T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURMUŞ ÖNGERİLMELİ PLAĞIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİNE KARŞILIK GELEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Mustafa ERÖZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Abdullah YILDIZ**

Nisan 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURMUŞ ÖNGERİLMELİ PLAĞIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİNE KARŞILIK GELEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Mustafa ERÖZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 02/05/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah Yıldırım	Prof. Dr. Surkay Akbarov	Prof. Dr. Metin Başarır
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

Doç. Dr. Fatih Taşçı	Yrd. Doç. Dr. Arzu Turan
Üye	**Üye**

TEŞEKKÜR

Çalışma esnasında değerli katkılarını esirgemeyen ve çalışmanın önderliğini üstlenen Prof. Dr. Abdullah YILDIZ hocama sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu tezin oluşumunda birikim ve bilgilerini bizimle paylaşan ve desteğini veren sayın Prof. Dr. Surkay AKBAROV 'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

B	: Şekil fonksiyonlarını içen matris
c_2	: Enine (distorsiyon) dalga hızı
D	: Malzeme sabitlerini içeren matris
e	: Elastisite modüleri oranı
E	: Elastisite (Young) modülü
f	: Sağ taraf vektörü
J(**u**)	: Toplam potansiyel enerji fonksiyoneli
K	: Katılık (stiffness) matrisi
P, P_0	: Şerit-plağın üst yüzeyine normal doğrultuda etki eden noktasal yükün yoğunluğu
q	: Şerit-plağın iki kenarından etki eden düzgün yayılı çekme kuvvetinin yoğunluğu
SEY	: Sonlu elemanlar yöntemi
TLTEWISB	: Öngerilmeli Cisimlerdeki Elastik Dalgaların Üç boyutlu Doğrusallaştırılmış Teorisi (Three-Dimensional Linearized Theory of Elastic Waves in Initially Stressed Bodies)
$\mathbf{u}^y$	: Sonlu eleman yaklaşık çözümü
u_1 , u_2	: Sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 doğrultusundaki yerdeğiştirme
$u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$	: Şerit-plağın k. katmanında, sırasıyla, Ox_1 ve Ox_2 doğrultusundaki yerdeğiştirmeler
x_1, x_2, x_3	: Global Lagrange koordinatları
$\hat{x}_1, \hat{x}_2$	: Boyutsuz Lagrange koordinatları
x	: Düğüm noktalarındaki bilinmeyen yerdeğiştirmeleri içeren vektör
$\delta(x_i)$	: Dirac delta fonksiyonu

δ_{ij}	: Kronecker sembolü
ε_{ij}	: Şekil değiştirme tansörü bileşenleri
$\lambda,\ \mu$	: Lame sabitleri
σ_{ij}	: Gerilme tansörü bileşenleri
$\sigma_{ij}^{\ 0}$	: Şerit-plağın iki kenarından düzgün yayılı q çekme yükü ile çekildiğinde oluşan gerilme
Ω	: Boyutsuz frekans
Δ_{σ}	: Farklı sonlu eleman sayısına bağlı olarak elde edilen σ_{22} gerilmeleri arasındaki fark
Ψ_{11}	: Farklı öngerilmeler ile elde edilen σ_{22} gerilmeleri arasındaki fark
$\square^{(k)}$	: üst indis k: şerit-plağın k. katmanı ile ilgili değerler

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Şerit plak, elastodinamik denklemleri, öngerilme, zaman göre harmonik yük, zorlanmış titreşim, sonlu elemanlar yöntemi, dinamik gerilme alanı

Bu çalışmada, rijit zemin üzerine oturmuş sonlu uzunluğa sahip öngerilmeli şerit-plağın zorlanmış titreşimine karşılık gelen sınır-değer problemleri gerek bir katmanlı hal gerekse iki katmanlı hal için ele alınmıştır. Ele alınan problemlerin matematik modellemesi öngerilmeli cisimlerde üç-boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga teorisi çerçevesinde verilmiştir.

İlk olarak, rijit zemin üzerine oturmuş tek katmanlı şerit-plağa ait sınır-değer problemi ele alınarak matematik modeli kurulmuştur. Analitik çözümü olmayan bu modelin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümü yapılmıştır. Kurulan sonlu eleman modeli belirli parametreler ile test edilmiş ve modelin geçerliliği sonsuz uzunluğa sahip bölgeler için yapılan çalışmalara uygun olması ile sınanmıştır. Modellemedeki tüm parametre değişimlerinin ele alınan problemdeki sisteme etkisi ortaya konulmuştur.

İkinci olarak, rijit zemin üzerine oturmuş iki katmanlı şerit-plağın zorlanmış titreşimine ait sınır-değer problemi ele alınmıştır. İki katmanlı hal için matematik model kurulmuş ve sonlu eleman formülasyonu yapılmıştır. Gerek katmanlar arasındaki ara yüzeyde gerekse zemin ile şerit-plak arasındaki yüzeyde gerilme dağılımı incelenmiş ve plakların uzunluklarının değişmesinin gerilme dağılımına etkisi gösterilmiştir.

Diğer yandan, ele alınan her iki problem için katmanlardaki öngerilmenin ve zamana göre harmonik yükün frekansının sisteme etkisi incelenmiş ve elde edilen sonuçlar ortaya konulmuştur.

BOUNDARY- VALUE PROBLEMS CORRESPOND TO FORCED VIBRATION OF THE PRE-STRESSED PLATE-STRIP RESTING ON A RIGID FOUNDATION

SUMMARY

Key Words: Plate-strip, elastodynamics equations, initial stress, time-harmonic load, forced vibration, Finite element method, time-harmonic dynamical stress field

In this study, boundary-value problems correspond to forced vibration of initially stressed plate-strip with finite length resting on a rigid foundation both for one layered and for bi-layered cases are investigated. The mathematical modeling of the considered problems is made by the use of the three-dimensional linearized theory of elastic waves in initially stressed bodies.

First, boundary-value problem for a pre-stressed plate-strip resting on a rigid foundation is considered and the mathematical modeling of the considered problem is made. The numerical solution of the problem that has no analytical solution is done by the use of the Finite element method. The validity of the developed model is tested on concrete problems and the coincidence with previous studies for layers with infinite length is seen. The effects of change of system parameters are presented.

As a second problem, boundary-value problem for bi-layered pre-stressed plate-strip resting on a rigid foundation is considered. The mathematical modeling for the bi-layered case is made and the finite element formulation is presented. The stress distributions on the interface planes are investigated and the influence of the length of the layers to these distributions is presented.

Moreover, the influence of pre-stretching of the layer(s) and the frequency of the time-harmonic dynamical load on the stress distribution for both cases is investigated and the numerical results obtained are presented.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Uygulamalı ve sayısal matematiğin önemli çalışma konularından biri de elastik ortamlar dinamiğinde lineer olmayan problemlerin modellenmesi (matematik modellerinin kurulması) ve sayısal yani yaklaşık çözümleri için yöntemlerin geliştirilmesidir. Bahsedilen lineer olmayan problemlerin elastodinamiğin klasik lineer teorisi çerçevesinde çözülmesi mümkün değildir. Yukarıda sözü edilen problemlere bir örnek, elastodinamiğin öngerilmeli cisimleri içeren problemleridir. Bu problem grubu çok geniş bir uygulama sahasına sahiptir. Örneğin, malzemelerin imalatı ve bir araya getirilmesi işlemlerinde öngerilme meydana gelir. Yer kabuğundaki gerek statik gerekse dinamik kuvvetler sonucunda ön gerilme meydana gelmektedir. Öngerilmeli ortamlara bir başka örnek ise kompozit malzemelerdir. Bu nedenledir ki; bu alanda birçok teorik ve deneysel çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar ile elde edilen sonuçlar [1,2,3] kaynaklarında analiz edilmiştir. Ayrıca 2002 yılı öncesi yapılan çalışmalar [4] te Guz tarafından incelenmiştir. Daha sonraki yıllarda yapılan çalışmalar ise [5-17] ile verilebilir. Yukarıda bahsedilen çalışmalar göz önüne alındığında, bu çalışmaların Öngerilmeli Cisimlerdeki Elastik Dalgaların Üç boyutlu Doğrusallaştırılmış Teorisi (Three-Dimensional Linearized Theory of Elastic Waves in Initially Stressed Bodies- TLTEWISB) çerçevesinde gerçekleştirildiği görülür.

TLTEWISB-nin alan denklemleri kurulurken deforme olabilen bir katı cismin iki durumu söz konusudur. Bunlardan birincisi perturbe olmamış durum, ikincisi perturbe olmuş durumdur. Deforme olabilen bir katı cismin durumu derken hem hareket hem denge halleri kastedilmektedir. Perturbe olmuş durumdaki tüm değerlerin başlangıç durumu ve perturbe miktarlarının toplamı olarak temsil edilebileceği kabul edilmektedir. Burada, ayrıca hem başlangıç durumunun hem de perturbe olmuş durumun katı cisimler mekaniğinin lineer olmayan denklemleri ile temsil edilebileceği de kabul edilmektedir. Perturbe olmamış durumdaki uygun değerler ve perturbe miktarlarının küçük olduğu gerçeği kullanılarak, perturbe olmuş durumdaki bağıntılar lineerleştirilir. Daha sonra perturbe olmamış haldeki denklemlerden bu lineerleştirilmiş bağıntılar çıkarılır. Böylece TLTEWISB-nin denklemleri elde edilir. Bu denklemler başlangıç durumundaki değişkenleri içerdiğinden TLTEWISB öngerilmelerin perturbeler üzerindeki etkisini de incelemektedir.

Rijit (katı) malzemeler söz konusu olduğunda başlangıç durumunun tespitinde klasik lineer elastisite teorisi kullanılır. Bununla birlikte perturbe olmuş durumda elastisite teorisinin geometrik nonlineerlik içeren denklemleri kullanılır. Bu denklemlerin doğrusallaştırılması ile TLTEWISB-nin yukarıda bahsedilen denklemlerine ulaşılır. Bu ve benzeri yaklaşımlar [1,2,3,18] çalışmalarında mevcuttur.

TLTEWISB çerçevesinde yapılan bu incelemeleri iki gruba ayırmak mümkündür. Bunlar, dalga yayılımı ile ilgili (dispersion-dağılma) problemler ve öngerilmeli cisimlerde gerilme-şekil değiştirme halleri ile ilgili problemlerdir. Dalga yayılımı ile ilgili problemler diğer gruba nazaran daha önce incelenmeye başlanmıştır. İncelenmeye daha sonra başlanan ikinci grup ile ilgili çalışmalara [8-15] kaynakları örnek gösterilebilir. Bu çalışmalar incelenirse katmanlı ortamlarda zamana-göre harmonik gerilme durumuna öngerilmenin etkisinin araştırıldığı görülecektir. Ancak bu çalışmalarda ele alınan katmanların ya da tabakaların (plakların) genişlikleri ve uzunlukları sonsuzdur. Böylece, bu kısıt altında genişlik ve uzunluk istikametindeki koordinatlarda integral dönüşümleri yapılabilmekte ve ilgili sınır-değer problemlerinin çözümü mümkün olmaktadır.

Bu tez çalışmasının bir katmanlı şerit-plak için geliştirilen modelinden sonra iki katmanlı durum ele alınmış ve ilgili matematik modelin kurulması ardından SEY ile formülasyon elde edilmiştir. İki katmanlı öngerilmeli şerit-plak içeren bu soru sadece kompozit malzemelerin mekaniğinde değil bunun yanı sıra mühendisliğin birçok branşlarında karşılaşılmaktadır. Bu konu ile ilgili son gelişmeler [19] makalesinde incelenmiş olup ilgili çalışmalar [9,10,20-23] olarak sıralanabilir. Bu çalışmalar incelendiğinde, tıpkı bir katmanlı durumda olduğu üzere, ele alınan problemlere önerilen çözümlerin katmanların ancak sonsuz uzunluğa sahip olduğu durumlarda geçerliliğinin var olduğu görülmektedir. Yani bahsedilen çalışmalardaki yöntemler sonlu uzunluğa sahip katmanlar söz konusu olduğunda kullanılamazlar.

Diğer yandan, yukarıdakilere benzer tipte lineer elastodinamik problemleri ile ilgili [24,25,26] çalışmalarında spektral sonlu elemanlar yöntemi (SSEY) adı verilen yarı-analitik bir sonlu elemanlar yöntemi geliştirilmiştir. SSEY yönteminde aranılan çözüm bir seri biçiminde teklif edilir. Serideki bilinmeyen katsayılar (ki bunlara çekirdek adı verilmiştir) katman içinde koordinat değişimine bağlıdır. Bu çekirdekler bir boyutlu SEY kullanılarak belirlenir. Dolayısıyla, SSEY ancak katman uzunluklarının sonsuz olduğu durumlarda kullanılabilir. Bu açıdan bakıldığında şimdiye kadar yapılan çalışmalarda önerilen yöntemlerin katman uzunluklarının sonlu olduğu durumlarda kullanılamayacağı görülmektedir.

Bu tez çalışmasında sonlu uzunluğa sahip katmanlar için SEY kullanılarak bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Çalışma yapılırken bir ve iki katmanlı şerit-plağın rijit zemin üzerine oturduğu kabul edilmiş ve iki boyutlu uzayda çalışılmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Mühendislikte malzemelerin üç çeşit deformasyonunun var olduğu kabul edilir. Bunlar; elastik, plastik ve sürünme (sünme-creep) deformasyonlardır. Kimyasal bağları bozulmaksızın malzemenin gerilmesi ile elastik deformasyon meydana gelir. Dolayısıyla etki eden kuvvet ortadan kalktığında malzeme eski haline geri döner. Üzerine etkiyen kuvvetlerin ortadan kalkmasından sonra orijinal boyutlarını tekrar kazanan cisme elastik cisim adı verilir. Aksi durumda elastik olmayan deformasyon meydana gelir. Elastik olmayan deformasyon zamana bağlı değilse plastik deformasyon, zamana bağlı ise sürünme deformasyonu adını alır.

Bir cismin her noktasında bulunulan konumdan bağımsız olarak malzeme aynı özelliklere sahipse bu cisme homojen cisim denir. Aksi halde homojen olmayan cisim adını alır. Bir ortam homojen ise zorunlu olarak sürekli olacağını burada belirtelim. Bir malzemede elastik özellikler tüm doğrultularda aynı ise buna izotrop malzeme adı verilir. Anizotrop malzemelerde ise elastik özellikler seçilen doğrultulara göre farklılık göstermektedir.

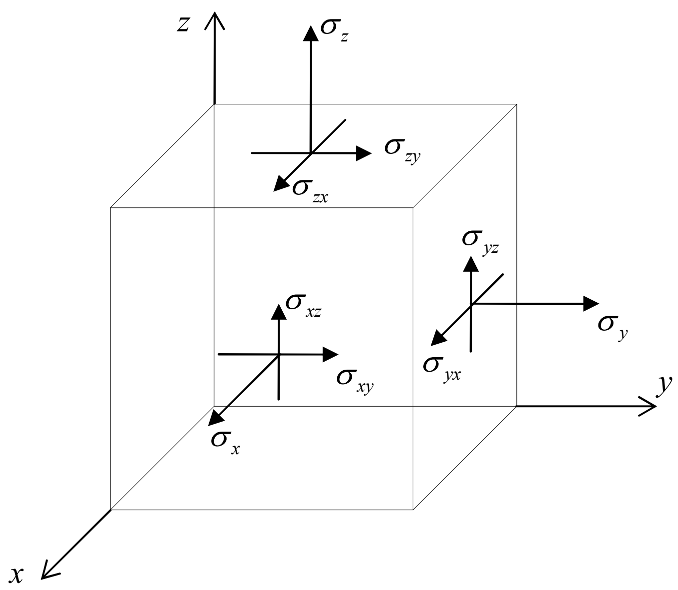
Aşağıda, bir cismin içindeki kuvvet dağılımı hakkında bize bilgi veren gerilme kavramı tarif edilecektir: Mekanikte, gerilme birim alana düşen kuvvet olarak, Gerilme=Kuvvet/Alan ifadesi ile verilir. Bir noktada gerilme tarifi matematiksel açıdan

$$\sigma(x,y,z)=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \tag{2.1}$$

olarak yazılır. Üç boyutlu uzayda çalıştığımız göz önüne alınarak $\Delta\mathbf{F}=(\Delta F_x,\Delta F_y,\Delta F_z)$ kabul edilirse (2.1) ifadesi

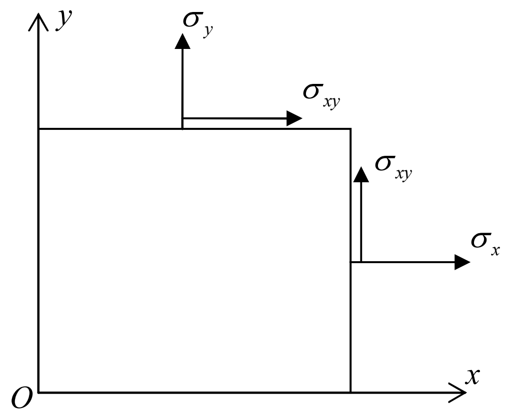
$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}, \; \sigma_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}, \; \sigma_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \qquad (2.2)$$

olacaktır. σ_{xx} gerilme ifadesindeki ilk indis normali Ox ekseni istikametinde olan düzlemi, ikinci indis ise gerilme bileşeninin doğrultusunu belirtir. Dolayısıyla σ_{xx} gerilme tansörü bileşeni Oyz düzleminde Ox istikametindeki gerilmeyi temsil eder. σ_{xx}, σ_{yy} ve σ_{zz} gerilme bileşenleri normal gerilmeler adını alır ve genellikle tek indis kullanılarak, sırasıyla σ_x, σ_y ve σ_z biçiminde gösterilir. Gerilme tansörünün diğer bileşenlerine (σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yx}, …) ise kayma gerilmeleri adı verilir.



Şekil 2.1 Bir noktadaki gerilme halini tanımlayabilmek için kullanılan gerilme bileşenleri

Gerilme bileşenleri simetrik bir yapıya sahip olduğundan bir noktadaki gerilmeyi tarif etmek için altı bileşen yeterli olmaktadır ($\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$). Seçilen koordinat sisteminin bir düzlemindeki gerilme bileşenleri sıfır ise düzlem gerilme hali söz konusu olur. Örneğin; $Oxyz$ koordinat sisteminde Oxy düzlemi için düzlem gerilme halini göz önüne alırsak $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ olacaktır. Bu durumda bir noktadaki gerilmeleri σ_x, σ_{xy} ve σ_y bileşenleri ile tarif edebiliriz (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Düzlem gerilme halinde bir noktadaki gerilme bileşenleri

Bir cisimdeki noktaların bağıl (rölatif) konumları değiştiği zaman cisim şekil değiştirmiştir denir. Bu durum, iki nokta arasındaki mesafenin sabit kaldığı bir rijit cisim hareketinden farklıdır. ε sembolü ile gösterilen şekil değiştirme tansörünün bileşenleri, $u(x, y, z)$ yer değiştirme fonksiyonunu belirtmek üzere,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad ; i, j = x, y, z \qquad (2.3)$$

bağıntıları ile bulunur. Düzlem gerilme durumuna benzer olarak, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$ haline düzlem şekil değiştirme adı verilir.

Gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin bileşenleri arasındaki bağıntı göz önüne alınan cismin özelliklerine bağlıdır. Bu çalışmada gerilme-şekil değiştirme arasındaki bağıntının lineer olduğu elastik cisimler göz önüne alınacaktır. Bu cisimlere lineer elastik cisimler adı verilir.

Lineer elastik bir izotrop maddeyi karakterize etmek için iki elastik sabite ihtiyaç vardır. Bunlardan birincisi E elastisite (Young) modülü ve ikincisi ν Poisson oranıdır. E ve ν elastik sabitleri cinsinden gerilme ve şekil değiştirme arasındaki bağıntılar

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \tag{2.4}$$

ve

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G},\ \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G},\ \varepsilon_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{G}$$

biçimindedir. Burada G rijitlik (kayma) modülü olarak adlandırılır ve elastik sabitler cinsinden

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.5}$$

ile hesaplanır. E ve ν elastik sabitleri kullanılarak Lame sabitleri adı verilen λ ve μ sabitleri

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.6}$$

eşitlikleri ile bulunur. Böylece (2.4) bağıntıları Lame sabitleri cinsinden gerilmelere göre

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\ ,\ \ \theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\ ;\ \ i, j = x, y \tag{2.7}$$

biçiminde verilir. Gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerini birbirine bağlayan bu eşitliklere mekanik bağıntılar (gerilme-deformasyon bağıntıları) adı verilir [28-30].

Salınım Hareketi [27]: Cisimlerin salınım hareketi ve bu hareketler ile oluşturulan kuvvetler, mekanikte, titreşim konusunun çalışma sahasına girer. Belirli bir kütleye sahip tüm elastik cisimler titreşim hareketi yapabilir veya titreşime maruz kalabilir.

Bu yüzdendir ki; makineler ve yapılar titreşim yaparlar ve bunların dizayn edilmesi esnasında salınım hareketleri göz önünde bulundurulur.

Salınımlı sistemler lineer ve lineer olmayan (nonlineer) sistemler olarak iki grupta incelenebilir. Lineer sistemlerde süper-pozisyon ilkesi geçerli olup, bu sistemlerin çözümü ile ilgili gelişmiş bir matematik teori mevcuttur. Ancak lineer olmayan sistemlerin çözümü ile ilgili teori aynı oranda gelişmemiştir. Bununla birlikte, salınımın genliği arttırıldıkça lineerlik bozulduğundan, lineer olmayan sistemler ve bu sistemlerin analizi öneme sahiptir.

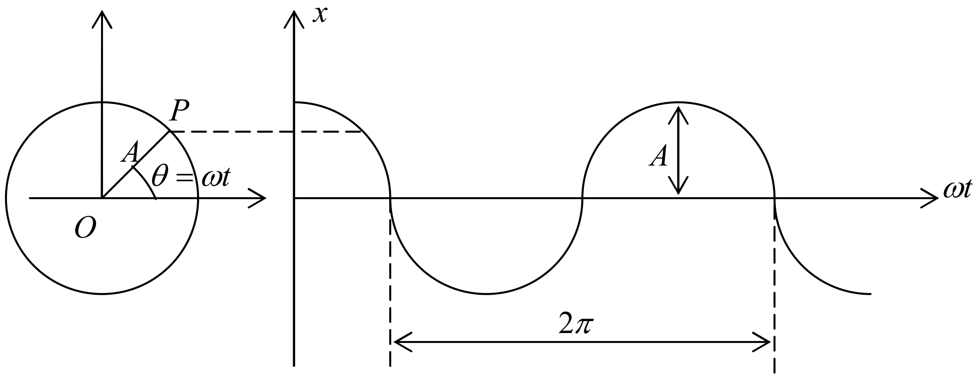
Titreşimleri doğal (öz) ve zorlanmış titreşim olarak iki sınıfta incelemek mümkündür. Sistemin içinde mevcut kuvvetlerin etkisi ile doğal titreşim oluşur. Doğal titreşim altındaki bir sistem kendi doğal frekanslarından biri veya daha fazlası ile titreşim hareketi yapar. Dış kuvvetlerin etkisi altında meydana gelen titreşim zorlanmış titreşim olarak adlandırılır. Bu dış etki bir salınım hareketi ise sistem bu dış etkinin frekansı ile titreşim yapacaktır. Bu titreşim sistemin doğal titreşimlerinden biri ile çakışırsa rezonans adı verilen bir durum ile karşılaşılır. Rezonans durumunda sistemde çok büyük salınımlar meydana gelebileceğinden büyük yapılar ve köprüler rezonans sonucu yıkılma riskine sahiptirler. Bu anlamda, titreşim çalışılırken sistemin doğal frekanslarının belirlenmesi önem taşımaktadır.

