

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**FİBONACCİ POLİNOMLARI OLARAK PARANTEZ
POLİNOMLARI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve BEYAZTAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı : **TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı : **Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ**

Ocak 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ POLİNOMLARI OLARAK PARANTEZ
POLİNOMLARI ÜZERİNE

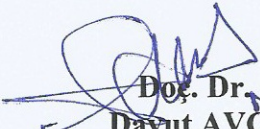
YÜKSEK LİSANS TEZİ

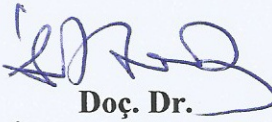
Merve BEYAZTAŞ


Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : TOPOLOJİ

Bu tez 18.01.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.


Doç. Dr.
Davut AVCI
Jüri Başkanı


Doç. Dr.
İsmet ALTINTAŞ
Üye


Yrd. Doç. Dr.
Önder Gökmen YILDIZ
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Merve BEYAZTAŞ

23.12.2016

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen babam Abdulhalık BEYAZTAŞ, annem Öznur BEYAZTAŞ ve kardeşlerim Yunus Emre BEYAZTAŞ, Ömer Faruk BEYAZTAŞ'a ve her zaman yanımda olan arkadaşlarım Şengül KÖYLÜ ve Seda DEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
TABLOLAR LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Düğüm ve Halka	4
2.2. Bazı Sayısal Düğüm İnvaryantları	8
2.3. Bazı Toplamsal Eşitlikler	9
2.4. Fibonacci Polinomları	10
BÖLÜM 3.	
DÜĞÜM POLİNOMLARI	14
3.1. Parantez polinomu	14
3.2. Normalize Edilmiş Parantez Polinomu	17
BÖLÜM 4.	
GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ POLİNOMLARI	20

4.1. Fibonacci Polinomlarının Bir Genelleştirilmesi.....	20
--	----

BÖLÜM 5.

FİBONACCİ POLİNOMU OLARAK $(2,n)$ -TOR HALKALARININ PARANTEZ POLİNOMLARI.....	28
5.1. $(2,n)$ -Tor Halkalarının Parantez Polinomu.....	28
5.2. $(2,n)$ -Tor Halkasının Parantez Polinomunun Bazı Özellikleri.....	30

BÖLÜM 6.

TARTIŞMA VE SONUÇ	41
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$c(K)$: Kavşak sayısı
d^N	: Ayrık N tane basit kapalı eğri
\in	: Elemanıdır
F_n	: n. Fibonacci sayısı
K^*	: Halkanın ayna görüntüsü
$F_n(a, x)$: Genelleştirilmiş Fibonacci polinomu
$F_n(x)$: Fibonacci polinomu
K	: Düğüm diyagramı
$\langle K \rangle$: Parantez polinomu
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
N_K	: Normalize edilmiş parantez polinomu
$P_n(A)$: $(2, n)$ -tor halkasının parantez polinomu
V_K	: Jones polinomu
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
$w(K)$: Burulma sayısı
$\varepsilon(p)$: Kavşak işareti
$lk(L)$: Halkalanma sayısı
\sum	: Toplam sembolü

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Kavşak hareketleri	5
Şekil 2.2. Reidemeister hareketleri	6
Şekil 2.3. Denk düğümlenmemiş düğümler	7
Şekil 2.4. Sekiz şekilli düğümün ayna görüntüsüne denkliği	7
Şekil 2.5. Bileşen sayısı üç olan bir halka	8
Şekil 3.1. Kavşaklar ve ayırmalar	14
Şekil 3.2. Kavşakların markalanması ve karşılık gelen ayırmalar	14
Şekil 3.3. Yonca yaprağı düğümünün evreni, bir markalanması ve karşılık gelen durumu.....	15
Şekil 5.1. $(2,n)$ -tor halkasının yönlendirilmiş diyagramı	28

TABLolar LİSTESİ

Tablo 5.1. $(2,n)$ -Tor halkasının bazı parantez polinomları	30
--	----



ÖZET

Anahtar kelimeler: Düğüm ve halkaların parantez polinomu, normalize edilmiş parantez polinomu, $(2,n)$ -tor halkalarının parantez polinomu ve normalize edilmiş parantez polinomu, Fibonacci polinomları, Fibonacci özellikleri, Fibonacci benzeri özdeşlikleri.

İlk bölümde düğüm polinomları ve Fibonacci dizileri ile ilgili literatür bilgisine yer verilmektedir. İkinci bölümde bazı temel kavramlar ve özellikleri verilmektedir. Üçüncü bölümde parantez polinomu ve normalize edilmiş parantez polinomu ayrıntılı olarak incelenmektedir.

Dördüncü bölümde Fibonacci polinomları ile düğüm polinomları arasında ilişki kurmaya yönelik çalışmalar anlatılmaktadır. Bu bölümde başlangıç şartları Fibonacci polinom dizisinin başlangıç şartıyla aynı olan genelleştirilmiş bir Fibonacci dizisi tanıtılmaktadır.

Beşinci bölümde $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomlar dizisinin bir tekrarlama bağıntısını sağladığı ispatlandıktan sonra $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomunun Fibonacci benzeri özellikleri ispat edilmektedir. 4. Bölümde tanıtılan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi baz alınarak, $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomunun bazı toplamsal özellikleri bulunmuş ve ispatlanmıştır. Ayrıca $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomunun Fibonacci özellikleri yardımıyla normalize edilmiş parantez polinomunun dolayısıyla Jones polinomunun Fibonacci benzeri özellikleri elde edilmiştir.

ON BRACKET POLYNOMIALS AS FIBONACCI POLYNOMIALS

SUMMARY

Keywords: Bracket polynomial of knot and links, normalized bracket polynomial, bracket polynomial and normalized bracket polynomial of $(2,n)$ -torus links, Fibonacci polynomial, Fibonacci identities, Fibonacci-like identities.

It has been given a short literature information about the knot polynomials and the Fibonacci sequences in the first chapter. Some fundamental concepts and properties have been given in the second chapter. Bracket polynomial and normalized bracket polynomial of them have been discussed in detail in the third chapter.

Studies to establish a relationship between knot polynomials and Fibonacci polynomial have been done in the fourth chapter. A generalized Fibonacci polynomial which its initial conditions are the same as Fibonacci polynomial has been introduced in this chapter.

In the fifth chapter, it has been first proved that the sequence of bracket polynomial of $(2,n)$ -torus link satisfies a recurrence relation. Then, the Fibonacci-like properties of the bracket polynomial of $(2,n)$ -torus link has been proved. By using the generalized Fibonacci sequence introduced in chapter four, some sums properties of the bracket polynomial of $(2,n)$ -torus link has been found and proven. In addition, from the Fibonacci properties of the bracket polynomial of $(2,n)$ -torus link, its Fibonacci-like properties of the normalized polynomial and hence of Jones polynomials have been obtained.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Düğüm teorisi ile ilgili çalışmaların çoğu düğümü sınıflandırma problemiyle ilgilidir. Düğüm teorisinde hesaplanması zor fakat kolayca tanımlanabilen bazı önemli invariantlar vardır. Bunlar sayısal, grupsal ve polinom invariantları olarak sınıflandırılır. Bir düğümün veya halkanın bileşen sayısı, minimum kavşak sayısı, halkalanma sayısı, burulma sayısı, örgü sayısı, köprü sayısı ve renklenme sayısı gibi sayısal invariantları [1-3], düğümün homotopi grubu, homoloji grubu, kristal ve kuantle gibi grupsal invariantları [2-4] ile Alexander polinomu [5], Alexander-Conway polinomu [6], Jones polinomu [7,8], Kauffman polinomu, genelleştirilmiş Kauffman polinomu [2,9], Homfly polinomu [10] gibi polinom invariantları vardır. 1985 yılına kadar düğüm teorisindeki temel çalışma alanı Seifert matrislerinden türetilmiş invariantlardır [11,12]. 1985 yılında Jones tarafından yönlendirilmiş düğüm diyagramı için tek değişkenli bir Laurent polinomu tanımlandı [7]. Bu Laurent polinomu düğüm teorisinin yeni invariantlarından biridir ve Jones polinomu olarak adlandırılır. 1987 yılında Kauffman regüler izotopinin invariantı olan parantez polinomunu tanımladı. Parantez polinomunu düğümün burulma sayısı ile normalize ederek Jones polinomunun yeni bir durum modelini inşa etti. Jones polinomunun bu yeni modeli sayesinde düğüm teorisindeki teorik çalışmalar değişik düğüm dallarına uygulandı ve bunların çözümü ile yan çalışma alanları oluşturuldu öyle ki Jones polinomu diğer bilim dallarından yöntemler kullanılarak inşa edilebilmiştir [8]. Örneğin; istatistiksel mekanik, kuantum grupları, graf teorisi v.s. Böylece düğüm teorisi, Matematiğin içindeki ve dışındaki diğer alanlarla ilişkilendirildi. Dolayısıyla, birbiriyle ilişkili bilimler arasında bir araştırma alanı oluştu. Buralardan elde edilen sonuçlar sayesinde Kauffman polinomları ve Homfly polinomu gibi yeni invariantlar elde edildi.

