonuçlardan [16], [17], ve [18] çalışmalarında elde edilen sonuçlar üretilebilmektedir. Üçüncü problemde elde edilen sonuçlardan da, [27] ve [28]



çalışmalarındaki sonuçlar üretilebilmektedir. Dördüncü problem ise literatürde dört matrisli lineer bileşimin ele alındığı ilk çalışmadır.

## BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, içerikte kullanılacak olan birçok temel kavram ve ispatları verilmeksizin teoremler verilecektir.

### 2.1. Matrisler, Rank ve Lineer Denklem Sistemleri

**Tanım 2.1.**  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , skalerlerinin  $m$  satır ve  $n$  sütun olarak

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki dikdörtgensel düzenlemesine bir  $m \times n$  boyutlu matris denir.  $A$  matrisinin  $i$ . satır  $j$ . sütun konumunda bulunan elemanı  $a_{ij}$  ile gösterilir [29].

**Tanım 2.2.**  $D \in \mathbb{C}_n$  olsun.  $i \neq j$  için  $d_{ij} = 0$  ise,  $D$  matrisine *köşegen matris* denir [29].

**Tanım 2.3.**  $A, B \in \mathbb{C}_n$  olsun. Eğer  $AB = BA = I_n$  ise,  $B$  matrisine  $A$  matrisinin *tersi* ve  $A$  matrisine de *tersinirdir* denir ve  $B = A^{-1}$  şeklinde gösterilir [29].

**Tanım 2.4.**  $A_i \in \mathbb{C}_{n_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i = n$  olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{bmatrix}$$

biçimdeki blok köşegen matrisine  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , matrislerinin *direkt toplamı* denir ve  $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$  şeklinde gösterilir [29].

**Tanım 2.5.**  $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$  olsun.  $A$  matrisinin sıfırdan farklı her bir satırının ilk sıfırdan farklı elemanına *baş eleman* denir. Aşağıdaki üç koşulu sağlayan matrise *satır indirgenmiş eşelon biçimdedir* denir:

- i. Tüm sıfır satırlar sıfırdan farklı satırların altında yer almaktadır.
- ii. Her sıfırdan farklı  $i$ . satır,  $i \leq m-1$ , için  $(i+1)$ . satır ya sıfırdır ya da baş elemanının bulunduğu sütun,  $i$ . satırın baş elemanının bulunduğu sütunun sağında yer almaktadır.
- iii.  $a_{ik}$ ,  $i$ . satırın baş elemanı ise  $a_{ik} = 1$  dir ve  $k$ . sütunun diğer elemanları sıfırdır [29].

**Tanım 2.6.** Aşağıdaki işlemlere bir matris üzerindeki *elementer satır işlemleri* denir.

- i. Bir satırın bir katını başka bir satıra eklemek.
- ii. İki satırın yerlerini değiştirmek.
- iii. Bir satırı sıfırdan farklı bir skaler ile çarpmak [29].

**Tanım 2.7.** Eğer,  $A$  matrisini  $B$  matrisine dönüştüren bir dizi elementer satır işlemi var ise  $A$  matrisi  $B$  matrisine *satırca denktir* denir [29].

**Tanım 2.8.** Bir  $A$  matrisine satırca denk olan satır indirgenmiş eşelon biçimdeki matrise  $A$ 'nın satır indirgenmiş eşelon biçimi denir ve  $SIEB(A)$  ile gösterilir [29].

**Teorem 2.9.** Her matrisin satır indirgenmiş eşelon biçimi vardır ve tektir [29].

**Tanım 2.10.** Bir  $A$  matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satır sayısına  $A$  matrisinin *rankı* denir ve  $rk(A)$  ile gösterilir [29].

**Teorem 2.11.**  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$  vektörleri  $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$  matrisinin sütunları olmak üzere  $A$  matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi genelliği bozmaksızın aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(k+1)} & b_{1(k+2)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2(k+1)} & b_{2(k+2)} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{k(k+1)} & b_{k(k+2)} & \cdots & b_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Bu durumda  $\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2}, \dots, \mathbf{a}_n$  vektörleri  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  vektörlerinin lineer bileşimi olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir [30]:

$$\begin{aligned} b_{1(k+1)}\mathbf{a}_1 + b_{2(k+1)}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{k(k+1)}\mathbf{a}_k &= \mathbf{a}_{k+1} \\ b_{1(k+2)}\mathbf{a}_1 + b_{2(k+2)}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{k(k+2)}\mathbf{a}_k &= \mathbf{a}_{k+2} \\ &\vdots \\ b_{1n}\mathbf{a}_1 + b_{2n}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{kn}\mathbf{a}_k &= \mathbf{a}_n \end{aligned}$$

**Tanım 2.12.**  $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}$  skalerler ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bilinmeyenler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

biçimindeki bir eşitliğe *linear denklem* denir.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  skalerlerine denklemin *katsayıları* ve  $b$  skalerine denklemin *sabit terimi* denir. Linear denklemi sağlayan bir

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$  vektörüne lineer denklemin bir *çözümü* denir. Bilinmeyenleri aynı olan sonlu tane lineer denklemin

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklindeki topluluğuna bir  $m$  denklemlilik  $n$  bilinmeyenli *lineer denklem sistemi* veya kısaca *lineer sistem* denir. Bir lineer sistemin her bir denklemini aynı anda sağlayan bir vektöre lineer sistemin bir *çözümü* denir [29].

**Tanım 2.13.** Bir lineer sistem en az bir çözüme sahip ise *tutarlı* aksi halde *tutarsız* olarak adlandırılır. Çözüm kümeleri aynı olan lineer sistemlere *denk sistemler* denir [29].

**Tanım 2.14.** (2.1) lineer sistemi  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  ve  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

olmak üzere  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  şeklindeki matris-vektör eşitliği ile ifade edilsin. Burada  $A$ 'ya katsayılar matrisi,  $\mathbf{x}$ 'e bilinmeyenler vektörü ve  $\mathbf{b}$ 'ye sabitler vektörü (sağ yan

vektörü) denir.  $\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$  matrisine ise (2.1) lineer sisteminin *ekli*

*matrisi* denir ve  $[A \mid \mathbf{b}]$  ile gösterilir [29].

**Teorem 2.15.**  $[C \mid \mathbf{d}]$  ekli matrisi  $[A \mid \mathbf{b}]$  ekli matrisinden bir dizi elementer satır işlemleri uygulanmasıyla elde edilmiş olsun. Bu durumda  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ve  $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$  lineer sistemleri denk sistemlerdir [29].

**Teorem 2.16.**  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineer sisteminin katsayılar matrisi  $A$ ,  $m \times n$  boyutlu,  $rk(A) = p$  ve  $rk([A \mid \mathbf{b}]) = q$  olsun. Bu durumda;

- i.  $p < q$  ise sistemin çözümü yoktur,
- ii.  $p = q = n$  ise sistemin tek çözümü vardır,
- iii.  $p = q < n$  ise sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır [30].

**Tanım 2.17.**  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineer sisteminin katsayılar matrisi  $A$ ,  $m \times n$  boyutlu olsun.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineer sistemine;

- i.  $m < n$  ise *eksik*,
- ii.  $m = n$  ise *kare*,
- iii.  $m > n$  ise *aşkın* lineer sistem denir [31].

**Teorem 2.18.**  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineer sistemi eksik bir sistem ise, bu durumda ya tutarsızdır ya da sonsuz çoklukta çözümü vardır [31].

**Teorem 2.19.**  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  lineer sistemi aşkın bir sistem ise, bu durumda en az bir  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$  için tutarsızdır [31].

Literatürde,  $A$ ,  $B$  ve  $C$  matrisleri sırasıyla  $m \times n$ ,  $p \times q$  ve  $m \times q$  boyutlu bilinenler matrisleri ve  $X$  bir  $n \times p$  boyutlu bilinmeyenler matrisi olmak üzere  $AXB = C$  şeklindeki denkleme, bir *lineer matris denklemi* denilmektedir.  $p = q$  ve  $B = I_p$  olması durumunda da, yani  $AX = C$  denklemine de, *katlı sağ yanlı lineer denklem sistemi* denilmektedir.

Lineer sistemlerinin çözümü ve aşkın lineer sistemin tanımı göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç hemen görülür.

**Sonuç 2.20.**  $AX = B$  bir katlı sağ yanlı aşkın lineer sistem olsun. Bu durumda  $AX = B$  lineer sisteminin çözüm kümesi, onun tüm alt kare lineer sistemlerinin çözüm kümelerinin kesişimidir.

## 2.2. Matrislerin Köşegenleştirilmesi

**Tanım 2.21.**  $A \in \mathbb{C}_n$  olsun. Eğer bir  $\lambda \in \mathbb{C}$  skaleri ve sıfırdan farklı  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  vektörü

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

denklemini sağlıyorsa  $\lambda$  skalerine  $A$  matrisinin bir *özdeğeri* ve  $\mathbf{x}$  vektörüne de  $A$  matrisinin  $\lambda$  özdeğeri ile ilişkili bir *özvektörü* denir [32].

**Tanım 2.22.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine  $A$  matrisinin *spektrumu* denir ve  $\sigma(A)$  ile gösterilir [32].

**Tanım 2.23.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisinin *karakteristik polinomu*  $p_A(t) = \det(tI - A)$  olarak tanımlanır.  $p_A(t) = 0$  denkleminde  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisinin *karakteristik denklemi* denir [32].

**Teorem 2.24.**  $A \in \mathbb{C}_n$  ve  $p_A(t)$   $A$  matrisinin karakteristik denklemi olsun. Eğer  $p_A(\lambda) = 0$  ise  $\lambda$   $A$  matrisinin bir özdeğeridir [32].

**Teorem 2.25.**  $A \in \mathbb{C}_n$  olsun.  $A$  matrisi, polinomda yazıldığında sıfıra eşit olan minimum dereceli bir  $q_A(t)$  monik (en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan) polinomu vardır. Bu polinomun derecesi en fazla  $n$  olabilir. Eğer  $p(t)$ ,  $p(A) = \mathbf{0}$  olacak şekilde herhangi bir polinom ise,  $q_A(t)$  polinomu  $p(t)$  polinomunu böler [32].

**Tanım 2.26.**  $A \in \mathbb{C}_n$  olsun.  $A$  matrisi, polinomda yazıldığında sifıra eşit olan minimum dereceli  $q_A(t)$  monik polinomuna  $A$  matrisinin *minimal polinomu* denir [32].

**Tanım 2.27.**  $A, B \in \mathbb{C}_n$  olsun. Eğer  $A = S^{-1}BS$  olacak biçimde bir  $S \in \mathbb{C}_n$  tersinir matrisi var ise,  $A$  matrisi  $B$  matrisine *benzerdir* denir [32].

**Tanım 2.28.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi bir köşegen matrise benzer ise,  $A$  matrisine *köşegenleştirilebilirdir* denir [32].

**Teorem 2.29.**  $A \in \mathbb{C}_n$  olmak üzere  $q_A(t)$ ;  $A$  matrisinin minimal polinomu olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

- i.  $q_A(t)$  polinomu farklı lineer çarpanların çarpımıdır.
- ii.  $A$  matrisinin her bir özdeğeri  $q_A(t) = 0$  denkleminin bir tek katlı köküdür.
- iii.  $A$  matrisi köşegenleştirilebilirdir [32].

**Tanım 2.30.**  $A, B \in \mathbb{C}_n$  olsun. Eğer  $S^{-1}AS$  ve  $S^{-1}BS$  matrislerinin ikisi de köşegen olacak şekilde bir  $S \in \mathbb{C}_n$  tersinir matrisi var ise,  $A$  ve  $B$  matrislerine *eşzamanlı köşegenleştirilebilirdir* denir [32].

**Teorem 2.31.**  $A, B \in \mathbb{C}_n$  matrisleri köşegenleştirilebilir olsun.  $A$  ve  $B$  matrislerinin eşzamanlı köşegenleştirilebilir olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A$  ve  $B$  matrislerinin değişmeli, yani  $AB = BA$ , olmasıdır [32].

Tanım 2.30 dikkate alındığında aşağıdaki sonuç hemen elde edilir.



**Sonuç 2.32.**  $A, B \in \mathbb{C}_n$  matrisleri eşzamanlı köşegenleştirilebilir matrisler,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ve  $c_1A + c_2B = C$  olsun. Bu durumda  $C$  lineer bileşim matrisi de  $A$  ve  $B$  matrisleri ile eşzamanlı köşegenleştirilebilirdir.

### 2.3. Bazı Özel Tipli Matrisler ve Bu Matrislerin Bazı Özellikleri

**Tanım 2.33.**  $A \in \mathbb{C}_n$  olmak üzere  $rk(A^k) = rk(A^{k+1})$  olacak biçimdeki en küçük  $k$  pozitif tam sayısına  $A$  matrisinin *indisi* denir ve  $ind(A)$  ile gösterilir [33].

**Tanım 2.34.**  $A \in \mathbb{C}_n$  olmak üzere

$$AXA = A \quad (2.2)$$

$$XAX = X \quad (2.3)$$

$$(AX)^* = AX \quad (2.4)$$

$$(XA)^* = XA \quad (2.5)$$

$$AX = XA \quad (2.6)$$

$$A^k = XA^{k+1}, k = ind(A) \quad (2.7)$$

eşitliklerinden (2.2), (2.3), (2.4), ve (2.5)'i sağlayan tek bir  $X$  matrisi vardır, buna  $A$  matrisinin *Moore-Penrose* tersi denir ve  $A^\dagger$  ile gösterilir. (2.2), (2.3), ve (2.6) eşitliklerini sağlayan bir  $X$  matrisi varsa bu matris *tektir*, buna  $A$  matrisinin *grup* tersi denir ve  $A^\#$  ile gösterilir. (2.3), (2.6), ve (2.7) eşitliklerini sağlayan bir  $X$  matrisi varsa bu matris *tektir*, buna  $A$  matrisinin *Drazin* tersi denir ve  $A^D$  ile gösterilir (Grup ters, Drazin tersin  $k=1$  özel halidir) [33].

**Teorem 2.35.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisinin Grup terse sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $rk(A) = rk(A^2)$  olmasıdır [33].

**Tanım 2.36.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi  $AA^* = A^*A$  özelliğini sağlıyor ise  $A$  matrisine *normal* matris denir [29].