Titreşim halindeki sistemler gerek sürtünme gerekse başka etkiler ile sönüme (damping) maruz kalırlar. Bu sönüm küçük olduğunda göz ardı edilir ve sistemde sönüm olmadığı kabul edilir. Diğer taraftan, sönüm hadisesi rezonans halindeki salınım genliğinin sınırlarının tespitinde önem taşır.

Bir sistemin hareketi tarif edilirken gerekli bağımsız koordinatların sayısına sistemin serbestlik derecesi adı verilir. Örneğin, uzayda hareket eden bir parçacığın serbestlik derecesi üç olur.

Harmonik Hareket: Salınım hareketi kendini tekrar edebilir. Bir saatin yelkovanı bu türden bir salınım hareketi yapar. Bir hareket kendisini eşit τ aralıkları ile tekrar ediyorsa periyodik hareket adını almakta olup, τ zaman dilimine bu salınımın periyodu adı verilir. $f = 1/\tau$ sayısına da frekans adı verilir. t serbest değişkeni zamanı göstermek üzere periyodik hareket eden bir sistemin hareketini $x(t)$ fonksiyonu tarif ediyorsa $x(t) = x(t+\tau)$ eşitliği geçerlidir. Periyodik hareketin en basit hali harmonik harekettir. Örneğin, bir yayın ucuna bağlı bir kütlenin yukarı aşağı yaptığı hareket harmonik harekettir. Salınımın genliğine A dersek kütlenin hareketi $x(t) = A\sin(2\pi t/\tau)$ fonksiyonu ile belirlenir. $t = \tau$ anında hareket kendini tekrar etmeye başladığından bu sistemin periyodu τ olur.

Harmonik hareket sabit hızla dönen bir çember üzerindeki bir noktanın bir doğru üzerine izdüşümü olarak yorumlanabileceğinden şekil 2.3 teki OP doğru parçasının açısal hızı kullanılarak hareket $x(t) = A\sin(\omega t)$ biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 2.3 Harmonik hareket

ω açısal frekans olarak adlandırılır ve birimi rad/s dir. Bu hareket kendisini 2π radyan ile tekrar edeceğinden $\omega = 2\pi/\tau = 2\pi f$ eşitlikleri elde edilir. Burada τ harmonik hareketin periyodu, f ise frekansıdır. Böylece harmonik bir hareketin hızı ve ivmesi

$$\dot{x} = \omega A \sin \omega t = \omega A \sin(\omega t + \pi / 2)$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) \qquad (2.8)$$

biçiminde olur. Dikkat edilirse hız ve ivme hareketleri de sistem ile aynı frekansa sahip olan birer harmonik harekettir.

Virtüel (Sanal) İş Prensibi: Cisimlerin dengesi üzerine kurulan virtüel iş (sanal işler) prensibi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

“Verilen kuvvetlerin etkisi altında dengede olan bir sisteme sanal bir yerdeğiştirme verilirse kuvvetlerin yaptığı iş sıfır olur.”

Virtüel iş prensibinde kullanılan terimler aşağıdaki gibi açıklanabilir:

1- δr sanal yerdeğiştirme (anlık) verilen koordinatların sonsuz küçüklükte sanal değişiminden ibarettir. Bu sanal yerdeğiştirme çalışılan sistemin kısıtlarına uygun olmalıdır.

2- δW virtüel iş, sanal bir yerdeğiştirmede aktif olan tüm kuvvetlerin yaptığı iştir. Sanal yerdeğiştirme sonrasında sistemin geometrisinde önemli bir değişim olmadığından virtüel işin hesabı sırasında sisteme etki eden kuvvetlerin değişmediği kabul edilir.

Bernoulli tarafından ortaya atılan virtüel iş prensibi statik bir olayı tarif eder. Prensibin dinamiğe genişletilmesi atalet (eylemsizlik) kuvvetini tanımlayan D’Alembert sayesinde mümkün olmuştur. Dinamik problemler ele alındığında atalet kuvvetleri aktif kuvvetler olarak sisteme dahil edilir.

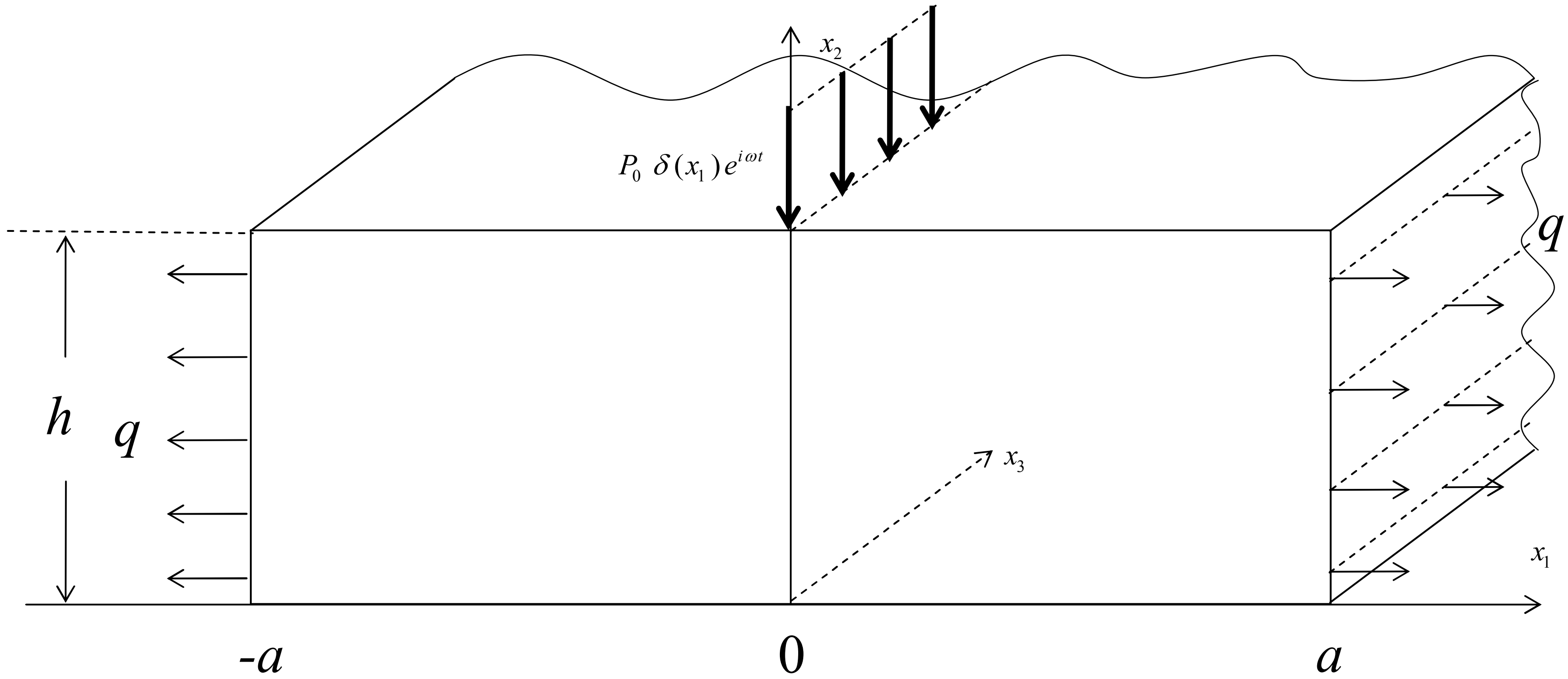
BÖLÜM 3. RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURMUŞ ÖNGERİLMELİ TEK KATMANLI ŞERİT-PLAĞIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE KARŞILIK GELEN SINIR-DEĞER PROBLEMİ

3.1. Problemin Ortaya Konulması

Bu bölümde ele alınacak problem rijit zemin üzerine oturmuş öngerilmeli sonlu boyutlu şerit-plağın zorlanmış titreşimine ait olacaktır. Sonlu bölgeye sahip şerit-plak kartezyen koordinatlarda

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : -a \le x_1 \le +a \;;\; 0 \le x_2 \le h\} \tag{3.1}$$

bölgesini ve rijit yarı-düzlem ise $\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 \le 0\}$ bölgesini kaplamaktadır. Şerit-plağın lineer elastik malzemeden yapıldığı, homojen ve izotrop olduğu ve şerit-plağın zemin üzerine oturtulmadan önce kenarlarından şiddeti q olan normal kuvvetlerle gerilmekte olduğu kabul edilecektir. Plağın üst yüzeyine uygulanan zamana göre harmonik olan noktasal yük $P_0\,\delta(x_1)e^{i\omega t}$ formundadır. Şerit-plağın ve yarı-düzlemin Ox_3 ekseni istikametinde uzunluğunun sonsuz olduğu kabul edilecek ve Ox_1x_2 düzleminde düzlem şekil değiştirme hali incelenecektir.



Şekil 3.1 Rijit yarı-düzlemin üzerine oturmuş sonlu bölgeye sahip plağın geometrisi

Şerit-plak zemin üzerine oturtulduktan sonra ise plağın üst serbest yüzeyine zamana göre harmonik tekil P_0 kuvveti etki etmektedir. Lineer elastisite teorisi çerçevesinde şerit-plaktaki öngerilmeler

$$\sigma_{11}{}^{0} = q \ , \ ij \neq 11 \text{ için } \sigma_{ij}{}^{0} = 0 \tag{3.2}$$

biçiminde belirlenir. Bu durumda (3.2) öngerilmeleri göz önüne alınarak şerit-plak için TLTEWISB-nin hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılır [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{11}{}^{0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1{}^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad i; j = 1,2 \tag{3.3}$$

Burada ρ_0 plağın doğal haldeki yoğunluğunu temsil etmektedir. $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$ ve $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$ fonksiyonları sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 eksenleri istikametindeki yerdeğiştirmeleri ve σ_{ij} gerilme tansörü bileşenlerini göstermektedir. λ ve μ Lame sabitleri olsun. İzotrop sıkıştırılabilir malzemeler için $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \ \sigma_{11} \ , \ \sigma_{22} \ , \ \sigma_{12} \ \}^T \tag{3.4}$$

gerilme tansörünü ve $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \ \varepsilon_{11} \ , \ \varepsilon_{22} \ , \ \varepsilon_{12} \ \}^T \tag{3.5}$$

deformasyon tansörünü temsil etmek üzere aşağıdaki mekanik bağıntılar verilebilir:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad , \ \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \tag{3.6}$$

(3.6) denkleminde δ_{ij} Kronecker deltasını temsil etmektedir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ 1 & , \ i = j \end{cases} . \tag{3.7}$$

ε deformasyon tansörününün ε_{ij} elemanları

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \tag{3.8}$$

ile belirlenir. E elastisite modülü ve ν Poisson oranı ile λ ve μ Lame sabitleri arasında (2.6) ilişkileri mevcuttur. (3.1) ile verilen Ω bölgesinde (3.3) denklemleri sağlanmaktadır. Ele alınan problemde sınır koşulları olarak da

$$u_1\Big|_{x_2=0} = 0, \ u_2\Big|_{x_2=0} = 0$$

$$(q\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{11})\Big|_{x_1=\pm a} = 0, \ (q\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12})\Big|_{x_1=\pm a} = 0 \tag{3.9}$$

$$\sigma_{21}\Big|_{x_2=h} = 0, \ \sigma_{22}\Big|_{x_2=h} = -P_0\delta(x_1)e^{i\omega t}.$$

sınır koşullarının varlığı kabul edilerek problem tam olarak ortaya konulmuş olacaktır. Uygulanan noktasal yük zamana göre harmonik olduğundan bütün bağımlı değişkenler de harmonik olacak ve

$$\{ u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} \} = \{ \hat{u}_i, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij} \} e^{i\omega t} \tag{3.10}$$

biçiminde gösterilebilecektir. Buradan itibaren $\hat{u}_i$, $\hat{\sigma}_{ij}$ ve $\hat{\varepsilon}_{ij}$ bileşenleri $e^{i\omega t}$ çarpanı düşürülerek kullanılacaktır. Gösterimde kolaylık açısından “ ^ ” ifadesi de göz ardı edilecektir. (3.6) ve (3.8) ifadeleri (3.3) denkleminde yerine yazılarak TLTEWISB-nin yerdeğiştirmeye bağlı doğrusallaştırılmış hareket denklemleri

$$(\lambda+2\mu+q)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^{\ 2}}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^{\ 2}}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}=-\rho_0\,\omega^2 u_1 \qquad (3.11)$$

$$(\mu+q)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^{\ 2}}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^{\ 2}}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}=-\rho_0\,\omega^2 u_2 \qquad (3.12)$$

biçiminde elde edilir. Böylece ele alınan problemin formülasyonu tamamlanmış olmaktadır.

3.2. Varyasyonel Formülasyon

Bu alt bölümde problemin formülasyonuna karşılık gelen sınır-değer probleminin varyasyonel ifadesi oluşturulacaktır. Bir varyasyonel ifadedeki fonksiyonelin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden –virtüel iş prensibi esasına göre uygun denklem ve sınır koşullarının elde edilmesi ispat edilecektir.

Varyasyonel ifadeye geçmeden önce

$$\hat{x}_1=\frac{x_1}{h},\ \hat{x}_2=\frac{x_2}{h} \qquad (3.13)$$

koordinat dönüşümünü yapalım. (3.10) ve (3.13) ifadeleri (3.3) denklemlerinde yerine yazıldıktan sonra, bu denklemlerin her iki yanı h^2 ile çarpılırsa

$$h\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \hat{x}_1}+h\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \hat{x}_2}+q\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_1^{\ 2}}=-\rho_0\omega^2 h^2 u_1 \qquad (3.14)$$

$$h\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \hat{x}_1}+h\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \hat{x}_2}+q\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1^{\ 2}}=-\rho_0\omega^2 h^2 u_2 \qquad (3.15)$$

eşitliklerine ulaşılır. (3.13) koordinat dönüşümleri altında (3.9) sınır koşulları

$$u_1\big|_{\hat{x}_2=0}=0\,,\; u_2\big|_{\hat{x}_2=0}=0$$

$$\left.\left(q\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}+\sigma_{11}\right)\right|_{\hat{x}_1=\pm a/h}=0\,,\;\left.\left(q\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}+\sigma_{12}\right)\right|_{\hat{x}_1=\pm a/h}=0 \tag{3.16}$$

$$\sigma_{21}\big|_{\hat{x}_2=1}=0\,,\;\sigma_{22}\big|_{\hat{x}_2=1}=-P_0\delta(h\hat{x}_1)$$

halini alacaktır. Varyasyonel ifadeye ulaşmak için öncelikle (3.14) ve (3.15) denklemleri, sırasıyla, $v_1=v_1(\hat{x}_1\,,\,\hat{x}_2)$ ve $v_2=v_2(\hat{x}_1\,,\,\hat{x}_2)$ test fonksiyonları ile çarpılıp elde edilen denklemler taraf tarafa toplanır.

$$h\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\hat{x}_1}v_1+h\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial\hat{x}_1}v_2+h\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\hat{x}_2}v_1+h\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\hat{x}_2}v_2+q\frac{\partial^2 u_1}{\partial\hat{x}_1{}^2}v_1+q\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_1{}^2}v_2$$
$$=-\rho_0\omega^2h^2(u_1v_1+u_2v_2)$$

Elde edilen denklemin

$$\hat{\Omega}=\{\;(\hat{x}_1\;,\hat{x}_2\;)\;\;:\;\;-a/h\le\hat{x}_1\le a/h\,,0\le\hat{x}_2\le1\} \tag{3.17}$$

bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[h\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\hat{x}_1}v_1+h\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial\hat{x}_1}v_2+h\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\hat{x}_2}v_1+h\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\hat{x}_2}v_2+q\frac{\partial^2 u_1}{\partial\hat{x}_1{}^2}v_1+q\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_1{}^2}v_2\right]d\hat{x}_1d\hat{x}_2$$
$$=-\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\rho_0\omega^2h^2(u_1v_1+u_2v_2)d\hat{x}_1d\hat{x}_2 \tag{3.18}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.18) denkleminde $\vec{x}=(x_1,x_2,\,...\,,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $A\subset\mathbb{R}^n$ ve $\vec{n}$ dış birim normal vektör olmak üzere

$$\int_A\frac{\partial\,p(\vec{x})}{\partial\,x_k}q(\vec{x})\;d\,\vec{x}=\int_{\partial A}p(\vec{x})q(\vec{x})\cos(\vec{n},x_k)\,d\,s-\int_A p(\vec{x})\frac{\partial\,q(\vec{x})}{\partial\,x_k}\,d\,\vec{x} \tag{3.19}$$

kısmi integrasyon formülü kullanılarak türev aktarılır [31] ve ardından sınır terimleri ve bölge integralleri bir araya toplanırsa

$$\int_{\partial\hat{\Omega}} [\ h\sigma_{11}v_1\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + h\sigma_{21}v_2\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + h\sigma_{12}v_1\cos(\vec{n},\hat{x}_2)$$

$$+h\sigma_{22}v_2\cos(\vec{n},\hat{x}_2) + q\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_1}v_1\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + q\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}v_2\cos(\vec{n},\hat{x}_1)]\,ds$$

$$-\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[h\sigma_{11}\frac{\partial v_1}{\partial\hat{x}_1} + h\sigma_{21}\frac{\partial v_2}{\partial\hat{x}_1} + h\sigma_{12}\frac{\partial v_1}{\partial\hat{x}_2} + h\sigma_{22}\frac{\partial v_2}{\partial\hat{x}_2} + q\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_1}\frac{\partial v_1}{\partial\hat{x}_1} + q\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}\frac{\partial v_2}{\partial\hat{x}_1}\right]d\hat{x}_1 d\hat{x}_2$$

$$= -\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\rho_0\omega^2h^2(u_1v_1 + u_2v_2)\,d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \tag{3.20}$$

eşitliğine ulaşılacaktır. (3.20) eşitliğinde $\hat{\Omega}$ bölgesinin sınırı $\partial\hat{\Omega}$ ile belirtilmiştir. (3.20) eşitliğindeki bölge integralleri bir araya getirilir ve

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{h}\sigma_{in}^{\ 0}\frac{\partial u_j}{\partial\hat{x}_n},\ \sigma_{11}^{\ 0} = q \ \text{ ve } \ \sigma_{in}^{\ 0} = 0 \ \ (in \neq 11) \tag{3.21}$$

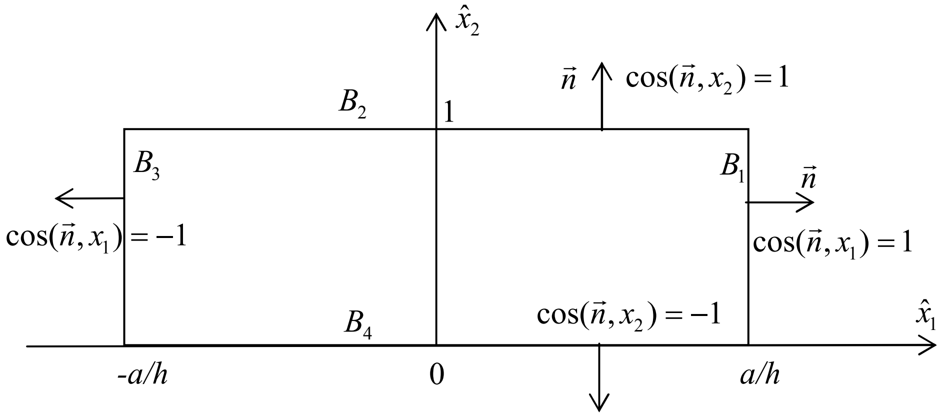
tanımı yapılırsa

$$\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[hT_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial\hat{x}_i} - \rho_0\omega^2h^2u_iv_i\right]d\hat{x}_1 d\hat{x}_2$$

$$= \int_{\partial\hat{\Omega}} [h\sigma_{11}v_1\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + h\sigma_{21}v_2\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + h\sigma_{12}v_1\cos(\vec{n},\hat{x}_2) + h\sigma_{22}v_2\cos(\vec{n},\hat{x}_2)$$

$$+q\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_1}v_1\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + q\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}v_2\cos(\vec{n},\hat{x}_1)]\,ds \tag{3.22}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.22) eşitliğinde sınır integrali aşağıdaki yol takip edilerek hesaplanmıştır: $\partial\hat{\Omega}$ sınırı şekil 3.2 de verilen biçimde parçalara ayrılmış olsun.