Diğer taraftan, günümüzde Fibonacci sayı dizileri ve onların benzerleri [13], sayılar teorisinde büyük öneme sahip olmasının yanı sıra, Matematiğin diğer alanlarında Fizik, Mühendislik ve hatta sanat biliminin birçok dalında sıklıkla kullanılan ve uygulama alanı bulan dizilerdir. Fibonacci sayı dizilerinin bilim dünyasında bu kadar ilgi çekmesi üç nedenle ifade edilebilir. Bunların ilki, dizinin bazı terimleri doğada beklenmedik şekillerde ve yerlerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin; papatyadaki yaprakların sayısı, ayçiçeğindeki sarmalların sayıları Fibonacci sayılarıdır. Yapılan çalışmalarda bu tür sıralanmanın güneşi en verimli kullanmayı sağladığı, polen taşıyan böceklerin bu tür bir düzeni tercih ettiği sonucuna varılmıştır. İkincisi, ardışık iki Fibonacci sayısının oranının altın oran diye bilinen, insan vücudunda da bulunan, sanat ve mimaride güzel sonuçlar veren 1,61803... sayısına yakınsamasıdır. Üçüncüsü ise, Matematik ve Fizikteki uygulamalarıdır. İtalyan Matematikçi E. Lucas ‘Fibonacci sayı sisteminde kullanılan ardışık iki terimin toplamı bir sonraki terimi verir’ kuralını, başlangıç şartlarını değiştirerek uygulamış ve Lucas sayı dizileri denilen yeni bir sayı sistemi tanımlamıştır [13-17]. Bu dizilere benzer olarak tanımlanan ve bu dizilerin genellemeleri olan başka sayı dizileride vardır.

Aynı zamanda Fibonacci sayılarının genellemesi olan Fibonacci polinomları da modern bilimlerde yüksek seviyede ilgi çekmektedir. Fibonacci polinomları ilk olarak 1883 yılında E. C. Catalan ve 1963 yılında P. F. Bryd tarafından Fibonacci formunda yeni bir polinom tanımlanmıştır [18]. Literatürde Catalan’ ın tanımladığı polinom Fibonacci polinomu ve Bryd’ in tanımladığı polinom Pell polinomu olarak adlandırılmaktadır. Son yıllarda Fibonacci polinomları ve onların geliştirilmeleri üzerine çok sayıda çalışma yapılmaktadır [19-23] v.d.

Bu tezde ilk önce bir geliştirilmiş Fibonacci polinomu tanıtıldı. Bu polinomun Fibonacci özellikleri ve geliştirilmiş Fibonacci özdeşlikleri ispatlandı. Daha sonra $(2,n)$ -tor düğümlerinin parantez polinomları başlangıç şartları belirlenen bir indirgeme bağıntısı şeklinde ifade edilip ispatlandı. Bu bağıntının Fibonacci benzeri özellikleri ispatlandı. $(2,n)$ -tor halkalarının parantez polinomu ile geliştirilmiş Fibonacci polinomu arasında ilişki kuruldu. Geliştirilmiş parantez polinomundan faydalanılarak $(2,n)$ -tor halkalarının parantez polinomunun Fibonacci benzeri

özdeşlikleri sağladığı ispatlandı. Bütün bu özellikler normalize edilmiş parantez polinomu dolayısıyla Jones polinomu içinde ifade edildi.

Bu tez tartışma ve öneriler bölümü hariç beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılan düğüm teorisinin bazı temel kavramları ile Fibonacci polinomlarının bazı temel özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde düğümlerin parantez polinomu, normalize edilmiş parantez polinomu ve Jones polinomu üzerine çalışılmıştır. Bu bölümde parantez polinomlarının regüler izotopinin bir invaryantı olduğu gösterildi ve az kavşaklı düğüm diyagramları için örnekler verildi. Parantez polinomu burulma sayısı ile normalize edildi. Normalize edilmiş parantez polinomuyla Jones polinomu arasındaki ilişki verildi.

Dördüncü bölümde, $(2,n)$ -tor halkalarının parantez polinomlarının Fibonacci benzeri özdeşlikleri sağladığını ispatlamak için kullanılan, başlangıç şartları Fibonacci polinomunun başlangıç şartlarıyla aynı olan bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomu tanıtıldı. Bu genelleştirilmiş Fibonacci polinomunun genelleştirilmiş Fibonacci özellikleri ve özdeşlikleri ifade ve ispat edildi.

Beşinci bölümde $(2,n)$ -tor halkalarının Parantez polinomlar dizisinin başlangıç şartları belirlenen bir tekrarlama bağıntısı sağladığı ispatlandı. $(2,n)$ -tor halkalarının Fibonacci tipli bir polinom olduğu görüldü ve Fibonacci benzeri yeni özellikleri ortaya çıkarıldı. $(2,n)$ -tor halkasının normalize edilmiş parantez polinomunun ve normalize edilmiş parantez polinomuyla ilişkilendirilen Jones polinomunun Fibonacci benzeri özellikleri, parantez polinomunun özelliklerinin bir sonucu olarak verildi. Dolayısıyla $(2,n)$ -tor halkalarının söz konusu polinomları, birer Fibonacci tipli polinomlar oldukları görüldü.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1.Düğüm ve Halka

Tanım 2.1.1. X ve Y iki Hausdorff uzayı olsun. Eğer $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir *yerleştirme* denir [24].

Tanım 2.1.2. $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1; x, y \in \mathbb{R}\}$ birim çember olsun. S^1 'nin \mathbb{R}^3 veya $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ içine yerleştirilmesine bir *düğüm* denir. $n \in \mathbb{N}$ için n tane düğümün ayrık birleşimine bir *halka* denir. [24].

Yönlendirilmiş bir üçgen (veya bir çember) ile aynı tipte olan bir düğüme *düğümlememiş (aşıkarak) düğüm* denir. Halkalanmamış halkaya ise *aşıkarak halka* denir.

Tanım 2.1.3. $p : S^3 \rightarrow S^3$, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona *izdüşüm fonksiyonu* denir.

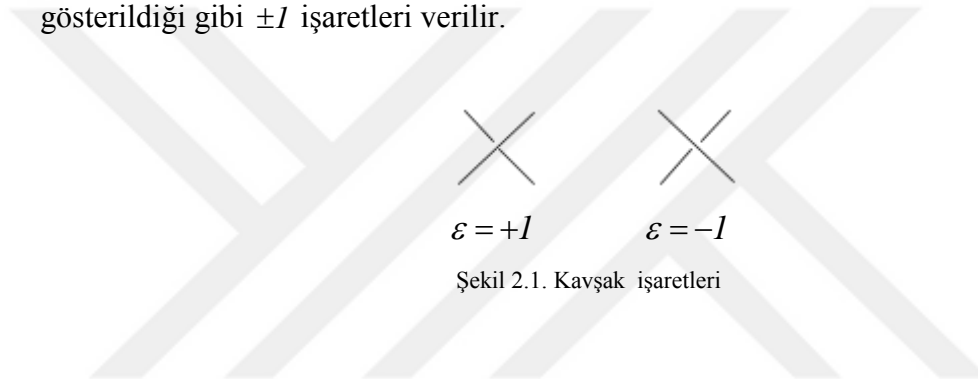
Eğer K , S^3 içinde bir düğüm ise, K 'nin p izdüşüm fonksiyonu altındaki resmi, $p(K)$, K 'nin xOy -düzlemindeki izdüşümüdür. K poligonal bir düğüm ise, $p(K)$ düzlemsel bir poligondur [24].

Tanım 2.1.4. K , S^3 içinde bir düğüm ve p , izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a ya $p(K)$ 'nin bir *n-katlı noktası* denir. Eğer $n=2$ ise, a noktasına *kavşak noktası* (geçiş noktası, çift katlı nokta) denir [4,24].

Tanım 2.1.5. Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. K nın her alt geçit noktasından uzaklığı ε 'dan küçük olan noktaların kümesi A ise, $p(K - A)$ kümesine K düğümünün normal diyagramı kısaca *düğüm diyagramı* denir [4,24].

Böylece K düğümünün normal diyagramı ayırık yay parçalarından (veya doğru parçalarından) oluşur.

Tanım 2.1.6. Eğer bir halkanın her bir bileşeni üzerine bir ok konularak yön verilmişse halkaya *yönlendirilmiştir* denir. Yönlendirilmiş kavşaklara Şekil 2.1. de gösterildiği gibi ± 1 işaretleri verilir.



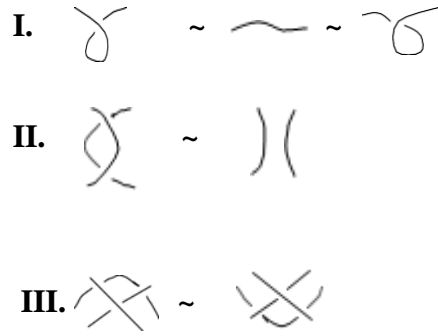
Tanım 2.1.7. Bir düğüm diyagramının kavşaklarını alt üst ederek veya işaretini değiştirerek elde edilen diyagrama düğümün *ayna görüntüsü* denir [4,25].

Tanım 2.1.8. Kavşak işaretleri ardışık olarak işaret değiştiren diyagrama *alterne diyagram* denir.

Tanım 2.1.9. K ve L , S^3 içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir $h: S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne *denktir* denir [4].

Bu denklik aslında diyagram hareketlerinin (Reidemeister hareketleri) esas üç tipi ile üretilir.

