T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE BAZI ÖZEL YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hami GÜNDOĞDU

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL**

Haziran 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE BAZI ÖZEL YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hami GÜNDOĞDU

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 23.06.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir / kabul edilmemiştir.

Prof. Dr.	**Doç. Dr.**	**Doç. Dr.**
Ömer F. GÖZÜKIZIL	**Metin YAMAN**	**Ali DEMİR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hami GÜNDOĞDU
03.06.2017

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda tecrübeleri ile bana yol gösteren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a ve maddi manevi desteğini esirgemeyen aileme ve eşim Dr. Kübra ÖZATA GÜNDOĞDU'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ iv
ŞEKİLLER LİSTESİ v
ÖZET vi
SUMMARY vii

BÖLÜM 1.
GİRİŞ 1
1.1. Genel Tanımlar 1
1.2. Hareketli Dalga Tipleri 13

BÖLÜM 2.
BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ 20
2.1. Tanh-Coth Metodu 20
2.2. sn-ns Metodu 22

BÖLÜM 3.
BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ 28
3.1. Tanh-Coth Metoduyla Çözümü 29
3.2. Sn-Ns Metoduyla Çözümü 31

BÖLÜM 4.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER 39

KAYNAKLAR.. 40
ÖZGEÇMİŞ 43

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

am$u$	: Jacobi genliği
BBM	: Benjamin-Bona-Mahony denklemi
cn$u$	: Jacobi Eliptik cosinüs fonksiyonu
dn$u$	: Jacobi eliptik delta modülü
k	: Jacobi eliptik modül
k'	: Jacobi eliptik tamamlayıcı modül
KdV	: Korteweg De Vries denklemi
nc$u$	: Jacobi eliptik cosinus fonksiyonun çarpmaya göre tersi
ns$u$	: Jacobi eliptik sinus fonksiyonun çarpmaya göre tersi
sn$u$	: Jacobi Eliptik sinüs fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. $u(x,t)=\text{sech}^2(x-t), -\pi \le x,t \le \pi$ soliton çözümünün grafiği ……. 14

Şekil 1.2. $u(x,t)=\cos(x-t), -2\pi \le x,t \le 2\pi$ periyodik çözümün grafiği 14

Şekil 1.3. $u(x,t)=1-\tanh(x-t), -10 \le x,t \le 10$ kink çözümün grafiği ………. 15

Şekil 1.4. $u(x,t)=e^{-|x-t|}, \ -2 \le x,t \le 2$ peakon çözümün grafiği ……………... 16

Şekil 1.5. $u(x,t)=e^{-|x-t|^{\frac{1}{6}}}, \ -2 \le x,t \le 2$ cuspon çözümün grafiği …………….. 17

Şekil 1.6. $u(x,t)=\cos^{\frac{1}{2}}(x-t), 0 \le x,t \le 1$ kompakton çözümün grafiği ………. 18

Şekil 3.1. $u_1(x,t)$ çözümünün $-10 \le x,t \le 10$ aralığındaki grafiği ……………. 36

Şekil 3.2. $u_2(x,t)$ çözümünün $-10 \le x,t \le 10$ aralığındaki grafiği …..….…… 36

Şekil 3.3. $u_3(x,t)$ çözümünün $-10 \le x,t \le 10$ aralığındaki grafiği …..……..... 37

Şekil 3.4. $u_4(x,t)$ çözümünün $-10 \le x,t \le 10$ aralığındaki grafiği ………..... 37

Şekil 3.5. $u_5(x,t)$ çözümünün $-10 \le x,t \le 10$ aralığındaki grafiği ………..... 38

ÖZET

Anahtar kelimeler: Tanh-Coth metodu, sn-ns metodu, Benjamin-Bona-Mahony denklemi.

Bu tez çalışmasında, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden bazıları ele alınmıştır. Bu yöntemler tanh-coth metodu ve sn-ns metodudur. Bu metotların ana hatları sırasıyla verilmiştir. Sonra, Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin çözümleri bu yöntemler kullanılarak bulunmuştur. İlk önce, BBM denklemini tanh-coth ve sn-ns metotlarıyla çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra da her iki yöntemlede bulunan çözümler karşılaştırılmıştır. Sonuçta, sn-ns metoduyla bulunan çözümlerin her zaman tanh-coth metoduyla elde edilen çözümleri içerdiği görülmüştür. Böylece, tanh-coth metodu sn-ns metodunun bir özel hali olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Araştırmada elde edilen sonuçlara göre, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmak için kullanılan yöntemlerden sn-ns metodu daha kapsamlıdır ve daha çok çözüm vermektedir.

SOME SPECIAL METHODS IN SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQAUTIONS

SUMMARY

Keywords: Tanh-Coth method, the sn-ns method, Benjamin-Bona-Mahony equation.

In this thesis work, some special methods for solving partial differential equations are considered. These methods are tanh-coth method and the sn-ns method. Outline of these methods are given, respectively. The tanh-coth and the sn-ns methods are applied to Benjamin-Bona-Mahony equation. Then, the solutions of this partial differential equation are found by using these methods. Firstly, we obtain the solutions of BBM equation by using tanh-coth and the sn-ns methods. After that, we compare the solutions gained by both methods. It is seen that the solutions found by the sn-ns methods always contains the ones found by the tanh-coth method. Therefore, it is shown that the tanh-coth method is a special case of the sn-ns method.

According to findings in this work, the sn-ns method is more comprehensive then the tanh-coth method in finding the general solutions of partial differential equations and gives more solutions.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Tanım 1.1. Bir değişkene ve bu değişkenin fonksiyonu ile bu fonksiyonun türevleri arasındaki bağıntalara *diferansiyel denklem* denir. x reel değişkenin fonksiyonu $y(x)$ olmak üzere n. mertebeden bir diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir [1]. Bu arada denklemin n. mertebeden diferansiyel denklem olabilmesi için $y^{(n)}$ nin katsayısı $\neq 0$ olmalıdır.

Ayrıca, $y(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevleri

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^n = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

şeklindedir.

Tanım 1.2. Bir diferansiyel denklemde, en yüksek türevin mertebesine o diferansiyel *denklemin mertebesi* denir [1].

Tanım 1.3. Bir diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeli türevin derecesine o diferansiyel *denklemin derecesi* denir [1].

Tanım 1.4. Bir diferansiyel denklemde $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ yerine $y = f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ türevleri konulduğunda denklem özdeş olarak gerçekleniyorsa $y = f(x)$ fonksiyonuna o diferansiyel denklemin *özel çözümü* denir[1].

Tanım 1.5. n. mertebeden $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ diferansiyel denklemi y ve y nin türevlerine göre birinci dereceden ise bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Aksi takdirde, verilen diferansiyel denkleme lineer olmayan veya non-lineer diferansiyel denklem denir. $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ ler ve $Q(x)$, x in verilmiş sürekli fonksiyonları olmak üzere, n. mertebeden bir lineer diferansiyel denklem genel olarak

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_n(x) = Q(x)$$

biçimindedir [1].

Tanım 1.6. n. mertebeden $P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_n(x) = Q(x)$ lineer diferansiyel denkleminde $Q(x) = 0$ ise bu denkleme homojen veya sağ tarafsız denklem denir. $Q(x) \neq 0$ ise bu denkleme *homojen olmayan* veya *sağ taraflı diferansiyel denklem* denir [1].

Tanım 1.7. $y(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasında ve onun herhangi bir ε komşuluğunda tanımlı olsun. Bu durumda, $y(x)$ fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

eşitliğiyle hesaplanır. Bu limit varsa, $y(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir veya diferansiyellenebilir fonksiyon, aksi durumda (yani limit değeri yoksa veya sonsuz ise) bu fonksiyon x_0 noktasında türevlenemez veya diferansiyellenemez fonksiyon denir. Diğer bir deyişle, $y(x)$ fonksiyonun x_0 noktasında türevli olabilmesi için o noktadaki sağdan ve soldan türevlerinin eşit olması gerekir. Yani, yukarıda verilen limitin sağdan ve soldan değerlerinin var ve birbirine eşit olması gerekir.

$y(x)$ fonksiyonun x_0 noktasındaki sağdan türevi $y'(x_0^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$ ve o noktadaki soldan türevi $y'(x_0^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$ şeklinde tanımlanır.

$y'(x_0^+) = y'(x_0^-)$ eşitliği varsa $y(x)$ fonksiyonun x_0 noktasında türevi vardır. $y(x)$ fonksiyonu herhangi bir (a,b) aralığında tanımlanmış ve bu aralığın her bir noktasında fonksiyonun türevi varsa $y(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında *türevlenebilir* veya *diferansiyellenebilir* fonksiyondur denir [2].

Tanım 1.8. İki ya da daha çok değişkene bağlı bilinmeyen bir fonksiyon ile bu fonksiyonun değişkenlerine göre türevlerini içeren denklemlere *kısmi türevli diferansiyel denklemler* denir. x, y bağımsız değişkenlerine bağımlı bir $z = z(x,y)$ bilinmeyen fonksiyonu için en genel kısmi diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} \ldots\right) = 0$$

şeklinde yazılır.
Burada F , $x, y, z, z_x, \ldots$ değişkenlerinin verilmiş bir fonksiyonu ve

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots$$

olarak ifade edilir [3].

Tanım 1.9. $z(x,y)$ fonksiyonu herhangi bir (x,y) noktasında ve bu noktayı içeren bir D açık bölgesinde tanımlı olsun. Bu durumda $z(x,y)$ fonksiyonun bu noktalardaki x ve y ye göre türevleri

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x}$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(x,y+\Delta y)-z(x,y)}{\Delta y}$$

limitlerinin varlığı ile tanımlanır [4].

Tanım 1.10. Bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesi olarak tanımlanır. En yüksek mertebeden kısmi türevin derecesine de o kısmi diferansiyel *denklemin derecesi* denir [5].

Tanım 1.11. Bir kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise denkleme lineer kısmi diferansiyel denklem denir. Eğer bir kısmi diferansiyel denklem lineer değilse o denkleme *lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem* denir [5].

Tanım 1.12. Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde görülen görülen en yüksek mertebeden türevlere göre lineer ise, denkleme *yarı lineer denklem* denir [5].

Tanım 1.13. Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde görülen görülen en yüksek mertebeden türevlere göre lineer, yani yarı lineer, ve bu en yüksek mertebeden türevlerin katsayısı sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise, denkleme *hemen hemen lineer denklem* denir [5].

Tanım 1.14. Kendisi ve kısmi türevleri denklemde yerine konulduğunda bir özdeşlik veren fonksiyona o denklemin *çözümü* veya *integrali* denir [5].