Şekil 3.2 $\partial\hat{\Omega}$ sınırının parçalanışı ve doğrultu kosinüsleri

Şekil 3.2 ye göre $\partial\hat{\Omega}=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$ yazılabilir. (3.22) eşitliğinin sağ tarafı

$$\int\limits_{\partial\hat{\Omega}}\{\cos(\vec{n},\hat{x}_1)[h\sigma_{11}v_1+h\sigma_{21}v_2+q\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_1}v_1+q\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}v_2]+\cos(\vec{n},\hat{x}_2)[h\sigma_{12}v_1+h\sigma_{22}v_2]\ \}ds \tag{3.23}$$

haline gelir. Bu durumda

$$B_1=\{\ (\hat{x}_1,\hat{x}_2)\ :\ \hat{x}_1=a/h\ ,\ 0\le\hat{x}_2\le 1\ \}\ ,$$

$$B_2=\{\ (\hat{x}_1,\hat{x}_2)\ :\ -a/h\le\hat{x}_1\le a/h\ ,\ \hat{x}_2=1\}\ ,$$

$$B_3=\{\ (\hat{x}_1,\hat{x}_2)\ :\ \hat{x}_1=-a/h\ ,\ 0\le\hat{x}_2\le 1\ \}\ ,$$

$$B_4=\{\ (\hat{x}_1,\hat{x}_2)\ :\ -a/h\le\hat{x}_2\le a-h\ ,\ \hat{x}_2=0\ \}$$

sınırları için, sırasıyla,

$$\int\limits_0^1 1\cdot[h\sigma_{11}v_1+h\sigma_{21}v_2+q\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_1}v_1+q\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}v_2]\,d\,\hat{x}_2 \tag{3.24}$$

$$\int\limits_{-a/h}^{a/h} 1\cdot[h\sigma_{12}v_1+h\sigma_{22}v_2]\,d\,\hat{x}_1 \tag{3.25}$$

$$\int_0^1 (-1)[h\sigma_{11}v_1 + h\sigma_{21}v_2 + q\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}v_1 + q\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}v_2]\, d\,\hat{x}_2 \tag{3.26}$$

$$\int_{-a/h}^{a/h} (-1)[h\sigma_{12}v_1 + h\sigma_{22}v_2]\, d\,\hat{x}_1 \tag{3.27}$$

integralleri elde edilir. (3.24)-(3.27) integrallerinde (3.16) koşulları kullanılırsa

$$\int_{-a/h}^{a/h} h\sigma_{22}\Big|_{\hat{x}_2=1} v_2\Big|_{\hat{x}_2=1} d\,\hat{x}_1 \tag{3.28}$$

integraline ulaşılır. Bu durumda (3.22) denklemi

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[hT_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial \hat{x}_i} - \rho_0\,\omega^2 h^2\, u_i v_i \right] d\,\hat{x}_1\, d\,\hat{x}_2 = \int_{-a/h}^{a/h} h\sigma_{22}\Big|_{\hat{x}_2=1} v_2\Big|_{\hat{x}_2=1} d\,\hat{x}_1 \tag{3.29}$$

veya (3.21) tanımı ile açık yazılırsa

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[\begin{array}{l} h\sigma_{11}\dfrac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + h\sigma_{21}\dfrac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} + h\sigma_{12}\dfrac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + h\sigma_{22}\dfrac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} \\ \qquad + q\dfrac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\dfrac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + q\dfrac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\dfrac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} - \rho_0\,\omega^2 h^2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) \end{array} \right] d\,\hat{x}_1\, d\,\hat{x}_2$$
$$= \int_{-a/h}^{a/h} h\sigma_{22}\Big|_{\hat{x}_2=1} v_2\Big|_{\hat{x}_2=1} d\,\hat{x}_1 \tag{3.30}$$

halini alır. (3.13) dönüşümü altında (3.6) ve (3.8) mekanik bağıntıları açık olarak

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\,\mu)\frac{1}{h}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \lambda\,\frac{1}{h}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}$$

$$\sigma_{22} = \lambda\frac{1}{h}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{1}{h}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \tag{3.31}$$

$$\sigma_{12} = \mu \frac{1}{h}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right)$$

biçiminde yazılır.

$$\sigma_{22}\big|_{\hat{x}_2=1} = -P_0\delta(h\hat{x}_1) \tag{3.32}$$

sınır koşulunu ve

$$\delta\ \ (f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\delta(x)\,,\ f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} \tag{3.33}$$

özelliğini kullanarak (3.30) eşitliğinin sağ tarafı

$$-\int_{-a/h}^{a/h} P_0\delta(\hat{x}_1)\,v_2\big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \tag{3.34}$$

biçiminde yazılır. (3.31) eşitlikleri (3.30) da yerine yazılıp sağ taraf olarak da (3.34) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \Bigg[& (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \lambda\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \mu\left\{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right\}\frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \mu\left\{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right\}\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} \\
& + q\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + q\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} - \rho_0\omega^2 h^2(u_1v_1 + u_2v_2)\Bigg] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
= -\int_{-a/h}^{a/h} & P_0\delta(\hat{x}_1)\,v_2\big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \Bigg[\left\{ (\lambda+2\mu+q)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \left\{ \mu \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + (\mu+q)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1}$$
$$+\mu \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + \left\{ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} \tag{3.35}$$
$$-\rho_0 \omega^2 h^2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) \Bigg] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2$$
$$= -\int_{-a/h}^{a/h} P_0 \delta(\hat{x}_1) v_2 \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1$$

halini alacaktır. (3.35) denkleminin her iki yanı μ Lame sabitine bölünürse

$$\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \begin{bmatrix} \left\{ (\frac{q}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+2)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + (\frac{q}{\mu}+1)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} \\ +\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + \left\{ \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + (\frac{\lambda}{\mu}+2)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} \\ -\frac{\rho_0 \omega^2 h^2}{\mu}(u_1 v_1 + u_2 v_2) \end{bmatrix} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \tag{3.36}$$
$$= -\int_{-a/h}^{a/h} \frac{P_0}{\mu} \ \delta(\hat{x}_1) \ v_2 \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1$$

olur. Böylece $\mathrm{L}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ bilineer formu ve $\mathrm{l}(\mathbf{v})$ lineer formu (3.36) denkleminin sırasıyla sol ve sağ tarafları olarak

$$\mathrm{L}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \begin{bmatrix} \left\{ (\frac{q}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+2)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + (\frac{q}{\mu}+1)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} \\ +\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} + \left\{ \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + (\frac{\lambda}{\mu}+2)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} \\ -\frac{\rho_0 \omega^2 h^2}{\mu}(u_1 v_1 + u_2 v_2) \end{bmatrix} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2$$

$$\mathrm{l}(\mathbf{v}) = \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P_0}{\mu} \ \delta(\hat{x}_1) \ v_2 \Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1$$

biçiminde elde edilmiş olur.

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \tag{3.37}$$

enine dalga (distorsiyon) hızı ve

$$\Omega = \frac{\omega h}{c_2} \tag{3.38}$$

boyutsuz frekans ifadelerini temsil etsin. Böylece, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u_1, u_2)$ olmak üzere toplam enerji fonksiyoneli $\mathrm{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathrm{l}(\mathbf{u})$

$$\mathrm{J}(u_1,u_2) = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[\begin{array}{c} \dfrac{q}{\mu}\left[\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right)^2\right] + \left\{\dfrac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right\}^2 + 2\dfrac{\lambda}{\mu}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \\ +\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+2\right)\left[\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\right)^2\right] - \Omega^2 (u_1{}^2 + u_2{}^2) \end{array} \right] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2$$

$$- \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P_0}{\mu} \delta(\hat{x}_1) u_2 \Big|_{\hat{x}_2 = 1} d\hat{x}_1 \tag{3.39}$$

biçiminde elde edilir. Varyasyonel hesaptan bilindiği üzere [32], (3.39) ile verilen $\mathrm{J}(\mathbf{u})$ toplam enerji fonksiyonelinin birinci varyasyonu sıfıra eşitlenerek TLTEWISB –nin (3.11) ve (3.12) doğrusallaştırılmış hareket denklemleri ve (3.16) sınır koşulları elde edilmelidir. Bahsedilen sonuca ulaşabilmek için

$$\delta \mathrm{J}(\mathbf{u}) = 0 \tag{3.40}$$

eşitliği kullanılır. (3.40) eşitliği

$$\delta J(\mathbf{u}) = \delta \mathrm{J}_{u_1} + \delta \mathrm{J}_{u_2} = 0$$

anlamına geldiğinden

$$\delta \mathrm{J}_{u_1} = 0 \rightarrow \delta \mathrm{J}_{u_1} = \frac{d}{d\alpha} J(u_1 + \alpha\xi, u_2)\,|_{\alpha=0} = 0$$

$$\delta \mathrm{J}_{u_2} = 0 \rightarrow \delta \mathrm{J}_{u_2} = \frac{d}{d\alpha} J(u_1, u_2 + \alpha\eta)\,|_{\alpha=0} = 0$$

denklemleri çözülmelidir.

$$\begin{aligned}
\delta \mathrm{J}_{u_1} = \frac{d}{d\alpha}\Bigg[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Bigg[\frac{q}{\mu}\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(u_1+\alpha\xi)\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right)^2\Bigg] + \left\{\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}(u_1+\alpha\xi) + \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right\}^2 \\
+ 2\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(u_1+\alpha\xi)\cdot\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(u_1+\alpha\xi)\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\right)^2\Bigg] \\
- \Omega^2((u_1+\alpha\xi)^2 + u_2{}^2)\Bigg] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 - \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1) u_2\big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1\Bigg]_{\alpha=0} = 0
\end{aligned}$$

ifadesindeki parantezler açılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}\Bigg[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Bigg[\frac{q}{\mu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + 2\frac{q}{\mu}\alpha\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1} + \frac{q}{\mu}\alpha^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + \frac{q}{\mu}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \alpha\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} + \alpha\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_2}\right)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 \\
&+ 2\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} + 2\frac{\lambda}{\mu}\alpha\cdot\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2} \\
&+ \left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\alpha\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1} + \left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\alpha^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\right)^2 - \Omega^2(u_1)^2 - 2\Omega^2\alpha u_1\xi - \Omega^2\alpha^2\xi^2 - \Omega^2(u_2)^2\Bigg] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \\
&- \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1) u_2\big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1\Bigg]_{\alpha=0} = 0
\end{aligned}$$

olacaktır. Türev alınırsa

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[2\frac{q}{\mu}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}+2\frac{q}{\mu}\alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+2\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}+\alpha\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_2}\right)+2\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right.$$
$$+2\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}+2\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}+2\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}\right)^2$$
$$\left.\left.-2\Omega^2 u_1\xi-2\Omega^2\alpha\xi^2\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]_{\alpha=0}=0$$

olduğu görülür. $\alpha = 0$ alınırsa

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{q}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}_1}-\Omega^2 u_1\xi\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2=0$$

eşitliğine ulaşılır. ξ fonksiyonu üzerindeki türevler kısmi integrasyon ile aktarılırsa

$$\left(\frac{q}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\xi\cos(n,\hat{x}_1)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}\xi d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]$$
$$+\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}\xi\cos(n,\hat{x}_2)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_2^{\,2}}\xi d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]$$
$$+\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\xi\cos(n,\hat{x}_2)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1\partial \hat{x}_2}\xi d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]$$
$$+\frac{\lambda}{\mu}\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\xi\cos(n,\hat{x}_1)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1\partial \hat{x}_2}\xi d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]$$
$$-\int_{\hat{\Omega}}\Omega^2 u_1\xi d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2=0$$

olacaktır. Bölge integralleri eşitliğin diğer yanına geçirilirse

$$\int_{\hat{\Omega}}\left[\left(\frac{q}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_2^{\,2}}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2}+\Omega^2 u_1\right]\xi d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2$$

$$=\int_{\partial\hat{\Omega}}\left[\left\{\left(\frac{q}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\right\}\cos(n,\hat{x}_1)+\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right)\cos(n,\hat{x}_2)\right]\xi dS$$

denklemine ulaşılır. Son denklemin sağ tarafının sıfır olması kabulü ile ilgili sınır koşulları elde edilir. Bu durumda denklemin sol tarafı her ξ fonksiyonu için sıfır olacaktır. Bu ise ancak integral içi ifadenin sıfır olması ile mümkündür. Böylece

$$\left(\frac{q}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_2^{\,2}}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2}+\Omega^2 u_1=0$$

eşitliği elde edilir. μ –ye bölünmüş denklemlerden yola çıkıldığı göz önüne alınırsa elde edilen son denklem

$$\left(q+\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}_2^{\,2}}+\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \qquad (3.41a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi sınır integrali irdelenerek ilgili sınır koşullarının elde edildiği görülmelidir (bu sınır integralinin μ ile çarpıldığını kabul edelim) :

$$\int_{\partial\hat{\Omega}}\left[\left\{\left(q+\lambda+2\mu\right)\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}}_{\varepsilon_{11}}+\lambda\underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}}_{\varepsilon_{22}}\right\}\cos(n,\hat{x}_1)+\mu\left(\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}}_{2\varepsilon_{12}}\right)\cos(n,\hat{x}_2)\right]\xi dS=0$$

İntegral içi ifadede

$$\left(q+\lambda+2\mu\right)\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}}_{\varepsilon_{11}}+\lambda\underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}}_{\varepsilon_{22}}=q\varepsilon_{11}+\underbrace{(\lambda+2\mu)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}}_{\sigma_{11}}=\sigma_{11}+q\varepsilon_{11}$$

ve

$$\mu\left(\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}}_{2\varepsilon_{12}}\right)=\sigma_{12}$$

olduğu göz önüne alındığında $\cos(n,\hat{x}_1)=\mp 1$ olduğunda, yani B_1 ve B_3 te $(\sigma_{11}+q\varepsilon_{11})\,|_{\hat{x}_1=\mp a/h}=0$ olmalıdır. Diğer yandan $\cos(n,\hat{x}_2)=1$ olduğunda, yani B_2 de $\sigma_{12}\,|_{\hat{x}_2=1}=0$ olmalıdır. Böylece üç sınır koşulu elde edilmiş olur:

$$\left.(q\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}+\sigma_{11})\right|_{\hat{x}_1=\pm a/h}=0\ ,\ \ \sigma_{12}\big|_{\hat{x}_2=1}=0\,. \qquad (3.42)$$

$$\delta \mathrm{J}_{u_2}=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{q}{\mu}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(u_2+\alpha\eta)\right)^2\right]+\left\{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}(u_2+\alpha\eta)\right\}^2\right.\right.$$
$$+2\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}(u_2+\alpha\eta)+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}(u_2+\alpha\eta)\right)^2\right]$$
$$\left.\left.-\Omega^2((u_1)^2+(u_2+\alpha\eta)^2)\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)(u_2+\alpha\eta)\Big|_{\hat{x}_2=1}d\hat{x}_1\right]_{\alpha=0}=0$$

ifadesindeki parantezler açılırsa

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{q}{\mu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+2\frac{q}{\mu}\alpha\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}+\frac{q}{\mu}\alpha^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+\frac{q}{\mu}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}\right)\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}+\left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}\right)^2$$

$$+2\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}+2\frac{\lambda}{\mu}\alpha\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+2\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\alpha\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\alpha^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}\right)^2$$

$$\left.+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\right)^2-\Omega^2(u_1)^2-2\Omega^2\alpha u_2\eta-\Omega^2\alpha^2\eta^2-\Omega^2(u_2)^2\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2$$

$$\left.-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)u_2\Big|_{\hat{x}_2=1}d\hat{x}_1-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)\alpha\eta\Big|_{\hat{x}_2=1}d\hat{x}_1\right]_{\alpha=0}=0$$

olacaktır. Türev alınırsa

$$\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[2\frac{q}{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}+2\frac{q}{\mu}\alpha\left(\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}\right)^2+2\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}+2\left(\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}\right)\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}\right.\right.$$

$$+2\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}+2\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}+2\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\alpha\left(\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}\right)^2$$

$$\left.\left.-2\Omega^2u_2\eta-2\Omega^2\alpha\eta^2\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)\eta\Big|_{\hat{x}_2=1}d\hat{x}_1\right]_{\alpha=0}=0$$

olduğu görülür. $\alpha=0$ alınırsa

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{q}{\mu}+1\right)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}_2}-\Omega^2u_2\eta\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2$$

$$-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)\eta\Big|_{\hat{x}_2=1}d\hat{x}_1=0$$

eşitliğine ulaşılır. η fonksiyonu üzerindeki türevler kısmi integrasyon ile aktarılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{q}{\mu}+1\right)\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}\eta\cos(n,\hat{x}_1)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_1{}^2}\eta d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]\\
&+\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_2}+\eta\cos(n,\hat{x}_1)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\hat{x}_1\partial\hat{x}_2}\eta d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]\\
&+\frac{\lambda}{\mu}\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_1}\eta\cos(n,\hat{x}_2)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\hat{x}_1\partial\hat{x}_2}\eta d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]\\
&+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\left[\int_{\partial\hat{\Omega}}\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_2}\eta\cos(n,\hat{x}_2)dS-\int_{\hat{\Omega}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_2{}^2}\eta d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right]\\
&-\int_{\hat{\Omega}}\Omega^2 u_2\eta d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)\eta\,|_{\hat{x}_2=1}\,d\hat{x}_1=0
\end{aligned}
$$

olacaktır. Bölge integralleri eşitliğin diğer yanına geçirilirse

$$
\begin{aligned}
&\int_{\hat{\Omega}}\left[\left(\frac{q}{\mu}+1\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_1{}^2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_2{}^2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\hat{x}_1\partial\hat{x}_2}+\Omega^2 u_2\right]\mu d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\\
&=\int_{\partial\hat{\Omega}}\left[\left\{\frac{q}{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}+\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_1}+\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_2}\right\}\cos(n,\hat{x}_1)+\left\{\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u_1}{\partial\hat{x}_1}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial u_2}{\partial\hat{x}_2}\right\}\cos(n,\hat{x}_2)\right]\eta dS\\
&-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)\eta\,|_{\hat{x}_2=1}\,d\hat{x}_1
\end{aligned}
$$

denklemine ulaşılır. Son denklemin sağ tarafının sıfır olması kabulü ile ilgili sınır koşulları elde edilir. Bu durumda denklemin sol tarafı her η fonksiyonu için sıfır olacaktır. Bu ise ancak integral içi ifadenin sıfır olması ile mümkündür. Böylece

$$
\left(\frac{q}{\mu}+1\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_1{}^2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_2{}^2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\hat{x}_1\partial\hat{x}_2}+\Omega^2 u_2=0
$$

eşitliği elde edilir. μ –ye bölünmüş denklemlerden yola çıkıldığı göz önüne alınırsa elde edilen son denklem

$$
(q+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_1{}^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\hat{x}_2{}^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\hat{x}_1\partial\hat{x}_2}=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \qquad (3.41b)
$$

olarak yazılabilir. Şimdi sınır integrali irdelenerek ilgili sınır koşullarının elde edildiği görülmelidir (bu sınır integralinin μ ile çarpıldığını kabul edelim) :

$$\int_{\partial\hat{\Omega}} \left[\mu \underbrace{\left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} \right\}}_{2\varepsilon_{12}} \cos(n,\hat{x}_1) \right] \eta dS + \int_{\partial\hat{\Omega}} \left[\lambda \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1}}_{\varepsilon_{11}} + (\lambda + 2\mu) \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_2}}_{\varepsilon_{22}} \right] \cos(n,\hat{x}_2) \eta dS$$
$$+ \int_{\partial\hat{\Omega}} q \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} \cos(n,\hat{x}_1) \eta dS - \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P_0}{\mu} \delta(\hat{x}_1) \eta \,|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 = 0$$

İntegral içi ifadede

$$\mu \underbrace{\left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_2} \right\}}_{2\varepsilon_{12}} = \sigma_{12}$$

ve

$$\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22} = \sigma_{22}$$

olduğu göz önüne alındığında $\cos(n,\hat{x}_1) = \mp 1$ olduğunda, yani B_1 ve B_3 te $(\sigma_{12} + q\partial u_2 / \partial \hat{x}_1)\,|_{\hat{x}_1=\mp a/h} = 0$ olmalıdır. Diğer yandan $\cos(n,\hat{x}_2) = 1$ olduğunda, yani B_2 de

$$\int_{\partial\hat{\Omega}} \sigma_{22} \cos(n,\hat{x}_1) \eta dS = \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P_0}{\mu} \delta(\hat{x}_1) \eta \,|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1$$

eşitliğinden

$$\sigma_{22}\,|_{\hat{x}_2=1} = -P_0 \delta(\hat{x}_1)$$

olmalıdır. Böylece üç sınır koşulu daha elde edilmiş olur:

$$\left.\left(q\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1}+\sigma_{12}\right)\right|_{\hat{x}_1=\pm a/h}=0\ ,\ \sigma_{22}\big|_{\hat{x}_2=1}=-P_0\delta(\hat{x}_1)\,. \tag{3.43}$$

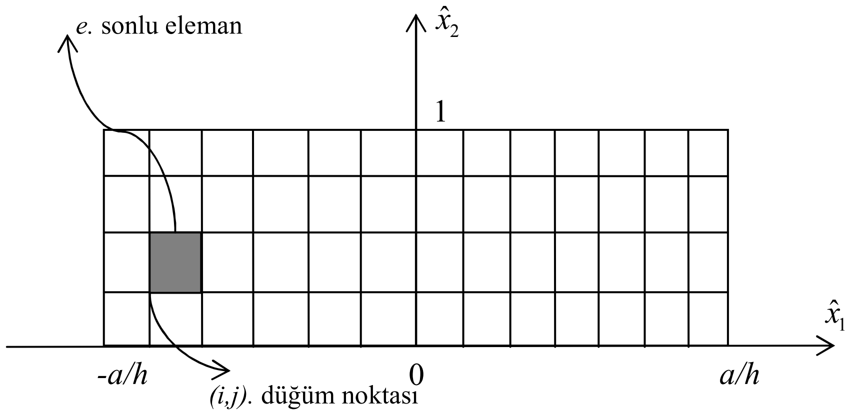
Burada belirtmekte fayda vardır ki; (3.36) denklemi kullanılarak elde edilen (3.39) fonksiyoneli kullanıldığından (3.41) hareket denklemlerine ulaşılmıştır. Bu nedenle, (3.35) denklemi ile elde edilen toplam enerji fonksiyoneli kullanılırsa TLTEWISB – nin doğrusallaştırılmış (3.11) ve (3.12) hareket denklemleri elde edilecektir.

3.3. Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözüm

Bu alt bölümde Rayleigh-Ritz tekniğinin özel bir hali olan Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak ele alınan probleme yaklaşık çözüm aranacaktır. Sonlu eleman yaklaşık çözümü

$$\mathbf{u}^{\mathrm{y}} = (u_1^{\,y}(x_1, x_2), u_2^{\,y}(x_1, x_2)) \tag{3.44}$$

olarak ele alınacaktır. Yerdeğiştirme esaslı SEY kullanıldığından her bir sonlu eleman üzerinde çözümler de bilinmeyen yerdeğiştirmeler olacaktır. $\hat{\Omega}$ bölgesi SEY –e göre Ox_1 ve Ox_2 istikametinde belirli sayıda (Ox_1 istikametinde 20, 30, 40 ve 80 sonlu elemana; Ox_2 istikametinde 2, 3, 4 ve 8 sonlu elemana) sonlu alt bölgelere bölünerek çözümleme yapılacaktır. Elde edilen sonlu eleman bölgüsünde (i, j) düğüm noktalarını belirtmek üzere (bakınız Şekil 3.3)



Şekil 3.3 Tek katmanlı durum için (temsili) SEY bölgüsü

$N_{ij}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ baz fonksiyonları Lagrange ailesinden bikuadratik fonksiyonlar olarak seçilmişlerdir [33]. Buna göre, yaklaşık çözümler c_{ij} ve d_{ij} katsayılarına bağlı olarak

$$u_1^{\,y}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=\sum_{j=1}^{N}\;\sum_{i=1}^{M}c_{ij}N_{ij}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \tag{3.45}$$

$$u_2^{\,y}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=\sum_{j=1}^{N}\;\sum_{i=1}^{M}d_{ij}N_{ij}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \tag{3.46}$$

biçiminde yazılabilir. Burada bilinmeyen

$$c_{ij}=u_1^{\,y}(\hat{x}_{1i},\hat{x}_{2j}),\; d_{ij}=u_2^{\,y}(\hat{x}_{1i},\hat{x}_{2j}) \tag{3.47}$$

katsayıları yaklaşık çözümün (i,j) düğüm noktasındaki değerleridir. SEY –e bağlı olarak (3.45) ve (3.46) yaklaşık çözümleri (3.39) ile verilen $\mathrm{J}(\mathbf{u})$ toplam enerji fonksiyonelinde yerlerine yazılır. Daha sonra c_{ij} ve d_{ij} parametrelerine göre türev alınarak elde edilen ifade sıfıra eşitlenir. Böylece $\mathrm{J}(\mathbf{u})$ toplam enerji fonksiyonelinin minimumu araştırılır. $\mathrm{J}(\mathbf{u}^{\mathrm{y}})=\mathrm{J}(u_1^{\,\mathrm{y}},u_2^{\,\mathrm{y}})=\tilde{\mathrm{J}}(c_{ij},d_{ij})$ tanımı yapıldıktan sonra yukarıda bahsedilen kısmi türev alma işlemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}}\tilde{\mathrm{J}}(c_{ij},d_{ij})=\frac{\partial}{\partial c_{ij}}\mathrm{J}\left(\sum_{j=1}^{M}\;\sum_{i=1}^{N}c_{ij}N_{ij},\sum_{j=1}^{M}\;\sum_{i=1}^{N}d_{ij}N_{ij}\right)=0 \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial d_{ij}}\tilde{\mathrm{J}}(c_{ij},d_{ij})=\frac{\partial}{\partial d_{ij}}\mathrm{J}\left(\sum_{j=1}^{M}\;\sum_{i=1}^{N}c_{ij}N_{ij},\sum_{j=1}^{M}\;\sum_{i=1}^{N}d_{ij}N_{ij}\right)=0 \tag{3.49}$$

(3.48) ve (3.49) denklemlerinde parametrelere göre alınan kısmi türevlerde i=1, 2, …, N ve j=1, 2, …, M olduğunu belirtmekte fayda vardır.

$$
\mathrm{J}(u_1{}^y, u_2{}^y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h}
\left[
\begin{array}{l}
\dfrac{q}{\mu}\left[\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right)^2\right] \\
+\left\{\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right\}^2 \\
+2\dfrac{\lambda}{\mu}\cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\cdot \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} \\
+\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+2\right)\left[\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}\right)^2\right] \\
-\Omega^2\left[\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij} N_{ij}\right)^2 + \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij} N_{ij}\right)^2\right]
\end{array}
\right] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2
$$

$$
- \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P_0}{\mu}\,\delta(\hat{x}_1)\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij} N_{ij}\bigg|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
$$

ifadesi kullanılarak c_{ij} parametresine göre kısmi türev içeren (3.48) eşitliği

$$
\frac{\partial}{\partial c_{ij}}\mathrm{J}(u_1{}^y, u_2{}^y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h}
\left[
\begin{array}{l}
2\dfrac{q}{\mu}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right) \\
+2\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\left\{\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right\} \\
+2\dfrac{\lambda}{\mu}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} \\
+2\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+2\right)\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right) \\
-2\Omega^2 N_{kl}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij} N_{ij}\right)
\end{array}
\right] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2
$$

halini alacaktır. Elde edilen denklem c_{ij} ve d_{ij} parametrelerine göre gruplandırılırsa