Tanım 2.1.10. (Reidemeister hareketleri)



Şekil 2.2. Reidemeister hareketleri

I.Tip hareket bir burulmuş eğri ekleyerek yada çıkararak, II.Tip hareket iki ardışık alttan yada üstten kavşağı çıkararak yada ekleyerek ve III.Tip hareket üçgen hareketi olarak elde edilir [3,4,26].

İki düğümden ya da halkadan birinin diğerine deforme edilmesi (kuşatan izotop olması) için gerek ve yeter şart onların diyagramlarından birinin diğerine Reidemeister hareketleriyle dönüşmesidir.

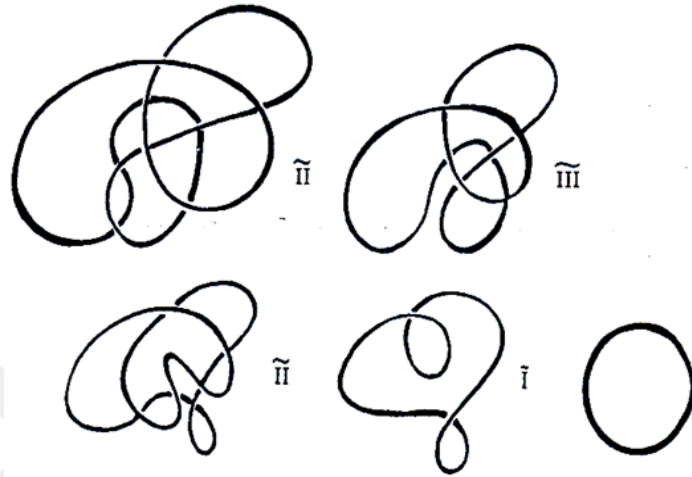
Yani sonlu sayıda Reidemeister hareketlerinin uygulanmasıyla diyagramları birbirine dönüşebilen düğümler denktir.

Tanım 2.1.11. II.ve III. Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına *regüler izotopi* denir [25,26].

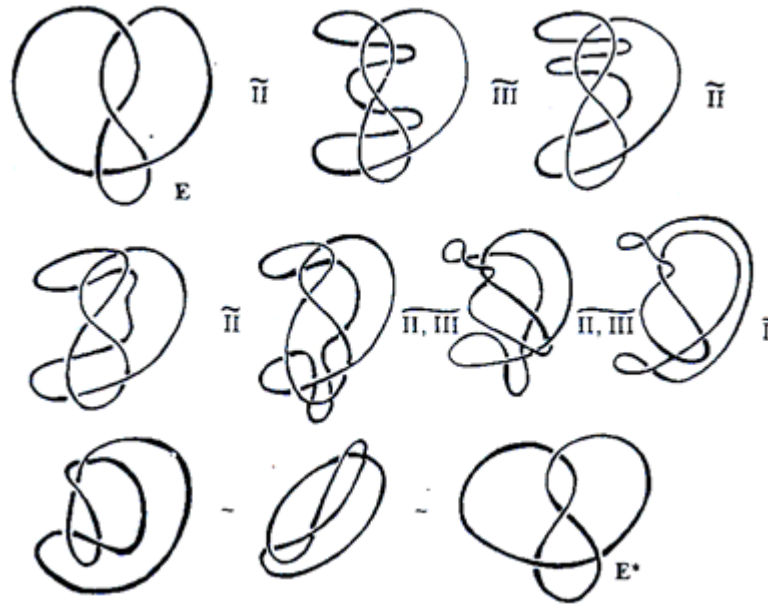
Tanım 2.1.12. Reidemeister hareketlerinin üçü ile üretilen diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına *kuşatan izotopi* denir [25,26].

Böylece II. ve III. hareketler regüler izotopi invaryantı; I. II. III. hareketler kuşatan izotopi invaryantıdır.

Örnek 2.1.13. Şekil 2.3. bir düğümlenmemiş düğümün bir kuşatan izotopisini gösterir. Şekil 2.4.'de E sekiz şekilli düğüm ile ayna görüntüsü E^* arasındaki kuşatan izotopisini gösterir.



Şekil 2.3. Denk düğümlenmemiş düğümler



Şekil 2.4. Sekiz şekilli düğümün ayna görüntüsüne denkliği

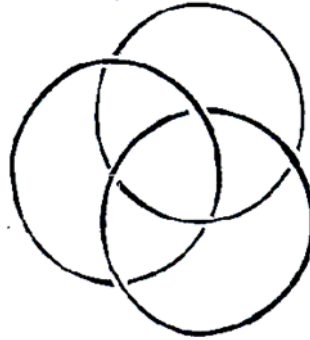
2.2. Bazı Sayısal Düğüm İnvaryantları

Tanım 2.2.1. Bir K düğümünün herhangi bir diyagramındaki kavşakların minimum sayısına K nın *kavşak sayısı* denir ve $c(K)$ ile gösterilir [3].

Kavşak sayısının düğümün bir invaryantı olduğu açıktır. Örneğin Şekil 2.4.'de verilen sekiz şekilli düğümün kavşak sayısı dördttür.

Tanım 2.2.2. Bir halka diyagramının bir yayı üzerinde bir nokta seçildiğinde ve daha sonra diyagram etrafında dolanılıp o noktalara tekrar dönülüyorsa geçit bu yay bir *bileşen* denir [3,4]. Her bir bileşen bu yolla elde edilen bir tam devirdir.

Örnek olarak, Şekil 2.5.'de bir üç bileşenli halka diyagramı çizilmiştir.



Şekil 2.5. Bileşen sayısı üç olan bir halka

Tanım 2.2.3. Bileşenleri α ve β olan iki bileşenli bir halka verildiğinde $\alpha \cap \beta$, α bileşeni ile β bileşeninin kavşaklanmalarının kümesini gösterebilir (Böylece $\alpha \cap \beta$, α nın yada β nın kendi kavşaklanmalarını içermez.). Bu takdirde α ile β ' nin *halkalanma sayısı*

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

şeklinde tanımlanır [26].

Diğer bir deyişle, halkalanma sayısı bir eğri ile diğerinin kavşaklanma işaretlerinin toplamının yarısıdır. Burada $\varepsilon(p)$, p ile gösterilen kavşağın işaretidir ve toplam bütün p kavşakları üzerinde alınmıştır.

Örnek 2.2.1.



$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Tanım 2.2.4. K herhangi bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. $c(K)$, K diyagramındaki kavşakların kümesi olmak üzere K diyagramının *burulma sayısı*

$$w(K) = \sum_{p \in c(K)} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır [4,26]. Burada toplam, K diyagramının bütün kavşakları üzerindedir ve $\varepsilon(p)$ ise p kavşağının işaretidir.

Dikkat edilirse, $w(K)$ 'nin bir regüler izotopi invaryantı olduğu görülür. Kavşak işaretleri I.Tip hareket altında ± 1 ile değiştiği için $w(K)$ 'nin, K 'nin bir invaryantı olması gerekmez [25].

2.3. Bazı Toplamsal Eşitlikler

Tanım 2.3.1. (a_n) bir dizi olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçiminde bir kuvvet serisine (a_n) dizisinin üreten fonksiyonu denir [23].

Tanım 2.3.2. İki sayının toplamının üslü ifadesinin Binom açılımı $n \in \mathbb{N}$ iken

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

biçiminde tanımlanır [23]. Burada

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

eşitliğini sağlar. Binomsal formüllerin değişik biçimleri vardır. Bunlardan biri genellikle tekrarlama bağıntılarını sağlayan dizilerin Binet formüllerinin bulunmasında kullanılan

$$\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (xy)^k (x + y)^{n-2k}$$

açık formülüdür [23].

2.4. Fibonacci Polinomları

Tanım 2.4.1. f_n , n . Fibonacci sayısını göstermek üzere,

$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ için Fibonacci sayıları,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [13]. Bazı Fibonacci sayıları;

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, \dots$$

şeklinde verilebilir.

Tanım 2.4.2. $f_n(x)$ Fibonacci polinomları,

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1$$

başlangıç koşulları ve her $n \geq 1$ için,

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) \quad (2.1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bu dizinin birkaç terimi;

$$0, 1, x, x^2 + 1, x^3 + 2x, \dots$$

şeklinindedir. (2.1) bağıntısına karşılık gelen karakteristik polinom,

$$\lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$$

ve bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

olmak üzere kökler arasındaki bağıntılar ise,

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha\beta = -1, \quad |\alpha - \beta| = \sqrt{x^2 + 4}$$

ile verilir.

Teorem 2.4.1. (Üreten Fonksiyon) $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ serisinin üreten fonksiyonu, $n \geq 3$ olmak üzere

$$g_f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \lambda^n = \frac{\lambda}{1 - x\lambda - \lambda^2}$$

olur [13,14].

Teorem 2.4.2. (Binet formülü) Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olur [13].

Teorem 2.4.3. (Catalan Özdeşliği) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f_{n+r}(x) f_{n-r}(x) - f_n^2(x) = (-1)^{n-r+1} f_r^2(x)$$

olur [13,14,18].

Teorem 2.4.4. (Cassini özdeşliği) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f_{n+1}(x) f_{n-1}(x) - f_n^2(x) = (-1)^n$$

olur [13,14,18].