Tanım 1.15. Bazı çözümler hariç tüm çözümleri içeren çözüme *genel çözüm* veya *genel integral* denir. Genel çözüm, bağımsız değişkenlerin keyfi fonksiyonlarını ihtiva eder. Genel çözümdeki keyfi fonksiyon sayısı denklemin mertebesi ile yakından alakalıdır. Genel olarak, k bağımsız değişkenli $n.$ mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünün $k-1$ değişkenli n keyfi fonksiyon ihtiva eder [5].

Tanım 1.16. İki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemleri yazmakta, kısmi türevler için $z_x = p$, $z_y = q$, $z_{xx} = r$, $z_{xy} = s$ ve $z_{yy} = t$ gösterimleri kullanılır. Bu gösterim, *Mongre-Ampere* gösterimidir. Bu gösterime göre, birince mertebeden iki bağımsız değişkenli en genel denklem

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

ve ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli en genel denklem de

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

biçiminde yazılabilir [5].

Tanım 1.17. İkinci mertebeden hemen-hemen lineer

$$Lz \equiv A(x, y)z_{xx} + 2B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + F(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \tag{1.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada A, B ve C; $xy-$ düzleminin bir Ω bölgesinde x ve y nin iki defa sürekli türetilebilir fonksiyonlarıdır ve aynı anda üçünün birden sıfır olmadığı kabul edilir.

$AD_x^{\ 2} + 2BD_xD_y + CD_y^{\ 2}$ ye L operatörünün *esas kısmı* denir. (1.1) denkleminin çözümlerini tayin eden kısım bu kısımdır. Şimdi,

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyona, (1.1) denkleminin *diskriminantı* denir.

Eğer Ω nın bir (x_0, y_0) noktasında

i. $\Delta(x_0, y_0) > 0$ ise denklem bu noktada hiperboliktir,
ii. $\Delta(x_0, y_0) = 0$ ise denklem bu noktada paraboliktir,
iii. $\Delta(x_0, y_0) < 0$ ise denklem bu noktada eliptiktir,

denir. Bir Ω bölgesinin tüm noktalarında *hiperbolik, parabolik* veya *eliptik* bir denkleme Ω da sırasıyla *hiperboliktir, paraboliktir* veya *eliptiktir* denir. Genellikle bir denklem, katsayılarının tanımlı olduğu bir bölgede her üç tipten de olabilir. Özel olarak A, B ve C katsayıları sabit olan denklemler tüm düzlemde aynı tiptendir [5].

Bu çalışmada sıklıkla eliptik fonksiyonlar kullanılmıştır. Eliptik fonksiyonların ise farklı tanımlamaları mevcuttur.

Tanım 1.18. İletkenlik özellikleri üniform ve izotropik olan bir katı maddede herhangi bir t anındaki sıcaklık θ olsun. ρ maddenin yoğunluğu, s onun özısısı ve k sıcak iletkenliğini göstermek üzere, θ

$$\kappa\nabla^2\theta = \partial\theta / \partial t,$$

kısmi türevli denklemini sağlar. Burada, $\kappa = \dfrac{k}{s\rho}$ oranı yayılma olarak adlandırılır. $Oxyz$ dikdörtgensel kartezyen koordinat düzleminin x ve y eksenleri yönlerinde sıcaklıkta değişim olmadığı, özel durumunda ısı akışı heryerde $z-$eksenine paralel, ve ısı iletiminin

$$\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta}{\partial t}, \theta = \theta(z,t) \tag{1.2}$$

formunda olduğu kabul edilir.

Özel problem olarak, sınır düzlemi üzerindeki koşullar her t anında üniform tutulduğunda $z = 0, \pi$ düzlemleri ile sınırlı sonsuz bir döşeme materyalindeki ısı akışını düşünelim. Bu ısı akışı tamamıyla $z-$eksenindedir ve (1.2) denklemi uygulunabilir.

Öncelikle, döşemenin yüzeyleri 0 sıcaklığında sürdürülsün, yani $z = 0, \pi$ ve bütün t ler için $\theta = 0$ olduğunu kabul edelim. Başlagıç olarak, $t = 0$ da $0 < z < \pi$ için $\theta = f(z)$ olduğu varsayılsın. O zaman, oluşan kısmi türevli denklemlerin çözümü değişken ayrımı metodu ile

$$\theta(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-n^2 \kappa t} \sin nz$$

şeklinde elde edilir [6]. Burada, b_n Fourier katsayılarıdır ve

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \sin(nz) dz$$

denklemiyle belirlenir.

Özel olarak, $\delta(z)$ Dirac birim öteleme fonksiyonu olmak üzere, $f(z) = \pi\delta(z - \pi/2)$ olsun. Başlangıçta, sıcaklığın çok yüksek olduğu $z = \frac{1}{2}\pi$ orta düzleminin komşuluğu hariç heryerde döşeme $0^0 C$ sıcaklığındadır. Sıcaklığını $0^0 C$'dan artırmak ve yüksek sıcaklığa ulaştırmak için bu düzlemin içindeki birim alana h (joules) ısı miktarı enjekte etmek gerekmektedir. Burada, h değeri

$$h = \rho s \pi \int_{(1/2)\pi - 0}^{(1/2)\pi + 0} \delta(z - \frac{1}{2}\pi) dz = \rho s \pi$$

formulüyle hesaplanır.

Şimdi, b_n hesaplanırsa;

$$b_n = 2\int_0^{\pi} \delta(z - \frac{1}{2}\pi)\sin(nz)dz = 2\sin(\frac{1}{2}n\pi).$$

bulunur. Böylelikle, döşeme üzerindeki ısı yayılması

$$\theta(z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)^2\kappa t}\sin(2n+1)z$$

denklemiyle elde edilir. Bu denklemde $e^{-4\kappa t} = q$ yazılırsa

$$\theta = \theta_1(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)z$$

birinci teta fonksiyonu (θ_1) elde edilir. Problemimizin sınır koşullarını değiştirirsek başka bir teta fonksiyonu daha ortaya çıkar. Bu yüzden, sıcaklığın sızmaması için döşemenin düzeyleri yalıtılmalıdır. $z = 0, \pi$ de karşılık gelen sınır koşulları $\partial\theta / \partial z = 0$ dır. Değişken ayrımı metodu ile

$$\theta(z,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-n^2\kappa t}\cos nz$$

çözümüne ulaşılır. Burada, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\cos(nz)dz$ dir.

$f(z) = \pi\delta(z - \frac{1}{2}\pi)$ olarak alınırsa, $a_n = 2\cos(\frac{1}{2}n\pi)$ elde edilir. Böylelikle, problemimizin çözümü

$$\theta = \theta_4(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\sin 2nz$$

şeklinde elde edilir. Burada, $e^{-4\kappa t} = q$ dir. Bu seri açılımı da dördüncü teta fonksiyonunu tanımlar.

Şimdi de θ_1 ve θ_4 den yararlanarak θ_2 ve θ_3 fonksiyonlarını tanımlayalım. Tanımından da kolaylıkla görülür ki, $\theta_1(z)$ periyodiktir ve peryodu 2π dir.

$\theta_1(z)$ fonksiyonunda z değeri $\dfrac{\pi}{2}$ kadar artırılırsa

$$\begin{aligned}\theta_2(z) = \theta_1(z+\frac{\pi}{2}) &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin[(2n+1)z+(n+\frac{1}{2})\pi]\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)z\end{aligned}$$

$\theta_2(z)$ fonksiyonu elde edilir. $\theta_2(z)$ fonksiyonunun z nin bir integral fonksiyonu ve peryodunun 2π olduğu açıktır.

$\theta_4(z)$ fonksiyonu, z nin π peryotlu bir integral fonksiyonudur. z değeri $\dfrac{\pi}{2}$ artırılırsa

$$\theta_3(z) = \theta_4(z+\frac{\pi}{2}) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz$$

şeklinde $\theta_3(z)$ teta fonksiyonu da elde edilmiş olur. $\theta_3(z)$ fonksiyonu da z nin π peryotlu bir integral fonksiyonudur.

Yukarıdakiler özetlenirse, teta fonksiyonları $\theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$ sembolleriyle gösterilmektedir ve trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\theta_1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)z,$$

$$\theta_2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z,$$

$$\theta_3 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz,$$

$$\theta_4 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz.$$

Burada, z reel (veya kompleks) bir sayıdır ve $|q| < 1$ dir [6].

Tanım 1.19. Bu çalışmada Jacobi Eliptik fonksiyonlarından olan $\mathrm{sn}u, \mathrm{cn}u$ ve $\mathrm{dn}u$ fonksiyonlarından yararlanılmıştır. Bu fonksiyonlar, $z = \dfrac{u}{\theta_3^{\,2}(0)}$ olmak üzere teta fonksiyonlarının türünden aşağıdaki gibi tanımlanır [6]:

$$\mathrm{sn}u = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} . \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)},$$

$$\mathrm{cn}u = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)} . \frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)},$$

$$\mathrm{dn}u = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} . \frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}.$$

Tanım 1.20. Jacobi eliptik fonksiyonları birinci tip eliptik integralin tersinden ortaya çıkmaktadır [7]. Birinci tip eliptik integral $0 < k^2 < 1$ olmak üzere,

$$u = F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $k = \mathrm{mod}\, u$ eliptik modül ve $\phi = am(u,k) = am(u)$ Jacobi genliğini göstermektedir. $u = F(\phi, k)$ eşitliğinden $\phi = F^{-1}(u,k)$ yazılabilir.

Jacobi eliptik fonksiyonlarının genliği $\phi = F^{-1}(u,k) = am(u,k)$ ile gösterilir.

Jacobi eliptik fonksiyonları birinci tip eliptik integral yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sin\phi = \sin(am(u,k)) = sn(u,k),$$

$$\cos\phi = \cos(am(u,k)) = cn(u,k),$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\phi} = \sqrt{1-k^2\sin^2(am(u,k))} = dn(u,k).$$

Jacobi eliptik fonksiyonları yukarıda hem teta fonksiyonları hem de birinci tip eliptik integral yardımıyla tanımlanmıştır.

Tanım 1.21. Eliptik fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$

ii. $\mathrm{dn}^2 u + k^2 \mathrm{sn}^2 u = 1$

iii. $\mathrm{dn}^2 u - k^2 \mathrm{cn}^2 u = k^{'2}$

Burada $k = \theta_2^2(0)/\theta_3^2(0),\ k' = \theta_4^2(0)/\theta_3^2(0)$ dir. k eliptik fonksiyonun modülü, k' de tamamlayıcı modül olarak adlandırılır [6].

Tanım 1.22. Jacobi eliptik fonksiyonları k nın bazı özel değerleri için bilinen trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlarına dönüşmektedir.