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}}\mathrm{J}(u_1{}^y,u_2{}^y)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[\begin{array}{l}\dfrac{q}{\mu}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}+\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}\\ +\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+2\right)\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}-\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right\}c_{ij}$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right\}d_{ij}=0$$

(3.50)

eşitliğine ulaşılır. Benzer biçimde d_{ij} parametresine göre kısmi türev içeren (3.49) eşitliği de

$$\frac{\partial}{\partial d_{ij}}\mathrm{J}(u_1{}^y,u_2{}^y)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[\begin{array}{l}2\dfrac{q}{\mu}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}d_{ij}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right)\\ +2\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\left\{\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}d_{ij}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right\}\\ +2\dfrac{\lambda}{\mu}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\cdot\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\\ +2\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+2\right)\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}d_{ij}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}\right)\\ -2\Omega^2 N_{ij}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}d_{ij}N_{ij}\right)\end{array}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2$$

$$-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P_0}{\mu}\delta(\hat{x}_1)\,N_{ij}\Big|_{\hat{x}_2=1}d\hat{x}_1=0$$

halini alacaktır. Elde edilen denklem c_{ij} ve d_{ij} parametrelerine göre gruplandırılırsa

$$\frac{\partial}{\partial d_{ij}}\mathrm{J}(u_1{}^y,u_2{}^y)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right\}c_{ij}$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_0^1\int_{-a/h}^{a/h}\left[\begin{array}{l}\dfrac{q}{\mu}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}+\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\\ +\left(\dfrac{\lambda}{\mu}+2\right)\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}-\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2\right\}d_{ij}$$

$$-\frac{-P_0}{\mu}N_{ij}\,\Big|_{\substack{\hat{x}_1=0\\ \hat{x}_2=1}}=0$$

(3.51)

eşitliğine ulaşılır. (3.50) ve (3.51) denklemlerinde c_{ij} ve d_{ij} bilinmeyenleri

$$\mathbf{x} = \{[c_{ij}], [d_{ij}]\}^T = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ . \\ . \\ c_{MN} \\ d_{11} \\ . \\ . \\ d_{MN} \end{Bmatrix}$$

biçiminde bir vektöre yerleştirilir ve bilinmeyenlerin katsayılarını içeren matris de

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

ile tanımlanırsa

$$\mathbf{Kx} = f \tag{3.53}$$

biçiminde bir lineer denklem takımına ulaşılır. Burada **K** matrisi genel katılık (stiffness) matrisi olarak adlandırılır. f vektörü ise sağ taraf vektörü olarak adlandırılır ve

$$f = \left\{ \frac{-P_0}{\mu} N_{ij} \,|_{\substack{\hat{x}_1=0 \\ \hat{x}_2=1}} \right\} \tag{3.54}$$

ile hesaplanır. Bu durumda ele alınan probleme göre $2MN$ tane bileşene sahip olan f vektörünün yükün uygulandığı yere karşılık gelen sadece bir terimi sıfırdan farklı olacaktır. (3.52) matris tanımına göre **K** genel katılık matrisindeki blok matrisler

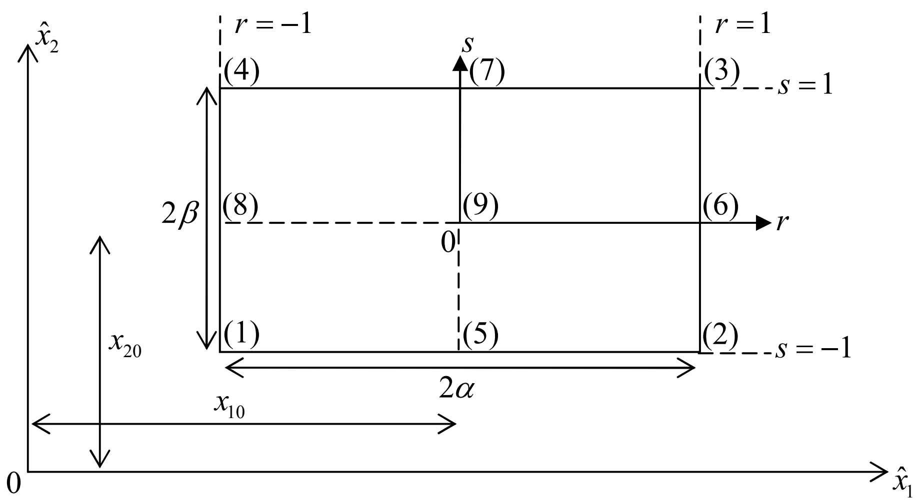
$$[K_{11}] = \int_0^1 \int_{-a/h}^{a/h} \left[\frac{q}{\mu} \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} - \Omega^2 N_{kl} N_{ij} \right] d\hat{x}_1 \, d\hat{x}_2 \tag{3.55}$$

$$\left[K_{12}\right]=\int_{0}^{1}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}\right]d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \tag{3.56}$$

$$\left[K_{21}\right]=\int_{0}^{1}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right]d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \tag{3.57}$$

$$\left[K_{22}\right]=\int_{0}^{1}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\frac{q}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}-\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\right]d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \tag{3.58}$$

biçiminde hesaplanır. SEY –e göre (3.55)-(3.58) integralleri *i, j* düğüm noktalarının belirlediği sonlu eleman yerine $\left[-1,1\right]\times\left[-1,1\right]$ pilot sonlu elemana aktarılır ve pilot sonlu eleman üzerinde hesaplanır. $\hat{\Omega}$ bölgesi $\hat{\Omega}=\bigcup_{k=1}^{T}\Omega_k$ biçiminde dikdörtgen sonlu elemanlara ayrılmış olsun. Burada *T,* kullanılan sonlu eleman sayısını belirtmektedir. Şekil 3.4 ile verilen parametrelere sahip bir Ω_k sonlu elemanı ele alınırsa



Şekil 3.4 Pilot sonlu eleman ve üzerinde alınan düğüm noktalarının dizilişi

Ω_k sonlu elemanı için normalize edilmiş yerel koordinatlar

$$r = \frac{\hat{x}_1 - x_{10}}{\alpha}, \quad s = \frac{\hat{x}_2 - x_{20}}{\beta} \tag{3.59}$$

biçiminde seçilebilir. Şekil 3.4 te verilen dokuz düğüm noktalı pilot sonlu eleman için şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}
N_1(r,s) &= \tfrac{1}{4}(r^2 - r)(s^2 - s) \\
N_2(r,s) &= \tfrac{1}{4}(r^2 + r)(s^2 - s) \\
N_3(r,s) &= \tfrac{1}{4}(r^2 + r)(s^2 + s) \\
N_4(r,s) &= \tfrac{1}{4}(r^2 - r)(s^2 + s) \\
N_5(r,s) &= -\tfrac{1}{2}(r^2 - 1)(s^2 - s) \\
N_6(r,s) &= -\tfrac{1}{2}(r^2 + r)(s^2 - 1) \\
N_7(r,s) &= -\tfrac{1}{2}(r^2 - 1)(s^2 + s) \\
N_8(r,s) &= -\tfrac{1}{2}(r^2 - r)(s^2 - 1) \\
N_9(r,s) &= (r^2 - 1)(s^2 - 1)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

biçimindedir. (3.59) koordinat dönüşümü ile (3.55)-(3.58) integrallerinde

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial s}$$

terimleri ortaya çıkacaktır. Bu durumda (3.55)-(3.58) integralleri yeniden yazılırsa

$$[K_{11}] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\begin{aligned} &\frac{q}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2} \\ &+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1} - \Omega^2 N_{kl} N_{ij} \end{aligned} \right] \alpha dr\, \beta ds$$

$$\left[K_{12}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2}\right]\alpha\beta drds$$

$$\left[K_{21}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\right]\alpha\beta drds$$

$$\left[K_{22}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\begin{array}{l}\frac{q}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}+\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \hat{x}_1}\\+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \hat{x}_2}-\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]\alpha\beta drds$$

ve terimler düzenlenirse

$$\left[K_{11}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\begin{array}{l}\frac{q}{\mu}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}\\+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}-\alpha\beta\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]dr\,ds \tag{3.61}$$

$$\left[K_{12}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}\right]drds \tag{3.62}$$

$$\left[K_{21}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\right]drds \tag{3.63}$$

$$\left[K_{22}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\begin{array}{l}\frac{q}{\mu}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\\+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}-\alpha\beta\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]drds \tag{3.64}$$

biçiminde hesaplanır. Bu durumda,

$$\mathbf{K}=\sum_{k=1}^{T}\mathbf{K}^k \tag{3.65}$$

ile sistemin katılık matrisine ulaşılacaktır. Burada $\mathbf{K}^k$, (i,j) düğüm noktası ile belirlenen Ω_k sonlu elemanına ait yerel katılık matrisidir ve

$$\mathbf{K}^k = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

olmak üzere sırasıyla (3.61)-(3.64) eşitlikleri vasıtasıyla hesaplanır. SEY –e göre (3.61)-(3.64) integralleri ve dolayısıyla (3.66) ile hesap edilen (3.65) katılık matrisi kullanılarak (3.53) denklemi çözülür. $\mathbf{x} = \mathbf{K}^{-1} f$ vektörünün bileşenleri (3.47) eşitliklerine göre (i,j) düğüm noktalarında $O\hat{x}_1$ ve $O\hat{x}_2$ istikametindeki yerdeğiştirme değerleridir. Dolayısıyla elde edilen bu yerdeğiştirmeler (2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa şekil değiştirmeler bulunur.

Şimdi σ_{ij} gerilme tansörü bileşenlerini ve bunların şekil değiştirme tansörü ile ilişkisini araştıralım. (2.7) eşitlikleri açık yazılırsa

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{11} + 2\mu\varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

olacaktır. Bu eşitlikler aşağıdaki biçimde düzenlenerek bir matris denklemi halinde yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.67}$$

(2.6) eşitlikleri kullanılarak λ ve μ Lame sabitleri yerine E ve ν elastik sabitleri kullanılarak (3.67) denklemi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

olarak yazılabilir ve düzenlenirse

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.68}$$

olacaktır. (3.68) denklemindeki matris **D** olarak adlandırılır ve

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

olur. Bu durumda, elde edilen yerdeğiştirmelerden

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.70}$$

eşitliği ile gerilmeler hesaplanır. Bu çalışmada kullanılan dokuz düğüm noktalı sonlu eleman göz önüne alınarak Ω_k sonlu elemanı için $\boldsymbol{\varepsilon}$ şekil değiştirme tansörü

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial r} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial s} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3.72}$$

eşitliği ile hesaplanır. (3.72) eşitliğindeki **u** vektörü j=1,2,…,9 olmak üzere Ω_k sonlu elemanında u_{1j}, $O\hat{x}_1$ istikametinde ve u_{2j}, $O\hat{x}_2$ istikametindeki yaklaşık çözüm değerleridir

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ . \\ . \\ u_{19} \\ u_{21} \\ . \\ . \\ u_{29} \end{Bmatrix}. \tag{3.73}$$

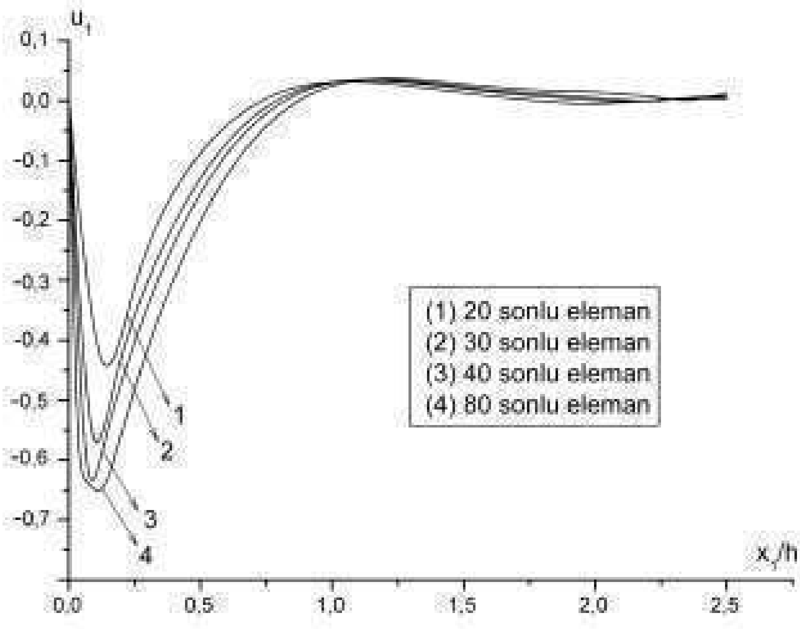
3.4. Sayısal Sonuçlar

Bu alt bölümde, 3.1 alt bölümünde ele alınan probleme ait geliştirilen algoritma yardımıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir. Probleme ait algoritma Mathematica bilgisayar yazılımı kullanılarak programlanmıştır. Öncelikle, kullanılan sonlu elaman sayısına göre yakınsaklık elde edilerek geliştirilen algoritmanın geçerliliği gösterilmiştir. Daha sonra problem parametrelerinin (örneğin; öngerilme ve uygulanan zamana-göre harmonik yükün frekansının) etkisini gösteren sayısal sonuçlar tablo ve grafikler aracılığı ile verilmiş ve değerlendirilmesi yapılmıştır.

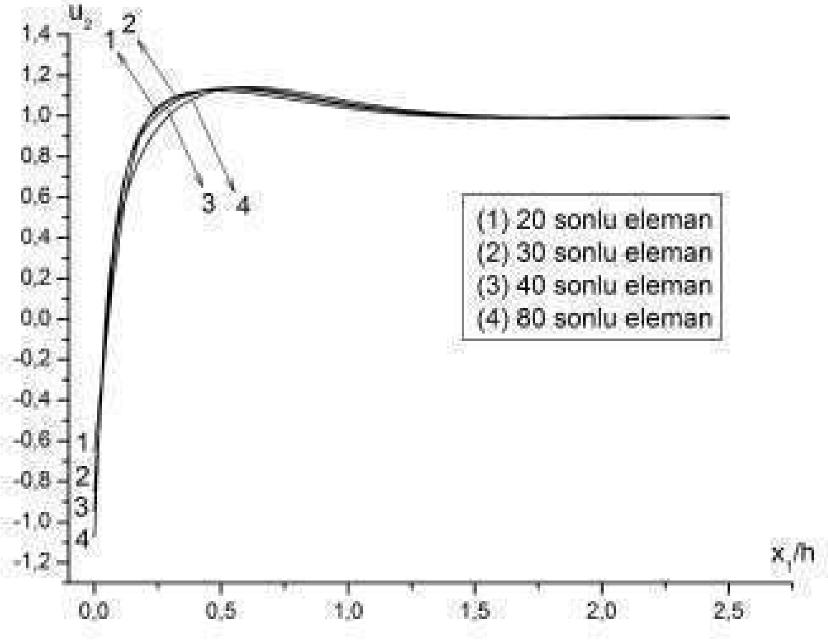
$$\eta = \frac{\sigma_{11}^{0}}{\mu} \tag{3.74}$$

tanımı ile η şerit-plaktaki öngerilmeyi temsil etsin.

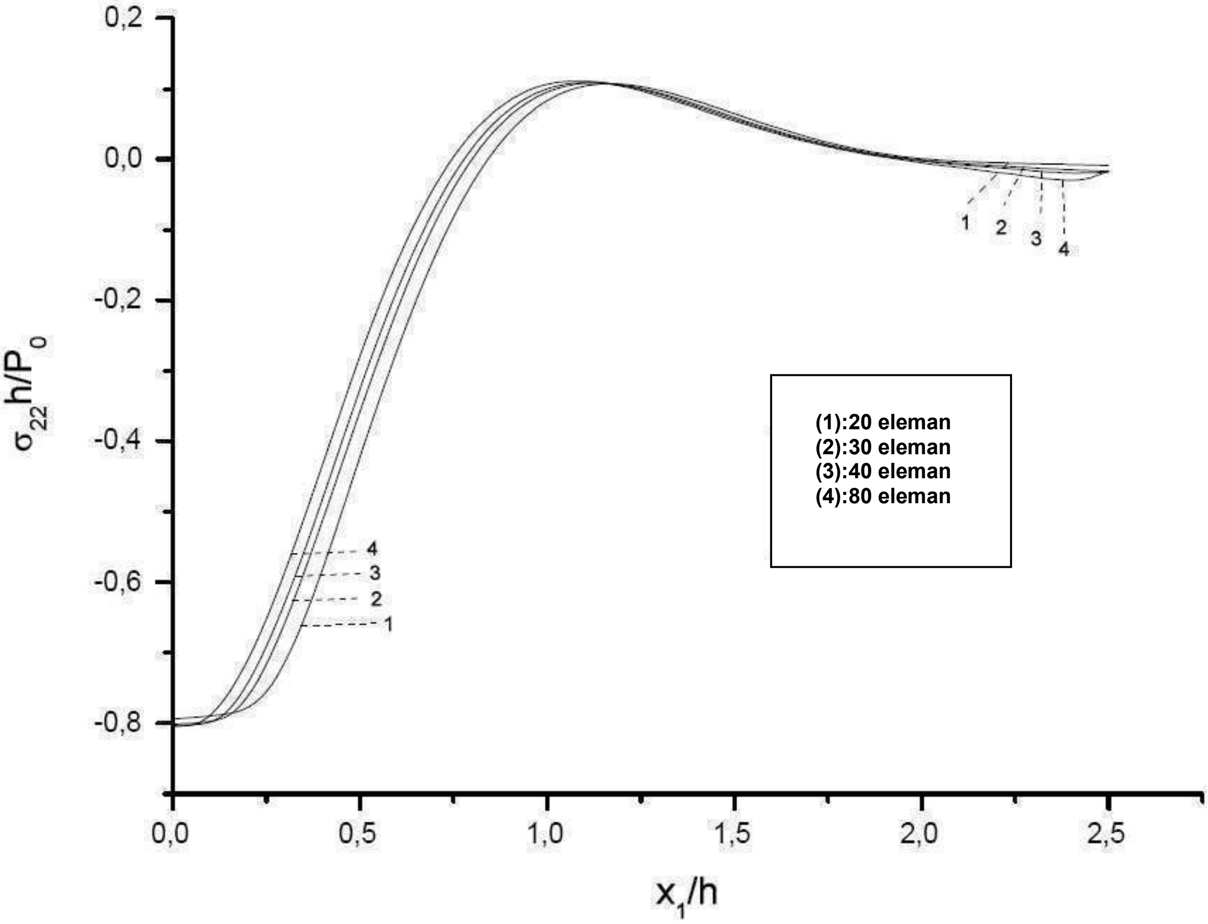
İlk olarak geliştirilen algoritmanın geçerliliği incelenmiştir. Bunun için SEY ile elde edilen sayısal sonuçların Ox_1 ekseni istikametinde yakınsaklığına bakılmıştır. Burada $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $\nu = 0.33$ ve $h/2a = 0.2$ olarak kabul edilmiştir. x_1/h ekseni boyunca u_1 ve u_2 yerdeğiştirmeleri dağılımları Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da gösterilmiştir. Bu grafiklerde kullanılan sonlu eleman sayıları Ox_1 ekseni istikametinde 20, 30, 40 ve 80, Ox_2 ekseni istikametinde ise 8 dir. Yine yukarıdaki kabuller altında x_1/h ekseni boyunca σ_{22} gerilme dağılımı Şekil 3.7 de gösterilmiştir.



Şekil 3.5 $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $\nu = 0.33$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda Ox_1 eksenindeki farklı sonlu eleman sayıları için u_1 -in $x_2/h = 1/2$ yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı



Şekil 3.6 $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $\nu = 0.33$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda Ox_1 eksenindeki farklı sonlu eleman sayıları için u_2 -nin $x_2/h = 1/2$ yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı



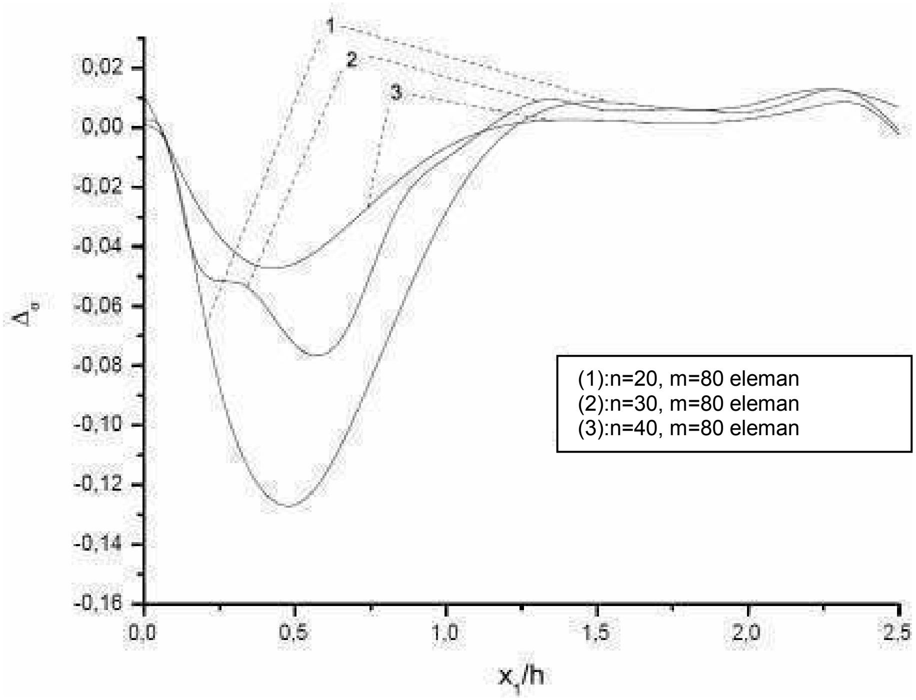
Şekil 3.7 $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $\nu = 0.33$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda Ox_1 eksenindeki farklı sonlu eleman sayıları için $\sigma_{22}h/P_0$ gerilmesinin $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı

Yukarıda yapılanlara ek olarak, elde edilen sayısal sonuçların Ox_1 ve Ox_2 ekseni istikametindeki sonlu eleman sayısına göre yakınsaklığını görmek için

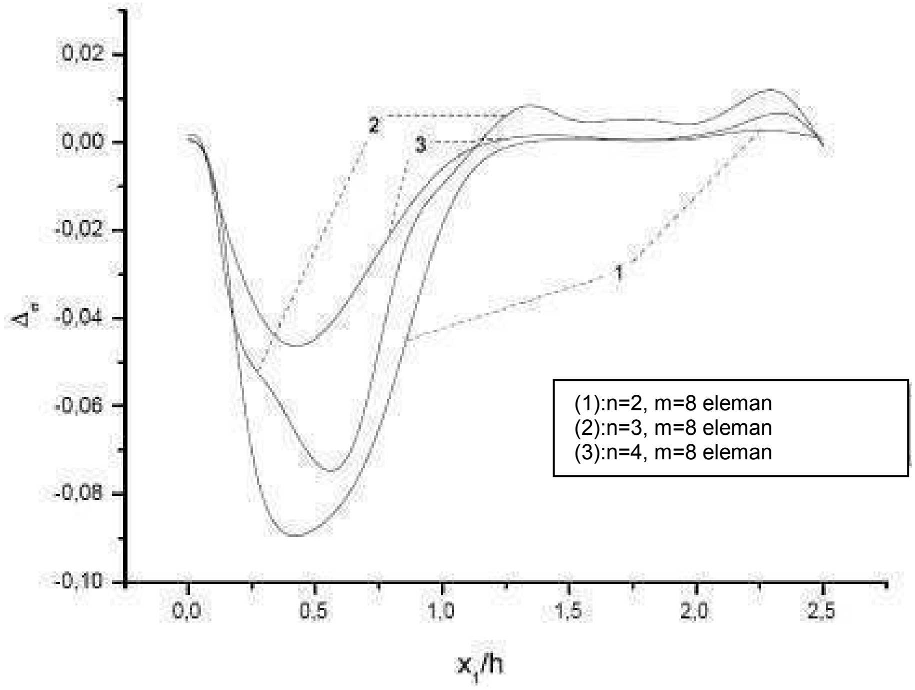
$$\Delta_\sigma = \left(\sigma_{22}^{n} - \sigma_{22}^{m}\right) h / P_0 \tag{3.75}$$

tanımı ile hata belirlenmiştir. (3.75) tanımında n ve m kullanılan sonlu eleman sayısını belirtmektedir. Δ_σ değerinin x_1/h ekseni boyunca dağılımı Şekil 3.8 de Ox_1 ekseni istikametindeki sonlu eleman sayısına bağlı olarak gösterilmiştir. Şekil 3.8 incelendiğinde Ox_1 ekseni istikametinde kullanılan sonlu eleman sayısı arttırıldıkça hatanın azaldığı görülecektir. Dolayısıyla Şekil 3.8 de elde edilen ve (3) ile işaretlenen grafik göz önüne alınarak Ox_1 ekseni istikametinde 80 sonlu eleman kullanılması daha uygun olacaktır.