Teorem 2.4.5. (D' Ocagne Özdeşliği) $n \leq m$ koşulunu sağlayan $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$f_{n+i}(x)f_m(x) - f_n(x)f_{m+i}(x) = (-1)^{n-1}f_{m-n}(x)$$

olur [13,14,18].



BÖLÜM 3. DÜĞÜM POLİNOMLARI

3.1. Parantez Polinomu

Tanım 3.1.1. Yönlendirilmemiş bir K halka diyagramı verilsin. $[K] \in Z[A, B, d]$ A , B ve d değişmeli cebirsel değişkenlerine karşılık gelen ve K halkasını temsil eden bir polinomu gösterebilir. Parantez polinomu adı verilen bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar [2,25,26,27].

$$1. \begin{cases} [D_+] = A[D_0] + B[D_\infty] \\ [D_-] = B[D_0] + A[D_\infty] \end{cases}$$

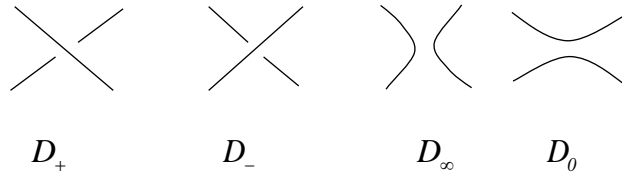
2. $[O] = d$, $[OK] = d[K]$, burada O , sıfır kavşaklı aşık düğümü gösterir.

Burada D_+ , D_- , D_0 , D_∞ Şekil 3.1.'de çizilen diyagramlardır.

2. aksiyom, hiç bir kavşağı olmayan aşık düğümün (çemberin) parantez değerinin d olduğunu ve halka diyagramının herhangi bir yerinde bulunan bir çember ile halkanın ayrık bileşiminin parantez değeri, halkanın parantez değerinin d ile çarpılmasını ifade eder. Özel olarak,

$$[\text{ayrık } N \text{ tane basit kapalı eğri}] = d^N$$

olur.



Şekil 3.1. Kavşaklar ve Ayırmalar

Örnek 3.1.1. Yonca yaprağı düğümü için Tanım 3.1.1'deki 1.aksiyom aşağıdaki gibi verilir.

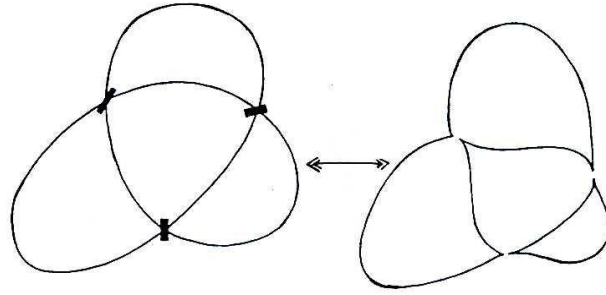
$$\left[\text{Yonca yaprağı düğümü} \right] = \mathbf{A} \left[\text{Yonca yaprağı düğümü} \right] + \mathbf{B} \left[\text{Yonca yaprağı düğümü} \right]$$

Açıkça, basit kapalı eğrilerin parantez değerleri, yukarıdaki aksiyomlar sayesinde $[K]$ nın hesaplamasına yardımcı olur.

$[K]$ değerinin iyi tanımlı olduğunu görmek için $[K]$ yı bir U evreninin S durumları üzerinde bir toplam olarak yeniden formüleştirmek yeterlidir. U, K için bir evren olsun. U nun bir S durumu U nun her bir köşesindeki ayırmasının bir seçimidir. Böyle seçimler köşedeki markalarla gösterilir (Şekil 3.2.). Yonca yaprağı düğümünün evreninin bir durumunu ve ona karşılık gelen ayırma Şekil 3.3.'de gösterildi. Bir durumu verildiğinde $|S|$ onun ayırımındaki bileşenlerin sayısını gösterebilir.



Şekil 3.2. Kavşakların markalanması ve karşılık gelen ayırmalar



Şekil 3.3. Yonca yaprağı düğümünün evreni, bir markalanması ve karşılık gelen durumu

Teorem 3.1.1. $i_k(S)$, S içindeki açılmış A -kanalının sayısını ve $j_k(S)$, S içindeki açılmış B -kanalının sayısını gösterebilir. Bu durumda K diyagramının parantez değeri

$$[K] = \sum_S A^{i_k(S)} B^{j_k(S)} d^{|S|}$$

formülü ile verilir [26]. Parantezin değeri için bu formül aksiyomlardan direkt çıkar.

Hangi şartlar altında parantez polinomu düğüm ve halkaların bir topolojik invariantı olur, sorusunu cevaplandırmak için bu polinomun Reidemeister hareketleri altındaki davranışlarını incelemek gerekir.

Teorem 3.1.2. (Parantez polinomunun II. Reidemeister hareketi altındaki davranışı)

$$[\text{X}] = AB[\text{Y}] + (Abd + A^2 + B^2)[\text{Z}]$$

İspat.

$$[\text{X}] = A[\text{a}] + B[\text{b}]$$

$$= A^2[\text{c}] + AB[\text{d}] + BA[\text{e}] + B^2[\text{f}]$$

$$= AB[\text{g}] + (A^2 + B^2 + dAB)[\text{h}]$$

Böylece $AB = I$ ve $d = -A^2 - B^2$ ile II. Reidemeister hareketi altında invarianlık elde edilir.

Teorem 3.1.3. (Parantez polinomunun III.Reidemeister hareketi altındaki davranışı)
Eğer Teorem 3.1.2 sağlanırsa, bu takdirde $[K]$, III.Reidemeister hareketi altında invarianttır.

İspat. Eğer 1.aksiyom III.Tip harekete uygulanırsa,

$$\begin{aligned} [\text{III. Tip Hareketi}] &= A[\text{III. Tip Hareketi}] + B[\text{III. Tip Hareketi}] \\ &= A[\text{III. Tip Hareketi}] + B[\text{III. Tip Hareketi}] \end{aligned}$$

Buradan

$$[\text{III. Tip Hareketi}] = [\text{III. Tip Hareketi}]$$

elde edilir.

Böylece $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ şartları ile parantez polinomu, II. Tip ve III.Tip Reidemeister hareketleri altında invariant kalır. Regüler izotopi ile üretilen bu invariant polinomun genel parantez polinomundan farklı ele alınır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1.2. Yönlendirilmemiş bir K halka diyagramı verilsin. $\langle K \rangle \in Z[A^{\pm 1}]$, K halkasını temsil eden bir Laurent polinomu olsun. Kare parantez polinomu adı verilen bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar.

1. $\langle D_+ \rangle = A\langle D_0 \rangle + A^{-1}\langle D_\infty \rangle$,
2. $\langle D_- \rangle = A^{-1}\langle D_0 \rangle + A\langle D_\infty \rangle$,

$$3. \langle O \rangle = 1, \langle OK \rangle = d \langle K \rangle, \quad d = -A^2 - A^{-2},$$

4. Eğer K diyagramı bir K' diyagramına regüler izotop ise, $\langle K \rangle = \langle K' \rangle$.

Burada D_+, D_-, D_0, D_∞ Şekil 3.1 de verilen diyagramlar ve O , aşıkâr düğümün sıfır kavşaklı diyagramıdır. Böylece $\langle K \rangle = d^{-1} [K]$ yazılabilir.

II. ve III. Tip hareketler altında invaryant olan bu özel parantez I. Tip hareket altında da aşağıdaki gibi davranır.

Teorem 3.1.4. $\alpha = -A^3$ olsun. Bu takdirde

$$\langle \text{diagram} \rangle = \alpha \langle \text{diagram} \rangle$$

$$\langle \text{diagram} \rangle = \alpha^{-1} \langle \text{diagram} \rangle$$

olur.

Bu lemmanın ispatı Tanım 3.1.2 den kolayca çıkar.

Bu lemmadanda anlaşılacağı gibi $\langle K \rangle$, K diyagramının parantez polinomu kuşatan izotopinin bir invaryantı değildir. $\langle K \rangle$ polinomundan bir kuşatan izotopi invaryantı oluşturmak mümkündür. Bunun için burulma sayısından faydalanılır. Bir yönlendirilmiş K halkasının burulma sayısı $w(K)$ nın bir regüler izotopi invaryantı olduğu bilinmektedir [26].

3.2. Normalize Edilmiş Parantez Polinomu

Tanım 3.2.1. K bir halka diyagramı $\langle K \rangle$, K nın regüler izotopi invaryantı olan parantez polinomu ve $w(K)$, K nın burulma sayısı olsun.

$$N_K = \alpha^{-w(K)} \langle K \rangle$$

polinomuna *normalize edilmiş parantez polinomu* denir [2,25,26].

Önerme 3.2.1. Normalize edilmiş N_K polinomu, yönlendirilmiş K halka diyagramları için kuşatan izotopinin bir invariantıdır.

İspat. N_K nın yalnızca I.Tip hareket altındaki davranışını incelemek yeterlidir. Çünkü $\langle K \rangle$ ve $w(K)$ regüler izotopinin invariantları olduklarından onların çarpımı şeklinde olan N_K polinomuda regüler izotopinin bir invariantıdır.

$$w(\text{↻}) = I + w(\text{↷}) \text{ ve } w(\text{↺}) = -I + w(\text{↷})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} N_K &= \alpha^{-w(\text{↻})} \langle \text{↻} \rangle \\ &= (-A^3)^{-I+w(\text{↷})} (-A^3) \langle \text{↷} \rangle \\ &= (-A^3)^{-w(\text{↷})} \langle \text{↷} \rangle = N_{\text{↷}} \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.2.2. K bir yönlendirilmiş halka olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan \sqrt{t} değişkenli Laurent polinomuna *Jones polinomu* denir [7,8] ve $V_K(t)$ ile gösterilir.