$k \to 1$ iken

$$\mathrm{sn}(u,1) \to \tanh u,$$

$$\mathrm{ns}(u,1) \to \coth u,$$

$$\mathrm{cn}(u,1) \to \mathrm{sech}\, u,$$

$$\mathrm{dn}(u,1) \to \mathrm{sech}\, u,$$

şeklinde hiperbolik fonksiyonlara yakınsarlar.

Ayrıca, $k \to 0$ iken de

$$\mathrm{sn}(u,0) \to \sin u,$$
$$\mathrm{ns}(u,0) \to \csc u,$$
$$\mathrm{cn}(u,0) \to \cos u,$$
$$\mathrm{dn}(u,0) \to 1,$$

şeklinde trigonometrik fonksiyonlara yakınsarlar.

Bu özelliklerden dolayı Jacobi eliptik fonksiyonları trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonları kapsamaktadır.

Tanım 1.23. Diğer eliptik fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathrm{ns}u = \frac{1}{\mathrm{sn}u}, \quad \mathrm{nc}u = \frac{1}{\mathrm{cn}u}, \quad \mathrm{nd}u = \frac{1}{\mathrm{dn}u},$$
$$\mathrm{sc}u = \frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{cn}u}, \quad \mathrm{cd}u = \frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}, \quad \mathrm{ds}u = \frac{\mathrm{dn}u}{\mathrm{sn}u},$$
$$\mathrm{cs}u = \frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{sn}u}, \quad \mathrm{dc}u = \frac{\mathrm{dn}u}{\mathrm{cn}u}, \quad \mathrm{sd}u = \frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{dn}u}.$$

Tanım 1.24. Eliptik fonksiyonlarının türevleri aşağıdaki gibidir;

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}u = \mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u,$$
$$\frac{d}{du}\mathrm{cn}u = -\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u,$$
$$\frac{d}{du}\mathrm{dn}u = -k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u,$$
$$\frac{d}{du}\mathrm{ns}u = -\mathrm{cs}u\,\mathrm{ds}u,$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{nc}u = \mathrm{sc}u\mathrm{dc}u,$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{nd}u = k^2\mathrm{sd}u\mathrm{cd}u.$$

Tanım 1.25. Eliptik fonksiyonların integralleri

$$\int \mathrm{sn}u du = \frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}u - k\mathrm{cn}u),$$
$$\int \mathrm{cn}u du = \frac{1}{k}\sin^{-1}(k\mathrm{sn}u),$$
$$\int \mathrm{dn}u du = \sin^{-1}(\mathrm{sn}u),$$
$$\int \mathrm{cs}u du = -\ln(\mathrm{ns}u + \mathrm{ds}u),$$
$$\int \mathrm{ds}u du = \ln(\mathrm{ns}u - \mathrm{cs}u),$$
$$\int \mathrm{dc}u du = \ln(\mathrm{nc}u + \mathrm{cs}u),$$

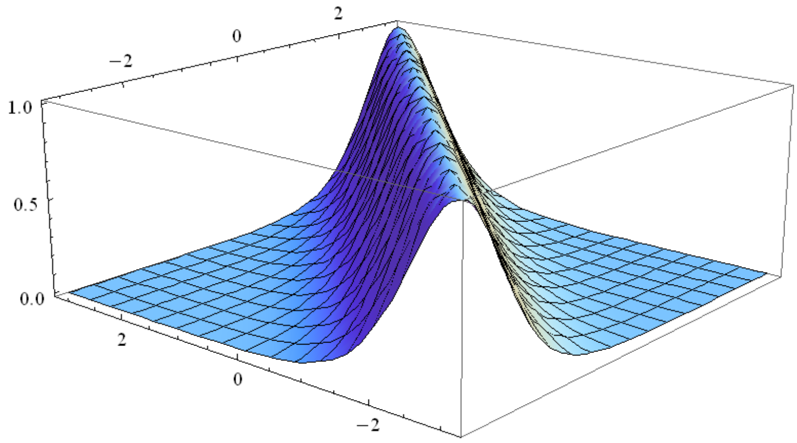
şeklindedir.

1.2. Hareketli Dalga Tipleri

Dalga denklemlerini çalışmak bu denklemlerin dalga çözümlerini çalışmayı gerektirir. Hareketli dalga çözümü, sabit bir hızla sürekli hareket eden bir çözüm demektir. Bu dalga tipleri genellikle nonlineer dalga denklemlerinin adi diferansiyel denklemlere indirgenmesi ile elde edilmektedir. Bu da çoğu kez $u(x,t) = u(\mu\xi)$, $\xi = x - Vt$ dönüşümü yardımıyla olur. Burada V dalganın hızıdır. Bu dönüşüm x ve t ye bağlı bir kısmi türevli diferansiyel denklemi, uygun yöntemlerle çözülebilen bir adi türevli diferansiyel denkleme dönüştürür.

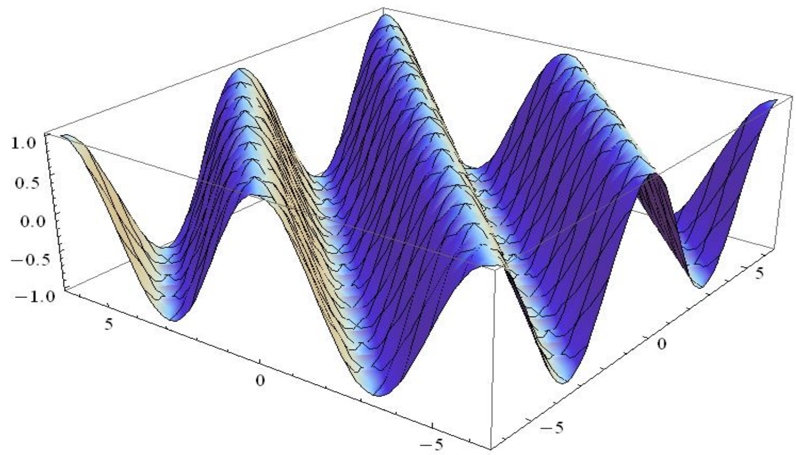
Plazma fiziğinde görülen dalga tiplerinden, sığ sularda görülen tiplerine kadar birçok türde hareketli dalga tipi mevcuttur. Ayrıca bunların sayısı hızla artmaktadır. Bunların önemli olduğu düşünülen bir kaçından bahsedilecektir.

Tanım 1.2.1. Soliter dalgalar sınırlandırılmış yani, lokalize edilmiş, hareketli dalga tipleridir. Bu dalgalar uzun mesafelerde asimptotik olarak sıfırdır. Soliton dalgalar ise soliter dalga tiplerinin özel bir durumudur, öyle ki $\xi \to \mp\infty$ olduğunda u 'nun türevleri $u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi) \to 0$ dır. Soliton dalga tiplerinin en önemli özelliği diğer soliton tipleri ile etkileşime girdiklerinde özelliklerini korumalarıdır. Soliton dalga tipine güzel bir örnek olarak KdV denklemi verilebilir. Şekil 1.1.'deki gibi sonsuz kanat veya kuyruğa sahip olan eğrilerdir. Şekil 1.1.'de sech^2 solitary dalga çözümü gösterilmektedir. Görüldüğü gibi grafik sonsuz iki kanada sahiptir.



Şekil 1.1. $u(x,t) = \text{sech}^2(x-t), -\pi \le x, t \le \pi$ soliton çözümünün grafiği

Tanım 1.2.2. Periyodik dalgalar, $\cos(x-t)$ gibi periyodik olan hareketli dalga çeşitleridir. Standart dalga denklemi $u_{tt} = u_{xx}$ çözüldüğünde periyodik çözümler elde edilir.



Şekil 1.2. $u(x,t) = \cos(x-t), -2\pi \le x, t \le 2\pi$ periyodik çözümün grafiği

Şekil 1.2.'de $u(x,t)=\cos(x-t)$ çözümü verilmiştir. Şekilden dalganın periyodik olduğu rahatlıkla görülebilir.

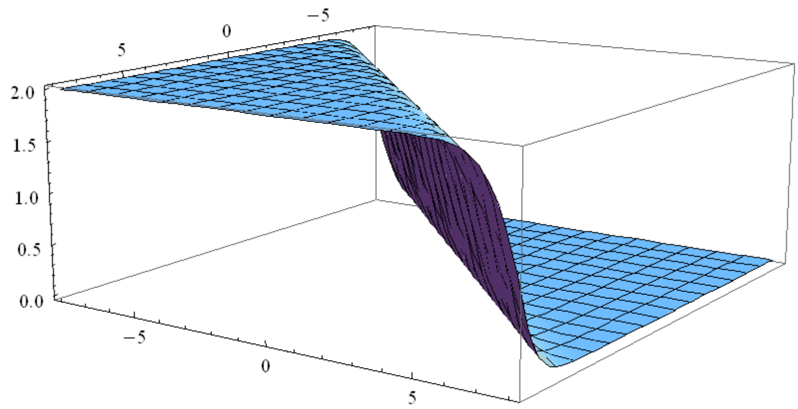
Tanım 1.2.3. Kink dalgalar**,** bir asimptotik durumdan diğerine geçerken azalan veya artan hareketli dalga türlerine denir. Kink çözümler sonsuzda sabit değere yaklaşırlar.

Standart dispatif

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0$$

Burgers denklemi kink çözüm vermesiyle bilinen bir denklemdir. Denklemde bulunan v viskozite katsayısıdır.

Şekil 1.3.'te $v = 1/2$ için Burger denkleminin çözümü olan $u(x,t) = 1 - \tanh(x-t)$, çözümünün grafiği verilmektedir.



Şekil 1.3. $u(x,t) = 1 - \tanh(x-t), -10 \le x,t \le 10$ kink çözümün grafiği

Tanım 1.2.4. Peakon dalgalar, tepeleri olan hareketli dalga tipleridir. Bu durumda, hareketli dalganın tepesi hariç diğer tüm noktları düzgün (smooth) özellik gösterirler. Ayrıca $u(x,t)$ çözümünün x e bağlı türevleri grafiğin tam tepe noktasının solunda ve sağında farklı işaretlere sahiptir.

Bunun anlamı her iki tarafta da türevler mevcuttur ancak tam tepe noktasında bir süreksizliğe sahiptir [8]. [8] ve [9] da peakon çözümler incelenmiş, bu çözümler periyodik peakon çözümler ve üstel azalan peakon çözümler şeklinde sınıflandırılmıştır.