Benzer biçimde, Δ_σ değerinin x_1/h ekseni boyunca dağılımı Şekil 3.9 da Ox_2 ekseni istikametindeki sonlu eleman sayısına bağlı olarak gösterilmiştir. Şekil 3.9 incelendiğinde Ox_2 ekseni istikametinde kullanılan sonlu eleman sayısı arttırıldıkça hatanın azaldığı görülecektir. Dolayısıyla Şekil 3.9 da elde edilen ve (3) ile işaretlenen grafik göz önüne alınarak Ox_2 ekseni istikametinde 8 sonlu eleman kullanılması daha uygun olacaktır.



Şekil 3.8 $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $\nu = 0.33$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda Ox_1 eksenindeki farklı sonlu eleman sayıları için Δ_σ gerilmesinin $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı



Şekil 3.9 $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $\nu = 0.33$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda Ox_2 eksenindeki farklı sonlu eleman sayıları için Δ_σ gerilmesinin $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı

Şekil 3.8 de Δ_σ değerinin Ox_1 ekseni boyunca dağılımı verilmiştir. Burada $m = 80$ ve $n = 20$, 30, 40 olduğu durumlara ait grafikler çizilmiştir. Bu grafiklerde, kullanılan sonlu eleman sayısı arttıkça Δ_σ değerinin azaldığı görülmektedir. Şekil 3.9 da Δ_σ değerinin Ox_2 ekseni boyunca dağılımı verilmiştir. Burada $m = 8$ ve $n = 2$, 3, 4 olduğu durumlara ait grafikler çizilmiştir. Şekil 3.8 e benzer biçimde, bu grafiklerde de, kullanılan sonlu eleman sayısı arttıkça Δ_σ değerinin azaldığı görülmektedir.

Diğer taraftan, elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklığı

$$\| f - g \|_\infty = \sup\{ \, | f(x_1/h) - g(x_1/h) | : -a/h \le x_1/h \le a/h \, \} \tag{3.76}$$

$$\| f - g \|_0 = \int_{-a/h}^{a/h} | f(x_1/h) - g(x_1/h) | \, dx_1 \tag{3.77}$$

normlarına göre incelenmiştir. Burada $f, g \in L_2[-a/h, a/h]$ ve $L_2[-a/h, a/h]$ Lebesgue uzayının elemanları

$$\int_{-a/h}^{a/h} | h(x) |^2 \, dx < +\infty \tag{3.78}$$

koşulunu sağlayan h fonksiyonlarıdır. Ox_2 ekseninde kullanılan sonlu eleman sayısı 8 seçilerek Ox_1 ekseni istikametinde farklı sonlu eleman sayıları (yani farklı k değerleri) için $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_\infty$ ve $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_0$ değerleri hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 3.1, 3.2, 3.3 ve 3.4 te verilmiştir. Burada σ_{22} gerilmesindeki parantez içinde bulunan üst indis ilgili sonuç elde edilirken kullanılan sonlu eleman sayısını göstermektedir. Belirtilen sonuçlar elde edilirken $\eta = 0$, $\nu = 0.33$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu kabul edilmiştir. Bu tablolarda sadece statik durum değil, zamana-göre harmonik dinamik yükün etkisinin de verildiğini vurgulamak gerekir.

Tablo 3.1 $\Omega = 0$ için hesaplanan $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_\infty$ ve $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_0$ değerleri

Ω		k=20	k=30	k=40
0	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_\infty$	0.142946	0.078583	0.048388
0	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_0$	0.199246	0.137932	0.0943752

Tablo 3.2 $\Omega = 0.3$ için hesaplanan $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_\infty$ ve $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_0$ değerleri

Ω		k=20	k=30	k=40
0.3	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_\infty$	0.146531	0.0800010	0.050694
0.3	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_0$	0.200896	0.139461	0.096096

Tablo 3.3 $\Omega = 0.5$ için hesaplanan $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_\infty$ ve $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_0$ değerleri

Ω		k=20	k=30	k=40
0.5	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_\infty$	0.147003	0.081234	0.051998
0.5	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_0$	0.201304	0.140959	0.097913

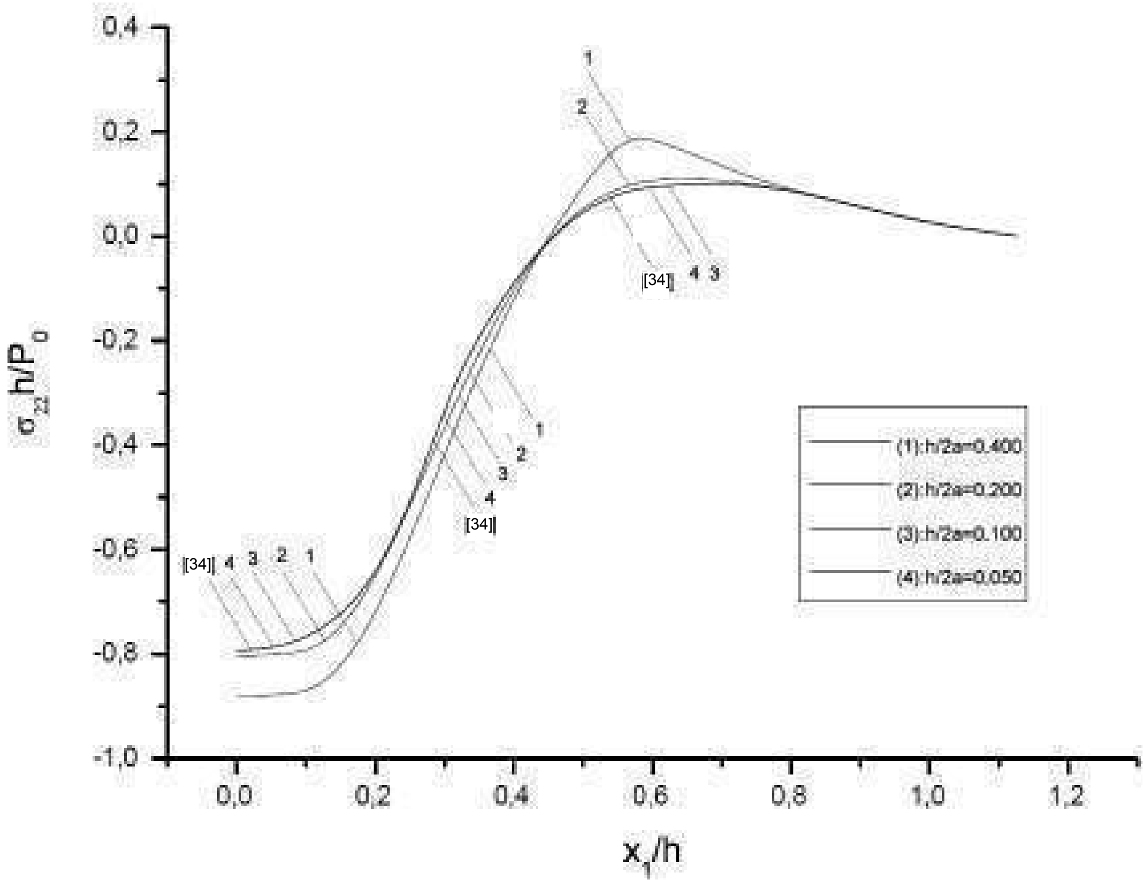
Tablo 3.4 $\Omega = 0.8$ için hesaplanan $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_\infty$ ve $\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \|_0$ değerleri

Ω		k=20	k=30	k=40
0.8	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_\infty$	0.150169	0.084601	0.055003
0.8	$\left\| \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(80)} \right\|_0$	0.204464	0.143313	0.099596

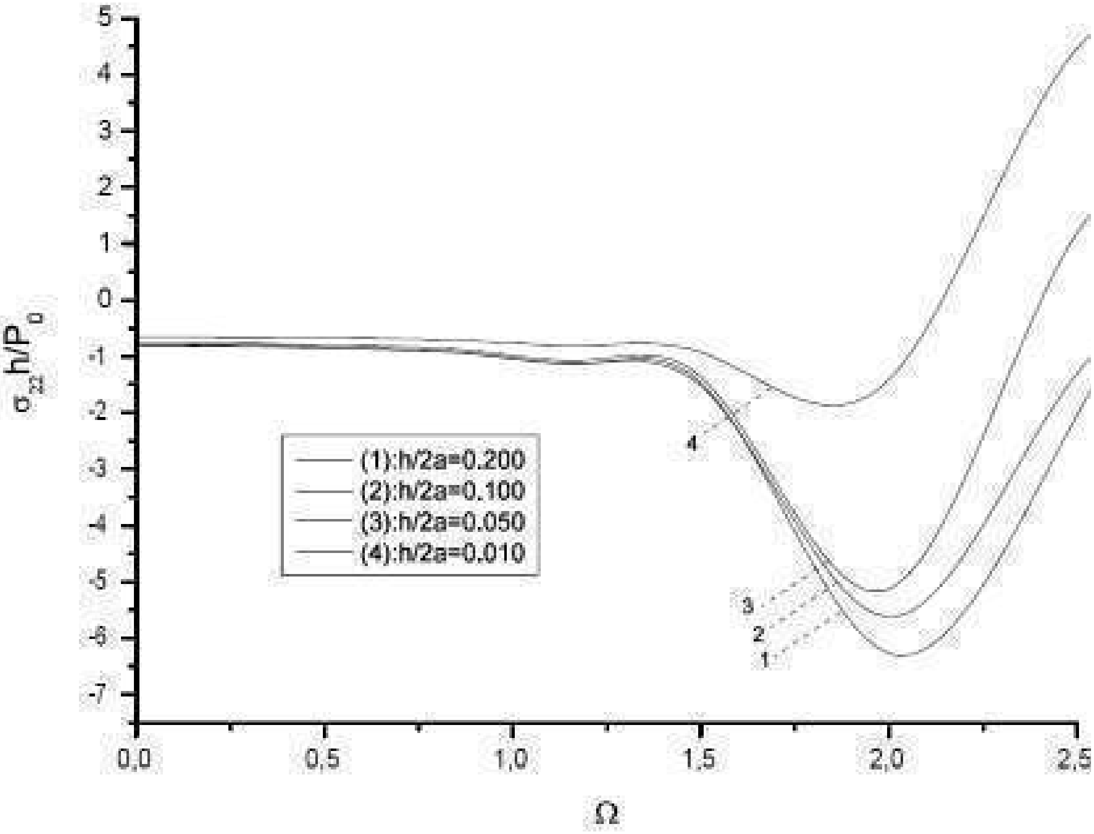
Tablo 3.1, 3.2, 3.3 ve 3.4 te sırasıyla $\Omega = 0.0$, $\Omega = 0.3$, $\Omega = 0.5$ ve $\Omega = 0.8$ için elde edilen sayısal sonuçlar sergilenmiştir. Bu sonuçlar kullanılan sonlu eleman sayısı arttırıldıkça $\|\bullet\|_0$ ve $\|\bullet\|_\infty$ normlarında sonuçların iyileştiğini yani hataların azaldığını göstermektedir. Dolayısıyla (3.76) ve (3.77) normları göz önüne alındığında Ox_1 ekseni istikametinde 80 sonlu eleman kullanılması daha uygun olacaktır.

Hem Şekil 3.8 ve 3.9 hem de Tablo 3.1-3.4 te elde edilen sonuçlar göz önüne alınarak bundan sonraki sayısal çözümlerde Ox_1 ekseni istikametinde 80 sonlu eleman, Ox_2 ekseni istikametinde 8 sonlu eleman kullanılmıştır. Problem parametrelerinin değişimi ile elde edilen sonuçlar bu aşamadan itibaren verilecektir.

İlk olarak $h/2a$ parametresinin sıfıra yaklaşması ($h/2a \to 0$) ile $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde σ_{22} gerilmesinin x_1/h ekseni boyunca dağılımı öngerilme olmadığı durum için incelenecektir. Şekil 3.10 $\Omega = 0$, $\eta = 0$ kabulleri altında farklı $h/2a$ değerleri için gerilme dağılımını göstermektedir. Şekil 3.10 da statik yükleme durumu için [34] de grafik ile elde edilen sonuçların çakıştığı görülmektedir. Böylece geliştirilen algoritma ve sonlu eleman modelinin geçerliliği ve tutarlılığı bir kez daha görülmektedir.



Şekil 3.10 $\Omega = 0$, $\eta = 0$ ve $\nu = 0.33$ olduğu durumda farklı $h/2a$ değerleri için σ_{22} gerilmesinin $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı

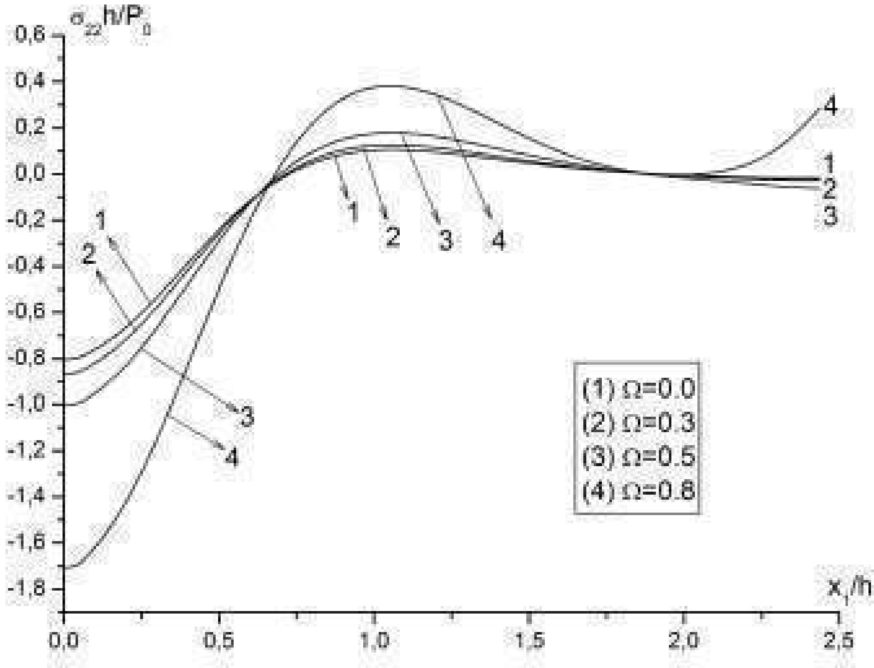


Şekil 3.11 $x_1 / h = 0$ ve $x_2 / h = 0$ da (orijinde) $\eta = 0$ iken $\sigma_{22} h / P_0$ ile Ω arasındaki bağımlılığın grafiği

(3.38) eşitliği ile tanımlanan Ω boyutsuz frekansının etkisi Şekil 3.11 ve 3.12 de verilmektedir.

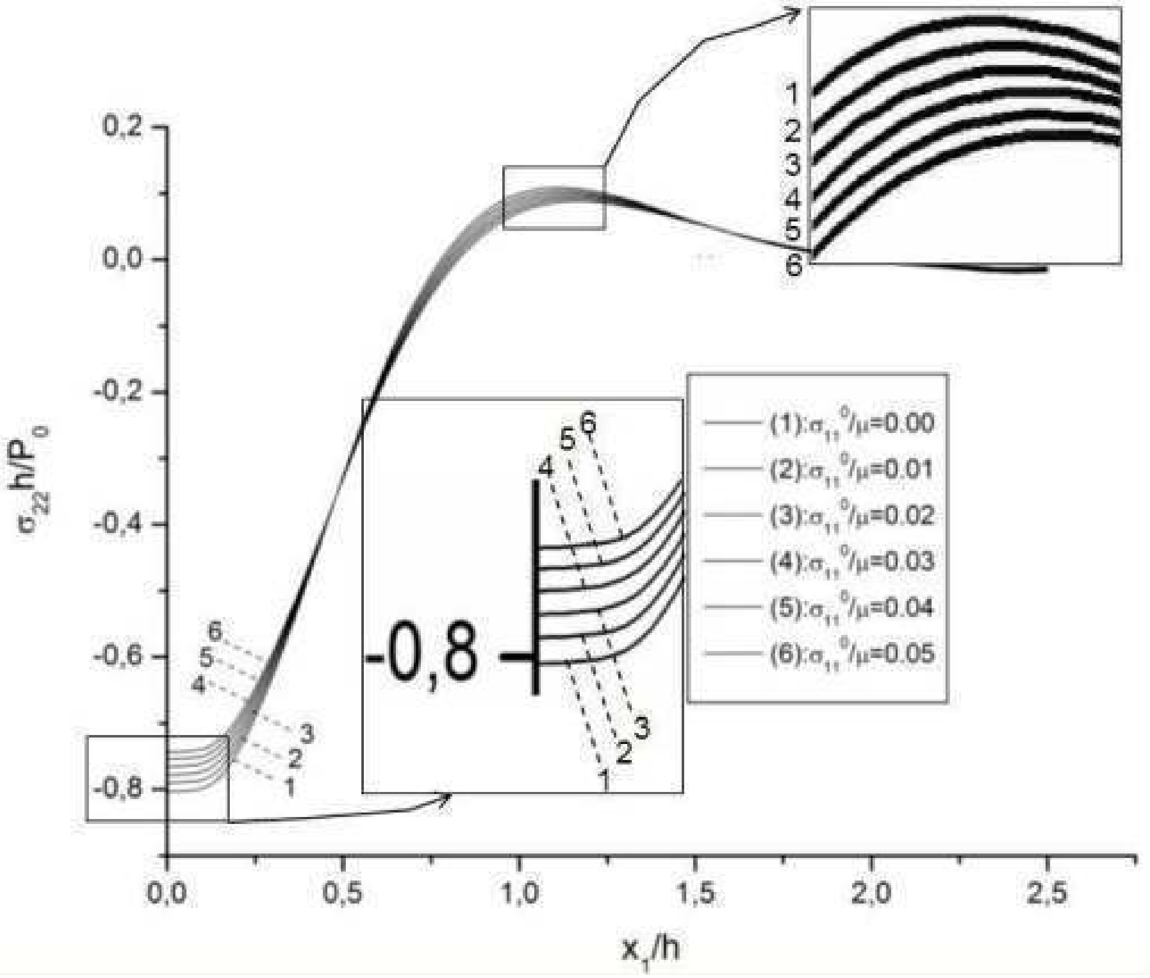
$\eta = 0$ kabulü ile öngerilme olmadığı durum için σ_{22} gerilmesinin farklı $h / 2a$ değerleri için $x_1 / h = 0$, $x_2 / h = 0$ da (orijinde) Ω değerine bağımlılığı Şekil 3.11 de verilmiştir. Şekil 3.11 de elde edilen grafikler $\sigma_{22} h / P_0$ değerinin mutlak değerce yerel bir maksimuma ulaştığı frekansta, ki bu frekansa Ω^* adı verilsin, bir rezonans frekansına sahip olduğunu göstermektedir. $\sigma_{22} h / P_0$ –ın mutlak değerce yerel bir maksimuma ulaştığı değere σ^* denirse, şekil 3.11 e göre $h / 2a$ arttıkça Ω^* ve σ^* değerleri artmaktadır.

$\eta = 0$ kabulü ile σ_{22} gerilmesinin x_1 / h ekseni boyunca dağılımı öngerilme olmadığı durum için Şekil 3.12 de verilmiştir. Şekil 3.12 incelendiğinde Ω değeri Ω^* rezonans frekansına yaklaştıkça $\sigma_{22} h / P_0$ değerinin mutlak değerce arttığı gözlenmektedir. Bununla birlikte x_1 / h koordinatının bazı değerlerinde $\sigma_{22} h / P_0$ değerinin Ω frekansına bağımlı olmadığı da grafikler incelendiğinde ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.12 $h / 2a = 0.2$ ve $\eta = 0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{22} h / P_0$ gerilmesinin $x_2 / h = 1$ üst yüzeyinde x_1 / h ekseni boyunca dağılımı

Üçüncü olarak şerit-plaktaki öngerilmenin etkisi incelenecektir. $\Omega = 0$ ve $h/2a = 0.2$ kabulleri altında farklı q/μ değerleri için $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde σ_{22} gerilmesinin x_1/h ekseni boyunca dağılımı şekil 3.13 te verilmiştir.