1. $t^{-1} \text{↷} - t \text{↺} = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) \text{↷}$
2. $V_O(t) = I$

3. $V_K(t)$ bir kuşatan izotopi invariantıdır.

Aşağıdaki teorem, normalize edilmiş parantez polinomunun Jones polinomunun bir evren–durum modeli olduğunu verir.

Teorem 3.2.2. $V_K(t)$, K nın Jones polinomu ve $N_K(A)$, K nın normalize edilmiş parantez polinomu olsun. Bu durumda $N_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$ olur [26].

Örnek 3.2.1. İki bileşenli halkanın parantez polinomu

$$\begin{aligned} \langle \text{Two-component link} \rangle &= A \langle \text{Component 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{Component 2} \rangle \\ &= A(\alpha) + A^{-1}(\alpha^{-1}) \\ &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$

Örnek 3.2.2. Yonca yaprağı düğümünün parantez ve normalize edilmiş parantez polinomu

$$\begin{aligned} \langle \text{Yonca yaprağı} \rangle &= A \langle \text{Component 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{Component 2} \rangle \\ &= A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1}(-A^{-3})^2 \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7} \end{aligned}$$

$$N_K = \alpha^{-3} \langle T \rangle = -A^{-9} \langle T \rangle = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

BÖLÜM 4. FİBONACCİ POLİNOMLARININ BİR GENELLEMESİ

4.1. Fibonacci Polinomlarının Bir Genelleştirilmesi

Bu bölümde $(2,n)$ -tor halkalarının parantez polinomlarını ve onların Fibonacci özelliklerini çalışmak için bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomu tanıtılacaktır.

Tanım 4.1.1. İki değişkenli genelleştirilmiş Fibonacci polinomlar dizisi $\{F_n(a, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ başlangıç şartları

$$F_0(a, x) = 0, F_1(a, x) = 1$$

olan bir

$$F_n(a, x) = axF_{n-1}(a, x) + a^2F_{n-2}(a, x), n \geq 2 \quad (4.1)$$

tekrarlama bağıntısıyla tanımlanır.

(4.1) bağıntısı $a = 1$ için klasik Fibonacci polinomu olduğu aşikardır. Aynı zamanda

$$F_n(a, x) = a^{n-1}f_n(x)$$

olduğunu görmek zor değildir. Burada f_n klasik Fibonacci polinomudur.

(4.1) bağıntısına karşılık gelen karakteristik polinom,

$$\lambda^2 - ax\lambda - a^2 = 0$$

ve bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{ax + a\sqrt{x^2 + 4}}{2}, \beta = \frac{ax - a\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

olmak üzere kökler arasındaki bağıntılar ise,

$$\alpha + \beta = ax, \alpha\beta = -a^2, |\alpha - \beta| = a\sqrt{x^2 + 4}$$

ile verilir.

Önerme 4.1.1. $\{F_n(a, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ serisinin üreten fonksiyonu,

$$g_F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a, x)\lambda^n = \frac{\lambda}{1 - ax\lambda - a^2\lambda^2} \quad (4.2)$$

eşitliğiyle verilir.

İspat. $\{F_n(a, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ serisinin

$$g_F(\lambda) = F_0(a, x) + F_1(a, x)\lambda + F_2(a, x)\lambda^2 + \dots$$

üreten fonksiyonunda $ax\lambda g_F(\lambda)$ ve $a^2\lambda^2 g_F(\lambda)$ çarpımları yapıldıktan sonra,

$$(1 - ax\lambda - a^2\lambda^2)g_F(\lambda) = F_0(a, x) + (F_1(a, x) - axF_2(a, x))\lambda$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (F_n(a, x) - axF_{n-1}(a, x) - a^2F_{n-2}(a, x))\lambda^n = \lambda$$

elde edilir. Buradan (4.2) eşitliği bulunur.

$F_n(a, x)$ polinomları için Binet formülü rasyonel genişleme teoremi kullanılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 4.1.2. $n \geq 0$ için $F_n(a, x)$ polinomunun Binet formülü,

$$F_n(a, x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$$

$$\text{olur. Burada } C_1 = \frac{1}{a\sqrt{x^2+4}}, C_2 = -\frac{1}{a\sqrt{x^2+4}}.$$

İspat. α, β , (4.1) indirgeme bağıntısının karakteristik kökleri olmak üzere $P_n(A) = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$ Binet formülünün genel çözümü $F_0(a, x) = 0, F_1(a, x) = 1$ başlangıç şartlarına göre,

$$F_0(A) = C_1 + C_2 = 0$$

$$F_1(A) = C_1 \frac{ax + \sqrt{x^2+4}}{2} + C_2 \frac{ax - \sqrt{x^2+4}}{2} = 1$$

yazılır. Bu iki denklem birlikte çözülürse;

$$C_1 = \frac{1}{a\sqrt{x^2+4}} \quad \text{ve} \quad C_2 = -\frac{1}{a\sqrt{x^2+4}}$$

bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 4.1.3. $n \geq 1$ için $F_n(a, x)$ polinomunun açık biçimi,

$$F_n(a, x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{j} a^{n-1} x^{n-2j-1}$$

ile verilir.

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 1$ için,

$$F_1(a, x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1-1}{2} \rfloor} \binom{1-0-1}{0} (a)^0 (x)^{1-0-1} = 1$$

doğruluğu görülür. $n = k$ için,

$$F_k(a, x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-j-1}{j} (a)^{k-1} (x)^{k-2j-1}$$

olduğu kabul edilsin. $n = k + 1$ için,

$$F_{k+1}(a, x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-j}{j} (a)^k (ax)^{k-2j}$$

olduğunu göstermeliyiz. (4.1) indirgeme bağıntısından,

$$F_{k+1} = (ax) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-j-1}{j} (a)^{k-1} (x)^{k-2j-1} + (a^2) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \binom{k-j-2}{j} (a)^{k-2} (x)^{k-2j-2}$$

elde edilir. Buradan,

$$F_{k+1} = (ax) \left(\binom{k-1}{0} (a)^0 (x)^{k-1} + \binom{k-2}{1} (a)^1 (x)^{k-3} + \dots + \binom{\frac{k-1}{2}}{\frac{k-1}{2}} (a)^{\frac{k-1}{2}} (x)^0 \right)$$

$$+ (a^2) \left(\binom{k-2}{0} (a)^0 (x)^{k-2} + \binom{k-3}{1} (a)^1 (x)^{k-4} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (a)^{\frac{k-2}{2}} (x)^0 \right)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$F_{k+1} = \left(\binom{k-1}{0} (a)^0 (x)^k + \binom{k-2}{1} (a)^1 (x)^{k-2} + \dots + \binom{\frac{k-1}{2}}{\frac{k-1}{2}} (a)^{\frac{k-1}{2}} (x)^1 \right)$$

$$+ \left(\binom{k-2}{0} (a)^1 (x)^{k-2} + \binom{k-3}{1} (a)^2 (x)^{k-4} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (a)^{\frac{k}{2}} (x)^0 \right)$$

$$= \binom{k-1}{0} (a)^0 (x)^k + \left[\binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} \right] (a)^1 (x)^{k-2} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (a)^{\frac{k}{2}} (x)^0$$

elde edilir.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

bağıntısından;

$$F_{k+1} = \binom{k-1}{0} (a)^0 (x)^k + \binom{k-1}{1} (a)^1 (x)^{k-2} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (a)^{\frac{k}{2}} (x)^0$$

olduğu görülür. Yani

$$F_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-j}{j} (a)^j (x)^{k-2j}$$

olur.