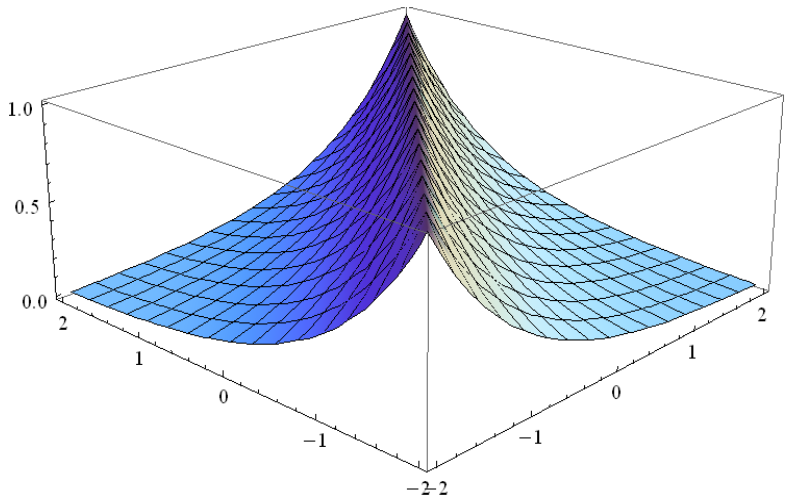
İntegrallenebilir Camassa-Holm ve Degasperis-Procesi denklemleri

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_x u_{xx} uu_{xxx}$$

şeklinde verilmektedir. Bu denklem $b=2$ ve $b=3$ için peakon soliter çözümler vermektedir.

CH denklemi $u(x,t) = Ve^{-|x-t|}$ şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada V dalga hızını göstermektedir.

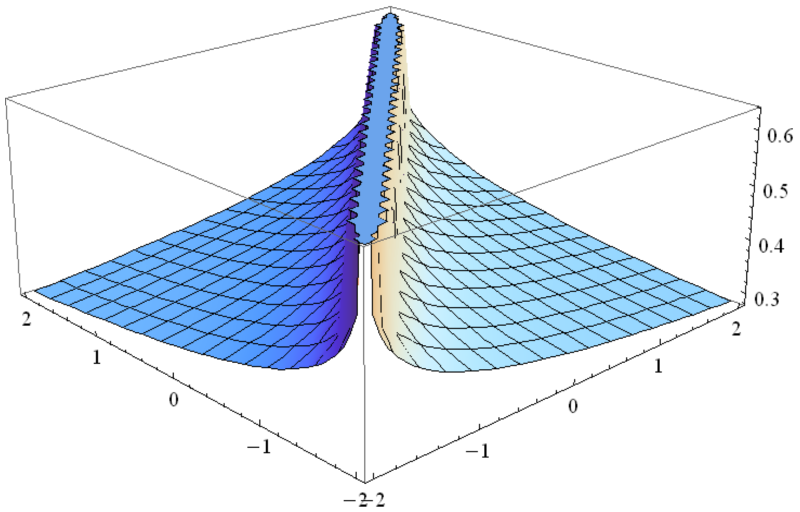
$V=1$ için elde edilen $u(x,t) = e^{-|x-t|}$, $-2 \le x,t \le 2$ çözümü Şekil 1.4.'te verilmektedir.



Şekil 1.4 $u(x,t) = e^{-|x-t|}$, $-2 \le x,t \le 2$ peakon çözümün grafiği

Tanım 1.2.5. Cuspon dalgalar, soliton dalgaların başka bir formudur. Bu dalgaların tepe uçlarında zirveler (cusp) mevcuttur. Peakon çözümlerin aksine tepe noktasındaki türevler ıraksaktır.

Şekil 1.5.'de bir cuspon çözüm görülmektedir. Tepedeki noktada türevin ıraksadığı görülebilir.



Şekil 1.5 $u(x,t) = e^{-|x-t|^{\frac{1}{6}}}, \quad -2 \le x,t \le 2$ cuspon çözümün grafiği

Önemli bir not olarak burada şunu belirtmek gerekir; $|x| \to \infty$ iken $u(x,t)$ çözümünün türevleri sıfıra yakınsamaktadır. Maalesef cuspon çözümler için bir açık (explicit) ifade verilmemektedir.

Genel olarak cuspon çözümlerin

$$u(x,t) = e^{-|x-t|^{\frac{1}{n}}}, n > 1$$

şeklinde ifade edilebileceği kabul edilir.

Tanım 1.2.6. Kompakton dalgalar, başka bir soliton dalga tipidir. Kompakton dalgaların aralıksız dayanaklara sahip hareketli dalgalar oldukları ve ayrıca nonlineer dispersiyon etki tarafından sonlu bir merkezde tutulduğu bulunmuştur.

Dispersif nonlinear $K(n,n)$ denklemleri nonlineer KdV türü denklemlerdir ki bunlar

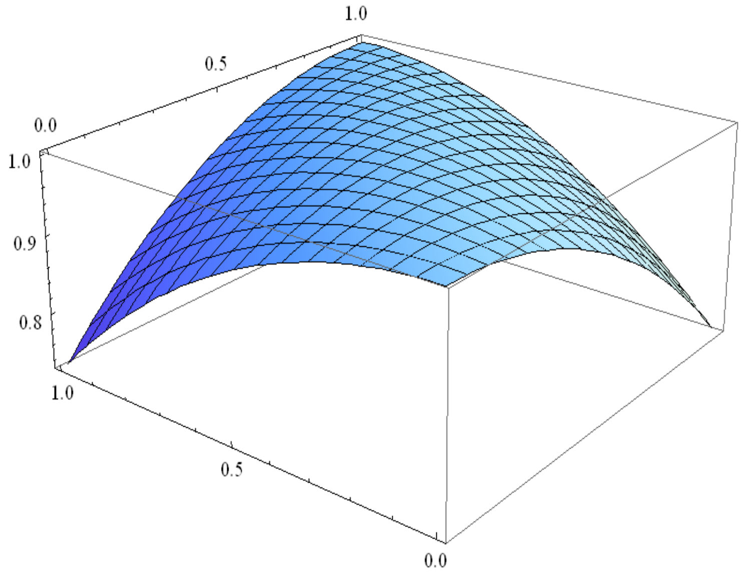
$$u_t + a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, a > 0, n > 1$$

formundadır. Bu denklemler kompakt soliter dalga özelliklerini gösterirler.

Kompakton dalgaların iki önemli özelliği gözlenmiştir: Bunlardan ilki, standart KdV soliton dalgaları $\xi \to \infty$ için $u(\xi) \to 0$ olurken, kompakton üstel kuyruk veya kanatların olmaması ile karakterize edelir öyle ki $\xi \to \infty$ için $u(\xi)$ 0 a yakınsamaz. İkincisi ise standart KdV soliton genlik artarken daraldığı halde kompaktonun genişliği genliğinden bağımsızdır.

Şekil 1.6.'da $u(x,t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x-t), 0 \le x, t \le 1$ şeklinde bir kompakton dalga görülmektedir.

Rahatlıkla görülebileceği gibi kompakton, üstel kanatları olmayan bir soliter dalgadır.



Şekil 1.6 $u(x,t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x-t), 0 \le x, t \le 1$ kompakton çözümün grafiği

Özetle, soliton ve kompakton sırasıyla kuyruklu ve kuyruksuz üstel kanatlara sahip dalgalardır. Ayrıca, klasik soliton çözümler analitik çözümler olmasına ragmen kompakton çözümler analitik olmayan çözümlerdir.

Tanım 1.2.7. KdV denklemleri gibi bazı denklem türleri analitik olan hareketli dalga çözümleri verirken, $K(n,n)$ gibi denklem türleri de analitik olmayan çözümler verirler. Analitik olmayan soliter dalga çözümü veren nonlinear dalga denklemlerin genel özellikleri şu şekildedir: Bu denklemler ya $K(n,n)$ denklemleri gibi $(u^n)_{xxx}$ türü nonlinear dispersiyon terimi içerirler ya da Camassa-Holm denklemi gibi en yüksek mertebeden türevli terimleri bir fonksiyon ya da bağımlı değişkenle çarpılmış, örneğin uu_{xxx} gibi, durumundadır [10,11].

BÖLÜM 2. BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Modern bilimin ve mühendisliğin çoğu alanında karşılaşılan problemler genellikle kısmi türevli denklemlerle modellenmektedir. Dolayısıyla, kısmi türevli denklemlerin çözümünü bulmak modern bilimde ve mühendislikte çok önemli bir role sahiptir. Kısmi türevli denklemleri çözmek için günümüze kadar birçok metot ortaya atılmıştır ve kullanılmıştır. Bu metodlardan bazıları, genelleştirilmiş tanh metodu [12], tanh-coth metodu [13], tanh-sech metodu [14,15], sine-cosine metodu [16,17], exp-fonksiyon metodu [18], yansıtmalı Riccati denklemleri yöntemi [19], genelleştirilmiş yansıtmalı Riccati denklemleri yöntemi [20], (G'/G)-genleşme yöntemi [21] ve sn-ns metodu [22] dur.

Bu çalışmada, tanh-coth metodu ve sn-ns metodu kullanıldığı için bu çözüm yöntemlerini tanıtılacaktır.

2.1. Tanh-Coth Metodu

İlk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin genel hallerini ele alalım;

$$P\left(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{xt},u_{tt},u_{xxt},\ldots\right)=0. \tag{2.1}$$

Bu tip denklemlerin hareketli dalga çözümünü bulmak için $\xi = x - Vt$ dalga değişkenini tanımlayalım. Öyle ki,

$$u\left(x,t\right)=U\left(\mu\xi\right). \tag{2.2}$$

Verilen dalga değişkenine dayanarak kısmi türevler

$$\frac{\partial}{\partial t}=-V\frac{d}{d\xi},\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}=V^2\frac{d}{d\xi},\ \frac{\partial}{\partial x}=\frac{d}{d\xi},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{d^2}{d\xi^2}. \tag{2.3}$$

şeklinde adi türevlere dönüştürülür. Diğer mertebeden türevlerde aynı yolla elde edilir.

(2.2) ve (2.3) deki eşitlik kullanarak (2.1) de verilen kısmi türevli denklem aşağıdaki adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$Q\left(U,U',U'',\ ...\right)=0. \tag{2.4}$$

(2.4) denkleminin bütün terimleri ξ ye göre türev içeriyorsa, bu denklemin integrali alınarak ve integral sabitini sıfır düşünerek daha sadeleştirilmiş bir adi türevli denklem elde edilebilir.

Şimdi, de yeni bir bağımsız değişkeni aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$Y=tanh\left(\mu\xi\right). \tag{2.5}$$

Bu yeni değişkene göre türevleri değiştirirsek,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\xi}=\mu\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY},\\
&\frac{d^2}{d\xi^2}=-2\ \mu^2Y\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}+\mu^2\left(1-Y^2\right)\frac{d^2}{dY^2},\\
&\frac{d^3}{d\xi^3}=2\ \mu^3\left(1-Y^2\right)\left(3Y^2-1\right)\frac{d}{dY}-6\mu^3Y\left(1-Y^2\right)^2\ \frac{d^2}{dY^2}+\mu^3\left(1-Y^2\right)^3\ \frac{d^3}{dY^3}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilir. Diğer mertebeden türevlerde aynı şekilde elde edilebilir.