**Teorem 2.37.**  $A \in \mathbb{C}_n$  bir normal matris ise  $A$  matrisi köşegenleştirilebilirdir [29].

**Tanım 2.38.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi  $AA^\dagger = A^\dagger A$  özelliğini sağlıyor ise  $A$  matrisine *EP matris* denir [34].

**Tanım 2.39.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi  $A^k = A$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , özelliğini sağlıyor ise,  $A$  matrisine *k-potent* denir.  $k = 2$ ,  $k = 3$  ve  $k = 4$  olması özel durumlarında  $A$  matrisine, sırasıyla, *idempotent*, *tripotent* ve *kuadripotent* matris denir [35].

**Teorem 2.40.**  $A \in \mathbb{C}_n$  bir  $k$ -potent matris ve  $\Omega_k = \{a \mid a^k = 1, a \in \mathbb{C}\}$  olsun. Bu durumda,  $A$  matrisi köşegenleştirilebilirdir ve  $\sigma(A) \subseteq \Omega_k \cup \{0\}$  dır. Özel olarak,  $k = 2$  için  $\sigma(A) \subseteq \Omega_2 = \{1, 0\}$ ,  $k = 3$  için  $\sigma(A) \subseteq \Omega_3 = \{1, -1, 0\}$ , ve  $k = 4$  için  $\sigma(A) \subseteq \Omega_4 = \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}, 1, 0\}$  dır [35].

**Tanım 2.41.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi  $A = A^{-1}$  özelliğini ( $A^2 = I_n$ ) sağlıyor ise,  $A$  matrisine *involutif* matris denir [33].

**Teorem 2.42.**  $A \in \mathbb{C}_n$  bir involutif matris olsun. Bu durumda  $A$  matrisi köşegenleştirilebilirdir ve  $\sigma(A) \subseteq \{1, -1\}$  dır [33].

**Tanım 2.43.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi  $A = A^\#$  özelliğini sağlıyor ise,  $A$  matrisine *grup involutif* matris denir [33].

**Teorem 2.44.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi için  $A = A^\#$  olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A^3 = A$  olmasıdır [33].

**Tanım 2.45.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi  $A = A^\dagger$  özelliğini sağlıyor ise,  $A$  matrisine *genelleştirilmiş involutif* matris denir [14].

**Teorem 2.46.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi için  $A = A^\dagger$  olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A^3 = A$  olmasıdır [14].

**Tanım 2.47.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisine  $A^2 = A^*$  özelliğini sağlıyor ise *genelleştirilmiş projektör*,  $A^2 = A^\dagger$  özelliğini sağlıyor ise *hipergenelleştirilmiş projektör* denir [34].

**Teorem 2.48.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi için  $A^2 = A^*$  olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A^4 = A$  ve  $AA^* = A^*A$  olmasıdır [34].

**Teorem 2.49.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi için  $A^2 = A^\dagger$  olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A^4 = A$  ve  $AA^\dagger = A^\dagger A$  olmasıdır [34].

**Tanım 2.50.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisine  $A^k = A^*$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ve  $k \geq 2$ , özelliğini sağlıyor ise *k-genelleştirilmiş projektör* denir [17].

**Teorem 2.51.**  $A \in \mathbb{C}_n$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- i.  $A$  matrisi  $k$ -genelleştirilmiş projektördür.
- ii.  $AA^* = A^*A$  ve  $\sigma(A) \subseteq \Omega_{k+1} \cup \{0\}$  dir.
- iii.  $AA^* = A^*A$  ve  $A^{k+2} = A$  dır [17].

**Sonuç 2.52.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisi  $k$ -genelleştirilmiş projektör ise, bu durumda  $A^\dagger = A^\# = A^D = A^* = A^{m(k+1)+k}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  dır [17].

**Tanım 2.53.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisine  $A^k = A^\dagger$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ve  $k \geq 2$ , özelliğini sağlıyor ise *k-hipergenelleştirilmiş projektör* denir [36].

**Teorem 2.54.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisinin  $k$ -hipergenelleştirilmiş projektör olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $AA^\dagger = A^\dagger A$  ve  $A^{k+2} = A$  olmasıdır [36].

**Sonuç 2.55.**  $k$ -genelleştirilmiş projektörlerin kümesi  $k$ -hipergenelleştirilmiş projektörlerin kümesinin alt kümesidir.  $k$ -hipergenelleştirilmiş projektörlerin kümesi de  $(k+2)$ -potent matrislerin kümesinin alt kümesidir [36].

**Tanım 2.56.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisine  $A^{k-1} = A^\#$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ve  $k \geq 2$ , özelliğini sağlıyor ise  $\{k\}$ -grup periyodik denir [20].

**Teorem 2.57.** Bir  $A \in \mathbb{C}_n$  matrisinin  $\{k\}$ -grup periyodik olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A^{k+1} = A$  olmasıdır [20].

**Tanım 2.58.**  $A, K \in \mathbb{C}_n$  ve  $K^2 = I_n$  olmak üzere  $KA^{s+1}K = A$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , özelliğini sağlayan  $A$  matrisine  $\{K, s+1\}$ -potent matris denir [21].

**Teorem 2.59.**  $A \in \mathbb{C}_n$  bir  $\{K, s+1\}$ -potent matris olsun. Bu durumda  $A$  matrisi köşegenleştirilebilirdir ve  $\sigma(A) \subseteq \Omega_{(s+1)^2-1} \cup \{0\}$  dir [21].

**Tanım 2.60.**  $A \in \mathbb{C}_n$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) = \mathbf{0}$  özelliğini sağlayan  $A$  matrisine  $\{\alpha, \beta\}$ -kuadratik matris denir [37].

**Teorem 2.61.**  $A \in \mathbb{C}_n$  bir  $\{\alpha, \beta\}$ -kuadratik matris olsun. Bu durumda  $A$  matrisi köşegenleştirilebilirdir ve  $\sigma(A) \subseteq \{\alpha, \beta\}$  dir [37].

**Tanım 2.62.**  $A, P \in \mathbb{C}_n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ve  $P^2 = P$  olmak üzere  $(A - \alpha P)(A - \beta P) = \mathbf{0}$  özelliğini sağlayan  $A$  matrisine  $\{\alpha, \beta\}$ -genelleştirilmiş kuadratik matris denir [23].

**Teorem 2.63.**  $A \in \mathbb{C}_n$  bir  $\{\alpha, \beta\}$ -genelleştirilmiş kuadratik matris olsun. Bu durumda  $A$  matrisi köşegenleştirilebilirdir ve  $\sigma(A) \subseteq \{\alpha, \beta, 0\}$  dir [23].

**Tanım 2.64.**  $A \in \mathbb{C}_n$  ve  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)(A - \gamma I_n) = \mathbf{0}$  özelliğini sağlayan  $A$  matrisine  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ -kübik matris denir.

**Teorem 2.65.**  $A \in \mathbb{C}_n$  bir  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ -kübik matris olsun. Bu durumda  $A$  matrisi köşegenleştirilebilir ve  $\sigma(A) \subseteq \{\alpha, \beta, \gamma\}$  dir.

İdempotent matrislerin  $\{1, 0\}$ -kuadratik, involutif matrislerin  $\{1, -1\}$ -kuadratik, ve tripotent matrislerin de  $\{1, -1, 0\}$ -kübik matrisler olduğu açıktır. Dolayısıyla  $\{\alpha, \beta\}$ -kuadratik matrislerin kümesi idempotent ve involutif matrislerin kümesini ve  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ -kübik matrislerin kümesi de tripotent matrislerin kümesini kapsamaktadır.

# BÖLÜM 3. SONLU SAYIDA DEĞİŞMELİ KÖŞEĞENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMİNİN SPEKTRUMUNUN KARAKTERİZE EDİLMESİ

## 3.1. Giriş

Bu bölümde önce Kişi ve Özdemir tarafından sonlu sayıda değişmeli köşegenleştirilebilir matrisin lineer bileşiminin spektrumunu karakterize etmek için [28] de verilen kombinatorik yöntem açıklanacak ve akabinde bu yöntem temel alınarak geliştirilen algoritma verilecektir.

## 3.2. Sonlu Sayıda Değişmeli Köşegenleştirilebilir Matrisin Lineer Bileşiminin Spektrumunu Karakterize Etmek İçin Bir Kombinatorik Yöntem

$X_i \in \mathbb{C}_n$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri  $\sigma(X_i) \subseteq \{\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{n_i}^{(i)}\}$ ,  $n_i \leq n$ , olacak biçimde değişmeli köşegenleştirilebilir matrisler ve  $c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , olsun. Ele alınan problem  $X_i$  matrislerinin

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m = X \quad (3.1)$$

lineer bileşiminin  $\sigma(X) \subseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_x}\}$ ,  $n_x \leq n$ , olacak biçimde bir  $X$  matrisi olduğu durumları karakterize etmektir.  $X_i$  matrisleri köşegenleştirilebilir ve değişmeli olduklarından, Teorem 2.31'a göre eşzamanlı köşegenleştirilebilir matrislerdir. Bu durumda,  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrislerine karşılık gelen köşegen

matrisler ve  $\Lambda$  matrisi  $X$  matrisine karşılık gelen köşegen matris olmak üzere, Sonuç 2.32'e göre

$$\begin{aligned} c_1 S^{-1} X_1 S + c_2 S^{-1} X_2 S + \cdots + c_m S^{-1} X_m S &= S^{-1} X S \\ c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + \cdots + c_m \Lambda_m &= \Lambda \end{aligned} \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir  $S$  tersinir matrisi vardır. (3.2) lineer bileşiminin açık biçimi, genelliği bozmaksızın

$$c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_{n_1}^{(1)} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_1^{(2)} & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_{n_2}^{(2)} \end{bmatrix} + \cdots + c_m \begin{bmatrix} \lambda_1^{(m)} & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^{(m)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_{n_m}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_{n_x} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde. (3.3) denkleminde görüldüğü üzere (3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonu, bilinmeyenleri  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , skalerleri olan lineer sistemlerin çözümüne dayalıdır. Bunun için önce tüm olası lineer denklem sol yanları belirlenmeli, bununla birlikte tüm olası sabit terimlerin içerildiği katlı sağ yanlar oluşturulmalı ve sonrasında bu lineer denklem sol yanları vasıtasıyla tüm olası lineer sistem sol yanları oluşturulup uygun boyutlu katlı sağ yanlarının eklenmesiyle meydana gelen lineer sistemler çözülmelidir.

(3.3) denkleminde görüldüğü üzere  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , bilinmeyenlerinin katsayıları karşılık gelen  $\sigma(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , kümelerinden gelmektedir. Dolayısıyla her  $c_i$  bilinmeyi için  $n_i$  farklı katsayı vardır. Böylece çarpım kuralından  $n_1 n_2 \cdots n_m$  farklı lineer denklem sol yanı elde edilir. Lineer sistemlerin sol yanları bu  $n_1 n_2 \cdots n_m$  farklı lineer denklem sol yanlarının, önce birli, sonra ikili ve böyle devam ederek en son  $m$ 'li kombinasyonlarının ele alınmasıyla oluşturulur. Lineer sistemlerin sağ yanları ise sabit terimleri  $\sigma(X)$  kümesinden seçilen ve tüm olası sabit terimlerin içerildiği

uygun boyutlu katlı sağ yanlardır. Bir denklemlili sistemlerin katlı sağ yanı  $1 \times n_x$  boyutlu, iki denklemlili sistemlerin katlı sağ yanı  $2 \times n_x^2$  boyutlu ve böyle devam ederek en son  $m$  denklemlili sistemlerin katlı sağ yanı  $m \times n_x^m$  boyutlu matrislerdir.

Lineer sistemlerin oluşturulma sürecinde sadece eksik ve kare lineer sistemler ele alınmalıdır. Çünkü Sonuç 2.20'den bilindiği üzere bir katlı sağ yanlı aşkın lineer sistemin çözümleri bu lineer sistemin tüm alt kare lineer sistemlerinin çözümlerinin kesişimidir. Tüm olası kare lineer sistemlerin çözümleri elde edilmiş olduğundan, aşkın lineer sistemlerin çözümleri bu mevcut çözümlerin kesişimi olacaktır. Bu nedenle aşkın lineer sistemleri ele almak yeni sonuçlar ortaya koymayacaktır. Dolayısıyla (3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonunu elde etmek için  $\binom{n_1 n_2 \cdots n_m}{1} + \binom{n_1 n_2 \cdots n_m}{2} + \cdots + \binom{n_1 n_2 \cdots n_m}{m}$  sayıda lineer sistemi çözmek yeterlidir.

Bu yöntemin avantajlarından biri de daha lineer bileşimin karakterizasyonuna başlamadan önce elde edilecek olan sonuç sayısı için bir üst sınırın belli olmasıdır.

Örneğin,  $\sigma(X_1) \subseteq \{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}\}$ ,  $\sigma(X_2) \subseteq \{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}\}$ ,  $\sigma(X_3) \subseteq \{\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \lambda_3^{(3)}, \lambda_4^{(3)}\}$  ve  $\sigma(X_4) \subseteq \{\lambda_1^{(4)}, \lambda_2^{(4)}, \lambda_3^{(4)}\}$  olacak biçimdeki  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , matrislerinin  $c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 = X$  şeklindeki lineer bileşiminin spektrumu ne zaman  $\sigma(X) \subseteq \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  şeklinde olur problemini ele alalım. Yukarıda verilen yöntem ışığında, önce  $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 72$  farklı lineer denklem sol yanı oluşturulmalıdır. Sonra bu lineer denklem sol yanları ile  $\binom{72}{1} + \binom{72}{2} + \binom{72}{3} + \binom{72}{4} = 1091058$  farklı lineer sistem sol yanları ve  $1 \times 3$ ,  $2 \times 9$ ,  $3 \times 27$  ve  $4 \times 81$  boyutlu katlı sağ yanlar oluşturulmalıdır. Sonra lineer sistem sol yanları, uygun boyutlu katlı sağ yanlar ile bir araya getirilerek tüm olası lineer sistemler oluşturulup çözümlenmelidir. Örneğin, bu oluşturulan lineer sistemlerden biri aşağıdaki gibidir.



$$\begin{bmatrix} \lambda_2^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \lambda_1^{(3)} & \lambda_1^{(4)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \lambda_3^{(3)} & \lambda_2^{(4)} \\ \lambda_3^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \lambda_4^{(3)} & \lambda_3^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & & \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{3 \times 27} \quad (3.4)$$

Her bir lineer sisteme karşılık gelen  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri olduğu unutulmamalıdır. Örneğin, (3.4) lineer sistemine karşılık gelen  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , matrisleri  $r_1 + r_2 + r_3 = n$  olmak üzere,

$$\Lambda_1 = \lambda_2^{(1)} I_{r_1} \oplus \lambda_2^{(1)} I_{r_2} \oplus \lambda_3^{(1)} I_{r_3}, \quad \Lambda_2 = \lambda_1^{(2)} I_{r_1} \oplus \lambda_2^{(2)} I_{r_2} \oplus \lambda_2^{(2)} I_{r_3},$$

$$\Lambda_3 = \lambda_1^{(3)} I_{r_1} \oplus \lambda_3^{(3)} I_{r_2} \oplus \lambda_4^{(3)} I_{r_3}, \quad \Lambda_4 = \lambda_1^{(4)} I_{r_1} \oplus \lambda_2^{(4)} I_{r_2} \oplus \lambda_3^{(4)} I_{r_3}$$

biçimindedir.