Teorem 4.1.4. (Genelleştirilmiş Catalan Özdeşliği) $m, n \in \mathbb{Z}, m, n \geq 1$ için

$$F_n F_m - F_{n-r} F_{m+r} = (-1)^{n-r} a^{2n-2r} F_{m-n+r} F_r.$$

İspat. Özdeşliğin sol tarafını Binet formülüne göre açarsak sağ tarafını elde ederiz. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} F_n F_m - F_{n-r} F_{m+r} &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{m+r} - \beta^{m+r}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{-\alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n + \alpha^{n-r} \beta^{m+r} + \beta^{n-r} \alpha^{m+r}}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}$$

$\alpha^{n-r} \beta^{m+r}$ parantezinde yazabilmek için; ilk terimi $\alpha^r \alpha^{-r} \beta^{n-r} \beta^{-n+r}$ ile ikinci terimi $\alpha^{n-r} \alpha^{-n+r} \beta^r \beta^{-r}$ ile üçüncü terimi $\beta^{n-r} \beta^{-n+r}$ ile son terimi ise $\alpha^{n-r} \alpha^{-n+r}$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned}
F_n F_m - F_{n-r} F_{m+r} &= \frac{\alpha^{n-r} \beta^{n-r} \left[-\alpha^r \beta^{m-n+r} - \alpha^{m-n+r} \beta^r + \beta^r \beta^{m-n+r} + \alpha^{m-n+r} \alpha^r \right]}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{n-r} \beta^{n-r} \left[\alpha^r (\alpha^{m-n+r} - \beta^{m-n+r}) - \beta^r (\alpha^{m-n+r} - \beta^{m-n+r}) \right]}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \alpha^{n-r} \beta^{n-r} \frac{\alpha^{m-n+r} - \beta^{m-n+r}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^{n-r} \alpha^{2n-2r} F_{m-n+r} F_r
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5. (Genelleştirilmiş Cassini özdeşliği) $n \geq 1$,

$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \alpha^{2n-2}$$

İspat. Özdeşliğin sol tarafını Binet formülüne göre açarsak,

$$\begin{aligned}
F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&= \frac{-\alpha^{n-1} \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \beta^{n-1} + 2\alpha^n \beta^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{-\alpha^n \beta^n \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 2 \right)}{(\alpha - \beta)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\alpha^n \beta^n \left(\frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \right)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{-\alpha^{n+1} \beta^{n+1} (\alpha - \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2} = (-1)^n a^{2n-2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6. (D' Ocagne Özdeşliği) $m, n \in \mathbb{Z}, m, n \geq 1$,

$$F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} = (-1)^n a^{2n} F_{m-n}.$$

İspat. Özdeşliğin sol tarafını Binet formülüne göre açarsak,

$$F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}$$

olur. bu eşitliği düzenlersek,

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} &= \frac{-\alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^m\beta^{n+1} + \alpha^n\beta^{m+1} + \alpha^{m+1}\beta^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^n\beta^m(\beta - \alpha) + \alpha^m\beta^n(\beta - \alpha)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^n\beta^n(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^n (a^{2n}) \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) = (-1)^n a^{2n} F_{m-n}
\end{aligned}$$

bulunur.

BÖLÜM 5. FİBONACCİ POLİNOMLARI OLARAK $(2,n)$ TOR HALKALARININ PARANTEZ POLİNOMLARI

5.1. $(2,n)$ -Tor Halkalarının Parantez Polinomu

Bu bölümde $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomu ve normalize edilmiş parantez polinomu, başlangıç şartları belirlenmiş bir indirgeme bağıntısı olarak tanımlanacak, Fibonacci polinomu ile ilişkilendirilecek ve bütün Fibonacci özellikleri ispatlanacaktır. L_n , Şekil 5.1.'de çizilen $(2,n)$ -tor halkasının yönlendirilmemiş diyagramı olsun. Bu halkanın parantez polinomunu $P_n = \langle L_n \rangle$ ile gösterilecektir.



Şekil 5.1. $(2,n)$ -tor halkası

Teorem 5.1.1. L_n , $(2,n)$ -tor halkası olsun. Bu durumda P_n parantez polinomu,

$$P_n = (A - A^{-3})P_{n-1} + A^{-2}P_{n-2} \quad (5.1)$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. Şekil 5.1'de çizilen n kavşaklı tor halkasının belirlenen bir kavşağı A -ayırmaya göre ayrılırsa $n-1$ kavşaklı bir tor halkası diyagramı elde edilir. Aynı

kavşak A^{-1} – ayırmaya göre ayrılırsa $n-1$ kavşaklı bir aşıkâr düğüm diyagramı elde edilir. Böylece parantez polinomunun tanımından

$$P_n = AP_{n-1} + A^{-1}(-A^3)^{n-1} \quad (5.2)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$P_{n-1} = AP_{n-2} + A^{-1}(-A^3)^{n-2} \quad (5.3)$$

(5.3) eşitliğinin her iki tarafı $-A^3$ ile çarpılıp (5.2) eşitliğinden çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (5.1) indirgeme bağıntısı elde edilir.

Bu teorem aşağıdaki biçimde bir tanım olarak verilebilir.

Tanım 5.1.1. $n \geq 2$ olmak üzere $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomlar dizisi, $\{P_n\}_0^\infty$, başlangıç değerleri

$$P_0 = -A^2 - A^{-2}, \quad P_1 = -A^3 \quad (5.4)$$

olan bir

$$P_n = (A - A^{-3})P_{n-1} + A^{-2}P_{n-2} \quad (5.5)$$

indirgeme bağıntısıdır.

Bu tanımla $(2,n)$ -tor halkasının bazı parantez polinomları tablo halinde aşağıdaki biçimde verilir.

Tablo 5.1. $(2,n)$ -tor halkasının bazı parantez polinomları

n	$P_n(A)$
0	$P_0 = -A^{-2} - A^2$
1	$P_1 = -A^3$
2	$P_2 = -A^{-4} - A^4$
3	$P_3 = +A^{-7} - A^{-3} - A^5$
4	$P_4 = -A^{-10} + A^{-6} - A^{-2} - A^6$
\vdots	\vdots

(5.5) indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - (A - A^{-3})\lambda - A^{-2} = 0$$

ve bu denklemin kökleri

$$\alpha = A, \quad \beta = -A^{-3}$$

olmak üzere kökler arasındaki bağıntılar

$$\alpha + \beta = A - A^{-3}, \quad \alpha - \beta = A + A^{-3}, \quad \alpha \cdot \beta = -A^{-2}$$

ile verilir.

5.2. $(2,n)$ -Tor Halkasının Parantez Polinomunun Bazı Özellikleri

Bu kısımda P_n parantez polinomunun bazı Fibonacci özellikleri verilecektir.

Teorem 5.2.1. $\{P_n(A)\}$ dizisinin

$$G_p(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(A) \lambda^n$$

üreten fonksiyonu,

$$G_p(\lambda) = \frac{A^{-2} + A^2 + A^{-5}\lambda}{A^{-2}\lambda^2 + (A - A^{-3})\lambda - I}$$

ile verilir.

İspat. $\{P_n(A)\}$ dizisinin üreten fonksiyonu

$$G_p(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(A)\lambda^n$$

toplamını

$$G_p(\lambda) = P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + P_3\lambda^3 + \dots \quad (5.6)$$

şeklinde yazalım. Bu eşitliğin her iki tarafı $-(A - A^{-3})\lambda$ ile çarpılırsa

$$-(A - A^{-3})\lambda G_p(\lambda) = -(A - A^{-3})P_0\lambda - (A - A^{-3})P_1\lambda^2 - (A - A^{-3})P_2\lambda^3 + \dots \quad (5.7)$$

elde edilir. Yine (5.6) eşitliğinin her iki tarafı $-A^{-2}\lambda^2$ ile çarpılırsa

$$-A^{-2}\lambda^2 G_p(\lambda) = -A^{-2}P_0\lambda^2 - A^{-2}P_1\lambda^3 - A^{-2}P_2\lambda^4 + \dots \quad (5.8)$$

eşitliği elde edilir. (5.6), (5.7) ve (5.8) eşitliklerini taraf tarafa toplar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$[I - (A - A^{-3})\lambda - A^{-2}\lambda^2]G_p(\lambda) = P_0 + [P_1 - (A - A^{-3})P_0]\lambda$$

$$= -A^2 - A^{-2} - A^{-5}\lambda$$

elde ederiz. Buradan

$$G_p(\lambda) = \frac{A^{-2} + A^2 + A^{-5}\lambda}{A^{-2}\lambda^2 + (A - A^{-3})\lambda - 1}$$

bulunur.

Teorem 5.2.2. (Binet Formülü) α ve β , (5.5) karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere,

$$P_n(A) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Binet formülü,

$$P_n(A) = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$$

biçimindedir. Burada

$$C_1 = \frac{2A^3 - A^{-1}}{A + A^{-3}} \quad \text{ve} \quad C_2 = \frac{-A^{-5} - A^{-1} - 3A^3}{A + A^{-3}}.$$

İspat. α, β , (5.5) indirgeme bağıntısının karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere (5.5) bağıntısının genel çözümü

$$P_n(A) = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$$

şeklindedir. (5.4) başlangıç şartlarına göre

$$P_0(A) = C_1 + C_2 = -A^2 - A^{-2}$$

veya

$$P_1(A) = A^{-3}C_1 - AC_2 = -A^3$$

bulunur. Bu iki denklem birlikte çözülürse

$$C_1 = \frac{2A^3 - A^{-1}}{A + A^{-3}} \quad \text{ve} \quad C_2 = \frac{-A^{-5} - A^{-1} - 3A^3}{A + A^{-3}}$$

bulunur.

Teorem 5.2.3. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ için, P_n polinomunun açık şekli;

$$P_n(A) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j-1}{j} (-A^{-2})^j (A - A^{-3})^{n-2j-1}.$$

İspat. Binet formülünü kullanarak tümevarım yöntemiyle ispat yapılır.