Şimdi de, aşağıdaki yaklaşımı göz önüne alalım:

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k + \sum_{k=0}^{M} b_k Y^{-k}. \tag{2.7}$$

Burada, M pozitif bir sayıdır. İlk önce M parametresi belirlenmelidir. M yi belirlemek için denklemde lineer terimlerin en yüksek mertebesi ile lineer olmayan terimlerin en yüksek derecesi bir birine eşitlenir. M belirlendikten sonra, (2.6) ve (2.7) deki eşitlikler (2.4) teki adi diferansiyel denklemine konulursa, Y nin kuvvetlerine bağlı bir denklem ortaya çıkar. Aynı dereceden Y lerin katsayıları bir araya toplanır ve sıfıra eşitlenir. Bu da, a_k, b_k, $(k = 0, \dots, M)$, V ve μ yü içeren bir cebirsel denklem sistemi verir. Bu denklem sisteminden, katsayılar belirlenip (2.7) yaklaşımında yerine yazılarak çözüm kapalı formda elde edilir.

2.2. Sn-Ns Metodu

Aşağıdaki formda verilen

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxt}, \ldots) = 0 \tag{2.8}$$

lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleminin hareketli dalga çözümlerini bulmada ilk adım aşağıdaki

$$u(x,t) = v(\phi(\xi)), \ \xi = x + \lambda t + \xi_0 \tag{2.9}$$

dalga dönüşümünü dikkate almaktır. Burada, v keyfi fonksiyon, ξ_0 keyfi sabit ve $\phi = \phi(\xi)$ uygun bir fonksiyondur. Genel olarak, $\phi(\xi) = \xi$ birim fonksiyon olarak alınır.

(2.9) dönüşümü kullanılarak, (2.8) denklemi aşağıdaki gibi $v(\xi)$ ye göre adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$Q(v, v', v'', v''', \ldots) = 0. \tag{2.10}$$

Burada, Q fonksiyonu $v, v', v'', v''', \ldots$ lere göre polinomdur. (2.10) deki denklemin çözümlerini bulmak için $v(\xi)$ fonksiyonun $v(\xi) = H\left(f(\xi), g(\xi)\right)$ şeklinde ifade edilebildiğini kabul edelim. $H(f, g)$, f ve g ye göre rasyonel fonksiyondur. f ve g fonksiyonları aşağıdaki sistemi sağlamalıdır:

$$f'(\xi) = rf(\xi)g(\xi),$$
$$g^2(\xi) = S\left(f(\xi)\right). \tag{2.11}$$

Burada, $r \neq 0$ belirlenmesi gereken bir sabit ve $S(f)$ de $f = f(\xi)$ ye göre rasyonel fonksiyondur. Göstereceğiz ki (2.11) sistemi bazı özel durumlarda çözülebilir.

Gerçekten, $\varphi(\xi) \neq 0$ ve $N \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki

$$f(\xi) = \varphi^N(\xi) \tag{2.12}$$

eşitliği kullanılırsa, (2.11) sistemi aşağıdaki

$$\varphi'(\xi) = \frac{r}{N}\varphi(\xi)g(\xi),$$
$$g^2(\xi) = S(\varphi^N(\xi)). \tag{2.13}$$

sistemine indirgenir. (2.13) sisteminden

$$\left(\varphi'(\xi)\right)^2 = \left(\frac{r}{N}\right)^2 \left(\varphi(\xi)\right)^2 \; \mathrm{S}\left(\varphi^N(\xi)\right) \tag{2.14}$$

eşitliği elde edilir.

(2.14) denklemi eliptik tipte bir denklemdir. $S(f)$ ve N yi uygun seçerek, bu tür kısmi türevli denklemleri çözmek için farklı metodlar elde edebiliriz. Şimdi, (2.14) denklemini çözdüğümüzü kabul edelim. O zaman, (2.11) ve (2.12) eşitlikleri dikkate alınarak f ve g fonksiyonları aşağıdaki formüllerle hesaplanabilir.

$$f(\xi) = \varphi^N(\xi),$$
$$g(\xi) = \frac{f'(\xi)}{rf(\xi)} = \frac{N}{r}\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}$$

(2.10) denklemini çözmek için

$$v(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} f^{j-1}\left(a_j f + b_j g\right),$$
$$v(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j f^j,$$
$$v(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}\left(a_j f^j + b_j f^{-j}\right)$$

yaklaşımlarından birini kullanırız. Bu yaklaşımlardan birini (2.10) denkleminde yerine yazarsak ya $f = f(\xi)$ ve $g = g(\xi)$ lere bağlı ya da sadece $f = f(\xi)$ bir polinom denklemi elde ederiz. $f^i g^j\left(i, j = 0,1,2,\ldots\right)$ lerin katsayılarını sıfıra eşitleyerek $a_j, b_j, v, \ldots$ lere bağlı bir polinom denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek istenilen çözümlere ulaşılır.

$r = 1$, ve $S\left(f\right) = af^{-2} + b + cf^2$ olsun. Aynı zamanda, $\Delta = b^2 - 4\text{ac} > 0$ olsun.

Bu durumda, (2.14) denklemi

$$\left(\varphi'\right)^2 = a\varphi^4 + b\varphi^2 + c \tag{2.15}$$

denklemine dönüşür.

Bu denklemin genel çözümü Jacobi eliptik fonksiyonları sn, ns cinsinden

$$\varphi(\xi) = \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}\mathrm{ns}\left(k\left(\xi + C\right)|\, m\right),\ C = \text{keyfi sabit} \tag{2.16}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$k = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}},\qquad m = \sqrt{\frac{b^2 - 2\mathrm{ac} + b\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{ac}}} \tag{2.17}$$

dir. (2.16) çözümü $a > 0$, $b < 0$ ve $0 < c \le b^2/4a$ koşulları sağlandığında geçerlidir.

Diğer yandan, k, m, ξ ve C reel değerleri için $\xi \to \sqrt{-1}\mathrm{ns}\left(\sqrt{-1}k\left(\xi + C\right)|\, m\right)$ fonksiyonu da reel değerlidir. Doğrulayabiliriz ki, (2.17) de verilmiş k ve m için

$$\varphi(\xi) = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}\mathrm{ns}(\sqrt{-1}k\left(\xi + \xi_0\right)|\, m)$$

fonksiyonu

$$\left(\varphi'\right)^2 = a\varphi^4 + b\varphi^2 + c,\quad a > 0,\ b < 0, 0 < c \le b^2/4a$$

denkleminin bir çözümüdür. Böylelikle, $a > 0$, $0 < c \le b^2/4a$ ve $b \ne 0$ iken (2.15) denkleminin genellikle bir çözümünü bulabiliriz.

Şimdi, $a < 0$ olsun.

$$k=\sqrt{\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}},\qquad m=\sqrt{-\frac{b^2-4\mathrm{ac}+b\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{ac}}}$$

olmak üzere

$$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}\mathrm{nd}\big(k(\xi+C)\,|\,m\big),\qquad \text{C=keyfi sabit}$$

fonksiyonunun $b\neq 0$ ve $c>0$ için (2.15) denkleminin bir çözümü olduğu kolaylıkla doğrulanabilir.

$A>0$ keyfi bir sabit olmak üzere, k,m,ξ ve C reel değerleri için $\xi\rightarrow \mathrm{nd}\big(\sqrt{-A}(\xi+C)\,|\,m\big)$ fonksiyonu da reel değerlidir.

$r=1$ ve $S(f)=af^{-2}+b+cf^{2}$ olduğu için (2.11) sistemi

$$\begin{aligned} f'(\xi)&=f(\xi)g(\xi),\\ g^2(\xi)&=\frac{a}{f^2(\xi)}+b+\mathrm{c}f^2(\xi)\end{aligned}\qquad(2.18)$$

sistemine dönüşür.

$C=0$ alırsak, (2.25) sisteminin çözümleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} f(\xi)&=\varphi^{-1}(\xi)=\frac{\sqrt{a}}{k}\mathrm{sn}(\mathrm{k}\xi|m),\\ g(\xi)&=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\mathrm{ksn}\big(\mathrm{k}\xi|m\big)\mathrm{cs}\big(\mathrm{k}\xi|m\big)\mathrm{ds}\big(\mathrm{k}\xi|m\big).\end{aligned}\qquad(2.19)$$

Bu da bizi (2.10) denkeminin çözümünü

$$v(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}[a_j \mathrm{sn}^j(\mathrm{k}\xi) + b_j \mathrm{ns}^j(\mathrm{k}\xi)] \tag{2.20}$$

biçiminde aramaya teşvik eder.

n sayısı bölüm 2.1 deki tanh-coth yönteminde bahsi geçen denge sabitini ifade eder. Çoğu zaman $n=1$ veya $n=2$ bulunur. Bu durumda, çözüm olan $v(\xi)$

$$v(\xi) = a_0 + a_1 \mathrm{sn}(\mathrm{k}\xi|m) + b_1 \mathrm{ns}(\mathrm{k}\xi|m),$$
$$v(\xi) = a_0 + a_1 \mathrm{sn}(\mathrm{k}\xi|m) + b_1 \mathrm{ns}(\mathrm{k}\xi|m) + a_2 \mathrm{sn}^2(\mathrm{k}\xi|m) + b_2 \mathrm{ns}^2(\mathrm{k}\xi|m)$$

formundadır.

BÖLÜM 3. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin genel hali

$$u_t + u_x - \alpha u_{xx} + u^n u_x - u_{xxt} = 0, \quad 0 \le \alpha \le 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

biçimindedir. Burada, $u(x,t)$ fonksiyonu bu denklemin çözümüdür ve $-\infty \le x \le \infty$ ve $t \ge 0$ aralığında tanımlanmış periyodik olmayan fonksiyonlar sınıfındandır.

Bu çalışmada $\alpha = 0$ ve $n = 1$ durumu incelenmiştir. Bu durumda BBM denklemi

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{3.1}$$

şeklini alır.

(3.1) denklemi ilk olarak, 1970 lerde Benjamin ve diğerleri [23] tarafından iyi bilinen Korteweg de Vries (KdV) [24] denklemine alternatif olarak ortaya konmuştur. KdV denklemi

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0$$

biçiminde yazılmıştır. Bu denklem küçük genlikli ve büyük dalga boylu su dalgalarını modellemek için kullanılmıştır. Burada, u dalganı hızını, x fiziksel uzaklığı ve t ise geçen süreyi temsil etmektedir.

BBM denklemi hakkında daha fazla bilgi için [25-28] ye bakılabilir.