Lineer bileşimin karakterizasyonu  $c_i$  skalerleri ve  $X_i$  matrisleri üzerindeki şartlar belirlenerek elde edilmektedir. Lineer sistemlerin çözümleri, lineer bileşimin karakterizasyonunda ilk aşamada  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , skalerleri ile ilgili şartları ortaya koymaktadır.  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri ile ilgili sağlanması gereken şartlar için ise iki farklı durum vardır (Tutarsız lineer sistemlerden bir sonuç elde edilmeyeceğinden bu durum hariç tutulmuştur).

Sonsuz çözüme sahip lineer sistemlerde  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri ile ilgili şartlar Teorem 2.11 yardımıyla elde edilir. Örneğin, (3.4) lineer sisteminin katsayılar matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

Bu durumda, bu sonucun matrisler ile ilgili şartı  $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = X_4$  şeklindedir.

Tek çözüme sahip lineer sistemlerde ise ele alınan problemdeki matrislerin tipine göre iki farklı durum vardır. Ele alınan problem  $k$ -potent matrislerin lineer bileşiminin  $k$ -potentliği şeklinde ise, bu durumda önce problemin şartı lineer bileşime uygulanarak matrisler için genel bir eşitlik elde edilir. Sonrasında ise tek çözüme sahip bir lineer sistemin ilk sıfır içermeyen çözümü (katlı sağ yanlı lineer sisteme karşılık gelen lineer denklemlerin, sıfır bileşeni içermeyen çözüme sahip ilk lineer denklemin çözümü), eğer bu çözüm daha önce kullanıldıysa aynı özellikli bir sonraki ilk çözümü, ve benzer şekilde devam edilerek elde edilen genel matris eşitliğinde yerine yazılmasıyla bu lineer sisteme karşılık gelen matris şartı belirlenir. Ele alınan problem  $k$ -potent olmayan ve spektrumları belli kümelerin alt kümesi olacak biçimdeki matrislerin lineer bileşiminin karakterizasyonu ise, örneğin kuadratik matrislerin lineer bileşiminin kuadratikliği veya kübik matrislerin lineer bileşiminin kübikliği şeklinde ise, bu durumda lineer bileşime uygulanabilecek bir problem şartı olmadığından lineer sistemlerin çözüm kümelerinin yanına matris şartı olarak bu lineer sisteme karşılık gelen  $\Lambda_i, 1 \leq i \leq m$ , köşegen matrisleri yazılır.

Eğer, (3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonu lineer bağımsız  $X_i, 1 \leq i \leq m$ , matrisleri için, yani herhangi bir  $X_i$  matrisinin diğerlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılmadığı  $X_i, 1 \leq i \leq m$ , matrisleri için isteniyorsa, bu durumda lineer sistemleri oluşturma sürecinde eksik lineer sistem sol yanları dikkate alınmamalı sadece kare lineer sistem sol yanları ele alınmalıdır. Böylece çözülmesi gereken lineer sistem sayısı da  $\binom{n_1 n_2 \cdots n_m}{m}$  sayısına iner.

### 3.2.1. $\sigma(X_i), 1 \leq i \leq m$ , Spektrumlarının Bazı Özel Durumlarının Lineer Sistemler ve Onların Çözümleri Üzerindeki Etkisi

Eğer, bazı  $\sigma(X_i), 1 \leq i \leq m$ , spektrumları için  $0 \in \sigma(X_i)$  ise, bu durumda bazı sütunları sıfır olan lineer sistem sol yanları meydana gelmektedir. Bu sıfır sütunlarına karşılık gelen matrisler sıfır matrisi olduğundan, bu şekildeki lineer sistem sol yanları

ele alınmayacaktır. Eğer, tüm  $\sigma(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , spektrumları için  $0 \in \sigma(X_i)$  ise, bu durumda

$$0c_1 + 0c_2 + \dots + 0c_m \quad (3.5)$$

şeklinde bir lineer denklem sol yanı meydana gelecektir. Lineer sistemlerin oluşturulma sürecinde bu lineer denklem sol yanının ele alınmasının anlamsız olduğu açıktır. Böylece çözülmesi gereken lineer sistem sayısı

$$\binom{n_1 n_2 \dots n_m - 1}{1} + \binom{n_1 n_2 \dots n_m - 1}{2} + \dots + \binom{n_1 n_2 \dots n_m - 1}{m}$$

olur. Her ne kadar (3.5) lineer denklem sol yanı ele alınmıyor olsa bile, eğer bu lineer denklem sol yanına karşılık gelen blokların, oluşturulmuş olan lineer sistemlerin karşılık gelen  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , köşegen matrislerinde içerildiği kabul edilirse sonuçlar daha genel matrisler için elde edilir. Örneğin, böyle bir durumda, bu kabul altında (3.4) lineer sistemine karşılık

gelen  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , köşegen matrisleri  $\sum_{i=1}^4 r_i = n$  olmak üzere

$$\Lambda_1 = \lambda_2^{(1)} I_{r_1} \oplus \lambda_2^{(1)} I_{r_2} \oplus \lambda_3^{(1)} I_{r_3} \oplus \mathbf{0} I_{r_4}, \quad \Lambda_2 = \lambda_1^{(2)} I_{r_1} \oplus \lambda_2^{(2)} I_{r_2} \oplus \lambda_2^{(2)} I_{r_3} \oplus \mathbf{0} I_{r_4},$$

$$\Lambda_3 = \lambda_1^{(3)} I_{r_1} \oplus \lambda_3^{(3)} I_{r_2} \oplus \lambda_4^{(3)} I_{r_3} \oplus \mathbf{0} I_{r_4} \quad \text{ve} \quad \Lambda_4 = \lambda_1^{(4)} I_{r_1} \oplus \lambda_2^{(4)} I_{r_2} \oplus \lambda_3^{(4)} I_{r_3} \oplus \mathbf{0} I_{r_4}$$

şeklinde olur.

Eğer,  $\sigma(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , spektrumlarının bir kısmı veya tümü, bazı özdeğerlerin ters işaretlilerini de özdeğer olarak içeriyorsa yani, örneğin,  $\lambda_1^1 \in \sigma(X_1)$  iken  $-\lambda_1^1 \in \sigma(X_1)$  ise, bu durumda çözümleri birbirinin ters işaretlisi olan lineer sistemler meydana gelmektedir. Örneğin, böyle bir durumda  $\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)\}$  kümesi bir lineer sistemin çözüm kümesi iken  $\{(-\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), (-\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)\}$ ,  $\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, -\alpha_m), (\beta_1, \beta_2, \dots, -\beta_m)\}$  veya  $\{(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, \alpha_m), (-\beta_1, -\beta_2, \dots, \beta_m)\}$  şeklindeki kümeler başka lineer sistemlerin çözüm kümeleri olarak karşımıza

çıkılmaktadır. Dikkat edilirse çözüm kümelerindeki çözümlerin hepsinin aynı bileşeni ters işaretli olmaktadır, yani birinci çözüm kümesi için birinci bileşen, ikinci çözüm kümesi için  $m$ -inci bileşen ve üçüncü çözüm kümesi için birinci ve ikinci bileşen ters işaretlidir.

Eğer tüm  $\sigma(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , spektrumları ve  $\sigma(X)$  spektrumu tüm özdeğerlerini ters işaretlileri ile birlikte içeriyorsa, bu durumda birbirinin ters işaretlisi olan lineer denklemler ortaya çıkmaktadır. Bu, birbirinin ters işaretlisi olan lineer denklemler aynı lineer sistemin içinde yer aldıklarında bu iki lineer denklemden biri lineer sistemin çözümü sürecinde elenecektir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

lineer sistemini ele alalım. Katsayılar matrisinin ilk satırı ikinci satıra eklenirse ve aynı işlem lineer sistemin sağ yanını içinde yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

lineer sistemi elde edilir. Katsayılar matrisinin ikinci satırı sıfır satırı olduğundan lineer sistemin sağ yanının ikinci satırındaki sıfırdan farklı çözümler elenecektir. Böylece (3.6) lineer sisteminden

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

denk lineer sistemi elde edilir. Yani, (3.6) lineer sisteminin ikinci denklemini sistemden elenmiştir. Dolayısıyla, eğer tüm  $\sigma(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , spektrumları ve  $\sigma(X)$

spektrumu tüm özdeğerlerini ters işaretlileri ile birlikte içeriyorsa, bu durumda lineer sistemleri oluşturma sürecinde, bu birbirinin ters işaretlisi olan lineer denklem sol yanlarından birini ele almak yeterli olacaktır. Böylece tüm olası lineer denklem sol yanlarının sayısı  $\frac{n_1 n_2 \cdots n_m}{2}$  olur ve çözülmesi gereken lineer sistem sayısı,

$$\binom{\frac{n_1 n_2 \cdots n_m}{2}}{1} + \binom{\frac{n_1 n_2 \cdots n_m}{2}}{2} + \cdots + \binom{\frac{n_1 n_2 \cdots n_m}{2}}{m}$$

sayısına düşer. Birinci paragrafta (3.5) lineer denklem sol yanı lineer sistemleri oluşturma sürecinde ele alınmıyor olsa bile, bu lineer denkleme karşılık gelen blokların, oluşturulmuş olan lineer sistemlerin karşılık gelen  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , köşegen matrislerinde içerildiği kabul edilerek sonuçların daha genel matrisler için elde edilebileceğinden bahsetmiştik. Benzer kabulü birbirinin ters işaretlisi olan lineer denklem sol yanı çiftlerinden, lineer sistemleri oluşturma sürecinde ele alınmayan lineer denklem sol yanları için de yapılabilir. Yani, bu ele alınmayan lineer denklem sol yanlarına karşılık gelen bloklar, oluşturulmuş olan lineer sistemlerin karşılık gelen  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , köşegen matrislerinde içerildiği kabul edilerek, sonuçlar daha genel matrisler için elde edilebilir. Örneğin, böyle bir durumda, bu kabul altında (3.4) lineer sistemine karşılık gelen  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , köşegen

matrisleri,  $\sum_{i=1}^6 r_i = n$  olmak üzere,

$$\Lambda_1 = \lambda_2^{(1)} I_{r_1} \oplus -\lambda_2^{(1)} I_{r_2} \oplus \lambda_2^{(1)} I_{r_3} \oplus -\lambda_2^{(1)} I_{r_4} \oplus \lambda_3^{(1)} I_{r_5} \oplus -\lambda_3^{(1)} I_{r_6},$$

$$\Lambda_2 = \lambda_1^{(2)} I_{r_1} \oplus -\lambda_1^{(2)} I_{r_2} \oplus \lambda_2^{(2)} I_{r_3} \oplus -\lambda_2^{(2)} I_{r_4} \oplus \lambda_2^{(2)} I_{r_5} \oplus -\lambda_2^{(2)} I_{r_6},$$

$$\Lambda_3 = \lambda_1^{(3)} I_{r_1} \oplus -\lambda_1^{(3)} I_{r_2} \oplus \lambda_3^{(3)} I_{r_3} \oplus -\lambda_3^{(3)} I_{r_4} \oplus \lambda_4^{(3)} I_{r_5} \oplus -\lambda_4^{(3)} I_{r_6},$$

$$\Lambda_4 = \lambda_1^{(4)} I_{r_1} \oplus -\lambda_1^{(4)} I_{r_2} \oplus \lambda_2^{(4)} I_{r_3} \oplus -\lambda_2^{(4)} I_{r_4} \oplus \lambda_3^{(4)} I_{r_5} \oplus -\lambda_3^{(4)} I_{r_6}$$

şeklinde olur.

Eğer  $\sigma(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , spektrumlarının kesişiminde birden fazla özdeğer içeriliyorsa, bu durumda, çözümleri arasında bir permütasyon olan lineer sistemler ortaya çıkmaktadır. Böyle bir durumda, örneğin,  $\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)\}$  kümesi

bir lineer sistemin çözüm kümesi iken  $\{(\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_m), (\beta_2, \beta_1, \dots, \beta_m)\}$ ,  $\{(\alpha_1, \alpha_m, \dots, \alpha_2), (\beta_1, \beta_m, \dots, \beta_2)\}$  veya  $\{(\alpha_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}), (\beta_m, \beta_1, \dots, \beta_{m-1})\}$  şeklinde kümeler başka lineer sistemlerin çözüm kümeleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Dikkat edilirse, bir çözüm kümesindeki çözümlerin hepsinin permütasyonu aynıdır, yani ilk çözüm kümesi için birinci ve ikinci bileşen yer değiştirmiştir, ikinci çözüm kümesi için ikinci ve m-inci bileşen yer değiştirmiştir, ve üçüncü çözüm kümesi için bütün bileşenler bir bileşen sağ tarafa kaymıştır.

(3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonu, çözümleri birbirinin ters işaretlisi olan veya çözümleri arasında bir permütasyon olan sonuçların bir araya getirilmesiyle elde edilmektedir. Yani, önce oluşturulan tüm olası lineer sistemler çözülmekte, sonrasında ise çözümleri arasında böyle bir benzerlik ilişkisi olan sonuçlar bir araya getirilerek bir karakteristik elde edilmektedir. Bu karakteristiklerin tümü, bize (3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonunu vermektedir. Böylece, (3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonunu veren bir kombinatorik yöntem elde edilmiş olur.