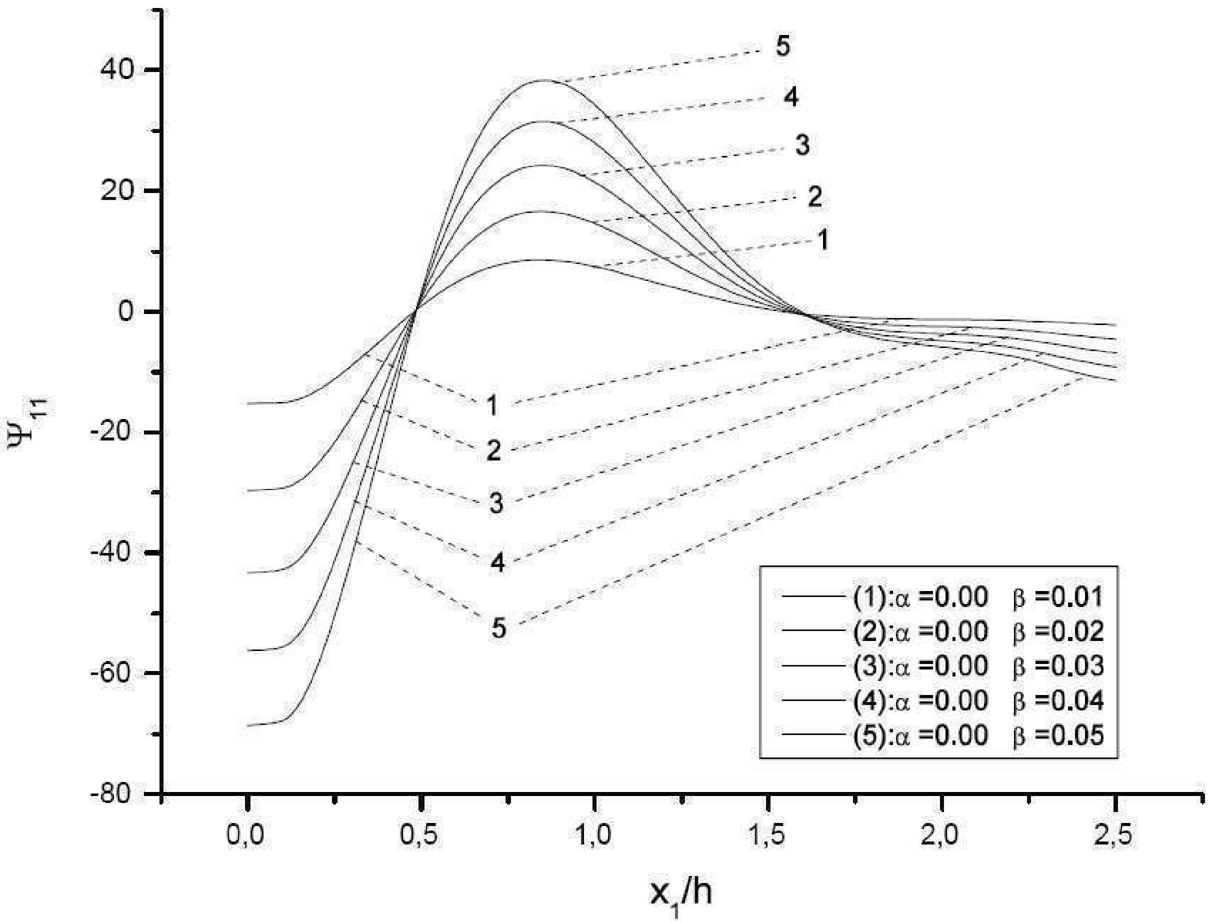
Şekil 3.13 $\Omega = 0$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda farklı σ_{11}^{0}/μ değerleri için σ_{22} gerilmesinin $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı

Şekil 3.13 deki grafikler incelendiğinde σ_{11}^{0}/μ öngerilme değeri arttıkça $x_1/h = 0$ noktasında $\sigma_{22}h/P_0$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu elde edilen sonuçlar [8-15] çalışmalarında elde edilen sonuçlar ile uygunluk arzetmektedir.

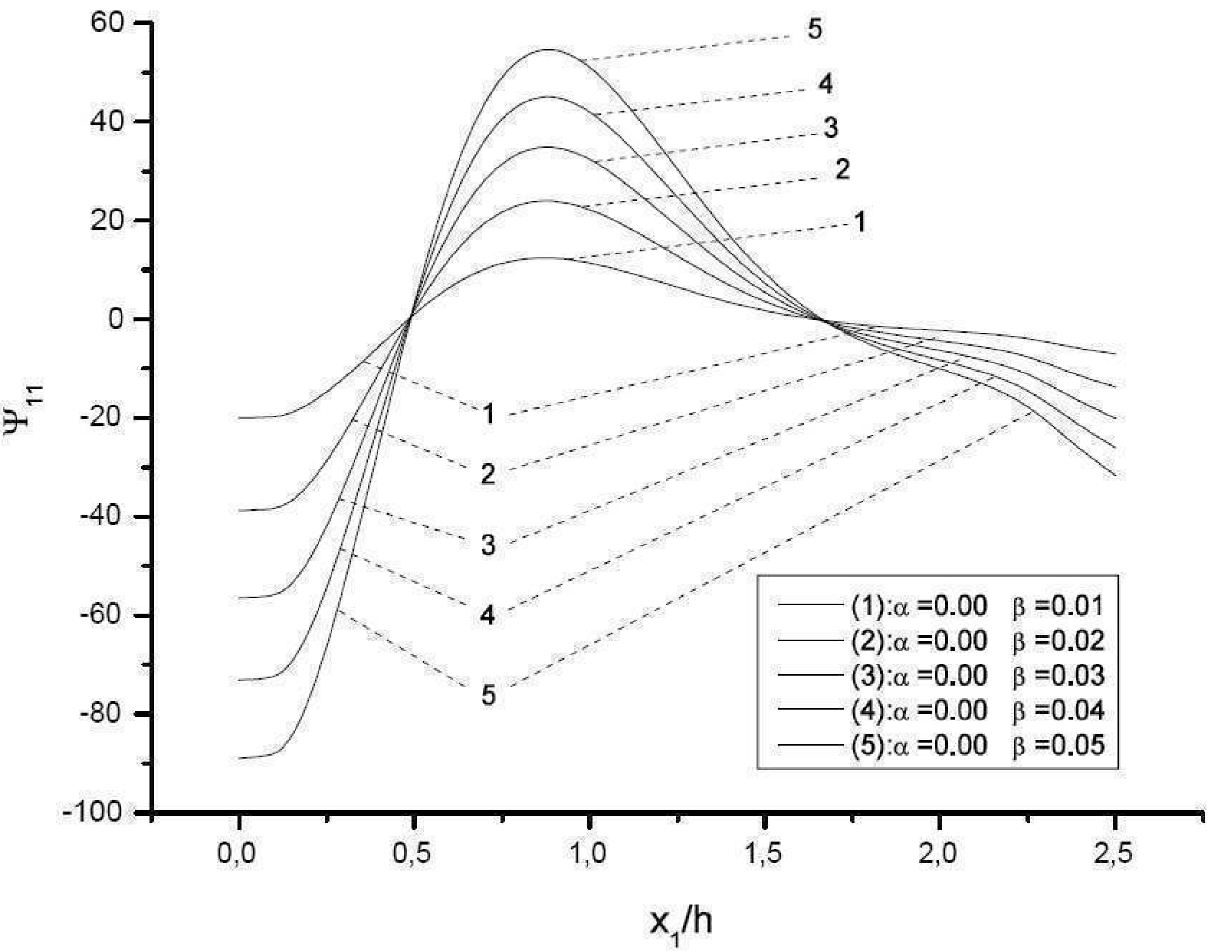
Şekil 3.13 te statik yük durumu ($\Omega = 0$) incelenmiş olup aşağıda zamana-göre harmonik dinamik yük durumu göz önüne alınacak ve öngerilmenin etkisi ile ilgili sayısal sonuçlar verilecektir. Şekil 3.14, 3.15 ve 3.16 da sırasıyla $\Omega = 0.3$, $\Omega = 0.5$ ve $\Omega = 0.8$ olduğu durumlar ile ilgili grafikler verilmiştir. Grafiklerde Ψ_{11},

$$\Psi_{11} = \left(\sigma_{22}\,|_{\eta=\alpha} - \sigma_{22}\,|_{\eta=\beta>0}\right) \tag{3.76}$$

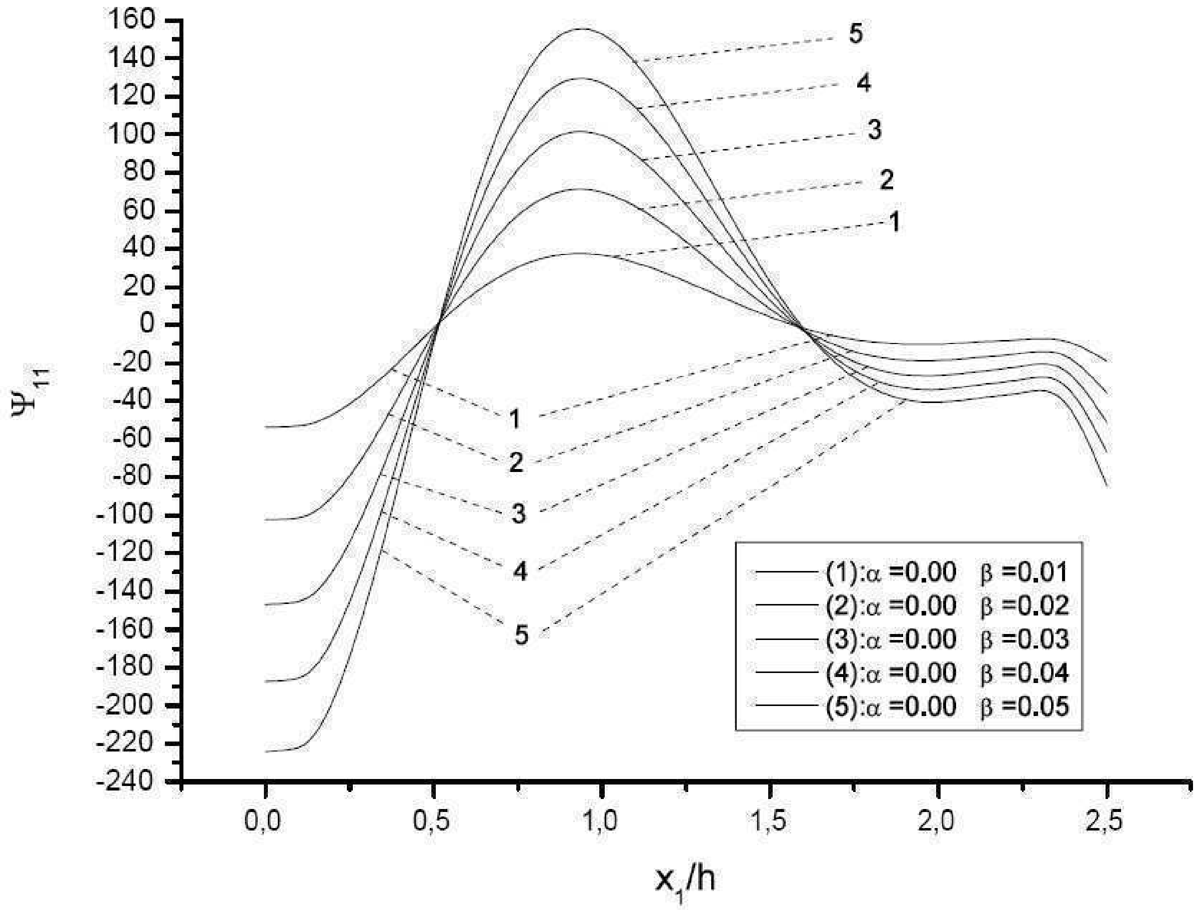
eşitliği ile tanımlı olup, $\alpha = 0.00$ ve $\beta = 0.01$, 0.02, 0.03, 004 ve 0.05 değerlerini almaktadır.



Şekil 3.14 Ψ_{11} değerinin $\Omega = 0.3$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda farklı σ_{11}^{0}/μ değerleri için $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı



Şekil 3.15 Ψ_{11} değerinin $\Omega = 0.5$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda farklı σ_{11}^{0}/μ değerleri için $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı



Şekil 3.16 Ψ_{11} değerinin $\Omega = 0.8$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda farklı σ_{11}^{0}/μ değerleri için $x_2/h = 0$ ara yüzeyinde x_1/h ekseni boyunca dağılımı

Şekil 3.13-3.16 göz önüne alındığında şerit-plakta, $\left(x_1/h\right)_1$ ve $\left(x_1/h\right)_2$ adı verilen ($\left(x_1/h\right)_1 < \left(x_1/h\right)_2$), öyle noktalar mevcuttur ki bu noktalarda öngerilme değerinin değişmesi $\sigma_{22}h/P_0$ değerine etki etmemektedir. Bununla birlikte $x_1/h < \left(x_1/h\right)_1$ ve $x_1/h > \left(x_1/h\right)_2$ için $\sigma_{22}h/P_0$ normal gerilme değeri öngerilme değerinin artması ile azalmaktadır. $\left(x_1/h\right)_1 < x_1/h < \left(x_1/h\right)_2$ durumunda ise öngerilme değerinin artması ile $\sigma_{22}h/P_0$ normal gerilme değeri de artmaktadır.

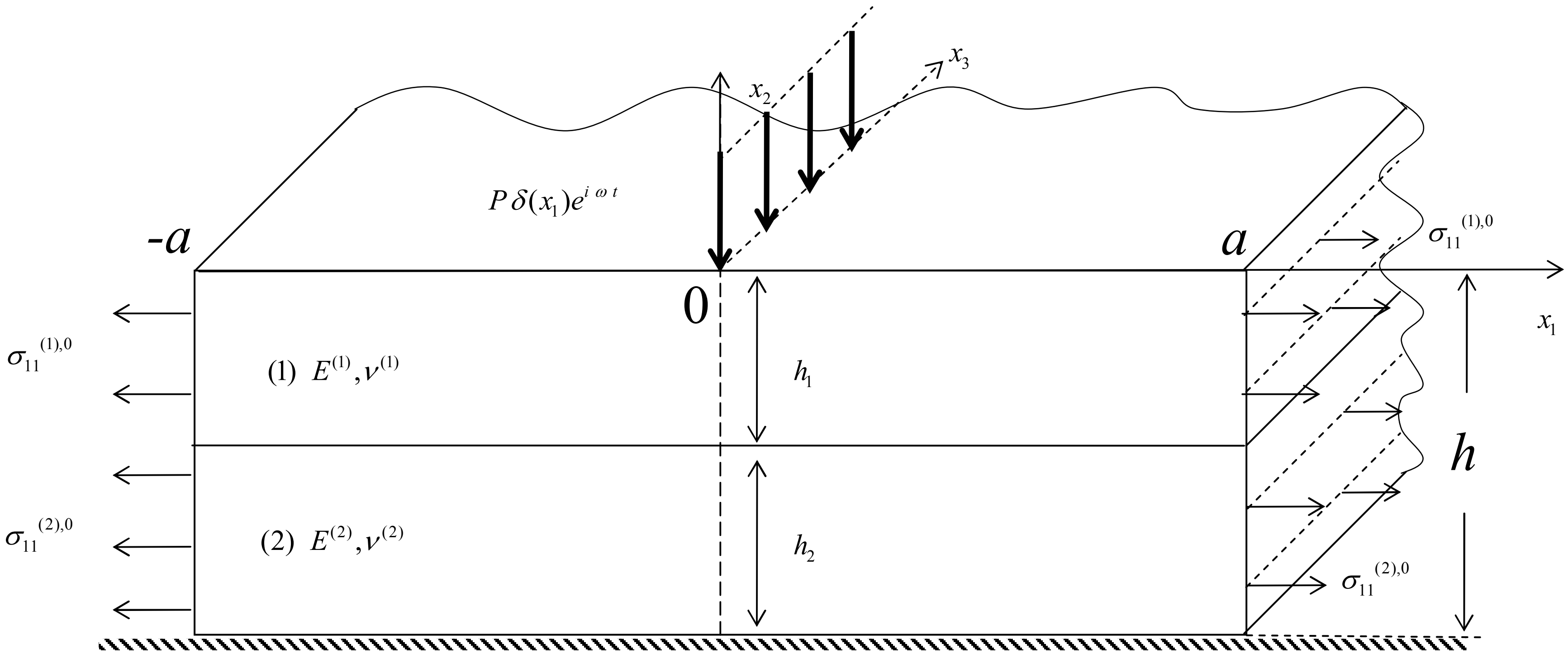
BÖLÜM 4. RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURMUŞ ÖNGERİLMELİ İKİ KATMANLI ŞERİT-PLAĞIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE KARŞILIK GELEN SINIR-DEĞER PROBLEMİ

4.1. Problemin Ortaya Konulması

Bu bölümde rijit zemin üzerine oturmuş öngerilmeli iki katmanlı şerit-plağın zorlanmış titreşimine ait aşağıdaki problem ele alınacaktır. Sonlu bölgeye sahip şerit-plağın katmanları kartezyen koordinatlarda

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{ -a \le x_1 \le +a \; ; -h_1 < x_2 \le 0 \} \\ \Omega_2 &= \{ -a \le x_1 \le +a \; ; -h \le x_2 \le -h_1 \} \end{aligned} \tag{4.1}$$

bölgelerini ve rijit yarı-düzlem ise $\{ (x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty , -\infty < x_2 \le -h \}$ bölgesini kaplamaktadır. Şerit-plağın ve yarı-düzlemin Ox_3 ekseni istikametinde uzunluğunun sonsuz olduğu kabul edilecek ve Ox_1x_2 düzleminde düzlem şekil değiştirme hali incelenecektir. Şerit-plağın Ω_1 bölgesini kaplayan üst katmanı ile ilgili değerler üst indis "(1)" ile ve Ω_2 bölgesini kaplayan alt katmanı ile ilgili değerler üst indis "(2)" ile gösterilecektir. Şerit-plağın lineer elastik malzemeden yapıldığı, homojen ve izotrop olduğu ve şerit-plağın katmanlarının zemin üzerine oturtulmadan önce kenarlarından şiddeti c_1 ve c_2 olan normal kuvvetlerle gerilmekte olduğu kabul edilecektir. Plağın üst yüzeyine uygulanan zamana göre harmonik olan noktasal yük $P\delta(x_1)e^{i\omega t}$ formundadır.



Şekil 4.1 Rijit yarı-düzlemin üzerine oturmuş iki katmanlı plağın geometrisi

Şerit-plak zemin üzerine oturtulduktan sonra ise plağın üst serbest yüzeyine zamana göre harmonik tekil P kuvveti etki etmektedir. Lineer elastisite teorisi çerçevesinde şerit-plaktaki öngerilmeler

$$\sigma_{11}^{(m),0} = c_m \ , \ \ ij \neq 11 \text{ için } \sigma_{ij}^{(m),0} = 0 \tag{4.2}$$

biçiminde belirlenir. Bu durumda (4.2) öngerilmeleri göz önüne alınarak şerit-plak için TLTEWISB-nin hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılır [3]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(m)}}{\partial x_j} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_i^{(m)}}{\partial x_1^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i^{(m)}}{\partial t^2} \quad , \ i; j; m = 1,2 \tag{4.3}$$

Burada $\rho^{(m)}$ şerit-plağın $m.$ katmanının doğal haldeki yoğunluğunu temsil etmektedir. $u_1^{(m)} = u_1(x_1, x_2, t)$ ve $u_2^{(m)} = u_2(x_1, x_2, t)$ fonksiyonları sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 eksenleri istikametindeki yerdeğiştirmeleri ve $\sigma_{ij}^{(m)}$ gerilme tansörü bileşenlerini göstermektedir. $\lambda^{(m)}$ ve $\mu^{(m)}$ Láme sabitleri olsun. İzotrop sıkıştırılabilir malzemeler için $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \{ \ \sigma_{11}^{(m)} \ , \ \sigma_{22}^{(m)} \ , \ \sigma_{12}^{(m)} \ \}^T \tag{4.4}$$

gerilme tansörünü ve $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \{ \ \varepsilon_{11}^{(m)} \ , \ \varepsilon_{22}^{(m)} \ , \ \varepsilon_{12}^{(m)} \ \}^T \tag{4.5}$$

deformasyon tansörünü temsil etmek üzere aşağıdaki mekanik bağıntılar verilebilir:

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \lambda^{(m)} \theta^{(m)} \delta_{ij} + 2\mu^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(m)}, \quad \theta^{(m)} = \varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)} \tag{4.6}$$

(4.6) denkleminde δ_{ij} Kronecker deltasını temsil etmektedir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ 1 & , \ i = j \end{cases} . \tag{4.7}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ deformasyon tansörününün $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ elemanları

$$\varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_i} \right). \tag{4.8}$$

ile belirlenir. $E^{(m)}$ elastisite modülü ve $\nu^{(m)}$ Poisson oranı ile $\lambda^{(m)}$ ve $\mu^{(m)}$ Lamé sabitleri arasında (2.6) ilişkileri mevcuttur. Bu bilgiler ışığında (4.1) ile verilen Ω_1 ve Ω_2 bölgelerinde (4.3) denklemleri yanı sıra aşağıdaki sınır ve kontakt (contact-değme) koşulları sağlanmalıdır:

$$\sigma_{21}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = 0, \ \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = -P\delta(x_1)e^{i\,\omega\,t}$$

$$\sigma_{i2}^{(1)}\Big|_{x_2=-h_1} = \sigma_{i2}^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1} \quad , \quad u_i^{(1)}\Big|_{x_2=-h_1} = u_i^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1}$$

$$u_i^{(2)}\Big|_{x_2=-h} = 0$$

$$\left(\sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_1} + \sigma_{1j}^{(m)} \right)\Bigg|_{x_1=\pm a} = 0 \qquad , \quad m; j = 1,2 . \tag{4.9}$$

Uygulanan noktasal yük zamana göre harmonik olduğundan bütün bağımlı değişkenler de harmonik olacak ve

$$\{ u_i^{(m)}, \sigma_{ij}^{(m)}, \varepsilon_{ij}^{(m)} \} = \{ \hat{u}_i^{(m)}, \hat{\sigma}_{ij}^{(m)}, \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \} e^{i\omega t} \tag{4.10}$$

biçiminde gösterilebilecektir. Buradan itibaren $\hat{u}_i$, $\hat{\sigma}_{ij}$ ve $\hat{\varepsilon}_{ij}$ bileşenleri $e^{i\omega t}$ çarpanı düşürülerek kullanılacaktır. Gösterimde kolaylık açısından " ^ " ifadesi de göz ardı edilecektir. (4.6) ve (4.8) ifadeleri (4.3) denklemlerinde yerine yazılarak TLTEWISB-nin yerdeğiştirmeye bağlı doğrusallaştırılmış hareket denklemleri

$$\begin{aligned}(\lambda^{(m)}+2\mu^{(m)}+\sigma_{11}{}^{(m),0})\frac{\partial^2 u_1{}^{(m)}}{\partial x_1{}^2}+\mu^{(m)}\frac{\partial^2 u_1{}^{(m)}}{\partial x_2{}^2}\\ +(\lambda^{(m)}+\mu^{(m)})\frac{\partial^2 u_2{}^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2}=-\rho^{(m)}\omega^2 u_1{}^{(m)}\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}(\mu^{(m)}+\sigma_{11}{}^{(m),0})\frac{\partial^2 u_2{}^{(m)}}{\partial x_1{}^2}+(\lambda^{(m)}+2\mu^{(m)})\frac{\partial^2 u_2{}^{(m)}}{\partial x_2{}^2}\\ +(\lambda^{(m)}+\mu^{(m)})\frac{\partial^2 u_1{}^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2}=-\rho^{(m)}\omega^2 u_2{}^{(m)}\end{aligned} \tag{4.12}$$

biçiminde elde edilir. Böylece ele alınan problemin formülasyonu tamamlanmış olmaktadır.

4.2. Varyasyonel Formülasyon

Bu alt bölümde problemin formülasyonuna karşılık gelen sınır-değer-kontakt probleminin varyasyonel ifadesi oluşturulacaktır. Varyasyonel ifadedeki fonksiyonelin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden –virtüel iş prensibi esasına göre uygun denklem ve sınır koşullarının elde edilmesi ispat edilecektir.