Bu bölümde (3.1) de verilen Benjamin-Bona-Mahony denklemine sırasıyla tanh-coth metodu ve sn-ns metodu uygulanacaktır. Bu metodlar yardımıyla (3.1) de verilen BBM denkleminin çözümleri bulunacaktır.

3.1. Tanh-Coth Metoduyla Çözümü

Öncelikle $\xi = x - Vt$ ve $u(x,t) = U(\mu\xi)$ eşitlikleri göz önüne alınır ve $u(x,t)$ nun kısmi türevleri yerine $U(\xi)$ nun adi türevleri yazılırsa (3.1) kısmi türevli denklemi

$$-VU + U + \frac{1}{2}U^2 + VU'' = 0 \tag{3.2}$$

adi diferansiyel denklemine dönüşür.

Şimdi denge sabitini bulalım. Bunun için $U = \Phi^M$ döünüşümü kullanılacaktır. Burada, Φ fonksiyonun türevleri

$$\frac{d\Phi^M}{d\xi} = M\Phi^{M+1},\ \frac{d^2\Phi^M}{d\xi^2} = M(M+1)\Phi^{M+2},\ldots$$

şeklindedir.

(3.2) denkleminde $U = \Phi^M$, $U^2 = \Phi^{2M}$ ve $U'' = M(M+1)\Phi^{M+2}$ değerleri yerine yazılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-V\Phi^M + \Phi^M + \frac{1}{2}\Phi^{2M} + VM(M+1)\Phi^{M+2} = 0.$$

denklemi elde edilir. Şimdi, $U^2 = \Phi^{2M}$ nin derecesi ile $U'' = \Phi^{M+2}$ nin mertebesi bir birine eşitlenerek $M = 2$ olarak bulunur.

Dolayısıyla tanh-coth metodu

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k Y^k + \sum_{k=0}^{2} b_k Y^{-k} \tag{3.3}$$

sonlu açılımını kullanmaya teşvik eder. Burada, $Y = \tanh(\mu\xi)$ dir. (3.3) açılımı (3.2) denklemine konulur ve Y nin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
&Y^8: \ 12V\mu^2 a_2 + a_2{}^2 = 0,\\
&Y^7: \ 4Va_1\mu^2 + 2a_1a_2 = 0,\\
&Y^6: -16Va_2\mu^2 + a_1{}^2 + 2a_2 - 2Va_2 + 2a_0a_2 = 0,\\
&Y^5: -4Va_1\mu^2 + 2a_1 - 2Va_1 + 2b_1a_2 + 2a_0a_1 = 0,\\
&Y^4: \ 2a_0 - 2Va_0 + 2b_1a_1 + 2b_2a_2 + a_0{}^2 + 4V\mu^2 b_2 + 4V\mu^2 a_2 = 0,\\
&Y^3: -4Vb_1\mu^2 + 2b_1 - 2Vb_1 + 2b_1a_0 + 2b_2a_1 = 0,\\
&Y^2: -16Vb_2\mu^2 + b_1{}^2 + 2b_2 - 2Vb_2 + 2a_0b_2 = 0,\\
&Y^1: \ 4Vb_1\mu^2 + 2b_1b_2 = 0,\\
&Y^0: \ b_2{}^2 + 12V\mu^2 b_2 = 0,
\end{aligned}$$

denklem sistemi ortaya çıkar.

Bu denklem sistemi Mathematica kullanarak çözülürse bilinmeyen (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2), V ve μ değerleri

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = 0,\ b_1 = 0,\ a_2 = -\frac{3}{2},\ b_2 = 0,\ V = \frac{1}{2},\ \mu = \pm\frac{1}{2},\\
&a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = 0,\ b_1 = 0,\ a_2 = 0,\ b_2 = -\frac{3}{2},\ V = \frac{1}{2},\ \mu = \pm\frac{1}{2},\\
&a_0 = -\frac{1}{4},\ a_1 = 0,\ b_1 = 0,\ a_2 = -\frac{3}{8},\ b_2 = -\frac{3}{8},\ V = \frac{1}{2},\ \mu = \pm\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu değerler (3.3) açılımında yerine yazılırsa Benjamin-Bona-Mahony kısmi türevli diferansiyel denkleminin çözümleri

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\tanh^2\frac{1}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right),$$
$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\coth^2\frac{1}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right),$$
$$u_3(x,t)=-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\tanh^2\frac{1}{4}\left(x-\frac{t}{2}\right)-\frac{3}{8}\coth^2\frac{1}{4}\left(x-\frac{t}{2}\right).$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Sn-Ns Metoduyla Çözümü

Bu kısımda, sn-ns metodunu kullanılarak (3.1) denkleminin çözümleri elde edilecektir.

İlk olarak (2.9) dönüşümü yapılır. Tanh-coth metodundaki dalga değişkeniyle aynı olmasını sağlamak için de $\lambda=-V$ ve $\xi_0=0$ alınırsa (3.1) kısmi türevli diferansiyel denklemi

$$-Vv+v+\frac{1}{2}v^2+Vv''=0 \tag{3.4}$$

adi diferansyiel denklemine dönüşür.

Denge sabitini belirlemek için, hiperbolik yöntemdeki gibi $v=\Phi^n$ dönüşümünü kullanılırsa denge sabitinin $n=2$ olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla (3.4) denklemine

$$v(\xi)=a_0+a_1\mathrm{sn}(\mu\xi|m)+b_1\mathrm{ns}(\mu\xi|m)+a_2\mathrm{sn}^2(\mu\xi|m)+b_2\mathrm{ns}^2(\mu\xi|m) \tag{3.5}$$

biçiminde çözüm aranır.

Bu fonksiyon ve türevleri (3.4) denkleminde yerine yazılır ve aynı dereceden olan terimlerin katsayıları toplanıp sıfıra eşitlenirse,

$$a_1\mu^2m^2 - a_1a_2\left(-\frac{1}{2V}\right) = 0,$$
$$6a_2\mu^2m^2 - a_2^{\,2}\left(\frac{V-1}{V}\right) = 0,$$
$$4a_2\mu^2m^2 + 4a_2\mu^2 + \left(a_1^{\,2} + 2a_0a_2\right)\left(-\frac{1}{2V}\right) + a_2\left(\frac{V-1}{V}\right) = 0,$$
$$a_1\mu^2m^2 + a_1\mu^2 + 2\left(a_0a_1 + b_1a_2\right)\left(-\frac{1}{2V}\right) + a_1\left(\frac{V-1}{V}\right) = 0,$$
$$b_1\mu^2 - b_1b_2\left(-\frac{1}{2V}\right) = 0,$$
$$6b_2\mu^2 - b_2^{\,2}\left(-\frac{1}{2V}\right) = 0,$$
$$4b_2\mu^2m^2 + 4b_2\mu^2 + \left(b_1^{\,2} + 2a_0b_2\right)\left(-\frac{1}{2V}\right) + b_2\left(\frac{V-1}{V}\right) = 0,$$
$$b_1\mu^2m^2 + b_1\mu^2 + 2\left(a_0b_1 + a_1b_2\right)\left(-\frac{1}{2V}\right) + b_1\left(\frac{V-1}{V}\right) = 0,$$
$$2a_2\mu^2 + 2b_2\mu^2m^2 - \left(a_0^{\,2} + 2a_1b_1 + 2a_2b_2\right)\left(-\frac{1}{2V}\right) - a_0\left(\frac{V-1}{V}\right) = 0,$$

cebirsel denklem sistemi ortaya çıkar.

Bu cebirsel denklem sistemi, Mathematica programı kullanılarak çözülürse, bilinmeyen (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2), V ve μ değerleri

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}} + \frac{4m^2}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}}\right), a_1 = 0, b_1 = 0,$$
$$a_2 = -\frac{3m^2}{2\sqrt{1-m^2+m^4}}, b_2 = 0, V = \frac{1}{2}, \mu = \pm\frac{1}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}} + \frac{4m^2}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}}\right), a_1 = 0, b_1 = 0,$$
$$a_2 = 0, b_2 = -\frac{3}{2\sqrt{1-m^2+m^4}}, V = \frac{1}{2}, \mu = \pm\frac{1}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{4}{\sqrt{16+224m^2+16m^4}}+\frac{4m^2}{\sqrt{16+224m^2+16m^4}}\right),a_1=0,$$
$$b_1=0,a_2=-\frac{3m^2}{2\sqrt{1+14m^2+m^4}},b_2=-\frac{3}{2\sqrt{1+14m^2+m^4}},V=\frac{1}{2},$$
$$\mu=\pm\frac{1}{\left(16+224m^2+16m^4\right)^{1/4}},$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2+m^4}}-\frac{m^2}{\sqrt{1-m^2+m^4}}\right),a_1=0,b_1=0,$$
$$a_2=\frac{6m^2}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}},b_2=0,V=\frac{1}{2},\mu=\pm\frac{\mathrm{i}}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2+m^4}}-\frac{m^2}{\sqrt{1-m^2+m^4}}\right),a_1=0,b_1=0,$$
$$a_2=0,b_2=\frac{6}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}},V=\frac{1}{2},\mu=\pm\frac{\mathrm{i}}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{1+14m^2+m^4}}-\frac{m^2}{\sqrt{1+14m^2+m^4}}\right),a_1=0,b_1=0,$$
$$a_2=\frac{6m^2}{\sqrt{16+224m^2+16m^4}},b_2=\frac{6}{\sqrt{16+224m^2+16m^4}},V=\frac{1}{2},$$
$$\mu=\pm\frac{\mathrm{i}}{\left(16+224m^2+16m^4\right)^{1/4}}.$$

altı farklı çözüm kümesi şeklinde bulunur.

Bulunan bu değerler (3.5) da verilen açılımda yerlerine yazılırsa (3.1) denkleminin çözümleri

$$v_1(\xi)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{4m^2+4}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}}\right)-\frac{3m^2}{2\sqrt{1-m^2+m^4}}\mathrm{sn}^2\left(\frac{\xi}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right),$$

$$v_2(\xi)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{4m^2+4}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}}\right)-\frac{3}{2\sqrt{1-m^2+m^4}}\,\mathrm{ns}^2\left(\frac{\xi}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right),$$

$$v_3(\xi)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{4m^2+4}{\sqrt{16+224m^2+16m^4}}\right)-\frac{3m^2}{2\sqrt{1+14m^2+m^4}}\times$$
$$\left[\mathrm{sn}^2\left(\frac{\xi}{\left(16+224m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right)-\mathrm{ns}^2\left(\frac{\xi}{\left(16+224m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right)\right],$$

$$v_4(\xi)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{m^2+1}{\sqrt{1-m^2+m^4}}\right)+\frac{6m^2}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}}\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\mathrm{i}\xi}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right),$$

$$v_5(\xi)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{m^2+1}{\sqrt{1-m^2+m^4}}\right)+\frac{6}{\sqrt{16-16m^2+16m^4}}\,\mathrm{ns}^2\left(\frac{\mathrm{i}\xi}{\left(16-16m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right),$$

$$v_6(\xi)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{m^2+1}{\sqrt{1+14m^2+m^4}}\right)+\frac{6m^2}{\sqrt{16+224m^2+16m^4}}\times$$
$$\left[\mathrm{sn}^2\left(\frac{\mathrm{i}\xi}{\left(16+224m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right)+\mathrm{ns}^2\left(\frac{\mathrm{i}\xi}{\left(16+224m^2+16m^4\right)^{1/4}},m\right)\right],$$

şeklinde ξ ye bağlı olarak Jacabi eliptik fonksiyonları cinsinden elde edilir.