$n = 2$ için,

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{2-0-1}{0} (-A^{-2})^0 (A - A^{-3})^{2-0-1} = (A - A^{-3}) = \alpha + \beta$$

doğruluğu görülür. $n = k$ için,

$$\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j-1}{j} (-A^{-2})^j (A - A^{-3})^{k-2j-1}$$

olduğu kabul edilsin. $n = k + 1$ için,

$$\frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j}{j} (-A^{-2})^j (A - A^{-3})^{k-2j}$$

olduğunu göstermeliyiz. (5.1) indirgeme bağıntısından,

$$P_{k+1} = (A - A^{-3}) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j-1}{j} (-A^{-2})^j (A - A^{-3})^{k-2j-1} \\ + (-A^{-2}) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j-2}{j} (-A^{-2})^j (A - A^{-3})^{k-2j-2}$$

elde edilir. Buradan,

$$P_{k+1} = (A - A^{-3}) \left(\binom{k-1}{0} (-A^{-2})^0 (A - A^{-3})^{k-1} + \binom{k-2}{1} (-A^{-2})^1 (A - A^{-3})^{k-3} + \dots + \binom{\frac{k-1}{2}}{\frac{k-1}{2}} (-A^{-2})^{\frac{k-1}{2}} (A - A^{-3})^0 \right) \\ + (A^{-2}) \left(\binom{k-2}{0} (-A^{-2})^0 (A - A^{-3})^{k-2} + \binom{k-3}{1} (-A^{-2})^1 (A - A^{-3})^{k-4} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (-A^{-2})^{\frac{k-2}{2}} (A - A^{-3})^0 \right)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$P_{k+1} = \left(\binom{k-1}{0} (-A^{-2})^0 (A - A^{-3})^k + \binom{k-2}{1} (-A^{-2})^1 (A - A^{-3})^{k-2} + \dots + \binom{\frac{k-1}{2}}{\frac{k-1}{2}} (-A^{-2})^{\frac{k-1}{2}} (A - A^{-3})^1 \right) \\ + \left(\binom{k-2}{0} (-A^{-2})^1 (A - A^{-3})^{k-2} + \binom{k-3}{1} (-A^{-2})^2 (A - A^{-3})^{k-4} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (-A^{-2})^{\frac{k}{2}} (A - A^{-3})^0 \right)$$

$$= \binom{k-1}{0} (-A^{-2})^0 (A-A^{-3})^k + \left[\binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} \right] (-A^{-2})^1 (A-A^{-3})^{k-2} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (-A^{-2})^{\frac{k}{2}} (A-A^{-3})^0$$

elde edilir.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

bağıntısından;

$$P_{k+1} = \binom{k-1}{0} (-A^{-2})^0 (A-A^{-3})^k + \binom{k-1}{1} (-A^{-2})^1 (A-A^{-3})^{k-2} + \dots + \binom{\frac{k-2}{2}}{\frac{k-2}{2}} (-A^{-2})^{\frac{k}{2}} (A-A^{-3})^0$$

olduğu görülür. Yani

$$P_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k-j}{j} (-A^{-2})^j (A-A^{-3})^{k-2j}$$

olur.

Aşağıdaki teorem, 4. Bölümde verilen genelleştirilmiş Fibonacci polinomu F_n ile $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomu P_n arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 5.2.4. $n \geq 2$ için $F_n(a, x) = axF_{n-1} + a^2F_{n-2}$ ise

$$P_n = \left[F_n(A^4, A^2 - A^{-2}) + (-A^6 - A^{10})F_{n-1}(A^4, A^2 - A^{-2}) \right] (-A^3)^{-n}$$

İspat. $F_n(a, x)$ polinomunda $a = A^4$ ve $x = A^2 - A^{-2}$ alınır ise ispata kolayca ulaşılır.

Teorem 5.2.5. (Catalan Özdeşliği) P_n , $(2, n)$ -tor halkasının parantez polinomu olsun. Bu durumda

$$P_n P_m - P_{n-r} P_{m+r} = (-1)^{m+r} A^{5n-3m-8r} (A^8 + A^{12} + 2A^{16} + A^{20}) F_{m-n+r} F_r$$

olur.

İspat. Teorem 5.2.4'den

$$\begin{aligned} P_n P_m - P_{n-r} P_{m+r} &= \left(\frac{F_n + (-A^6 - A^{10}) F_{n-1}}{(-A^3)^n} \right) \left(\frac{F_m + (-A^6 - A^{10}) F_{m-1}}{(-A^3)^m} \right) \\ &\quad - \left(\frac{F_{n-r} + (-A^6 - A^{10}) F_{n-r-1}}{(-A^3)^{n-r}} \right) \left(\frac{F_{m+r} + (-A^6 - A^{10}) F_{m+r-1}}{(-A^3)^{m+r}} \right) \\ &= \frac{F_n F_m + (-A^6 - A^{10}) F_n F_{m-1} + (-A^6 - A^{10}) F_{n-1} F_m + (-A^6 - A^{10})^2 F_{n-1} F_{m-1} - F_{n-r} F_{m+r}}{(-A^3)^{n+m}} \\ &\quad - \frac{(-A^6 - A^{10}) F_{n-r} F_{m+r-1} - (-A^6 - A^{10}) F_{n-r-1} F_{m+r} - (-A^6 - A^{10})^2 F_{n-r-1} F_{m+r-1}}{(-A^3)^{n+m}} \\ &= \frac{(-1)^n a^{2n-2r} F_{m-n+r} F_r + (-1)^{n-r} (-A^6 - A^{10}) a^{2n-2r} F_{m-n+r-1} F}{(-A^3)^{n+m}} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-r-1} (-A^6 - A^{10}) a^{2n-2r-2} F_{m-n+r-1} F_r + (-1)^{n-r-2} (-A^6 - A^{10})^2 a^{2n-2r} F_{m-n+r} F_r}{(-A^3)^{n+m}} \end{aligned}$$

Teorem 4.1.4'den

$$= \frac{(-1)^{n-r} a^{2n-2r} F_r (F_{m-n+r} + (-A^6 - A^{10}) F_{m-n+r-1} - (-A^6 - A^{10}) A^{-8} F_{m-n+r-1} + (-A^6 - A^{10})^2 F_{m-n+r-1})}{(-A^3)^{n+m}}$$

Tanım 4.1.1'den,

$$F_{m-n+r+l} = axF_{m-n+r} + a^2 F_{m-n+r-l}$$

olduğundan $a = A^4$, $x = A^2 - A^{-2}$ kullanılırsa,

$$F_{m-n+r+l} = (A^6 - A^2)F_{m-n+r} + A^8 F_{m-n+r-l}$$

bulunur. Böylece,

$$P_n P_m - P_{n-r} P_{m+r} = (-1)^{m+r} A^{5n-3m-8r} (A^8 + A^{12} + 2A^{16} + A^{20}) F_{m-n+r} F_r$$

elde edilir.

Teorem 5.2.6. (Cassini Özdeşliği) P_n , $(2, n)$ -tor halkasının parantez polinomu olsun. Bu durumda

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n A^{2n-8} (1 - A^4 - 2A^8 - A^{12})$$

olur.

İspat. Teorem 5.2.4'den

$$P_{n+1} P_{n-1} - P_n^2 =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{F_{n+1} + (-A^6 - A^{10})F_n}{(-A^3)^{n+1}} \right) \left(\frac{F_{n-1} + (-A^6 - A^{10})F_{n-2}}{(-A^3)^{n-1}} \right) - \left(\frac{F_n + (-A^6 - A^{10})F_{n-1}}{(-A^3)^n} \right)^2 \\ & = \left(\frac{F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 + (-A^6 - A^{10})^2 [F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2] + (-A^6 - A^{10}) [F_{n+1}F_{n-2} - F_n F_{n-1}]}{(-A^3)^{2n}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.5'den

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n a^{2n-2},$$

$$F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^n a^{2n-4}$$

ve Teorem 4.1.4'de $m = n - 2$ alınırsa

$$F_{n+1}F_{n-2} - F_n F_{n-1} = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 &= (-1)^n A^{2n-8} \left[I - (-A^6 - A^{10})^2 A^{-8} \right] \\ &= (-1)^n A^{2n-8} (I - A^4 - 2A^8 - A^{12}) \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.2.1 dikkate alınarak $(2, n)$ -tor halkasının normalize edilmiş parantez polinomu için aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

Teorem 5.2.7. (D' Ocagne Özdeşliği) P_n , $(2, n)$ Tor halkasının parantez polinomu olsun. Bu durumda

$$P_{n+1}P_m - P_n P_{m+1} = (-1)^{m+1} A^{5n-3m+1} (I + A^4 + A^8) F_{m-n}$$

olur.

İspat. Teorem 5.2.4'den

$$P_{n+1}P_m - P_{n+1}P_m = \frac{(F_{n+1} + (-A^6 - A^{10})F_n)(F_m + (-A^6 - A^{10})F_{m-1})}{(-A^3)^{n+1}} \frac{(F_m + (-A^6 - A^{10})F_{m-1})}{(-A^3)^m}$$

$$- \frac{(F_n + (-A^6 - A^{10})F_{n-1})(F_{m+1} + (-A^6 - A^{10})F_m)}{(-A^3)^n} \frac{(F_{m+1} + (-A^6 - A^{10})F_m)}{(-A^3)^{m+1}}$$

elde edilir. Teorem 4.1.6' dan

$$F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} = (-1)^n A^{8n} F_{m-n}$$

ve

$$(-A^6 - A^{10})^2 F_n F_{m-1} - F_{n-1} F_m = (-1)^{n-1} A^{8n-8} (-A^6 - A^{10})^2 F_{m-n}$$

Teorem 4.1.4'ten $n = n+1, m = m-1, r = 2$ alınırsa

$$(-A^6 - A^{10})F_{n+1}F_{m-1} - F_{n-1}F_{m+1} = (-1)^{n-1} A^{8n-8} (A^6 - A^2) (-A^6 - A^{10}) F_{m-n}$$

olduğundan,

$$P_{n+1}P_m - P_nP_{m+1} = (-1)^n A^{8n} (A^4 + A^8 + A^{12}) (-A^3)^{-n-m-1} F_{m-n}$$

$$= (-1)^{m+1} A^{5n-3m+1} (I + A^4 + A^8) F_{m-n}$$

bulunur.