Varyasyonel ifadeye geçmeden önce

$$\hat{x}_1=\frac{x_1}{h},\ \hat{x}_2=\frac{x_2}{h} \tag{4.13}$$

koordinat dönüşümü sisteme uygulanmış olsun. (4.10) ve (4.13) ifadeleri (4.3) denklemlerinde yerine yazıldıktan sonra, bu denklemlerin her iki yanı h^2 ile çarpılırsa

$$h\frac{\partial \sigma_{11}^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}+h\frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}+\sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}=-\rho\omega^2 h^2 u_1^{(m)} \tag{4.14}$$

$$h\frac{\partial \sigma_{21}^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}+h\frac{\partial \sigma_{22}^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}+\sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}=-\rho\omega^2 h^2 u_2^{(m)} \tag{4.15}$$

eşitliklerine ulaşılır. (4.13) koordinat dönüşümleri altında (4.9) sınır ve kontakt koşulları

$$\sigma_{21}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=0}=0\,,\ \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=0}=-P\delta(h\hat{x}_1)e^{i\,\omega\,t}$$

$$\sigma_{i2}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=-h_1/h}=\sigma_{i2}^{(2)}\Big|_{\hat{x}_2=-h_1/h}\quad,\quad u_i^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=-h_1/h}=u_i^{(2)}\Big|_{\hat{x}_2=-h_1/h}$$

$$u_i^{(2)}\Big|_{\hat{x}_2=-1}=0$$

$$\left.\left(\sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}+\sigma_{1j}^{(m)}\right)\right|_{\hat{x}_1=\pm a/h}=0\qquad,\quad m\,;\,j=1,2\,. \tag{4.16}$$

halini alacaktır. Varyasyonel ifadeye ulaşmak için öncelikle (4.14) ve (4.15) denklemleri, sırasıyla, $v_1^{(m)}=v_1^{(m)}(\hat{x}_1\,,\,\hat{x}_2)$ ve $v_2^{(m)}=v_2^{(m)}(\hat{x}_1\,,\,\hat{x}_2)\,;\ m=1,2$ test fonksiyonları ile çarpılıp elde edilen denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}&h\frac{\partial \sigma_{11}^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}v_1^{(m)}+h\frac{\partial \sigma_{21}^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}v_2^{(m)}+h\frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}v_1^{(m)}+h\frac{\partial \sigma_{22}^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}v_2^{(m)}\\&+\sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}v_1^{(m)}+\sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1^{\,2}}v_2^{(m)}=-\rho\omega^2h^2(u_1^{(m)}v_1^{(m)}+u_2^{(m)}v_2^{(m)})\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitliğin

$$\hat{\Omega}_1=\{(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\ :\ -a/h\le\hat{x}_1\le a/h\,,0\le\hat{x}_2\le -h_1/h\} \tag{4.17}$$

$$\hat{\Omega}_2 = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \;\; : \;\; -a/h \le \hat{x}_1 \le a/h, -h_1/h \le \hat{x}_2 \le h\} \tag{4.18}$$

bölgeleri üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{2} \iint_{\hat{\Omega}_m} \left[h \frac{\partial \sigma_{11}^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} v_1^{(m)} + h \frac{\partial \sigma_{21}^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} v_2^{(m)} + h \frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} v_1^{(m)} \right. \\
&\left. + h \frac{\partial \sigma_{22}^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} v_2^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1^{\,2}} v_1^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1^{\,2}} v_2^{(m)} \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
&= -\sum_{m=1}^{2} \iint_{\hat{\Omega}_m} \rho \omega^2 h^2 (\; u_1^{(m)} v_1^{(m)} + u_2^{(m)} v_2^{(m)}) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olacaktır. (4.19) denkleminde (3.19) kısmi integrasyonu uygulanarak türev aktarılır ve ardından sınır terimleri ve bölge integralleri bir araya toplanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{2} \int_{\partial \hat{\Omega}_m} [h\sigma_{11}^{(m)} v_1^{(m)} \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + h\sigma_{21}^{(m)} v_2^{(m)} \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) + h\sigma_{12}^{(m)} v_1^{(m)} \cos(\vec{n}, \hat{x}_2) \\
&\quad + h\sigma_{22}^{(m)} v_2^{(m)} \cos(\vec{n}, \hat{x}_2) + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} v_1^{(m)} \cos(\vec{n}, \hat{x}_1) \\
&\quad + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} v_2^{(m)} \cos(\vec{n}, \hat{x}_1)] ds \\
&-\sum_{m=1}^{2} \iint_{\hat{\Omega}_m} \left[h\sigma_{11}^{(m)} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + h\sigma_{21}^{(m)} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + h\sigma_{12}^{(m)} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \right. \\
&\quad \left. + h\sigma_{22}^{(m)} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
&= -\sum_{m=1}^{2} \iint_{\hat{\Omega}_m} \rho \omega^2 h^2 (u_1^{(m)} v_1^{(m)} + u_2^{(m)} v_2^{(m)}) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2
\end{aligned} \tag{4.20}$$

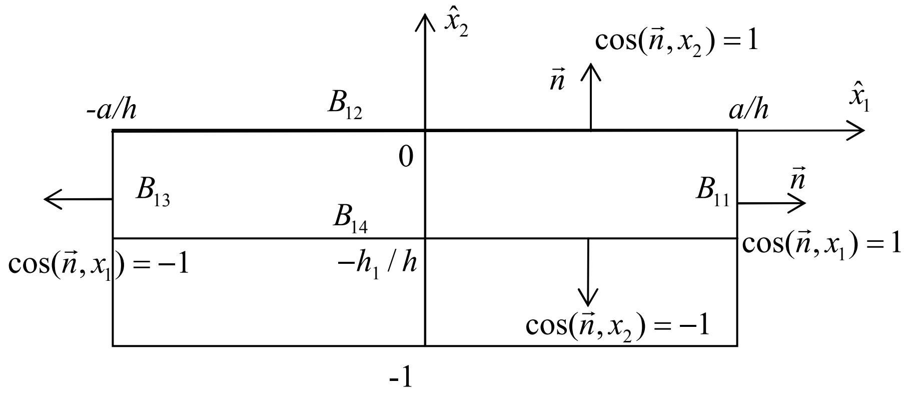
eşitliğine ulaşılacaktır. (4.20) eşitliğinde $\hat{\Omega}_1$ ve $\hat{\Omega}_2$ bölgelerinin sınırları $\partial\hat{\Omega}_1$ ve $\partial\hat{\Omega}_2$ ile belirtilmiştir. (4.20) eşitliğindeki bölge integralleri bir araya getirildikten sonra

$$T_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)} + \frac{1}{h}\sigma_{in}^{(m),0}\frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial \hat{x}_n},\ \sigma_{11}^{(m),0} = c_m \neq 0 \text{ ve } \sigma_{in}^{(m),0} = 0\ \ (in \neq 11) \quad (4.21)$$

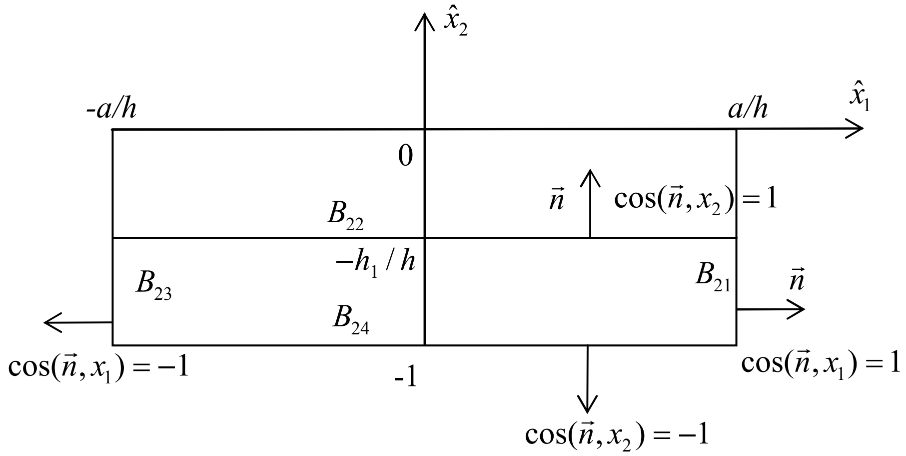
tanımı ile

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{2}\iint_{\hat{\Omega}_m}\left[hT_{ij}^{(m)}\frac{\partial v_j^{(m)}}{\partial \hat{x}_i} - \rho\omega^2 h^2 u_i^{(m)} v_i^{(m)}\right]d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
&= \sum_{m=1}^{2}\int_{\partial\hat{\Omega}_m}[h\sigma_{11}^{(m)}v_1^{(m)}\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + h\sigma_{21}^{(m)}v_2^{(m)}\cos(\vec{n},\hat{x}_1) \\
&\quad + h\sigma_{12}^{(m)}v_1^{(m)}\cos(\vec{n},\hat{x}_2) + h\sigma_{22}^{(m)}v_2^{(m)}\cos(\vec{n},\hat{x}_2) \\
&\quad + \sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}v_1^{(m)}\cos(\vec{n},\hat{x}_1) + \sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}v_2^{(m)}\cos(\vec{n},\hat{x}_1)]ds
\end{aligned} \quad (4.22)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.22) eşitliğinde sınır integrali aşağıdaki yol takip edilerek hesaplanmıştır: $\partial\hat{\Omega}$ sınırı şekil 4.2 deki biçimde olsun.



Şekil 4.2.(a) $\partial\hat{\Omega}_1$ sınırının parçalanışı ve doğrultu kosinüsleri



Şekil 4.2.(b) $\partial\hat{\Omega}_2$ sınırının parçalanışı ve doğrultu kosinüsleri

Şekil 4.2 ye göre $\partial\hat{\Omega}_1 = B_{11} \cup B_{12} \cup B_{13} \cup B_{14}$ ve $\partial\hat{\Omega}_2 = B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup B_{24}$ yazılabilir. (4.22) eşitliğinin sağ tarafı

$$\sum_{m=1}^{2} \int_{\partial\hat{\Omega}_m} \{ \left[h\sigma_{11}^{(m)} v_1^{(m)} + h\sigma_{21}^{(m)} v_2^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} v_1^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} v_2^{(m)} \right] \cos(\vec{n},\hat{x}_1)$$
$$+ \left[h\sigma_{12}^{(m)} v_1^{(m)} + h\sigma_{22}^{(m)} v_2^{(m)} \right] \cos(\vec{n},\hat{x}_2) \} ds \tag{4.23}$$

biçiminde yazılırsa

$$B_{11} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ \hat{x}_1 = a/h \ , \ -h_1/h \le \hat{x}_2 \le 0 \ \},$$
$$B_{12} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ -a/h \le \hat{x}_1 \le a/h \ , \hat{x}_2 = 0 \},$$
$$B_{13} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ \hat{x}_1 = -a/h \ , -h_1/h \le \hat{x}_2 \le 0 \},$$
$$B_{14} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ -a/h \le \hat{x}_1 \le a/h \ , \hat{x}_2 = -h_1/h \}$$

ve

$$B_{21} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ \hat{x}_1 = a/h \ , \ -1 \le \hat{x}_2 \le -h_1/h \ \},$$
$$B_{22} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ -a/h \le \hat{x}_1 \le a/h \ , \hat{x}_2 = -h_1/h \},$$
$$B_{23} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ \hat{x}_1 = -a/h \ , \ -1 \le \hat{x}_2 \le -h_1/h \ \},$$
$$B_{24} = \{ (\hat{x}_1,\hat{x}_2) \ : \ -a/h \le \hat{x}_1 \le a/h \ , \hat{x}_2 = -1 \}$$

sınırları için, sırasıyla,

$$\int_{-h_1/h}^{0} 1\cdot[\ h\sigma_{11}^{(1)} v_1^{(1)} + h\sigma_{21}^{(1)} v_2^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \hat{x}_1} v_1^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \hat{x}_1} v_2^{(1)}\ ] d\hat{x}_2 \quad (4.24)$$

$$\int_{-a/h}^{a/h} 1\cdot[h\sigma_{12}^{(1)} v_1^{(1)} + h\sigma_{22}^{(1)} v_2^{(1)}] d\hat{x}_1 \quad (4.25)$$

$$\int_{-h_1/h}^{0} (-1)[\ h\sigma_{11}^{(1)} v_1^{(1)} + h\sigma_{21}^{(1)} v_2^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \hat{x}_1} v_1^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \hat{x}_1} v_2^{(1)}] d\hat{x}_2 \quad (4.26)$$

$$\int_{-a/h}^{a/h} (-1)[h\sigma_{12}^{(1)} v_1^{(1)} + h\sigma_{22}^{(1)} v_2^{(1)}] d\hat{x}_1 \quad (4.27)$$

$$\int_{-1}^{-h_1/h} 1\cdot[\ h\sigma_{11}^{(2)} v_1^{(2)} + h\sigma_{21}^{(2)} v_2^{(2)} + \sigma_{11}^{(2),0} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \hat{x}_1} v_1^{(2)} + \sigma_{11}^{(2),0} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial \hat{x}_1} v_2^{(2)}\ ] d\hat{x}_2$$

(4.24’)

$$\int_{-a/h}^{a/h} 1\cdot[h\sigma_{12}^{(2)} v_1^{(2)} + h\sigma_{22}^{(2)} v_2^{(2)}] d\hat{x}_1 \quad (4.25')$$

$$\int_{-1}^{-h_1/h} (-1)[\ h\sigma_{11}^{(2)} v_1^{(2)} + h\sigma_{21}^{(2)} v_2^{(2)} + \sigma_{11}^{(2),0} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \hat{x}_1} v_1^{(2)} + \sigma_{11}^{(2),0} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial \hat{x}_1} v_2^{(2)}] d\hat{x}_2$$

(4.26’)

$$\int_{-a/h}^{a/h} (-1)[h\sigma_{12}^{(2)} v_1^{(2)} + h\sigma_{22}^{(2)} v_2^{(2)}] d\hat{x}_1 \quad (4.27')$$

integralleri elde edilir. Böylece (4.23) integrali (4.24)-(4.27) ve (4.24')-(4.27') ifadelerinin toplamından ibaret olur. Bu toplam incelenirse

- (4.24) ile (4.26) ifadelerinin sadeleştiği,
- (4.24') ile (4.26') ifadelerinin sadeleştiği,
- $\hat{x}_2 = -h_1 / h$ deki kontakt koşulu nedeniyle (4.27) ile (4.25') ifadelerinin sadeleştiği,
- $\hat{x}_2 = -1$ deki sınır koşulu nedeniyle (4.27') ifadesinin sıfır olacağı

görülür. Son olarak, geriye kalan (4.25) ifadesinde

$$\sigma_{21}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=0} = 0\,,\ \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=0} = -P\delta(h\hat{x}_1)e^{i\,\omega\,t}$$

sınır koşulları kullanılarak

$$\int_{-a/h}^{a/h} h\,\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \tag{4.28}$$

integraline ulaşılır. Bu durumda (4.22) denklemi

$$\sum_{m=1}^{2}\iint_{\hat{\Omega}_m}\left[hT_{ij}^{(m)}\frac{\partial v_j^{(m)}}{\partial \hat{x}_i} - \rho\omega^2 h^2 u_i^{(m)} v_i^{(m)}\right]d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \int_{-a/h}^{a/h} h\,\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \tag{4.29}$$

veya (4.21) tanımı ile açık yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2}\iint\limits_{\hat{\Omega}_m}\Bigg[& h\sigma_{11}^{(m)}\frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}+h\sigma_{21}^{(m)}\frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& +h\sigma_{12}^{(m)}\frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}+h\sigma_{22}^{(m)}\frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& +\sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}+\sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& -\rho^{(m)}\omega^2 h^2\left(u_1^{(m)}v_1^{(m)}+u_2^{(m)}v_2^{(m)}\right)\Bigg]d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
= \int_{-a/h}^{a/h} & h\,\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

halini alır. (4.13) dönüşümü altında (4.6) ve (4.8) mekanik bağıntıları açık olarak

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(m)} &= (\lambda^{(m)}+2\mu^{(m)})\frac{1}{h}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}+\lambda^{(m)}\frac{1}{h}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
\sigma_{22}^{(m)} &= \lambda^{(m)}\frac{1}{h}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}+(\lambda^{(m)}+2\mu^{(m)})\frac{1}{h}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
\sigma_{12}^{(m)} &= \mu^{(m)}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}+\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\right)
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

biçiminde yazılır.

$$
\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=0} = -P\delta(h\hat{x}_1)e^{i\,\omega\,t} \tag{4.32}
$$

sınır koşulunu ve

$$
\delta\ \ (f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\delta(x)\,,\ f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} \tag{4.33}
$$

özelliğini kullanarak (4.30) eşitliğinin sağ tarafı

$$\int_{-a/h}^{a/h} -P\delta(\hat{x}_1)\, v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \tag{4.34}$$

biçiminde yazılır. (4.31) eşitlikleri (4.30) da yerine yazılıp sağ taraf olarak da (4.34) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2} \iint_{\hat{\Omega}_m} & \Bigg[(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \lambda^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \mu^{(m)} \left\{ \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \mu^{(m)} \left\{ \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& + \lambda^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + (\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& - \rho^{(m)} \omega^2 h^2 (u_1^{(m)} v_1^{(m)} + u_2^{(m)} v_2^{(m)}) \Bigg] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
= \int_{-a/h}^{a/h} & -P\delta(\hat{x}_1)\, v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2} \iint_{\hat{\Omega}_m} & \Bigg[\left((\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0}) \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \lambda^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \right) \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \left\{ \mu^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \left(\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \right) \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \mu^{(m)} \left\{ \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& + \left\{ \lambda^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + (\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& - \rho^{(m)} \omega^2 h^2 (u_1^{(m)} v_1^{(m)} + u_2^{(m)} v_2^{(m)}) \Bigg] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
= \int_{-a/h}^{a/h} & -P\delta(\hat{x}_1)\, v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
\end{aligned} \tag{4.35}$$

halini alacaktır. (4.35) denkleminin her iki yanı $\mu^{(1)}$ Lamé sabitine bölünürse

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2}\iint_{\hat{\Omega}_m} \Bigg[& \left(\left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\right) \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \right) \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \left\{ \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}} \right) \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \left\{ \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& + \left\{ \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \right) \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& - \frac{\rho^{(m)}\omega^2 h^2}{\mu^{(1)}} \left(u_1^{(m)} v_1^{(m)} + u_2^{(m)} v_2^{(m)} \right) \Bigg] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
= & \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P}{\mu^{(1)}} \delta(\hat{x}_1)\, v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

olur. Böylece $L(\mathbf{u^{(m)}},\mathbf{v^{(m)}})$ bilineer formu ve $l(\mathbf{v^{(m)}})$ lineer formu (4.36) denkleminin sırasıyla sol ve sağ tarafları olarak

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{u^{(m)}},\mathbf{v^{(m)}}) = \sum_{m=1}^{2}\iint_{\hat{\Omega}_m} \Bigg[& \left(\left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\right) \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \right) \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \left\{ \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}} \right) \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \left\{ \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \frac{\partial v_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& + \left\{ \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \right) \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \right\} \frac{\partial v_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& - \frac{\rho^{(m)}\omega^2 h^2}{\mu^{(1)}} \left(u_1^{(m)} v_1^{(m)} + u_2^{(m)} v_2^{(m)} \right) \Bigg] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2
\end{aligned}
$$

$$
l(\mathbf{v^{(m)}}) = \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P}{\mu^{(1)}} \delta(\hat{x}_1)\, v_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
$$

biçiminde elde edilir.

$$c_2^{(1)} = \sqrt{\frac{\mu^{(1)}}{\rho^{(1)}}} \tag{4.37}$$

enine dalga (distorsiyon) hızı ve

$$\Omega = \frac{\omega h}{c_2^{(1)}} \tag{4.38}$$

boyutsuz frekans ifadelerini temsil etsin. Böylece, $\mathbf{u^{(m)}} = \mathbf{u^{(m)}}(u_1^{(m)}, u_2^{(m)})$ olmak üzere toplam enerji fonksiyoneli $\mathrm{J}(\mathbf{u^{(m)}}) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(\mathbf{u^{(m)}}, \mathbf{u^{(m)}}) - \mathrm{l}(\mathbf{u^{(m)}})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(\mathbf{u^{(m)}}) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\iint_{\hat{\Omega}_m} & \left[\left((\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}})\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}\right)\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\right. \\
& + \left\{\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\right)\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\right\}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\left\{\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\right\}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& + \left\{\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + (\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}})\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}\right\}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& \left. - \frac{\rho^{(m)}\omega^2 h^2}{\mu^{(1)}}(u_1^{(m)}u_1^{(m)} + u_2^{(m)}u_2^{(m)})\right] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
& - \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P}{\mu^{(1)}}\delta(\hat{x}_1)\, u_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1
\end{aligned} \tag{4.39}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda varyasyonel hesap prensipleri gereğince (4.39) ile verilen $\mathrm{J}(\mathbf{u^{(m)}})$ toplam enerji fonksiyonelinin birinci varyasyonu sıfıra eşitlendiğinde (4.11)-(4.12) doğrusallaştırılmış hareket denklemleri ve (4.16) koşulları elde edilecektir.

$$\delta \mathrm{J}(\mathbf{u^{(m)}}) = 0 \tag{4.40}$$

eşitliği açık yazıldığında

$$\delta \mathrm{J}(\mathbf{u}^{(\mathbf{m})}) = \delta \mathrm{J}_{u_1^{(m)}} + \delta \mathrm{J}_{u_2^{(m)}} = 0$$

anlamına geldiğinden

$$\delta \mathrm{J}_{u_1^{(m)}} = 0 \rightarrow \delta \mathrm{J}_{u_1^{(m)}} = \frac{d}{d\alpha} J(u_1^{(m)} + \alpha \xi^{(m)}, u_2^{(m)})|_{\alpha=0} = 0$$

$$\delta \mathrm{J}_{u_2^{(m)}} = 0 \rightarrow \delta \mathrm{J}_{u_2^{(m)}} = \frac{d}{d\alpha} J(u_1^{(m)}, u_2^{(m)} + \alpha \eta^{(m)})|_{\alpha=0} = 0$$

denklemleri çözülmelidir.

$$\begin{aligned}
\delta \mathrm{J}_{u_1^{(m)}} = \frac{d}{d\alpha}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\iint_{\hat{\Omega}_m} \Bigg[& \left\{(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}})\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\left(u_1^{(m)} + \alpha\xi^{(m)}\right)\right. \\
& \left. + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}\right\}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\left(u_1^{(m)} + \alpha\xi^{(m)}\right) \\
& + \left\{\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(u_1^{(m)} + \alpha\xi^{(m)}\right) + \left(\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\right)\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\right\}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} \\
& + \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\left\{\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(u_1^{(m)} + \alpha\xi^{(m)}\right) + \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}\right\}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(u_1^{(m)} + \alpha\xi^{(m)}\right) \\
& + \left\{\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\left(u_1^{(m)} + \alpha\xi^{(m)}\right) + (\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}})\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}\right\}\frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\
& - \frac{\rho^{(m)}\omega^2 h^2}{\mu^{(1)}}((u_1^{(m)} + \alpha\xi^{(m)})^2 + u_2^{(m)}u_2^{(m)})\Bigg] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \\
& - \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P}{\mu^{(1)}}\delta(\hat{x}_1)\, u_2^{(1)}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1 \Bigg]_{\alpha=0} = 0
\end{aligned}$$

$$
\delta \mathrm{J}_{u_2^{(m)}} = \frac{d}{d\alpha}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\iint\limits_{\hat{\Omega}_m}\Bigg[
$$

$$
\left\{(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}})\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(u_2^{(m)} + \alpha\eta^{(m)}\right)\right\}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1}
$$

$$
+\left\{\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\right)\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\left(u_2^{(m)} + \alpha\eta^{(m)}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\left(u_2^{(m)} + \alpha\eta^{(m)}\right)
$$

$$
+\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\left\{\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\left(u_2^{(m)} + \alpha\eta^{(m)}\right)\right\}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}
$$

$$
+\left\{\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + (\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}})\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(u_2^{(m)} + \alpha\eta^{(m)}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(u_2^{(m)} + \alpha\eta^{(m)}\right)
$$

$$
-\frac{\rho^{(m)}\omega^2 h^2}{\mu^{(1)}}(\left(u_1^{(m)}\right)^2 + \left(u_2^{(m)} + \alpha\eta^{(m)}\right)^2)\Bigg]d\hat{x}_1 d\hat{x}_2
$$

$$
-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P}{\mu^{(1)}}\delta(\hat{x}_1)\left(u_2^{(1)} + \alpha\eta^{(1)}\right)\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1\Bigg]_{\alpha=0} = 0
$$

ifadelerindeki parantezler açılır, α parametresine göre türev alınıp α yerine sıfır yazılır. Daha sonra $\xi^{(m)}$ ve $\eta^{(m)}$ fonksiyonları üzerindeki türevler kısmi integrasyon ile aktarılır. Bölge ve sınır integralleri ayrı ayrı gruplandırılır. Sınır integralinin sıfır olduğu kabul edilerek hem (bölge integrali ile) doğrusallaştırılmış hareket denklemleri hem de (sınır integrali ile) sınır koşulları elde edilir. Yukarıda anlatılanlar prensip olarak bölüm 3'te verilen tek katmanlı durum ile aynı olduğundan, burada işlemler ayrıntılı olarak verilmeyecektir.