Burada $\xi=x-Vt$ olduğundan ve her durumda $V=\frac{1}{2}$ bulunduğundan $\xi=x-\frac{1}{2}t$ olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi, Jacobi eliptik fonksiyonun özelliklerini kullanalım. $m\to 1$ iken ξ ye bağlı $v_i,(i=1,...,6)$ çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v_1(\xi)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\tanh^2\left(\frac{1}{2}\xi\right),$$
$$v_2(\xi)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\coth^2\left(\frac{1}{2}\xi\right),$$
$$v_3(\xi)=-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\tanh^2\left(\frac{1}{4}\xi\right)-\frac{3}{8}\coth^2\left(\frac{1}{4}\xi\right),$$
$$v_4(\xi)=-\frac{3}{2}\sec^2(\frac{1}{2}\xi),$$
$$v_5(\xi)=-\frac{3}{2}\csc^2(\frac{1}{2}\xi),$$
$$v_6(\xi)=-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\tan^2\left(\frac{1}{4}\xi\right)-\frac{3}{8}\cot^2\left(\frac{1}{4}\xi\right)=-\frac{3}{2}\csc^2\left(\frac{1}{2}\xi\right).$$

Şimdi $u(x,t)=v(\xi)$ ve $\xi=x-\frac{1}{2}t$ eşitliklerini göz önüne alalım.

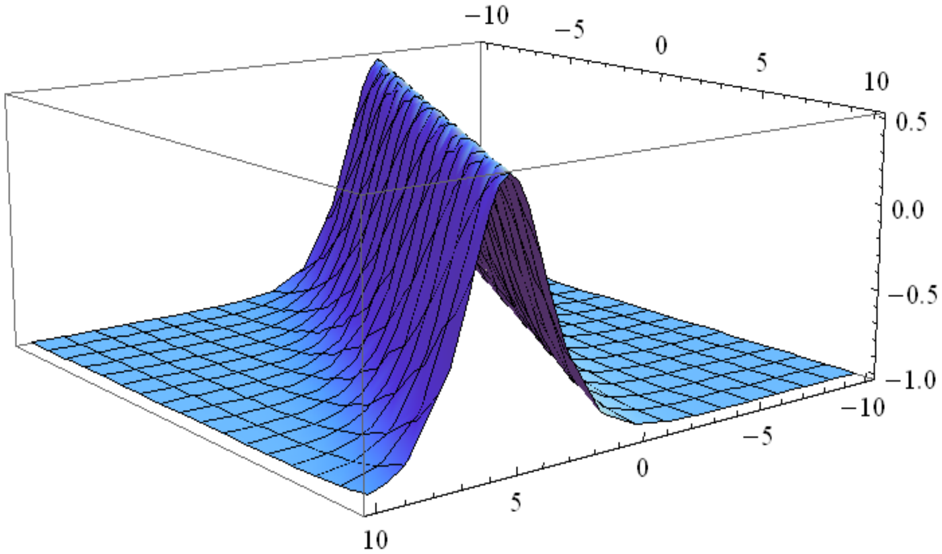
Dolayısyla, (3.1) in çözümleri olan $u_i,(i=1,...,6)$ ler x ve t ye bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\tanh^2\left(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}t)\right),$$
$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\coth^2\left(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}t)\right),$$
$$u_3(x,t)=-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\tanh^2\left(\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}t)\right)-\frac{3}{8}\coth^2\left(\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}t)\right),$$
$$u_4(x,t)=-\frac{3}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}t)\right),$$
$$u_{5,6}(x,t)=-\frac{3}{2}\csc^2\left(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}t)\right).$$

Kısmi türevli denklemlerin çözümlerinin tipini belirlemek, bu çözümlerin nasıl davrandığını saptamak ve çözümlerin davranışlarını incelemek bu alanlarda yapılan çalışmalarda önemli bir yere sahiptir.

Bu amaçla, şimdi yukarıda bulduğumuz bu çözümlerin grafiklerini inceleyelim.

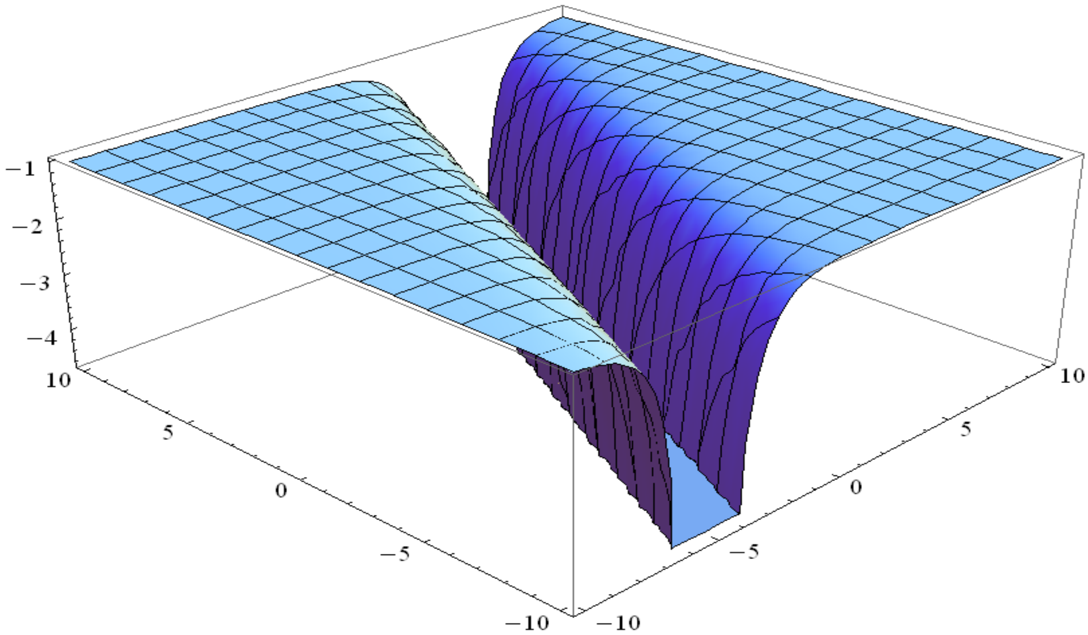
$u_1\left(x,t\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\tanh^2\left(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}t)\right)$ in grafiği



Şekil 3.1. $u_1\left(x,t\right)$ çözümünün grafiği

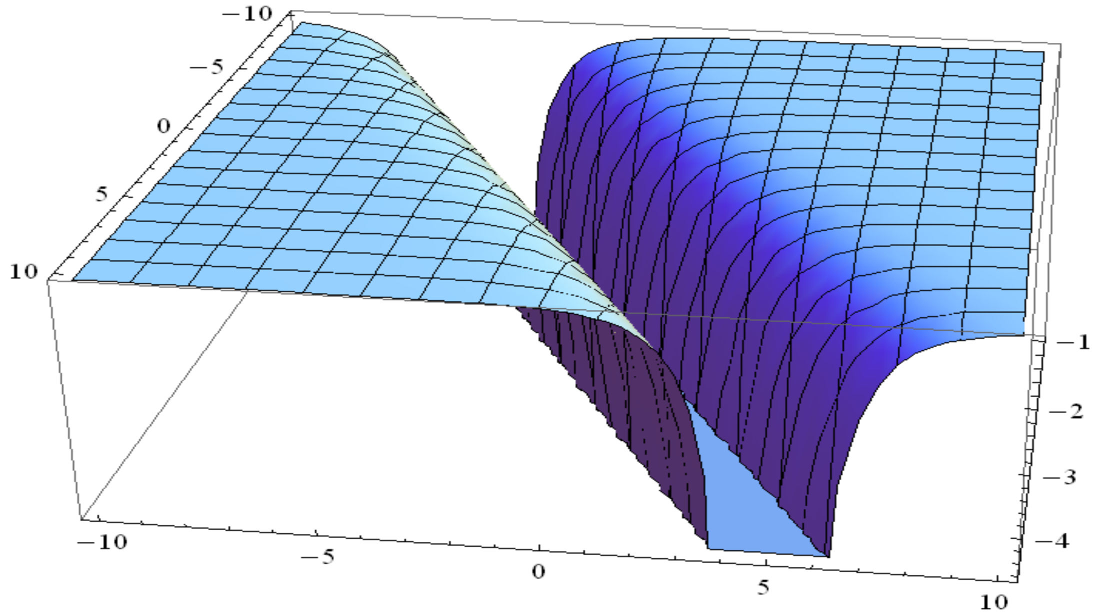
şeklindedir.