Sonuç 5.1.1. N_n , $(2, n)$ -tor halkasının normalize edilmiş parantez polinomu olsun.

Bu durumda

$$1. \quad N_n = F_n(A^4, A^2 - A^{-2}) + (-A^6 - A^{10})F_{n-1}(A^4, A^2 - A^{-2})$$

2. Catalan Özdeşliği:

$$N_n N_m - N_{n-r} N_{m+r} = (-1)^{m+r} A^{8n-8r} (A^8 + A^{12} + 2A^{16} + A^{20}) F_{m-n+r} F_r$$

3. Cassini Özdeşliği:

$$N_{n+1} N_{n-1} - N_n^2 = (-1)^n A^{8n-8} (1 - A^4 - 2A^8 - A^{12})$$

4. D'Ocagne Özdeşliği:

$$N_{n+1} N_m - N_n N_{m+1} = (-1)^{n+1} A^{8n} (A^4 + A^8 + A^{12}) F_{m-n}$$

ile ifade edilir.

İspat. İspatlar Tanım 3.2.1, Teorem 5.2.4, 5.2.5, 5.2.6 ve 5.2.7'den çıkar.

Sonuç 5.1.2. V_n , $(2,n)$ -tor halkasının Jones polinomunu gösterebilirsin. Bu durumda

$$1. \quad V_n = F_n(t^{-1}, t^{-1/2} - t^{1/2}) + (-t^{-3/2} - t^{-5/2}) F_{n-1}(t^{-1}, t^{-1/2} - t^{1/2})$$

2. Catalan Özdeşliği:

$$V_n V_m - V_{n-r} V_{m+r} = (-1)^{m+r} t^{2r+2n} (t^{-2} + t^{-3} + 2t^{-4} + t^{-5}) F_{m-n+r} F_r$$

3. Cassini Özdeşliği

$$V_{n+1} V_{n-1} - V_n^2 = (-1)^n t^{2-2n} (1 - t^{-1} - 2t^{-2} - t^{-3})$$

4. D'Ocagne Özdeşliği:

$$V_{n+1}V_m - V_nV_{m+1} = (-1)^{n+1}t^{-2n}(t^{-1} + t^{-2} + t^{-3})F_{m-n}$$

olur.

İspat. İspatlar Teorem 3.2.2 ve Sonuç 5.1.1'den çıkar.



BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Birinci bölümde, düğüm teorisinin ve Fibonacci sayı dizilerinin tarihsel gelişiminden ve uygulama alanlarından biraz söz edildi. Ayrıca çalışmada ele alınan düğüm polinomları ile Fibonacci polinomları hakkında da kısa bir literatür bilgisi verildi.

İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılan bazı temel tanım ve özellikler ispatsız verildi. Sonraki bölümde, düğüm ve halkaların parantez polinomu Kauffman'ın çalışmaları [2,24,25] takip edilerek ayrıntılı olarak incelendi.

Dördüncü bölümde esas çalışmamıza taban teşkil eden bir genelleştirilmiş Fibonacci polinomu tanımlandı ve onun genelleştirilmiş Fibonacci özellikleri ile genelleştirilmiş Fibonacci özdeşlikleri ispatlandı.

Beşinci bölüm, Fibonacci polinomlarının düğüm teorisine uygulaması niteliğindedir. Bu bölümde $(2,n)$ -tor halkaları üzerine çalışıldı. $n \geq 2$ olmak üzere $(2,n)$ -tor halkasının parantez polinomlar dizisi, $\{P_n\}_0^\infty$, başlangıç değerleri

$$P_0 = -A^2 - A^{-2}, \quad P_1 = -A^3$$

olan bir

$$P_n = (A - A^{-3})P_{n-1} + A^{-2}P_{n-2}$$

indirgeme bağıntısını sağladığı ispatlandı. Bu polinomlar dizisinin Fibonacci benzeri özellikleri detaylı olarak incelendi. Aynı zamanda bu polinomlar için Catalan, Cassini, D' Ocagne gibi, önemli Fibonacci özdeşliklerine benzer özdeşlikler ispat edildi. $(2,n)$ -tor halkalarının Normalize edilmiş parantez polinomlarının ve Jones polinomunun Fibonacci benzeri özdeşlikleri parantez polinomlarının sağladığı özdeşliklerin sonuçları olarak verildi.

Bu çalışmada takip edilen yönteme benzer yöntemlerle, başka düğüm sınıflarının (örneğin burulmalı düğümler, rasyonel düğümler gibi.) parantez polinomları, normalize edilmiş parantez polinomları ve Jones polinomlar dizisinin Fibonacci benzeri indirgeme bağıntılarının sağlayabileceği düşünülmektedir. Böylece bu düğüm sınıflarının polinomları ile Fibonacci polinomları arasında ilişki kurulabilecek ve Fibonacci benzeri özdeşliklerin sağlandıkları ispatlanabilecektir.

KAYNAKLAR

- [1] Conway, J.H., Fox, R.H. Introduction to Knot Theory, Graduate Text in Mathematics, 57, New York: Springer Verlag, 1977.
- [2] Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial, Topology, 26 (3), 395-407, 1987.
- [3] Kawauchi, A.A Survey of Knot Theory, Basel: Birkhauser, 1996.
- [4] Murasugi, K. Knot Theory and Its Applications, Basel: Birkhauser, 1996.
- [5] Alexander, J.W. Topological invariants of knots and links, Transactions of the American Society, 30, 275-306, 1928.
- [6] Conway, J.H. An Emuration Of Knots and Links and Some of Their Algebraic Properties, Computational Problems In Abstarct Algebra, Proc. Conf., Oxford 329-358, 1967.
- [7] Jones, V.F.R. A polynomial invariant for knots via non Neumann algebras, Bulletin of the American Mathematical Society, 12, 103-111, 1985.
- [8] Jones, V.F.R. Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link polynomials, Annals of Mathematics Second Series, 126(2), 335-388, 1987.
- [9] Kauffman L. H. An invariant of reguler isotopy, Transactions of the American Mathematical Society, 318, 417-471, 1990.
- [10] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K., Ocneau, A. A new polynomial invariant of knot and links,. Bulletin of Amerikan Mathematical Society, 12, 239-246, 1985.
- [11] Fox, R.H. Knots and periodic transformations, Topology of 3-manifolds and related topics, Proc.The Univ.of Georgia Institute, N.J.:Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 177-182, 1961.
- [12] Seifert, H. Über das Geschlect von Knoten, Mathematische Annalen, 110 (1),571-592,1935.

- [13] Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, New York: John Wiley & Sons, 2011.
- [14] Falcon, S., Plaza, A. On k -Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives 39, (2009), 1005-1019, 2007.
- [15] Spivey, M.Z. Fibonacci identities via the determinant sum property, The Collage Mathematics Journal, 37(4), 286-289, 2006.
- [16] Stakhov, A. , Rozin, B. , Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p -numbers Chaos, Solitons & Fractals, 27 (5), 1162-1177, 2006.
- [17] Sikhwal, O. Generalization of Fibonacci polynomials, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014.
- [18] Bryd, P.F. Expansion of analytic functions in polynomials associated with Fibonacci numbers, Fibonacci Quarterly, 1 (1), 16-29, 1963.
- [19] Amdeberhan. T., Moll, V.H. , Chen X., Sagan, B.E. Generalized Fibonacci polynomials and Fibonacci coefficients, Annals of Combinatorics, 18 (4), 1615-1624, 2007.
- [20] Benjamin, A.T., Cameron, N.T., Quinn, J.J. Fibonacci determinants-a combinatorial approach, Fibonacci Quarterly, 45(1),36-55, 2007.
- [21] Catalani, M. Generalized bivariate Fibonacci polynomials, Preprint, arXiv:math/0211366v2, 2004.
- [22] Nalli, A., Haukkinen, P. On generalized Fibonacci and Lucas polynomials, Chaos, Solitons & Fractals, 42 (15), 2009.
- [23] Gould, H.W. Combinatorial Identities. Morgantown, W Va, 1972.
- [24] Rolfsen, D. Knots and Links Mathematics Lecture Series, Berkeley, Calif.: Publish or Perish, Inc., 7, 1976.
- [25] Kauffman L.H. On knots, Annals of Mathematics Study, New Jersey:Princeton University Press, 115, 1987.
- [26] Kauffman L.H. Knots and Physics, Series on Knots and Everything, River Edge, NJ:World Scientific Publishing Co. Inc., 1, 1991.
- [27] Kauffman L.H. New invariants in the theory of knots American Mathematical Monthly, 95 (3), 195-242, 1990.

ÖZGEÇMİŞ

Merve Beyaztaş, 23.10.1991'de İzmir'de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Yalova'da tamamladı. 2009 yılında Çiftlikköy Atatürk Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2009 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünü 2014 yılında bitirdi. 2011 yılında Anadolu Üniversitesi İşletme bölümüne başladı halen devam etmektedir. 2015 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.