### 3.3. Kombinatorik Yöntemin Algoritması

Bu bölümde önceki bölümde ortaya konulan kombinatorik yöntemden yararlanılarak (3.1) lineer bileşiminin spektrumunun karakterizasyonunu veren bir algoritma verilmektedir.

#### Algoritma 3.1.

##### Algoritma

Girdi:	$\sigma(X_i), 1 \leq i \leq m$ , spektrumları ve $\sigma(X)$ spektrumu
Çıktı:	(3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonu
1. Adım:	$\sigma(X_i), 1 \leq i \leq m$ , spektrumlarının ve $\sigma(X)$ spektrumunun elemanlarını gir.
2. Adım	Tüm olası lineer denklem sol yanlarını ve katlı sağ yanları oluştur.
3. Adım	Eğer (3.5) şeklinde bir lineer denklem sol yanı oluşmuş ise bu sol yanı sil.
4. Adım	Eğer tüm $\sigma(X_i), 1 \leq i \leq m$ , spektrumları ve $\sigma(X)$ spektrumu tüm elemanlarını ters işaretlileri ile beraber içeriyor ise oluşturulan lineer

- denklem sol yanlarından birbirinin ters işaretlisi olan iki lineer denklem sol yanından birini sil.
5. Adım Eksik ve kare lineer sistem sol yanlarını oluştur. (Eğer karakterizasyon lineer bağımsız  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri için elde edilmek isteniyor ise sadece kare lineer sistem sol yanlarını oluştur)
  6. Adım Lineer sistem sol yanlarından sıfır sütunu içerenleri sil
  7. Adım Oluşturulan lineer sistem sol yanlarının uygun boyutlu katlı sağ yanlarını ekleyerek lineer sistemleri oluştur.
  8. Adım Oluşturulan tüm lineer sistemleri çöz.
  9. Adım Çözüm kümelerinin içinden sıfırı içeren çözümleri çıkar.
  10. Adım Çözümleri arasında bir permütasyon olan veya çözümleri birbirinin ters işaretlisi olan çözüm kümelerini bir araya getirerek bir benzer sonuçlar grubu oluştur.
  11. Adım Oluşturulan her grup, (3.1) lineer bileşiminin karakterizasyonunun bir karakteristiğine karşılık gelmektedir.
- 

Bu algoritmanın *Mathematica* 9.0 paket programındaki uygulama kodları Ek A kısmında verilmiştir.

## BÖLÜM 4. BAZI ÖZEL TIPLİ MATRİSLERİN LINEER BİLEŞİMLERİNİN KARAKTERİZASYONU

### 4.1. Giriş

Bu bölümde, üçüncü bölümde geliştirilen Algoritma 3.1 yardımıyla bazı özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu elde edilmektedir. Ortaya konulan sonuçlar *Mathematica* 9.0 paket programı yardımıyla elde edildiğinden sonuçların ispatları program çıktısı olarak Ek B kısmında verilmektedir.

### 4.2. Değişmeli İki Kübik Matrisin Lineer Bileşiminin Kübikliği

Bu kısımda, değişmeli iki kübik matrisin lineer bileşiminin kübikliğinin karakterizasyonu problemi, geliştirilen Algoritma 3.1 yardımı ile çözülecektir.

$X_i \in \mathbb{C}_n$ ,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $(X_i - \alpha_i I_n)(X_i - \beta_i I_n)(X_i - \gamma_i I_n) = \mathbf{0}$  ve  $X_1 X_2 = X_2 X_1$  olsun. Bu durumda  $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olmak üzere

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = X \tag{4.1}$$

lineer bileşim matrisinin  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ -kübikliği problemini, diğer bir deyişle  $\sigma(X_i) \subseteq \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$  olacak biçimdeki  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , matrislerinin (4.1) ile verilen  $X$  lineer bileşim matrisi, ne zaman  $\sigma(X) \subseteq \{\alpha, \beta, \gamma\}$  olacak biçimde bir matris olur problemini ele alalım. Teorem 2.65'den  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , kübik matrislerinin köşegenleştirilebilir olduğu ve Teorem 2.31'den eşzamanlı köşegenleştirilebilir oldukları bilinmektedir.



**Teorem 4.1.**  $X_i \in \mathbb{C}_n$ ,  $i = 1, 2$ , matrisleri değişmeli iki  $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$ -kübik matris ve  $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olsun. Bu durumda,  $c_1 X_1 + c_2 X_2$  lineer bileşim matrisinin bir  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ -kübik olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $n_1 + n_2 = n$  ve  $S$ ,  $X_1$  ve  $X_2$  matrislerini eşzamanlı köşegenleştiren bir tersinir matris olmak üzere, aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

$$1) \quad c_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\alpha_1}, \frac{\gamma}{\alpha_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \alpha_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \alpha_2 I_n \text{ ve } \alpha_1 \neq 0,$$

$$2) \quad c_1 + \frac{\beta_2}{\alpha_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\alpha_1}, \frac{\gamma}{\alpha_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \alpha_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \beta_2 I_n \text{ ve } \alpha_1 \neq 0,$$

$$3) \quad c_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\alpha_1}, \frac{\gamma}{\alpha_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \alpha_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \gamma_2 I_n \text{ ve } \alpha_1 \neq 0,$$

$$4) \quad c_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\beta_1}, \frac{\beta}{\beta_1}, \frac{\gamma}{\beta_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \beta_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \alpha_2 I_n \text{ ve } \beta_1 \neq 0,$$

$$5) \quad c_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\beta_1}, \frac{\beta}{\beta_1}, \frac{\gamma}{\beta_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \beta_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \beta_2 I_n \text{ ve } \beta_1 \neq 0,$$

$$6) \quad c_1 + \frac{\gamma_2}{\beta_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\beta_1}, \frac{\beta}{\beta_1}, \frac{\gamma}{\beta_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \beta_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \gamma_2 I_n \text{ ve } \beta_1 \neq 0,$$

$$7) \quad c_1 + \frac{\alpha_2}{\gamma_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\gamma_1}, \frac{\beta}{\gamma_1}, \frac{\gamma}{\gamma_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \gamma_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \alpha_2 I_n \text{ ve } \gamma_1 \neq 0,$$

$$8) \quad c_1 + \frac{\beta_2}{\gamma_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\gamma_1}, \frac{\beta}{\gamma_1}, \frac{\gamma}{\gamma_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \gamma_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \beta_2 I_n \text{ ve } \gamma_1 \neq 0,$$

$$9) \quad c_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} c_2 \in \left\{ \frac{\alpha}{\gamma_1}, \frac{\beta}{\gamma_1}, \frac{\gamma}{\gamma_1} \right\}, \quad S^{-1} X_1 S = \gamma_1 I_n, \quad S^{-1} X_2 S = \gamma_2 I_n \text{ ve } \gamma_1 \neq 0,$$

$$10) \quad (c_1, c_2) \in \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{-\alpha\beta_2 + \alpha_2\beta}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\alpha - \beta}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{-\alpha\beta_2 + \alpha_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\alpha - \gamma}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \beta_2\beta}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\beta - \alpha}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \\ \left( \frac{-\beta_2\beta + \alpha_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\beta - \gamma}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \beta_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\gamma - \alpha}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\beta - \beta_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\gamma - \beta}{\alpha_2 - \beta_2} \right) \end{array} \right\},$$

$$S^{-1} X_1 S = \alpha_1 I_{n_1} \oplus \alpha_1 I_{n_2}, \quad S^{-1} X_2 S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \beta_2 I_{n_2}, \quad \alpha_1 \neq 0 \text{ ve } \alpha_2 - \beta_2 \neq 0,$$

$$11) \quad (c_1, c_2) \in \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{-\alpha\gamma_2 + \alpha_2\beta}{\alpha_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\alpha - \beta}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{-\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\alpha - \gamma}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \gamma_2\beta}{\alpha_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\beta - \alpha}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \\ \left( \frac{-\gamma_2\beta + \alpha_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\beta - \gamma}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \gamma_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\gamma - \alpha}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\beta - \gamma_2\gamma}{\alpha_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\gamma - \beta}{\alpha_2 - \gamma_2} \right) \end{array} \right\},$$

$$S^{-1} X_1 S = \alpha_1 I_{n_1} \oplus \alpha_1 I_{n_2}, \quad S^{-1} X_2 S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \gamma_2 I_{n_2}, \quad \alpha_1 \neq 0 \text{ ve } \alpha_2 - \gamma_2 \neq 0,$$







$$30) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\gamma_1}, \frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\beta}{\gamma_2(-\alpha_1+\gamma_1)} \right), \left( \frac{\alpha-\gamma}{\alpha_1-\gamma_1}, \frac{-\alpha\gamma_1+\alpha_1\gamma}{\gamma_2(\alpha_1-\gamma_1)} \right), \left( \frac{\beta-\alpha}{\alpha_1-\gamma_1}, \frac{\alpha_1\alpha-\beta\gamma_1}{\gamma_2(\alpha_1-\gamma_1)} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{\beta-\gamma}{\alpha_1-\gamma_1}, \frac{-\beta\gamma_1+\alpha_1\gamma}{\gamma_2(\alpha_1-\gamma_1)} \right), \left( \frac{\gamma-\alpha}{\alpha_1-\gamma_1}, \frac{\alpha_1\alpha-\gamma_1\gamma}{\gamma_2(\alpha_1-\gamma_1)} \right), \left( \frac{\gamma-\beta}{\alpha_1-\gamma_1}, \frac{\alpha_1\beta-\gamma_1\gamma}{\gamma_2(\alpha_1-\gamma_1)} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \alpha_1 I_{n_1} \oplus \gamma_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \gamma_2 I_{n_1} \oplus \gamma_2 I_{n_2}, \quad \gamma_2 \neq 0 \text{ ve } \alpha_1 - \gamma_1 \neq 0,$$

$$31) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha\beta_2+\alpha_2\beta}{\beta_1(\alpha_2-\beta_2)}, \frac{\alpha-\beta}{\alpha_2-\beta_2} \right), \left( \frac{-\alpha\beta_2+\alpha_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\beta_2)}, \frac{\alpha-\gamma}{\alpha_2-\beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha-\beta_2\beta}{\beta_1(\alpha_2-\beta_2)}, \frac{\beta-\alpha}{\alpha_2-\beta_2} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\beta_2\beta+\alpha_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\beta_2)}, \frac{\beta-\gamma}{\alpha_2-\beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha-\beta_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\beta_2)}, \frac{\gamma-\alpha}{\alpha_2-\beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\beta-\beta_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\beta_2)}, \frac{\gamma-\beta}{\alpha_2-\beta_2} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \beta_1 I_{n_1} \oplus \beta_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \beta_2 I_{n_2}, \quad \beta_1 \neq 0 \text{ ve } \alpha_2 - \beta_2 \neq 0,$$

$$32) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha\gamma_2+\alpha_2\beta}{\beta_1(\alpha_2-\gamma_2)}, \frac{\alpha-\beta}{\alpha_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{-\alpha\gamma_2+\alpha_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\gamma_2)}, \frac{\alpha-\gamma}{\alpha_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha-\gamma_2\beta}{\beta_1(\alpha_2-\gamma_2)}, \frac{\beta-\alpha}{\alpha_2-\gamma_2} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\gamma_2\beta+\alpha_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\gamma_2)}, \frac{\beta-\gamma}{\alpha_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha-\gamma_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\gamma_2)}, \frac{\gamma-\alpha}{\alpha_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\beta-\gamma_2\gamma}{\beta_1(\alpha_2-\gamma_2)}, \frac{\gamma-\beta}{\alpha_2-\gamma_2} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \beta_1 I_{n_1} \oplus \beta_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \gamma_2 I_{n_2}, \quad \beta_1 \neq 0 \text{ ve } \alpha_2 - \gamma_2 \neq 0,$$

$$33) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{\alpha-\beta}{\beta_1-\gamma_1}, \frac{\alpha\gamma_1-\beta_1\beta}{\alpha_2(-\beta_1+\gamma_1)} \right), \left( \frac{\alpha-\gamma}{\beta_1-\gamma_1}, \frac{-\alpha\gamma_1+\beta_1\gamma}{\alpha_2(\beta_1-\gamma_1)} \right), \left( \frac{\beta-\alpha}{\beta_1-\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\beta\gamma_1}{\alpha_2(\beta_1-\gamma_1)} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{\beta-\gamma}{\beta_1-\gamma_1}, \frac{-\beta\gamma_1+\beta_1\gamma}{\alpha_2(\beta_1-\gamma_1)} \right), \left( \frac{\gamma-\alpha}{\beta_1-\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\gamma_1\gamma}{\alpha_2(\beta_1-\gamma_1)} \right), \left( \frac{\gamma-\beta}{\beta_1-\gamma_1}, \frac{\beta_1\beta-\gamma_1\gamma}{\alpha_2(\beta_1-\gamma_1)} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \beta_1 I_{n_1} \oplus \gamma_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \alpha_2 I_{n_2}, \quad \alpha_2 \neq 0 \text{ ve } \beta_1 - \gamma_1 \neq 0,$$

$$34) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha_2\alpha+\alpha\beta_2}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\alpha\gamma_1}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{\alpha\beta_2-\alpha_2\beta}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\beta-\alpha\gamma_1}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{\alpha\beta_2-\alpha_2\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\gamma-\alpha\gamma_1}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\alpha_2\alpha+\beta_2\beta}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\gamma_1\beta}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{-\alpha_2\beta+\beta_2\beta}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\beta-\beta\gamma_1}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{\beta\beta_2-\alpha_2\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{-\beta\gamma_1+\beta_1\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\alpha_2\alpha+\beta_2\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\gamma_1\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{-\alpha_2\beta+\beta_2\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\beta-\gamma_1\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{-\alpha_2\gamma+\beta_2\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\gamma-\gamma_1\gamma}{\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \beta_1 I_{n_1} \oplus \gamma_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \beta_2 I_{n_2} \text{ ve } \beta_1\beta_2 - \alpha_2\gamma_1 \neq 0,$$