$u_2\left(x,t\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\coth^2\left(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}t)\right)$ in grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.2. $u_2\left(x,t\right)$ çözümünün grafiği

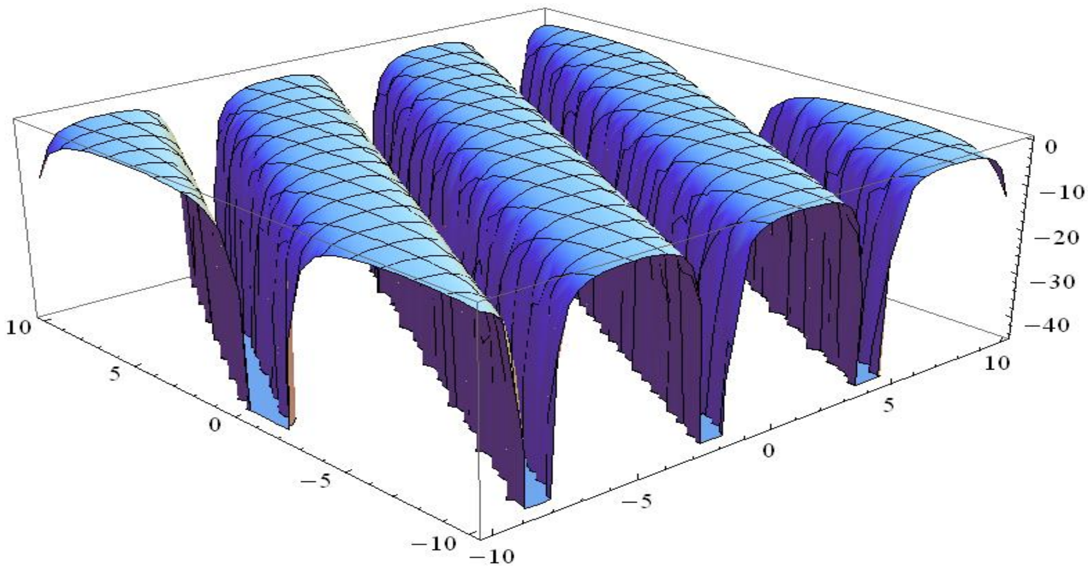
$u_3(x,t) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\tanh^2\left(\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}t)\right) - \frac{3}{8}\coth^2\left(\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}t)\right)$ ün grafiği ise



Şekil 3.3. $u_3(x,t)$ ni grafiği

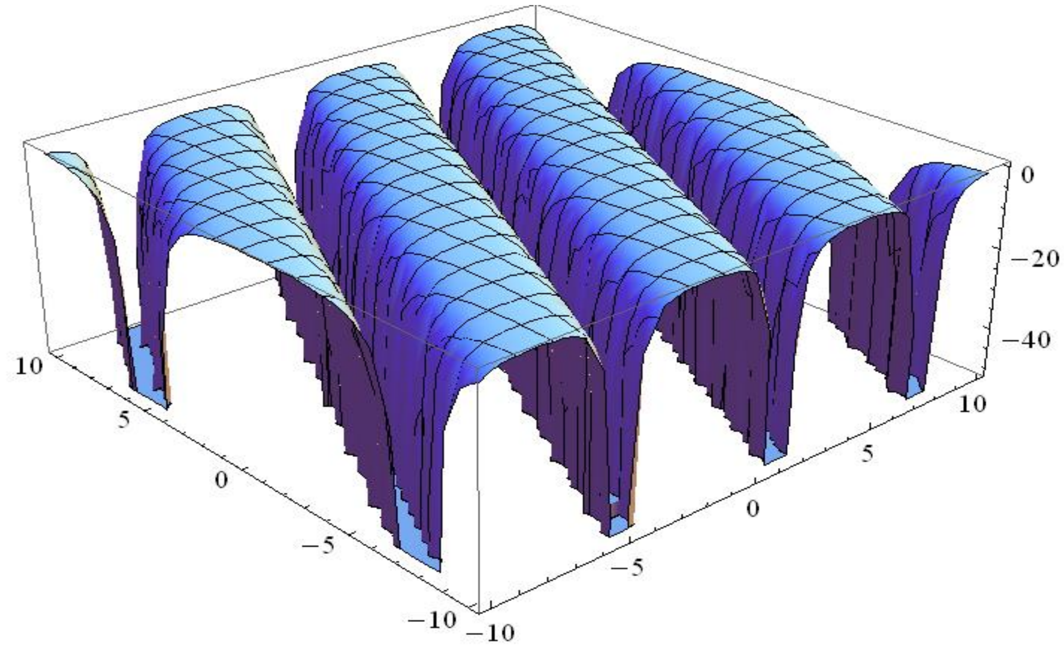
şeklindedir.

$u_4(x,t) = -\frac{3}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}t)\right)$ ün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil. 3.4 $u_4(x,t)$ çözümünün grafiği

Son olarak, $u_{5,6}(x,t) = -\frac{3}{2}\csc^2\left(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}t)\right)$ nın çözümümüm grafiği de



Şekil. 3.5 $u_{5,6}(x,t)$ çözümünün grafiği

şeklinde bulunur.

Bulunan bu çözümlerin grafikleri incelenirse, $u_1(x,t)$ nin soliton çözüm, $u_2(x,t)$ ve $u_3(x,t)$ çözümlerinin cuspon çözümler, $u_4(x,t)$ ve $u_{5,6}(x,t)$ çözümlerinin periyodik çözümler olduğu görülür.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için sıkça kullanılan yöntemlerden tanh-coth metodu ve ayrıca Jacobi eliptik fonksiyon metodu olarak ta bilinen sn-ns metodu incelenmiştir. Daha sonra bu yöntemler (1.40) de verilen Benjamin-Bona-Mahony kısmi türevli diferansiyel denklemine uygulanmıştır. Ve bu denklemin çözümleri bu iki yöntem kullanılarak ayrı ayrı bulunmuştur.

Tanh-coth metodu kullanıldığında BBM denklemi için hiperbolik fonksiyonlar cinsinden üç tane tam çözüm bulunmuştur. Öte yandan, sn-ns metodu kullanılarak aynı denkleme Jacobi eliptik fonksiyonları türünden altı tane tam çözüm bulunmuştur. Sadece çözümlerin fazlalığına bakarak bile sn-ns metodunun tanh-coth metodundan daha üstün olduğu söylenebilir. Üstelik, tanh-coth metoduyla bulunan çözümlerin aynısı sn-ns metoduyla bulunan çözümlerin içinde bulunmaktadır. $m \to 1$ durumunda bulunan çözümlere bakılırsa hem tanh-coth metoduyla bulunan hiperbolik fonksiyonlar cinsinden çözümleri hem de bunlara ek olarak trigonometrik fonksiyonlar cinsinden çözümleri içerir. $m \to 1$ iken sn-ns metodu tanh-coth metoduna dönüşür ve denebilir ki, tanh-coth metodu sn-ns metodunun sadece özel bir halidir. Bu yüzden, sn-ns metodu tanh-coth metodundan daha güçlüdür, sonucuna varılır.

Çalışmamın devamı olarak, farklı tipte kısmi türevli diferansiyel denklerin tanh-coth metoduyla ve sn-ns metoduyla çözülüp çözümlerin farklılığı ve sayısı incelenecektir. Burada amaç, farklı kısmi türevli diferansiyel denklemlerde de sn-ns metodu tekrar fazla çözüm verip vermemesini incelemek olmalıdır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin elde edilen çözümlerinin analitik olup olmaması, tam çözümler ve çözüm fonksiyonu sayısı fazlalılığı önemlidir.

KAYNAKLAR

[1] Başarır, M., Türker, E. S., Çözümlü Örneklerle Diferansiyel Denklemler, Değişim Yayınevi, 2003.

[2] Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M., Yüksek Matematik-Tek değişkenli Fonksiyonlar Analizi, Literatür Yayıncılık, 1999.

[3] Koca, K., Kısmi türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, 2008.

[4] Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M., Yüksek Matematik 2-Çok Değişkenli Fonksiyonlar Analizi, Literatür Yayıncılık, 2001.

[5] Çağlıyan. M., Çelebi. O., Kısmi Diferensiyel Denklemler, Dora Basım-Yayıncılık, 2010.

[6] Lawden, D., Eliptic Functions and applications, Springer-Verlag New York Inc., App. Math. Sci., Vol. 80, 515-918, 1989.

[7] Byrd Paul, F., Friedman, M. D., Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Compr. Stud. In Math., Vol. 67, 8-41, 1971.

[8] Wazwaz, A., Peakons, kinks, compactons and solitary patterns solutionsfor a family of Camassa-Holm equations by using new hyperbolic schemes, Appl. Math. Comput., Vol. 182, 412-424, 2006.

[9] Parkes, E., Vakjnenko, V., Explicit solutions of the Camassa-Holm equation, Chaos Solitons Fractals., Vol. 26, 1309-1316, 2005.

[10] Hirota, R., The direct method in soliton theory, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[11] Li, Y., Olver, P., Converge of solitary-wave solutions in a perturbed bi-Hamiltanian dynamical system, I. Compactons and Peakons, Discr. Contin. Dyn. Syste., Vol. 3, 419-432, 1997.

[12] Fan, E., Hon, Y. C., Generalized tanh method extended to special types of nonlinear equations, Z. Naturforsch, Vol. 57, 692-700, 2002.

[13] Wazwaz, A., The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth order KdV equations, Appl. Math. Comput., Vol. 184, 1002-1014, 2007.

[14] Wazwaz, A., New travelling wave solutions of different physical structures to generalized BBM equation, Phys. Lett. A, vol. 355, 358-362, 2006.

[15] Wazwaz, A., Helal, M., Non linear variants of the BBM equation with compact and noncompact physical structures, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 26, 767-776, 2005.

[16] Yadong, S., Explicit and exact special solutions for BBM-like B(m,n) equations with fully nonlinear dispersion, Vol. 25, 1083-1091, 2005.

[17] Yan, C., A simple transformation for nonlinear waves, Phys. Lett. A, Vol. 224 77-84, 1996.

[18] He, J., Zhang, L., Generalized solitary solution and compacton-like solution of the Jaulent-Miodek equations using the Exp-function method, Phys. Lett. A, Vol. 372, 1044-1047, 2008.

[19] Conte, R., Mussette, M., Link between solitary waves and projective Riccati equations, J. Phys. A-Math. Gen., Vol. 25, 5609-5623, 1992.

[20] Yan, Z., The Riccati equation with variable coefficients expansion algorithm to find more exact solutions of non linear differential equations, Comput. Phys. Comm., Vol. 152, 1-8, 2003.

[21] Wang, M., Li, X., Zahng, J., The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, Phys. Lett A, Vol. 372, 417-423, 2008.

[22] Alvaro, H., Solving nonlinear partial differential equations by the sn-ns method, Abstr. Appl. Analysis, Vol. 25, 1-7, 2012.

[23] Benjamin, T., Bona, J., Mahony, J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philos. Trans. R. Soc., London, Ser A, Vol. 272, 47-48, 1972.

[24] Korteweg, D., De, Vries, G., On the change of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary wave, Phil. Mag., Vol. 39, 422-443, 1835.

[25] Raupp, M., Galerkin methods applied to the Benjamin-Bona-Mahony equation, Bull. Braz. Math. Soc., Vol. 6, 65-77, 1975.

[26] Wahlbin, L., Error estimates for a Galerkin method for a class of model equations for long waves, Numer. Math., Vol.23, 289-303, 1975.

[27] Ewing, R., Time-stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equation, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15, 1125-1150, 1978.

[28] Arnold, D.,Jr, J., Thomee, V., Superconvergence of finite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable, Math. Comput., Vol. 27, 737-743, 1981.

ÖZGEÇMİŞ

Hami Gündoğdu, 02.06.1990 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğretimini Sakarya'da aldı. 2007 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2011 Bahar Döneminde Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2012–2015 seneleri arasında çeşitli okullarda matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2014-2015 eğitim-öğretim yılında Sakarya Üniversitesi'nde matematik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2015-2016 eğitim-öğretim yılında Sakarya Üniversitesi'nde araştırma görevliliğine atanmaya hak kazandı. Eğitimine ve görevine Sakarya Üniversite'sinde devam etmektedir. Halen Sakarya Ünivesitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.