$$35) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha_2\alpha+\alpha\gamma_2}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\alpha\gamma_1}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{\alpha\gamma_2-\alpha_2\beta}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\beta-\alpha\gamma_1}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{\alpha\gamma_2-\alpha_2\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\gamma-\alpha\gamma_1}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\alpha_2\alpha+\beta_2\gamma_2}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\gamma_1\beta}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{-\alpha_2\beta+\gamma_2\beta}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\beta-\beta\gamma_1}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{\beta\gamma_2-\alpha_2\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{-\beta\gamma_1+\beta_1\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\alpha_2\alpha+\gamma_2\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\alpha-\gamma_1\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{-\alpha_2\beta+\gamma_2\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\beta-\gamma_1\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right), \left( \frac{-\alpha_2\gamma+\gamma_2\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}, \frac{\beta_1\gamma-\gamma_1\gamma}{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \beta_1 I_{n_1} \oplus \gamma_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \gamma_2 I_{n_2} \text{ ve } \beta_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \neq 0,$$

$$36) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha\gamma_2+\beta_2\beta}{\beta_1(\beta_2-\gamma_2)}, \frac{\alpha-\beta}{\beta_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{-\alpha\gamma_2+\beta_2\gamma}{\beta_1(\beta_2-\gamma_2)}, \frac{\alpha-\gamma}{\beta_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{\beta_2\alpha-\gamma_2\beta}{\beta_1(\beta_2-\gamma_2)}, \frac{\beta-\alpha}{\beta_2-\gamma_2} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\gamma_2\beta+\beta_2\gamma}{\beta_1(\beta_2-\gamma_2)}, \frac{\beta-\gamma}{\beta_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{\beta_2\alpha-\gamma_2\gamma}{\beta_1(\beta_2-\gamma_2)}, \frac{\gamma-\alpha}{\beta_2-\gamma_2} \right), \left( \frac{\beta_2\beta-\gamma_2\gamma}{\beta_1(\beta_2-\gamma_2)}, \frac{\gamma-\beta}{\beta_2-\gamma_2} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \beta_1 I_{n_1} \oplus \beta_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \beta_2 I_{n_1} \oplus \gamma_2 I_{n_2}, \quad \beta_1 \neq 0 \text{ ve } \beta_2 - \gamma_2 \neq 0,$$



$$43) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha\beta_2 + \alpha_2\beta}{\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\alpha - \beta}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{-\alpha\beta_2 + \alpha_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\alpha - \gamma}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \beta_2\beta}{\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\beta - \alpha}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\beta_2\beta + \alpha_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\beta - \gamma}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \beta_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\gamma - \alpha}{\alpha_2 - \beta_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\beta - \beta_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\gamma - \beta}{\alpha_2 - \beta_2} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \gamma_1 I_{n_1} \oplus \gamma_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \beta_2 I_{n_2}, \quad \gamma_1 \neq 0 \text{ ve } \alpha_2 - \beta_2 \neq 0,$$

$$44) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha\gamma_2 + \alpha_2\beta}{\gamma_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\alpha - \beta}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{-\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\alpha - \gamma}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \gamma_2\beta}{\gamma_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\beta - \alpha}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\gamma_2\beta + \alpha_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\beta - \gamma}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\alpha - \gamma_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\gamma - \alpha}{\alpha_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\alpha_2\beta - \gamma_2\gamma}{\gamma_1(\alpha_2 - \gamma_2)}, \frac{\gamma - \beta}{\alpha_2 - \gamma_2} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \gamma_1 I_{n_1} \oplus \gamma_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \alpha_2 I_{n_1} \oplus \gamma_2 I_{n_2}, \quad \gamma_1 \neq 0 \text{ ve } \alpha_2 - \gamma_2 \neq 0,$$

$$45) (c_1, c_2) \in \left\{ \left( \frac{-\alpha\gamma_2 + \beta_2\beta}{\gamma_1(\beta_2 - \gamma_2)}, \frac{\alpha - \beta}{\beta_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{-\alpha\gamma_2 + \beta_2\gamma}{\gamma_1(\beta_2 - \gamma_2)}, \frac{\alpha - \gamma}{\beta_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\beta_2\alpha - \gamma_2\beta}{\gamma_1(\beta_2 - \gamma_2)}, \frac{\beta - \alpha}{\beta_2 - \gamma_2} \right), \right. \\ \left. \left( \frac{-\gamma_2\beta + \beta_2\gamma}{\gamma_1(\beta_2 - \gamma_2)}, \frac{\beta - \gamma}{\beta_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\beta_2\alpha - \gamma_2\gamma}{\gamma_1(\beta_2 - \gamma_2)}, \frac{\gamma - \alpha}{\beta_2 - \gamma_2} \right), \left( \frac{\beta_2\beta - \gamma_2\gamma}{\gamma_1(\beta_2 - \gamma_2)}, \frac{\gamma - \beta}{\beta_2 - \gamma_2} \right) \right\},$$

$$S^{-1}X_1S = \gamma_1 I_{n_1} \oplus \gamma_1 I_{n_2}, \quad S^{-1}X_2S = \beta_2 I_{n_1} \oplus \gamma_2 I_{n_2}, \quad \gamma_1 \neq 0 \text{ ve } \beta_2 - \gamma_2 \neq 0,$$

### 4.3. Değişmeli İki Kuadripotent Matrisin Lineer Bileşiminin Kuadripotentliği

Bu kısımda değişmeli iki kuadripotent matrisin lineer bileşiminin kuadripotentliğinin karakterizasyonu problemi geliştirilen Algoritma 3.1 ile çözülecektir.

$X_i \in \mathbb{C}_n$ ,  $i=1,2$ , olmak üzere  $X_i^4 = X_i$  ve  $X_1X_2 = X_2X_1$  olsun. Bu durumda  $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olmak üzere

$$c_1X_1 + c_2X_2 = X \tag{4.2}$$

lineer bileşim matrisinin kuadripotentliğinin karakterizasyonu problemi, diğer bir deyişle  $\sigma(X_i) \subseteq \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\}$  olacak biçimdeki  $X_i$ ,  $i=1,2$ , matrislerinin

$$(4.2) \text{ ile verilen } X \text{ lineer bileşim matrisi, ne zaman } \sigma(X) \subseteq \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\}$$

olacak biçimde bir matris olur problemini ele alalım. Teorem 2.40'dan  $X_i$ ,  $i=1,2$ , kuadripotent matrislerinin köşegenleştirilebilir oldukları ve Teorem 2.31'dan eşzamanlı köşegenleştirilebilir oldukları bilinmektedir.

(4.2) lineer bileşim matrisinin kuadripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulunun

$$(c_1^4 - c_1)X_1 + 4c_1^3c_2X_1^3X_2 + 6c_1^2c_2^2X_1^2X_2^2 + 4c_1c_2^3X_1X_2^3 + (c_2^4 - c_2)X_2 = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

olduğu doğrudan hesaplamayla görülür. Çözüm kümesinde parametrik çözüm bulunmayan, yani çözüm kümesinde sonlu tane eleman olan sonuçlarda, matrisler ile ilgili şartlar, çözüm kümesinin ilk çözümü, eğer bu daha önce kullanıldıysa ikinci çözümü, bu da daha önce kullanıldıysa üçüncü çözümü ve bu şekilde devam ederek, ilgili çözümün (4.3) lineer bileşiminde yerine koyulmasıyla elde edilmektedir.

**Teorem 4.2.**  $X_1, X_2 \in \mathbb{C}_n$  matrisleri iki değişmeli kuadripotent matris ve  $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olsun. Bu durumda,  $c_1X_1 + c_2X_2$  lineer bileşim matrisinin kuadripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu,  $j \neq k$  ve  $j, k = 1, 2$  olmak üzere, aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

- 1)  $c_1 + c_2 \in \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\}$  ve  $X_1 = X_2$ ,
- 2)  $c_1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)c_2 \in \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\}$  ve  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X_1 = X_2$ ,
- 3)  $c_1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)c_2 \in \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\}$  ve  $\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X_1 = X_2$ ,
- 4)  $(c_j, c_k) \in \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -1\right), \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}\right), \left(-1, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right), \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}, -\frac{i}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}\right), \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}\right), \left(-\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \end{array} \right\}$   
ve  $(-1 + i\sqrt{3})X_j + (-2 - 2i\sqrt{3})X_j^3X_k + 6X_j^2X_k^2 + (-2 + 2i\sqrt{3})X_jX_k^3 + (-1 - i\sqrt{3})X_k = \mathbf{0}$ ,
- 5)  $(c_j, c_k) \in \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}, i\sqrt{3}\right), \left(1, -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right), \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -i\sqrt{3}\right), (1, -1), \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{array} \right\}$   
ve  $(6 - 2i\sqrt{3})X_j^3X_k - 18X_j^2X_k^2 + (18 + 6i\sqrt{3})X_jX_k^3 + (-6 - 4i\sqrt{3})X_k = \mathbf{0}$ ,
- 6)  $c_1 + c_2 \in \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\}$  ve  $X_1 = X_2$ ,



$$\begin{aligned}
7) \quad (c_j, c_k) &\in \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}, -\frac{i}{\sqrt{3}} \right), \left( \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6} \right), (-1, -1), \right. \\
&\left. \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6} \right), \left( \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}, \frac{i}{\sqrt{3}} \right), \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6} \right), \left( -\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6} \right) \right\} \quad \text{ve} \\
&(-1+i\sqrt{3})X_j + (-2+2i\sqrt{3})X_j^3X_k + (-3+3i\sqrt{3})X_j^2X_k^2 + (-2+2i\sqrt{3})X_jX_k^3 + (-1+i\sqrt{3})X_k = \mathbf{0}, \\
8) \quad (c_j, c_k) &\in \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -i\sqrt{3} \right), \left( 1, \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), (1, i\sqrt{3}), \right. \\
&\left. \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -1 \right), \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\
&\text{ve } (-6-2i\sqrt{3})X_j^3X_k + (9-9i\sqrt{3})X_j^2X_k^2 + (18+6i\sqrt{3})X_jX_k^3 + (-3+5i\sqrt{3})X_k = \mathbf{0}, \\
9) \quad c_1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) c_2 &\in \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\} \quad \text{ve } \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) X_1 = X_2, \\
10) \quad (c_j, c_k) &\in \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1 \right), \left( \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -i\sqrt{3}, 1 \right), \right. \\
&\left. \left( -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1 \right), \left( \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -1, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\
&\text{ve } (-6-4i\sqrt{3})X_j - 12iX_j^3X_k + (9-9i\sqrt{3})X_j^2X_k^2 + (6-2i\sqrt{3})X_jX_k^3 = \mathbf{0}, \\
11) \quad c_1 + \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) c_2 &\in \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1, 0 \right\} \quad \text{ve } \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) X_1 = X_2, \\
12) \quad (c_j, c_k) &\in \left\{ (1, 1), \left( 1, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( 1, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1 \right), \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \right. \\
&\left. \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1 \right), \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \left( -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \quad \text{ve} \\
&4X_j^3X_k + 6X_j^2X_k^2 + 4X_jX_k^3 = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

#### 4.4. Değişmeli Üç Tripotent Matrisin Lineer Bileşiminin Tripotentliği

Bu kısımda, değişmeli üç tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği problemi geliştirilen Algoritma 3.1 yardımı ile çözülecektir.

$X_i \in \mathbb{C}_n$ ,  $i=1,2,3$ , olmak üzere  $X_i^3 = X_i$  ve  $X_iX_j = X_jX_i$ ,  $i \neq j$  ve  $i, j=1,2,3$  olsun. Bu durumda,  $c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $i=1,2,3$ , olmak üzere

$$c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 = X \quad (4.4)$$

lineer bileşiminin tripotentliği problemini, diğer bir deyişle  $\sigma(X_i) \subseteq \{1, -1, 0\}$  olacak biçimdeki  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , matrislerinin (4.4) ile verilen  $X$  lineer bileşim matrisi ne zaman  $\sigma(X) \subseteq \{1, -1, 0\}$  olacak biçimde bir matris olur problemini ele alalım. Teorem 2.40'dan  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tripotent matrislerinin köşegenleştirilebilir oldukları ve Teorem 2.31'den eşzamanlı köşegenleştirilebilir oldukları bilinmektedir.

(4.4) lineer bileşiminin tripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulun

$$\begin{aligned} & (c_1^3 - c_1)X_1 + 3c_1^2c_2X_1^2X_2 + 3c_1c_2^2X_1X_2^2 + (c_2^3 - c_2)X_2 + 3c_1^2c_3X_1^2X_3 + \\ & 6X_1X_2X_3 + 3c_2^2c_3X_2^2X_3 + 3c_1c_3^2X_1X_3^2 + 3c_2c_3^2X_2X_3^2 + (c_3^3 - c_3)X_3 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

olduğu doğrudan bir hesaplamayla görülmektedir. Çözüm kümesinde parametrik çözüm bulunmayan yani, çözüm kümesinde sonlu tane eleman olan sonuçlarda, matrisler ile ilgili şartlar, çözüm kümesinin ilk çözümü, eğer bu daha önce kullanıldıysa ikinci çözümü, bu da daha önce kullanıldıysa üçüncü çözümü ve bu şekilde devam ederek, ilgili çözümün (4.5) lineer bileşiminde yerine koyulmasıyla elde edilmektedir.

Teoreme geçmeden önce birbirinin ters işaretlisi olan sonuçları bir arada ifade edebilmek için kullanılacak olan  $||$  notasyonunu dahil etmek istiyoruz.  $||$  notasyonu mutlak değer fonksiyonuna benzer bir yapıdadır. Yani  $|c_i| := \pm c_i$  ve  $|X_i| := \pm X_i$  şeklinde tanımlı olup, hem  $c_i$  skalerleri hem de  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri için kullanılacaktır. Bu gösterim eğer aynı ifadenin içinde hem  $c_i$  skalerleri hem de  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , matrisleri için kullanılmışsa, bu durumda aynı indisli  $c_i$  skalerleri ve  $X_i$  matrislerinin önündeki “+” veya “-” işareti aynı olmalıdır. Örneğin ,

$$(|c_1|, |c_2|, |c_3|) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\} \text{ ve } |X_1| + |X_2| + |X_3| = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilen bir sonuç Tablo 4.1. de verilen sekiz sonucu temsil etmektedir.

Tablo 4.1. (4.6) ifadesi ile temsil edilen sonuçlar

1) $(c_1, c_2, c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $X_1 + X_2 + X_3 = 0$	ve	5) $(-c_1, -c_2, -c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $-X_1 - X_2 - X_3 = 0$	ve
2) $(-c_1, c_2, c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $-X_1 + X_2 + X_3 = 0$	ve	6) $(c_1, -c_2, -c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $X_1 - X_2 - X_3 = 0$	ve
3) $(c_1, -c_2, c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $X_1 - X_2 + X_3 = 0$	ve	7) $(-c_1, c_2, -c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $-X_1 + X_2 - X_3 = 0$	ve
4) $(c_1, c_2, -c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $X_1 + X_2 - X_3 = 0$	ve	8) $(-c_1, -c_2, c_3) \in \{(1, -2, 4), (-1, 2, -4)\}$ $-X_1 - X_2 + X_3 = 0$	ve

**Teorem 4.3.**  $X_1, X_2$  ve  $X_3 \in \mathbb{C}_n$  matrisleri üç değişmeli tripotent matris ve  $c_1, c_2$  ve  $c_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olsun. Bu durumda,  $c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$  lineer bileşim matrisinin tripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $i \neq j, i \neq k, j \neq k$  ve  $i, j, k = 1, 2, 3$  ve  $p \neq q$  ve  $p, q = 1, 2$  olmak üzere, aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

- 1)  $|c_1| + |c_2| + |c_3| \in \{1, -1, 0\}$  ve  $|X_1| = |X_2| = |X_3|$ ,
- 2)  $(c_i + |c_j|, c_k) \in \{\pm(0, 1), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$  ve  $X_i = |X_j| \neq X_k$ ,
- 3)  $(c_i + |c_j|, |c_k|) \in \{\pm(-1, 2), \pm(0, 1), \pm(1, -1)\}$  ve  $X_i = |X_j| \neq |X_k|$ ,
- 4)  $(|c_1| + \frac{1}{2}c_3, |c_2| + \frac{1}{2}c_3) \in \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (0, 0)\}$  ve  
 $\frac{1}{2}|X_1| + \frac{1}{2}|X_2| = X_3$ ,
- 5)  $(|c_p| + c_3, |c_q| + 2c_3) \in \{\pm(1, 0), \pm(-1, 2), \pm(0, 1), \pm(1, -1), (0, 0)\}$  ve  
 $|X_p| + 2|X_q| = X_3$ ,
- 6)  $(c_i + |c_j|, c_k) \in \{\pm(0, 1), \pm(2, -1), \pm(-1, 1)\}$  ve  $X_i = |X_j| \neq X_k$ ,
- 7)  $(|c_p| + c_3, |c_q| + c_3) \in \{\pm(1, 0), \pm(-1, 2), \pm(0, 1), \pm(1, -1), (0, 0)\}$  ve  
 $|X_p| + |X_q| = X_3$ ,

- 8)  $(c_i + |c_j|, c_k) \in \{\pm(1,1), \pm(1,-1), \pm(0,1)\}$  ve  $X_i = |X_j| \neq X_k$ ,
- 9)  $(|c_1| + c_3, |c_2| + c_3) \in \{\pm(1,1), \pm(1,-1), \pm(1,0), \pm(0,1), (0,0)\}$  ve  
 $|X_1| + |X_2| = X_3$ ,
- 10)  $(c_i + |c_j|, c_k) \in \{\pm(0,1)\}$  ve  $X_i = |X_j| \neq X_k$ ,
- 11)  $(|c_1|, |c_2|, |c_3|) \in \{\pm(-1,1,1), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \pm(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), \pm(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$  ve  
 $X_1^2 |X_2| - |X_1| X_2^2 + X_1^2 |X_3| - 2|X_1| |X_2| |X_3| + X_2^2 |X_3| - |X_1| X_3^2 + |X_2| X_3^2 = \mathbf{0}$ ,
- 12)  $(|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \pm(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}), \\ \pm(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\}$  ve  
 $-\frac{3}{8}|X_i| - \frac{3}{8}X_i^2 |X_j| + \frac{3}{8}|X_i| X_j^2 + \frac{3}{8}|X_j| + \frac{3}{4}X_i^2 |X_k| - \frac{3}{2}|X_i| |X_j| |X_k| + \frac{3}{4}X_j^2 |X_k| + \frac{3}{2}|X_i| X_k^2 - \frac{3}{2}|X_j| X_k^2 = \mathbf{0}$ ,
- 13)  $(|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(-2, 2, 1), \pm(-1, 1, 1), \pm(-\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}), \\ \pm(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), \pm(\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\}$  ve  
 $-|X_i| + 4X_i^2 |X_j| - 4|X_i| X_j^2 + |X_j| + 2X_i^2 |X_k| - 4|X_i| |X_j| |X_k| + 2X_j^2 |X_k| - |X_i| X_k^2 + |X_j| X_k^2 = \mathbf{0}$ ,
- 14)  $(|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(1, -1, 1), \pm(-1, 1, 1), \pm(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \pm(-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}), \pm(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\}$  ve  
 $-X_i^2 |X_j| + |X_i| X_j^2 + X_i^2 |X_k| - 2|X_i| |X_j| |X_k| + X_j^2 |X_k| + |X_i| X_k^2 - |X_j| X_k^2 = \mathbf{0}$ ,
- 15)  $(|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \{\pm(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)\}$  ve  
 $\frac{3}{8}|X_i| - \frac{3}{8}X_i^2 |X_j| - \frac{3}{8}|X_i| X_j^2 + \frac{3}{8}|X_j| + \frac{3}{2}X_i^2 |X_k| + 3|X_i| |X_j| |X_k| + \frac{3}{2}X_j^2 |X_k| - 6|X_i| X_k^2 - 6|X_j| X_k^2 + 6|X_k| = \mathbf{0}$ ,
- 16)  $(|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(-3, 2, 2), \pm(-2, 1, 2), \pm(-2, 2, 1), \\ \pm(-1, 1, 1), \pm(2, -1, -1) \end{array} \right\}$  ve  
 $-4|X_i| + 9X_i^2 |X_j| - 6|X_i| X_j^2 + |X_j| + 9X_i^2 |X_k| - 12|X_i| |X_j| |X_k| + 4X_j^2 |X_k| - 6|X_i| X_k^2 + 4|X_j| X_k^2 + |X_k| = \mathbf{0}$ ,

$$17) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(3, -4, 2), \pm(1, -2, 2), \pm(2, -3, 2), \pm(2, -2, 1), \\ \pm(1, -1, 1), \pm(-2, 3, -1), \pm(-1, 2, -1) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$4|X_i| - 18X_i^2|X_j| + 24|X_i|X_j^2 - 10|X_j| + 9X_i^2|X_k| - 24|X_i||X_j||X_k| + 16X_j^2|X_k| + 6|X_i|X_k^2 - 8|X_j|X_k^2 + |X_k| = \mathbf{0}$$

$$18) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(1, -2, 2), \pm(1, -1, 1), \\ \pm(-1, 1, 1), \pm(-1, 2, -1) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$-X_i^2|X_j| + 2|X_i|X_j^2 - |X_j| + X_i^2|X_k| - 4|X_i||X_j||X_k| + 4X_j^2|X_k| + 2|X_i|X_k^2 - 4|X_j|X_k^2 + |X_k| = \mathbf{0}$$

$$19) (c_i + |c_j|, c_k) \in \{ \pm(0, 1), \pm(1, -1) \} \quad \text{ve } X_i = |X_j| \neq X_k,$$

$$20) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), \pm(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \pm(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}), \pm(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \\ \pm(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), \pm(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \pm(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), \pm(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \\ \pm(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$-\frac{8}{27}|X_i| - \frac{2}{9}X_i^2|X_j| + \frac{4}{9}|X_i|X_j^2 + \frac{10}{27}|X_j| + \frac{4}{9}X_i^2|X_k| - \frac{16}{9}|X_i||X_j||X_k| + \frac{16}{9}X_j^2|X_k| + \frac{16}{9}|X_i|X_k^2 - \frac{32}{9}|X_j|X_k^2 + \frac{28}{27}|X_k| = \mathbf{0}$$

$$21) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(-1, -2, 4), \pm(1, 2, -2), \pm(1, 1, -1), \\ \pm(-1, -1, 3), \pm(-1, -2, 3), \pm(1, 1, -2) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$-X_i^2|X_j| - 2|X_i|X_j^2 - |X_j| + 2X_i^2|X_k| + 8|X_i||X_j||X_k| + 8X_j^2|X_k| - 8|X_i|X_k^2 - 16|X_j|X_k^2 + 10|X_k| = \mathbf{0}$$

$$22) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \pm(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \\ \pm(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1), \pm(1, 1, -1), \pm(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$-\frac{3}{8}|X_i| - \frac{3}{8}X_i^2|X_j| + \frac{3}{8}|X_i|X_j^2 + \frac{3}{8}|X_j| + \frac{3}{4}X_i^2|X_k| - \frac{3}{2}|X_i||X_j||X_k| + \frac{3}{4}X_j^2|X_k| + \frac{3}{2}|X_i|X_k^2 - \frac{3}{2}|X_j|X_k^2 = \mathbf{0}$$

$$23) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(1, 1, -1), \pm(1, -1, 1), \pm(-1, 1, 1), \\ \pm(-1, -1, 3), \pm(1, 1, -2) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$X_i^2|X_j| + |X_i|X_j^2 - X_i^2|X_k| - 2|X_i||X_j||X_k| - X_j^2|X_k| + |X_i|X_k^2 + |X_j|X_k^2 = \mathbf{0},$$

$$24) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \\ \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$-\frac{3}{8}|X_i| + \frac{3}{8}X_i^2|X_j| + \frac{3}{8}|X_i|X_j^2 - \frac{3}{8}|X_j| + \frac{3}{8}X_j^2|X_k| + \frac{3}{4}|X_i||X_j||X_k| + \frac{3}{8}X_j^2|X_k| + \frac{3}{8}|X_i|X_k^2 + \frac{3}{8}|X_j|X_k^2 - \frac{3}{8}|X_k| = \mathbf{0}$$

$$25) (c_i, c_j, c_k) \in \{ \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \} \quad \text{ve}$$

$$-\frac{3}{8}X_i + \frac{3}{8}X_i^2X_j + \frac{3}{8}X_iX_j^2 - \frac{3}{8}X_j + \frac{3}{4}X_i^2X_k + \frac{3}{2}X_iX_jX_k + \frac{3}{4}X_j^2X_k + \frac{3}{2}X_iX_k^2 + \frac{3}{2}X_jX_k^2 = \mathbf{0}$$

$$26) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \{ \pm(-1, 2, 2), \pm(-1, 2, 1), \pm(-1, 1, 2), \pm(1, -1, -1) \} \quad \text{ve}$$

$$X_i^2|X_j| - 2|X_i|X_j^2 + |X_j| + X_i^2|X_k| - 4|X_i||X_j||X_k| + 4X_j^2|X_k| - 2|X_i|X_k^2 + 4|X_j|X_k^2 + |X_k| = \mathbf{0}$$

$$27) (|c_1|, |c_2|, |c_3|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), \\ \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$\frac{15}{8}|X_1| - \frac{27}{8}X_1^2|X_2| + \frac{9}{8}|X_1|X_2^2 + \frac{3}{8}|X_2| - \frac{27}{8}X_1^2|X_3| + \frac{9}{4}|X_1||X_2||X_3| - \frac{3}{8}X_2^2|X_3| + \frac{9}{8}|X_1|X_3^2 - \frac{3}{8}|X_2|X_3^2 + \frac{3}{8}|X_3| = \mathbf{0}$$

$$28) (|c_1| + c_3, |c_2| + c_3) \in \{ \pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, -1), (0, 0) \} \quad \text{ve } |X_1| + |X_2| = X_3,$$

$$29) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(2, -1, -1), \pm(2, -1, -3), \pm(2, -1, -2), \\ \pm(-1, 1, 2), \pm(-1, 1, 1) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$2|X_i| - 4X_i^2|X_j| + 2|X_i|X_j^2 - 4X_i^2|X_k| + 4|X_i||X_j||X_k| - X_j^2|X_k| + 2|X_i|X_k^2 - |X_j|X_k^2 = \mathbf{0}$$

$$30) (|c_i|, |c_j|, |c_k|) \in \{ \pm(-1, 2, 1), \pm(1, -2, 1), \pm(1, -1, 1), \pm(-1, 1, 1) \} \quad \text{ve}$$

$$2X_i^2|X_j| - 4|X_i|X_j^2 + 2|X_j| + X_i^2|X_k| - 4|X_i||X_j||X_k| + 4X_j^2|X_k| - |X_i|X_k^2 + |X_j|X_k^2 = \mathbf{0}$$

$$31) (c_1, c_2, c_3) \in \{ \pm(1, 1, 1), \pm(1, 1, -1), \pm(1, -1, 1), \pm(-1, 1, 1) \} \quad \text{ve}$$

$$X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_1^2X_3 + 2X_1X_2X_3 + X_2^2X_3 + X_1X_3^2 + X_2X_3^2 = \mathbf{0}.$$

#### 4.5. Değişmeli Dört İnvolutif Matrisin Lineer Bileşiminin Tripotentliği

Bu kısımda değişmeli dört involutif matrisin lineer bileşim matrisinin tripotentliği problemi geliştirilen Algoritma 3.1 yardımı ile çözülecektir

$X_i \in \mathbb{C}_n$ ,  $i=1,2,3,4$ , olmak üzere  $X_i^2 = I_n$  ve  $X_i X_j = X_j X_i$ ,  $i \neq j$  ve  $i, j=1,2,3,4$ , olsun. Bu durumda  $c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $i=1,2,3,4$ , olmak üzere

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 = X \quad (4.7)$$

lineer bileşim matrisinin tripotentliği problemini, diğer bir deyişle  $\sigma(X_i) \subseteq \{1, -1\}$  olacak biçimdeki  $X_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , matrislerinin (4.7) ile verilen  $X$  lineer bileşim matrisi ne zaman  $\sigma(X) \subseteq \{1, -1, 0\}$  olacak biçimde bir matris olur problemini ele alalım. Teorem 2.42'den  $X_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , involutif matrislerinin köşegenleştirilebilir oldukları ve Teorem 2.31'den eşzamanlı köşegenleştirilebilir oldukları bilinmektedir.

Doğrudan bir hesaplamayla görülmektedir ki (4.7) lineer bileşiminin tripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu

$$\begin{aligned} & (c_1^3 + 3c_1 c_2^2 + 3c_1 c_3^2 + 3c_1 c_4^2 - c_1) X_1 + (c_2^3 + 3c_1^2 c_2 + 3c_2 c_3^2 + 3c_2 c_4^2 - c_2) X_2 + \\ & (c_3^3 + 3c_1^2 c_3 + 3c_2^2 c_3 + 3c_3 c_4^2 - c_3) X_3 + (c_4^3 + 3c_1^2 c_4 + 3c_2^2 c_4 + 3c_3^2 c_4 - c_4) X_4 + \\ & 6c_1 c_2 c_3 X_1 X_2 X_3 + 6c_1 c_2 c_4 X_1 X_2 X_4 + 6c_1 c_3 c_4 X_1 X_3 X_4 + 6c_2 c_3 c_4 X_2 X_3 X_4 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.8)$$

olmasıdır. Çözüm kümesinde parametrik çözüm bulunmayan, yani çözüm kümesinde sonlu tane eleman olan sonuçlarda, matrisler ile ilgili şartlar, çözüm kümesinin ilk çözümü, eğer bu daha önce kullanıldıysa ikinci çözümü, bu da daha önce kullanıldıysa üçüncü çözümü ve bu şekilde devam ederek, ilgili çözümün (4.8) lineer bileşiminde yerine koyulmasıyla elde edilmektedir. Teorem 4.3'de kullanılan  $||$  notasyonu Teorem 4.4'de de kullanılacaktır.

**Teorem 4.4.**  $X_1, X_2, X_3$  ve  $X_4 \in \mathbb{C}_n$  matrisleri dört değişmeli involutif matris ve  $c_1, c_2, c_3$  ve  $c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olsun. Bu durumda,  $c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$  lineer bileşim matrisinin tripotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $i \neq j, i \neq k, j \neq k, l \neq i, l \neq j, l \neq k$  ve  $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$  olmak üzere, aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

- 1)  $|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| \in \{1, -1, 0\}$  ve  $|X_1| = |X_2| = |X_3| = |X_4|$ ,
- 2)  $j < k$  ve  $j < l$  olmak üzere  $(c_i, c_j + |c_k| + |c_l|) \in \{\pm(1, 0), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$  ve  $X_i \neq X_j = |X_k| = |X_l|$ ,
- 3)  $i < j$  ve  $k < l$  olmak üzere  $(c_i + |c_j|, c_k + |c_l|) \in \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (0, 0)\}$  ve  $X_i = |X_j| \neq X_k = |X_l|$ ,
- 4)  $i < j$  olmak üzere  $(|c_i| + |c_j|, |c_k|, |c_l|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(-1, 1, 1), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \pm(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), \\ \pm(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\}$  ve  $|X_i| = |X_j| \neq |X_k| \neq |X_l|$ ,
- 5)  $(|c_1| + c_4, |c_2| + c_4, |c_3| + c_4) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(1, 0, 0), \pm(0, 1, 0), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \pm(0, 0, 1), \\ \pm(-1, 1, 1), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \pm(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), \\ \pm(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}), \\ \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (0, 0, 0) \end{array} \right\}$  ve  $|X_1| + |X_2| + |X_3| = X_4$ ,
- 6)  $i < j$  olmak üzere  $(c_i + |c_j|, c_k, c_l) \in \{\pm(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$  ve  $X_i = |X_j| \neq |X_k| \neq |X_l|$ ,
- 7)  $(|c_i|, |c_j|, |c_k|, |c_l|) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm(-2, 1, 1, 1), \pm(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1), \pm(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1), \pm(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \\ \pm(-\frac{3}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}), \pm(-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), \pm(-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \pm(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\}$  ve  $-4|X_i| + 3|X_j| + 3|X_k| + 3|X_l| - 2|X_i||X_j| - 2|X_i||X_k| - 2|X_i||X_l| - 2|X_i||X_k||X_l| + |X_j||X_k||X_l| = \mathbf{0}$ ,



$$8) \left( |c_i|, |c_j|, |c_k|, |c_l| \right) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right), \pm\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1\right), \pm\left(-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right), \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ \pm\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \pm\left(-1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \pm\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$-3X_1 - 3X_2 + \frac{9}{2}X_3 + \frac{9}{2}X_4 + \frac{3}{2}X_1X_2X_3 + \frac{3}{2}X_1X_2X_4 - 3X_1X_3X_4 - 3X_2X_3X_4 = \mathbf{0},$$

$$9) \left( c_1, c_2, c_3, |c_4| \right) \in \left\{ \begin{array}{l} \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \pm\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \pm\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \\ \pm\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \pm\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \\ \pm\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ \pm\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \pm\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \end{array} \right\} \quad \text{ve}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 - |X_4| + X_1X_2X_3 - X_1X_2|X_4| - X_1X_3|X_4| - X_2X_3|X_4| = \mathbf{0}.$$

## BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde ortaya konulan kombinatorik yöntem temel alınarak sonlu sayıda değişmeli köşegenleştirilebilir matrisin lineer bileşimini karakterize eden bir algoritma geliştirildi. Bu kombinatorik yöntem ve Teorem 4.3'ün bir özel hali olan karşılıklı değişmeli iki tripotent ve bir involutif matrisin lineer bileşiminin tripotentliği probleminin çözümü [28] çalışmasında sunulmuştur. Girdi olarak lineer bileşimdeki matrislerin spektrumlarını alan algoritma, katsayıları bu spektrumlardan seçilen lineer sistemleri çözüp benzer sonuçları gruplamak suretiyle çıktı olarak lineer bileşimin karakterizasyonunu vermektedir. Ayrıca algoritmanın Mathematica 9.0 paket programındaki uygulama kodları Ek A kısmında verilmiştir. Böylece literatürde birçok yazar tarafından ele alınmış olan özel tipli matrislerin lineer bileşiminin karakterizasyonu problemlerinin değişmeli matrisler için olan kısmı bilgisayar programlarıyla çözülebilir hale gelmiştir. Dolayısıyla artık bu tür özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu problemleri istenildiği sayıda matrisin lineer bileşimi için çözülebilmektedir. Böylece bu tür karakterizasyon problemlerinin uygulamalı bilimlerdeki kullanım alanlarında da önemli kolaylıklar elde edilmiştir. Örneğin, istatistik teorisinde  $A$   $n \times n$  boyutlu reel ve simetrik bir matris ve  $\mathbf{x}$  vektörü de çok değişkenli  $N_n(\mathbf{0}, I_n)$  normal dağılımına sahip  $n \times 1$  boyutlu rastgele bir reel vektör ise, bu durumda  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  kuadratik formunun ki-kare dağılımına sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu  $A$  matrisinin idempotent, iki bağımsız ki-kare dağılımının farkı olarak yazılabilmemesinin gerekli ve yeterli koşulu ise  $A$  matrisinin tripotent olmasıdır [1]. Dolayısıyla  $A_1$  ve  $A_2$   $n \times n$  boyutlu reel ve simetrik matrisler ve  $\mathbf{x}$  vektörü de çok değişkenli  $N_n(\mathbf{0}, I_n)$  normal dağılımına sahip  $n \times 1$  boyutlu rastgele bir reel vektör olmak üzere, [5] çalışmasında ele alınan iki değişmeli idempotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliği problemi istatistik teorisinde ki-kare dağılımına sahip  $\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}^T A_2 \mathbf{x}$  kuadratik formlarının  $c_1 \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} + c_2 \mathbf{x}^T A_2 \mathbf{x}$  şeklindeki lineer bileşimi ne zaman ki-kare dağılımına

sahip bir kuadratik form olur problemine denktir. Benzer biçimde [15] çalışmasında ele alınan iki değişmeli tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği problemi istatistik teorisinde iki bağımsız ki-kare dağılımının farkı olarak yazılabilen  $\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}^T A_2 \mathbf{x}$  kuadratik formlarının  $c_1 \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x} + c_2 \mathbf{x}^T A_2 \mathbf{x}$  şeklindeki lineer bileşimi ne zaman iki bağımsız ki-kare dağılımının farkı olarak yazılabilir problemine denktir. Böylece, algoritma yardımıyla bu problemler de sonlu sayıda kuadratik formun lineer bileşimi için çözülebilmektedir.

Dördüncü bölümde değişmeli iki kübik matrisin lineer bileşiminin kübikliği, değişmeli iki kuadripotent matrisin lineer bileşiminin kuadripotentliği, değişmeli üç tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği ve değişmeli dört involutif matrisin lineer bileşiminin tripotentliği problemleri geliştirilen algoritma yardımıyla çözülmüştür. Problemler algoritma yardımıyla çözüldüğünden ispatları program çıktısı olarak Ek B kısmında verilmiştir. Bu dört problem, sonuçlarının ifadeleri çok uzun olmadığı için ele alınmıştır. Benzer başka problemlerinde çözülebileceği açıktır. Bazı ele alınabilecek olan açık problemler ve bu problemlerin çözümü için çözümleri gereken lineer sistem sayısı Tablo 5.1.'de listelenmiştir. Ayrıca, geliştirilen algoritmanın doğru sonuçlar verdiğini göstermek adına, literatürde ele alınmış olan iki idempotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliği probleminin değişmeli matrisler için olan kısmı [5], değişmeli iki tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği [15], ikisi değişmeli üç idempotent matrisin lineer bileşiminin idempotentliği probleminin karşılıklı değişmeli matrisler için olan kısmı [25] ve karşılıklı değişmeli iki involutif bir tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği [27] problemleri Algoritma 3.1 yardımıyla yeniden ele alınmış ve aynı sonuçlar bulunmuştur. Elde edilen sonuçların çıktıları [5], [15], [25] ve [27] referanslarında elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak Ek C kısmında verilmiştir.

Tablo 5.1.. Bazı açık problemler

Problem	Problemin çözümü için çözülmesi gereken lineer sistem sayısı
1) Değişmeli üç kuadratik matrisin lineer bileşimin kuadratikliği	$\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 92$
2) Değişmeli üç kübik matrisin lineer bileşimin kübikliği	$\binom{27}{1} + \binom{27}{2} + \binom{27}{3} = 3033$
3) Değişmeli üç kuadripotent matrisin lineer bileşimin kuadripotentliği	$\binom{63}{1} + \binom{63}{2} + \binom{63}{3} = 41727$
4) Değişmeli dört kuadratik matrisin lineer bileşimin kuadratikliği	$\binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} + \binom{16}{4} = 2516$
5) Değişmeli dört kübik matrisin lineer bileşimin kübikliği	$\binom{81}{1} + \binom{81}{2} + \binom{81}{3} + \binom{81}{4} = 1752381$
6) Değişmeli dört tripotent matrisin lineer bileşimin tripotentliği	$\binom{40}{1} + \binom{40}{2} + \binom{40}{3} + \binom{40}{4} = 102090$
7) Değişmeli dört kuadripotent matrisin lineer bileşimin kuadripotentliği	$\binom{255}{1} + \binom{255}{2} + \binom{255}{3} + \binom{255}{4} = 174825280$

## KAYNAKLAR

- [1] F. A. Graybill, *Matrices with Applications in Statistics*, Wadsworth: Belmont, 1983.
- [2] S. Adler, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, New York: Oxford University Press Inc., 1995.
- [3] N. J. Higham, *Functions of Matrices*, Philadelphia: SIAM, 2008.
- [4] Y. Wu, *K-Potentmatrices-construction and applications in digital image encryption*, *Recent Advances in Applied Mathematics*, Wisconsin, 2010.
- [5] J. K. Baksalary ve O. M. Baksalary, Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, *Linear Algebra Appl.*, 321,. 3-7, 2000.
- [6] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary ve G. Styan, Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, *Linear Algebra Appl.*, 354,. 21-34, 2002.
- [7] M. Sarduvan ve H. Özdemir, On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, *Appl Math. Comput.*, 200,. 401-406, 2008.
- [8] C. Xu, On the idempotency, involution and nilpotency of a linear combination of two matrices, *Linear Multilinear Algebra*, 63,. 1664-1677, 2015.
- [9] H. Özdemir, M. Sarduvan, A. Özban ve N.Güler, On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices, *Appl Math. Comput.*, 207,. 197-201, 2009.
- [10] J. Benítez ve N. Thome, Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t-potent matrix that commute, *Linear Algebra Appl.*, 403,. 414-418, 2005.
- [11] J. Benítez ve N. Thome, Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t-potent matrix that do not commute, *Linear Multilinear Algebra*, 56,. 679-687, 2008.

- [12] C. Coll ve N. Thome, Oblique projectors and group involutory matrices, *Appl. Math. Comput.*, 140,. 517-522, 2003.
- [13] J. K. Baksalary ve O. M. Baksalary, When is a linear combination of two idempotent matrices the group involutory matrix?, *Linear Multilinear Algebra*, 54, no. 6,. 429-435, 2006.
- [14] X. Liu, L. Wu ve J. Benítez, On linear combinations of generalized involutive matrices, *Linear Multilinear Algebra*, 59, no. 11,. 1221-1236, 2011.
- [15] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary ve H. Özdemir, A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, *Linear Algebra Appl.*, 388,. 45-51, 2004.
- [16] J. K. Baksalary ve O. M. Baksalary, On linear combinations of generalized projectors, *Linear Algebra Appl.*, 388,. 17-24, 2004.
- [17] J. Benítez ve N. Thome, Characterizations and linear combinations of  $k$ -generalized projectors, *Linear Algebra Appl.*, 410,. 150-159, 2005.
- [18] O. M. Baksalary ve J. Benítez, On linear combinations of two commuting hypergeneralized projectors, *Comput. Math. Appl.*, 56,. 2481-2489, 2008.
- [19] M.Tosić, On some linear combinations of commuting involutive and idempotent matrices, *Appl. Math. Comput.*, 233,. 103-108, 2014.
- [20] J. Benítez ve N. Thome,  $\{k\}$ -group periodic matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 28,. 9-25, 2006.
- [21] L. Lebtahi, O. Romero ve N.Thome, Characterizations of  $\{K, s + 1\}$ -potent matrices and applications, *Linear Algebra Appl.*, 436,. 293-306, 2012.
- [22] M.Uç, H. Özdemir ve A. Özban, On the quadraticity of linear combinations of quadratic matrices,, *Linear Multilinear Algebra*, 63,. 1125-1137, 2015.
- [23] M. Uç, T. Petik ve H. Özdemir, The generalized quadraticity of linear combinations of two commuting quadratic matrices, *Linear Multilinear Algebra*,. 64,. 1696–1715, 2016.
- [24] O. M. Baksalary, Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint, *Linear Algebra Appl.*,. 388,. 67-78, 2004.

- [25] O. M. Baksalary ve J. Benítez, Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting, *Linear Algebra Appl.*, 424,. 320-337, 2007.
- [26] C. Y. Deng, D. S. Cvetković-Ilić ve Y. Wei, Properties of the combinations of commutative idempotents, *Linear Algebra Appl.*, 436,. 202-221, 2012.
- [27] C. Xu ve R. Xu, Tripotency of a linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute, *Linear Algebra Appl.*, 437,. 2091-2109, 2012.
- [28] E. Kişi ve H. Özdemir, A combinatorial method for determining the spectrum of linear combinations of finitely many diagonalizable matrices that mutually commute, *Math. Commun.* , 23,. 61-78, 2018.
- [29] L. Hogben, *Handbook of Linear Algebra*, CRC Press, Chapman and Hall, 2007.
- [30] S. Venit, W. Bishop ve J. Brown, *Elementary Linear Algebra*, USA: Nelson Education, 2009.
- [31] A. Howard ve R. Chris, *Elementary Linear Algebra*, 11th Ed., USA: Wiley, 2014.
- [32] H. Roger A. ve J. Charles R., *Matrix Analysis*, New York: Cambridge University Press, 2013.
- [33] R. Bru ve N. Thome, Group Inverse and Group Involutory Matrices, *Linear Multilinear Algebra*,. 45,. 207-218, 1998.
- [34] J. Gross ve G. Trenkler, Generalized and Hypergeneralized Projectors, *Linear Algebra Appl.*,. 264,. 463-474, 1997.
- [35] O. M. Baksalary ve G. Trenkler, On k-potent Matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*,. 26,. 446-470, 2013.
- [36] C. Deng, Q. Li ve H. Du, Generalized n-idempotents and hyper-generalized n-idempotents, *Northeast.Math. J.*,. 22,. 387–394, 2006.
- [37] H. Özdemir ve T. Petik, On the spectra of some matrices derived from two quadratic matrices, *Bull. Iranian Math. Soc.*,. 39, 225–238, 2013.

## **EKLER**

### **EK A: Algoritma 3.1'in Mathematica 9.0 Programındaki Uygulama**

#### **Kodları**

```
n=3; (*Please enter the number of matrices in the
combinations*)
X1={}; (*Please enter the eigenvalues of the first matrix
in the combinations*)
X2={}; (*Please enter the eigenvalues of the second
matrix in the combinations*)
X3={}; (*Please enter the eigenvalues of the third matrix
in the combinations*)
K=Tuples[{X1,X2,X3}] (*Please modify*)
Print["K= ",MatrixForm[K]];

B={}; (*Please enter the eigenvalues of the linear
combination matrix*)
size1B=Length[B];
For[i=1,i<=n,i++,
  Bi=Transpose[Tuples[B,i]];
  Print[i,". Matrix B= ",MatrixForm[Bi]];
];

Ctrl = 0;
For[i = 1, i <= size1B, i++,
  If[Count[B, -B[[i]]] == 0,
    Ctrl = 1;
  ];
```



```

];

For[i = 1, i <= Length[K], i++,
  If[Norm[K[[i]]] == 0,
    K = Drop[K, {i}, {}];
  ];
];

For[i = 1, i <= Length[K] - 1, i++,
  For[j = i + 1, j <= Length[K], j++,
    If[Ctrl == 0 && K[[i]] == -K[[j]],
      K = Drop[K, {j}, {}];
    ];(*if*)
  ];(*For2*)
];(*For1*)

Print["K= ", MatrixForm[K]];

KAll = Subsets[K, {1, n}];
ZMC = {};
For[i = 1, i <= Length[KAll], i++,
  Ai = KAll[[i]];
  For[j = 1, j <= n, j++,
    If[Norm[ Ai [[All, j]]] == 0 ,
      ZMC = Append[ZMC, i];
      Break[];
    ];
  ];
temp = Length[Ai];
ABi = Join[Ai, Btemp, 2];

```

```

RRABi = RootReduce[RowReduce[ABi]];
RRAi = RRABi[[All, 1 ;; n]];
RRBi = RRABi[[All, n + 1 ;; n + size1Btemp]];

NS = {};

If[MemberQ[ZMC, i] == False,
  For[j = temp, j >= 1, j--,
    temp2 = Length[Transpose[RRBi]];
    If[Norm[RRAi[[j]]] == 0,
      While[True,
        ctrl = 0;
        For[k = 1, k <= temp2, k++,
          If[RRBi[[j, k]] != 0,
            RRBi = Drop[RRBi, {}, {k}];
            temp2 = temp2 - 1;
            ctrl = 1;
            Break[];
          ];
        ];
      If[ctrl == 0,
        Break[];
      ];
    ];
  ];

If[Length[RRBi] == 0,
  NS = Append[NS, i];
];

```

```

If[MemberQ[NS, i] == False,
  For[j = 1, j <= temp, j++,
    temp2 = Length[Transpose[RRBi]];
    If[Count[RRAi[[j]], 0] == n - 1,
      While[True,
        ctrl = 0;
        For[k = 1, k <= temp2, k++,
          If[RRBi[[j, k]] == 0,
            RRBi = Drop[RRBi, {}, {k}];
            temp2 = temp2 - 1;
            ctrl = 1;
            Break[];
          ];
        ];
        If[ctrl == 0,
          Break[];
        ];
      ];
    ];
  Print[i, MatrixForm[Ai],
    MatrixForm[RRAi], MatrixForm[RRBi]];
  ];
];
Print[ZMC];
Print[NS];

For[i = 1, i <= Length[KAll], i++,
  If[MemberQ[Union[ZMC, NS], i] == False,

```

```

ZRRRAi = Join[RRAi, -RRAi, 2];
ZRRBi = Join[RRBi, -RRBi, 2];
For[k = Length[RRAi], k >= 1, k--,
  If[Norm[ZRRRAi[[k]]] == 0,
    ZRRRAi = Drop[ZRRRAi, {k}, {}];
    ZRRBi = Drop[ZRRBi, {k}, {}];
    ,
    Break[];
  ];
];
];
];
list = Union[ZMC, NS];
gn = 0;
For[i = 1, i <= Length[KAll] - 1, i++,
  If[MemberQ[list, i] == False,
    gn = gn + 1;
    Print[gn, " st group"];
    list = Append[list, i];
Print[i, MatrixForm[Ai], MatrixForm[RRAi], MatrixForm[RRBi]];

For[j = i + 1, j <= Length[KAll], j++,
  If[MemberQ[list, j] == False &&
    Length[ZRRRAi] == Length[ZRRRAj] &&
    Length[Transpose[ZRRBi]] == Length[Transpose[ZRRBj]],
ctrl = 0;
For[p = 1, p <= Length[ZRRRAi], p++,
  For[q = 1, q <= Length[ZRRRAj], q++,
    If[Sort[ZRRRAi[[p]]] == Sort[ZRRRAj[[q]]] &&
      Sort[ZRRBi[[p]]] == Sort[ZRRBj[[q]]],

```

```

        ctrl = ctrl + 1;
        Break[];
    ];
];
];
If[ctrl == Length[ZRRAi],

ctrl2 = 0;
For[p = 1, p <= Length[Transpose[RRBi]], p++,
  For[q = 1, q <= Length[Transpose[RRBj]], q++,
    If[Sort[Transpose[Join[Transpose[RRBi], Transpose[-
RRBi], 2]]][[All, p]] == Sort[Transpose[Join[Transpose[[RRBj],
',
        Transpose[-RRBj], 2]][[All, q]]],
      ctrl2 = ctrl2 + 1;
      Break[];
    ];
  ];
];

If[ctrl2 == Length[Transpose[Subscript[RRB, i]]],
  list = Append[list, j];

  Print[j,
MatrixForm[Aj], MatrixForm[RRAj], MatrixForm[RRBj]];
];
];

];
];

```

] ;  
 ] ;

## EK B: Çalışmadaki Sonuçların Algoritma 3.1 Kullanılarak Elde Edilen Çıktıları

### Teorem 4.1'in çıktıları

Grup 1

$$1(\alpha_1 \quad \alpha_2) \left( 1 \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \frac{\beta}{\alpha_1} \quad \frac{\gamma}{\alpha_1} \right)$$

Grup 2

$$2(\alpha_1 \quad \beta_2) \left( 1 \quad \frac{\beta_2}{\alpha_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \frac{\beta}{\alpha_1} \quad \frac{\gamma}{\alpha_1} \right)$$

Grup 3

$$3(\alpha_1 \quad \gamma_2) \left( 1 \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \frac{\beta}{\alpha_1} \quad \frac{\gamma}{\alpha_1} \right)$$

Grup 4

$$4(\beta_1 \quad \alpha_2) \left( 1 \quad \frac{\alpha_2}{\beta_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta_1} \quad \frac{\beta}{\beta_1} \quad \frac{\gamma}{\beta_1} \right)$$

Grup 5

$$5(\beta_1 \quad \beta_2) \left( 1 \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta_1} \quad \frac{\beta}{\beta_1} \quad \frac{\gamma}{\beta_1} \right)$$

Grup 6

$$6(\beta_1 \quad \gamma_2) \left( 1 \quad \frac{\gamma_2}{\beta_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta_1} \quad \frac{\beta}{\beta_1} \quad \frac{\gamma}{\beta_1} \right)$$

Grup 7

$$7(\gamma_1 \quad \alpha_2) \left( 1 \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\gamma_1} \quad \frac{\beta}{\gamma_1} \quad \frac{\gamma}{\gamma_1} \right)$$

Grup 8

$$8(\gamma_1 \quad \beta_2) \left( 1 \quad \frac{\beta_2}{\gamma_1} \right) \left( \frac{\alpha}{\gamma_1} \quad \frac{\beta}{\gamma_1} \quad \frac{\gamma}{\gamma_1} \right)$$

Grup 9













































































































$$160 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Grup 9

$$121 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## EK C: Literatürdeki Bazı Sonuçların Algoritma 3.1 Kullanılarak Elde Edilen Çıktıları

### İki İdempotent Matrisin Lineer Bileşiminin İdempotentliği [5]

Grup 1 Lineer bağımlı matrisler ele alınmamıştır.

$$1(1 \ 1)(1 \ 1)(1 \ 0)$$

Grup 2

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Teoremin (i) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Teoremin (iii) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Teoremin (ii) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

### İki Değişmeli Tripotent Matrisin Lineer Bileşiminin Tripotentliği [15]

Grup 1 Lineer bağımlı matrisler ele alınmamıştır.

$$1(1 \ 1)(1 \ 1)(1 \ -1 \ 0)$$

$$2(1 \ -1)(1 \ -1)(1 \ -1 \ 0)$$

Grup 2

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ Teoremin (g) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

Grup 3

6  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  Teoremin (a) ve (b) şıklarına karşılık gelmektedir.

7  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  Teoremin (c) ve (b) şıklarına karşılık gelmektedir.

8  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  Teoremin (d) ve (e) şıklarına karşılık gelmektedir.

9  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  Teoremin (d) ve (f) şıklarına karşılık gelmektedir.

## İkisi Değişmeli Üç İdempotent Matrisin Lineer Bileşiminin İdempotentliği [25]

Grup 1

1  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (m) şıkkına karşılık gelmektedir.

Grup 2

8  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (i) şıklarına karşılık gelmektedir.

9  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (i) şıklarına karşılık gelmektedir.

10  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (g) şıklarına karşılık gelmektedir.

11  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (g) şıklarına karşılık gelmektedir.

12  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (g) şıklarına karşılık gelmektedir.

13  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (i) şıklarına karşılık gelmektedir.

18  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (j) şıklarına karşılık gelmektedir.

21  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (j) şıklarına karşılık gelmektedir.

23  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (h) ve (j) şıklarına karşılık gelmektedir.

Grup 3

14  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

16  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

20  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (k) şıkkına karşılık gelmektedir.

Grup 4

29  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (f) şıkkına karşılık gelmektedir.

31  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (f) şıkkına karşılık gelmektedir.

35  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  Teorem 1'in (f) şıkkına karşılık gelmektedir.





$$55 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Teorem 1'in (a) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$58 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Teorem 1'in (d) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$59 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Teorem 1'in (a) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$60 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Teorem 1'in (a) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$61 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Teorem 1'in (a) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$62 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Teorem 1'in (t) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

Grup 6

$$33 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$36 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$38 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Grup 7

$$45 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ Teorem 1'in (c) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

## Karşılıklı Değişmeli İki İnvolutif Bir Tripotent Matrisin Lineer Bileşiminin Tripotentliği [27]

Grup 1

$$1(1 \ 1 \ 1)(1 \ 1 \ 1)(1 \ -1 \ 0) \text{ Teorem2.2'nin (e) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$2(1 \ 1 \ -1)(1 \ 1 \ -1)(1 \ -1 \ 0) \text{ Teorem2.2'nin (f) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$4(1 \ -1 \ 1)(1 \ -1 \ 1)(1 \ -1 \ 0) \text{ Teorem2.2'nin (f) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

$$5(1 \ -1 \ -1)(1 \ -1 \ -1)(1 \ -1 \ 0) \text{ Teorem2.2'nin (f) şikkına karşılık gelmektedir.}$$

Grup 2

$$7 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ Teorem2.2'nin (a) şikkına karşılık gelmektedir.}$$





$$33 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{Teorem 2.3'ün } (k') \text{ şıkkına}$$

karşılık gelmektedir.

$$36 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{Teorem 2.3'ün } (g') \text{ şıkkına karşılık}$$

gelmektedir.

$$37 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{Teorem 2.3'ün } (g') \text{ şıkkına karşılık}$$

gelmektedir.

Grup 9

$$28 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{Teorem 2.3'ün } (h') \text{ şıkkına karşılık gelmektedir.}$$

$$34 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{Teorem 2.3'ün } (i') \text{ şıkkına karşılık gelmektedir.}$$

$$39 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{Teorem 2.3'ün } (b') \text{ şıkkına karşılık gelmektedir.}$$

$$40 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{Teorem 2.3'ün } (b') \text{ şıkkına karşılık gelmektedir.}$$

## ÖZGEÇMİŞ

Emre KİŞİ, 07.05.1985 tarihinde İzmir’de doğdu. Lise eğitimini 2004 yılında Aydın Yesevi Koleji’nde tamamladı. 2005 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitimine başladı ve 2009 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD’da yüksek lisans programına kaydoldu ve 2012 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2012 yılında İlim KİŞİ ile evlendi.