Diğer taraftan TLTEWISB [3] –nin varyasyonel prensipleri gereğince, (4.35) denkleminden elde edilen bilineer ve lineer formlar kullanılarak,

$$
\omega_{1111}^{(m)} = \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0},\ \omega_{1122}^{(m)} = \lambda^{(m)},
$$

$$
\omega_{1212}^{(m)} = \mu^{(m)},\ \omega_{1221}^{(m)} = \mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0},
$$

$$
\omega_{2112}^{(m)} = \mu^{(m)},\ \omega_{2121}^{(m)} = \mu^{(m)},\ \omega_{2211}^{(m)} = \lambda^{(m)},
$$

$$
\omega_{2222}^{(m)} = \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \tag{4.41}
$$

olmak üzere

$$T_{11}^{(m)} = \sigma_{11}^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} = \omega_{1111}^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \omega_{1122}^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2},$$

$$T_{12}^{(m)} = \sigma_{12}^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} = \omega_{1212}^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \omega_{1221}^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1},$$

$$T_{21}^{(m)} = \sigma_{12}^{(m)} = \omega_{2112}^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} + \omega_{2121}^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1},$$

$$T_{22}^{(m)} = \sigma_{22}^{(m)} = \omega_{2211}^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + \omega_{2222}^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2}, \qquad (4.42)$$

tanımları yapılırsa (4.39) toplam enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(\mathbf{u^{(m)}}) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} \iint_{\hat{\Omega}_m} \Big[& T_{11}^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + T_{12}^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_1} + T_{21}^{(m)} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} \\ & + T_{22}^{(m)} \frac{\partial u_2^{(m)}}{\partial \hat{x}_2} - \omega^2 \rho^{(m)} \left(u_1^{(m)} u_1^{(m)} + u_2^{(m)} u_2^{(m)} \right) \Big] d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 \qquad (4.43) \\ & + \int_{-a/h}^{+a/h} -P\delta(\hat{x}_1) u_2^{(1)} |_{\hat{x}_2=0} \, d\hat{x}_1 \end{aligned}$$

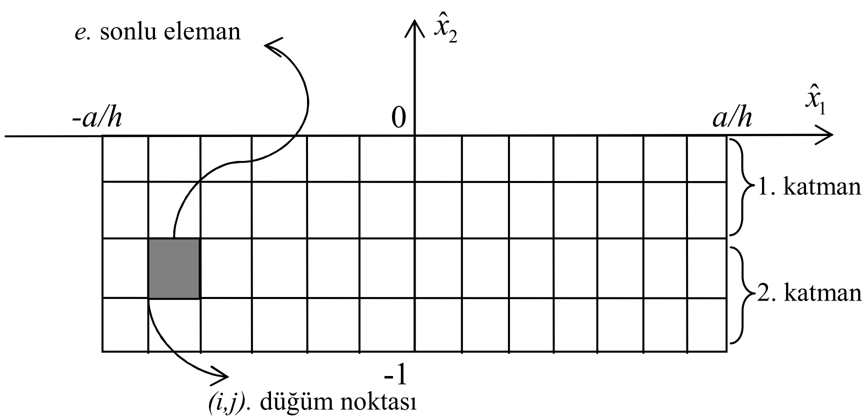
biçiminde yazılabilir.

4.3. Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözüm

Alt bölüm 3.3 te belirtilen temel prensipler aynı kalmak üzere, bu alt bölümde öngerilmeli iki katman içeren şerit-plak ile ilgili probleme SEY aracılığı ile yaklaşık çözüm aranacaktır. Sonlu eleman yaklaşık çözümü

$$\mathbf{u}^{(\mathbf{m}),\mathbf{y}} = (u_1^{\,y}(x_1, x_2), u_2^{\,y}(x_1, x_2)),\; m = 1, 2 \tag{4.44}$$

olarak gösterilecektir. Yerdeğiştirme esaslı SEY kullanıldığından her bir sonlu eleman üzerinde çözümler bilinmeyen yerdeğiştirmeler olacaktır. Üçüncü bölümde tek katmanlı durum için geliştirilen bilgisayar algoritması iki katmanlı duruma adapte edilmiştir. $\hat{\Omega}$ bölgesi SEY –e göre Ox_1 ve Ox_2 istikametinde belirli sayıda (Ox_1 istikametinde 20, 30, 40 ve 80 sonlu elemana; Ox_2 istikametinde 2, 3, 4 ve 8 sonlu elemana) sonlu alt bölgelere bölünerek çözümleme yapılacaktır. Elde edilen sonlu eleman bölgüsünde (i, j) düğüm noktalarını belirtmek üzere (bakınız Şekil 4.3)



Şekil 4.3 İki katmanlı durum için (temsili) SEY bölgüsü

$N_{ij}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ baz fonksiyonları Lagrange ailesinden bikuadratik fonksiyonlar olarak seçilecek [33] ve buna göre yaklaşık çözümler $c_{ij}^{(m)}$ ve $d_{ij}^{(m)}$ katsayılarına bağlı olarak

$$\begin{aligned}
u_1^{(1),y}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) &= \sum_{j=1}^{N(1)} \sum_{i=1}^{M} c_{ij}^{(1)} N_{ij}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \\
u_1^{(2),y}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) &= \sum_{j=N(1)}^{N} \sum_{i=1}^{M} c_{ij}^{(2)} N_{ij}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{(1),y}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) &= \sum_{j=1}^{N(1)} \sum_{i=1}^{M} d_{ij}^{(1)} N_{ij}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \\
u_2^{(2),y}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) &= \sum_{j=N(1)}^{N} \sum_{i=1}^{M} d_{ij}^{(2)} N_{ij}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

biçiminde yazılacaktır. Burada bilinmeyen

$$c_{ij}^{(m)} = u_1^{(m),y}(\hat{x}_{1i},\hat{x}_{2j}),\; d_{ij}^{(m)} = u_2^{(m),y}(\hat{x}_{1i},\hat{x}_{2j}) \tag{4.47}$$

katsayıları yaklaşık çözümün (i,j) düğüm noktasındaki değerleridir. Ayrıca (4.45) ve (4.46) ifadelerinde M ve N, Ox_1 ve Ox_2 istikametindeki sonlu eleman sayılarını ve $N(1)$ ise birinci ve ikinci katmanın ara yüzeyinin olduğu hattı göstermektedir. SEY –e bağlı olarak (4.45) ve (4.46) yaklaşık çözümleri (4.39) ile verilen $\mathrm{J}(\mathbf{u}^{(\mathbf{m})})$ toplam enerji fonksiyonelinde yerlerine yazılır. Daha sonra $c_{ij}^{(m)}$ ve $d_{ij}^{(m)}$ parametrelerine göre türev alınarak elde edilen ifade sıfıra eşitlenir. Böylece $\mathrm{J}(\mathbf{u}^{(\mathbf{m})})$ toplam enerji fonksiyonelinin minimumu araştırılır. $\mathrm{J}(\mathbf{u}^{(\mathbf{m}),\mathbf{y}}) = \mathrm{J}(u_1^{(\mathbf{m}),\mathbf{y}}, u_2^{(\mathbf{m}),\mathbf{y}})$ $= \tilde{\mathrm{J}}(c_{ij}^{(m)}, d_{ij}^{(m)})$ tanımı yapıldıktan sonra yukarıda bahsedilen kısmi türev alma işlemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}^{(m)}} \tilde{\mathrm{J}}(c_{ij}^{(m)}, d_{ij}^{(m)}) = \frac{\partial}{\partial c_{ij}^{(m)}} \mathrm{J}\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)} N_{ij}, \sum\sum d_{ij}^{(m)} N_{ij}\right) = 0 \tag{4.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial d_{ij}^{(m)}} \tilde{\mathrm{J}}(c_{ij}^{(m)}, d_{ij}^{(m)}) = \frac{\partial}{\partial d_{ij}^{(m)}} \mathrm{J}\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)} N_{ij}, \sum\sum d_{ij}^{(m)} N_{ij}\right) = 0 \tag{4.49}$$

(4.48) ve (4.49) denklemlerinde $c_{ij}^{(m)}$ ve $d_{ij}^{(m)}$ parametrelerine göre alınan kısmi türevlerde i=1, 2, …, N ve j=1, 2, …, M olduğunu belirtmekte fayda vardır, ancak toplam sembollerinde üst ve alt sınırlar (4.45) ve (4.46) ifadelerindeki gibi olacaktır.

$$\mathrm{J}(u_1^{(m),y}, u_2^{(m),y}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\left[\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + \left(\sum\sum d_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right)^2\right] \\ +\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\left\{\sum\sum c_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} + \sum\sum d_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right\}^2 \\ +2\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\cdot\sum\sum c_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\cdot\sum\sum d_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} \\ +\left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\right)\left[\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right)^2 + \left(\sum\sum d_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2}\right)^2\right] \\ -\Omega^2\left[\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)}N_{ij}\right)^2 + \left(\sum\sum d_{ij}^{(m)}N_{ij}\right)^2\right] \end{array}\right] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2$$

$$-\int_{-a/h}^{a/h}\frac{-P}{\mu^{(1)}}\delta(\hat{x}_1)\sum\sum d_{ij}^{(m)}N_{ij}\Big|_{\hat{x}_2=1} d\hat{x}_1$$

ifadesi kullanırsa $c_{ij}^{(m)}$ parametresine göre kısmi türev içeren (4.48) eşitliği

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}^{(m)}}\mathrm{J}(u_1^{(m),y}, u_2^{(m),y}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\begin{array}{l} 2\dfrac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right) \\ +2\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2}\left\{\sum\sum c_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} + \sum\sum d_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right\} \\ +2\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\cdot\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\cdot\sum\sum d_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} \\ +2\left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\right)\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1}\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1}\right) \\ -2\Omega^2 N_{kl}\left(\sum\sum c_{ij}^{(m)}N_{ij}\right) \end{array}\right] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2$$

$$= 0$$

halini alacaktır. Elde edilen denklem $c_{ij}^{(m)}$ ve $d_{ij}^{(m)}$ parametrelerine göre gruplandırılırsa

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}^{(m)}} \mathrm{J}(u_1^{(m),y}, u_2^{(m),y}) = \sum\sum \left\{ \int_{-1}^{0} \int_{-a/h}^{a/h} \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}} \dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} + \dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} \\ + \left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2 \dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \right) \dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} - \Omega^2 N_{kl} N_{ij} \end{bmatrix} d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \right\} c_{ij}^{(m)}$$

$$+ \sum\sum \left\{ \int_{-1}^{0} \int_{-a/h}^{a/h} \left[\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} \right] d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \right\} d_{ij}^{(m)} = 0$$

(4.50)

eşitliğine ulaşılır. Benzer biçimde $d_{ij}^{(m)}$ parametresine göre kısmi türev içeren (4.49) eşitliği de

$$\frac{\partial}{\partial d_{ij}^{(m)}} \mathrm{J}(u_1^{(m),y}, u_2^{(m),y}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \int_{-a/h}^{a/h} \begin{bmatrix} 2 \dfrac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}} \dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \left(\sum\sum d_{ij}^{(m)} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} \right) \\ +2 \dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \left\{ \sum\sum c_{ij}^{(m)} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} + \sum\sum d_{ij}^{(m)} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} \right\} \\ +2 \dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} \cdot \dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2} \sum\sum c_{ij}^{(m)} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} \\ +2 \left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2 \dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \right) \dfrac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2} \left(\sum\sum d_{ij}^{(m)} \dfrac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} \right) \\ -2\Omega^2 N_{kl} \left(\sum\sum d_{ij}^{(m)} N_{ij} \right) \end{bmatrix} d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2$$

$$- \int_{-a/h}^{a/h} \frac{-P}{\mu^{(1)}} \delta(\hat{x}_1) N_{ij} \Big|_{\hat{x}_2 = 1} d\hat{x}_1 = 0$$

halini alacaktır. Elde edilen denklem $c_{ij}^{(m)}$ ve $d_{ij}^{(m)}$ parametrelerine göre gruplandırılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial d_{ij}^{(m)}} \mathrm{J}(u_1^{(m),y}, u_2^{(m),y}) &= \sum\sum \left\{ \int_{-1}^{0} \int_{-a/h}^{a/h} \left[\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} \cdot \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} \right] d\hat{x}_1 \, d\hat{x}_2 \right\} c_{ij}^{(m)} \\
&+ \sum\sum \left\{ \int_{-1}^{0} \int_{-a/h}^{a/h} \left[\begin{array}{l} \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_1} \\ + \left(\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}} + 2 \frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}} \right) \frac{\partial N_{kl}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial N_{ij}}{\partial \hat{x}_2} - \Omega^2 N_{kl} N_{ij} \end{array} \right] d\hat{x}_1 \, d\hat{x}_2 \right\} d_{ij}^{(m)} \\
&- \frac{-P}{\mu^{(1)}} N_{ij} \Big|_{\substack{\hat{x}_1 = 0 \\ \hat{x}_2 = 1}} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

eşitliğine ulaşılır. (4.50) ve (4.51) denklemlerinde $c_{ij}^{(m)}$ ve $d_{ij}^{(m)}$ bilinmeyenleri

$$
\mathbf{x} = \{[c_{ij}^{(m)}], [d_{ij}^{(m)}]\}^T = \left\{ c_{11}^{(1)}, \ \dots \ , c_{MN}^{(2)}, d_{11}^{(1)}, \ \dots \ , d_{MN}^{(2)} \right\}^T
$$

biçiminde bir vektöre yerleştirilir ve bilinmeyenlerin katsayıların içeren matris de

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \tag{4.52}
$$

ile tanımlanırsa

$$
\mathbf{Kx} = f \tag{4.53}
$$

biçiminde bir lineer denklem takımına ulaşılır. Burada **K** matrisi genel katılık matrisi olarak adlandırılır. f vektörü ise sağ taraf vektörü olarak adlandırılır ve

$$
f = \left\{ \frac{-P}{\mu^{(1)}} N_{ij} \Big|_{\substack{\hat{x}_1 = 0 \\ \hat{x}_2 = 1}} \right\} \tag{4.54}
$$

ile hesaplanır. Bu durumda ele alınan probleme göre $2MN$ tane bileşene sahip olan f vektörünün yükün uygulandığı yere karşılık gelen sadece bir terimi sıfırdan farklı olacaktır. (4.52) matris tanımına göre **K** genel katılık matrisindeki blok matrisler

$$
\left[K_{11}\right]=\int_{-1}^{0}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_1}+\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_2}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_2}\\ +\left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}+2\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\right)\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_1}-\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2 \tag{4.55}
$$

$$
\left[K_{12}\right]=\int_{-1}^{0}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_1}+\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\cdot\frac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_2}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2 \tag{4.56}
$$

$$
\left[K_{21}\right]=\int_{-1}^{0}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_1}\frac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_2}+\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\cdot\frac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_2}\frac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_1}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2 \tag{4.57}
$$

$$
\left[K_{22}\right]=\int_{-1}^{0}\int_{-a/h}^{a/h}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_1}+\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_1}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_1}\\ +\left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}+2\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\right)\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial\hat{x}_2}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial\hat{x}_2}-\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]d\hat{x}_1\,d\hat{x}_2 \tag{4.58}
$$

biçiminde hesaplanır. Üçüncü bölümde olduğu gibi, SEY –e göre, (4.55)-(4.58) integralleri $\left[-1,1\right]\times\left[-1,1\right]$ pilot sonlu elemanına aktarılarak hesaplanır. Bu durumda $\hat{\Omega}=\hat{\Omega}_1\cup\hat{\Omega}_2$ bölgesi $\hat{\Omega}=\cup_{k=1}^{T}\Omega_k$ biçiminde dikdörtgen sonlu elemanlara ayrılmış olsun. Burada *T,* kullanılan sonlu eleman sayısını belirtmektedir. Şekil 3.4 ile verilen parametrelere sahip bir Ω_k sonlu elemanı için normalize edilmiş yerel koordinatlar (3.59) biçiminde seçilirse şekil fonksiyonları (3.60) biçiminde olacaktır. (3.59) koordinat dönüşümü altında (4.55)-(4.58) integralleri yeniden yazılarak terimler düzenlenirse

$$
\left[K_{11}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial r}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial r}+\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial s}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial s}\\ +\left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}+2\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\right)\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial r}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial r}-\alpha\beta\,\Omega^2 N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]dr\,ds \tag{4.59}
$$

$$\left[K_{12}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}+\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\cdot\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}\right]dr\,ds \tag{4.60}$$

$$\left[K_{21}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\frac{\partial N_{kl}}{\partial r}\frac{\partial N_{ij}}{\partial s}+\frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}\cdot\frac{\partial N_{kl}}{\partial s}\frac{\partial N_{ij}}{\partial r}\right]dr\,ds \tag{4.61}$$

$$\left[K_{22}\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sigma_{11}{}^{(m),0}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial r}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial r}+\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial r}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial r}\\+\left(\dfrac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(1)}}+2\dfrac{\mu^{(m)}}{\mu^{(1)}}\right)\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\partial N_{kl}}{\partial s}\dfrac{\partial N_{ij}}{\partial s}-\alpha\beta\,\Omega^{2}N_{kl}N_{ij}\end{array}\right]dr\,ds \tag{4.62}$$

olacaktır. Bu durumda,

$$\mathbf{K}=\sum_{k=1}^{T}\mathbf{K}^{k} \tag{4.63}$$

ile sistemin katılık matrisine ulaşılacaktır. Burada $\mathbf{K}^{k}$, (i,j) düğüm noktası ile belirlenen Ω_k sonlu elemanına ait yerel katılık matrisidir ve

$$\mathbf{K}^{k}=\begin{bmatrix}\left[K_{11}\right] & \left[K_{12}\right]\\ \left[K_{21}\right] & \left[K_{22}\right]\end{bmatrix} \tag{4.64}$$

olmak üzere sırasıyla (4.59)-(4.62) eşitlikleri vasıtasıyla hesaplanır. SEY –e göre (4.64) ile hesap edilen (4.63) genel katılık matrisi kullanılarak (4.53) denklemi çözülür. $\mathbf{x}=\mathbf{K}^{-1}f$ vektörünün bileşenleri (4.47) eşitliklerine göre (i,j) düğüm noktalarında $O\hat{x}_1$ ve $O\hat{x}_2$ istikametindeki yerdeğiştirme değerleridir. Dolayısıyla elde edilen bu yerdeğiştirmeler (2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa şekil değiştirmeler bulunur.

Şimdi $\sigma_{ij}{}^{(m)}$ gerilme tansörü bileşenlerini ve bunların şekil değiştirme tansörü ile ilişkisini araştıralım. (4.6) eşitlikleri açık yazılırsa

$$\sigma_{11}{}^{(m)} = \lambda^{(m)}(\varepsilon_{11}{}^{(m)} + \varepsilon_{22}{}^{(m)})\delta_{11} + 2\mu^{(m)}\varepsilon_{11}{}^{(m)} = (\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})\varepsilon_{11}{}^{(m)} + \lambda^{(m)}\varepsilon_{22}{}^{(m)}$$

$$\sigma_{22}{}^{(m)} = \lambda^{(m)}(\varepsilon_{11}{}^{(m)} + \varepsilon_{22}{}^{(m)}) + 2\mu^{(m)}\varepsilon_{22}{}^{(m)} = \lambda^{(m)}\varepsilon_{11}{}^{(m)} + (\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})\varepsilon_{22}{}^{(m)}$$

$$\sigma_{12}{}^{(m)} = 2\mu^{(m)}\varepsilon_{12}{}^{(m)}$$

olacaktır. Bu eşitlikler aşağıdaki biçimde düzenlenerek bir matris denklemi halinde yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}{}^{(m)} \\ \sigma_{22}{}^{(m)} \\ \sigma_{12}{}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} & \lambda^{(m)} & 0 \\ \lambda^{(m)} & \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}{}^{(m)} \\ \varepsilon_{22}{}^{(m)} \\ \varepsilon_{12}{}^{(m)} \end{Bmatrix} \tag{4.65}$$

$E^{(m)}$ ve $\nu^{(m)}$ elastik sabitleri kullanılarak $\lambda^{(m)}$ ve $\mu^{(m)}$ Lamé sabitleri

$$\lambda^{(m)} = \frac{E^{(m)}\nu^{(m)}}{(1+\nu^{(m)})(1-2\nu^{(m)})}, \quad \mu^{(m)} = \frac{E^{(m)}}{2(1+\nu^{(m)})} \tag{4.66}$$

eşitlikleri ile bulunur. (4.66) eşitlikleri ile (4.65) denklemi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}{}^{(m)} \\ \sigma_{22}{}^{(m)} \\ \sigma_{12}{}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E^{(m)}(1-\nu^{(m)})}{(1-2\nu^{(m)})(1+\nu^{(m)})} & \dfrac{\nu^{(m)}E^{(m)}}{(1-2\nu^{(m)})(1+\nu^{(m)})} & 0 \\ \dfrac{\nu^{(m)}E^{(m)}}{(1-2\nu^{(m)})(1+\nu^{(m)})} & \dfrac{E^{(m)}(1-\nu^{(m)})}{(1-2\nu^{(m)})(1+\nu^{(m)})} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E^{(m)}}{(1+\nu^{(m)})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}{}^{(m)} \\ \varepsilon_{22}{}^{(m)} \\ \varepsilon_{12}{}^{(m)} \end{Bmatrix}$$

olarak yazılabilir ve düzenlenirse

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}{}^{(m)} \\ \sigma_{22}{}^{(m)} \\ \sigma_{12}{}^{(m)} \end{Bmatrix} = \frac{E^{(m)}}{(1-2\nu^{(m)})(1+\nu^{(m)})} \begin{bmatrix} 1-\nu^{(m)} & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}{}^{(m)} \\ \varepsilon_{22}{}^{(m)} \\ \varepsilon_{12}{}^{(m)} \end{Bmatrix} \tag{4.67}$$

olur. (4.67) denklemindeki matris

$$\mathbf{D}^{(m)} = \frac{E^{(m)}}{(1-2\nu^{(m)})(1+\nu^{(m)})}\begin{bmatrix} 1-\nu^{(m)} & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu^{(m)} \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

ile gösterilir. Bu durumda, elde edilen yerdeğiştirmelerden

$$\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \mathbf{D}^{(m)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \tag{4.69}$$

eşitliği ile gerilmeler hesaplanır. Bu çalışmada kullanılan dokuz düğüm noktalı sonlu eleman göz önüne alınarak Ω_k sonlu elemanı için $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ şekil değiştirme tansörü

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial r} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial s} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & . & . & \frac{\partial N_9}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{4.70}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \mathbf{Bu} \tag{4.71}$$

eşitliği ile hesaplanır. (4.71) eşitliğindeki $\mathbf{u}$ vektörü j=1, 2, … ,9 olmak üzere Ω_k sonlu elemanında u_{1j}, $O\hat{x}_1$ istikametinde ve u_{2j}, $O\hat{x}_2$ istikametindeki yaklaşık çözüm değerleridir

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ . \\ . \\ u_{19} \\ u_{21} \\ . \\ . \\ u_{29} \end{Bmatrix}. \tag{4.72}$$

4.4 Sayısal Sonuçlar

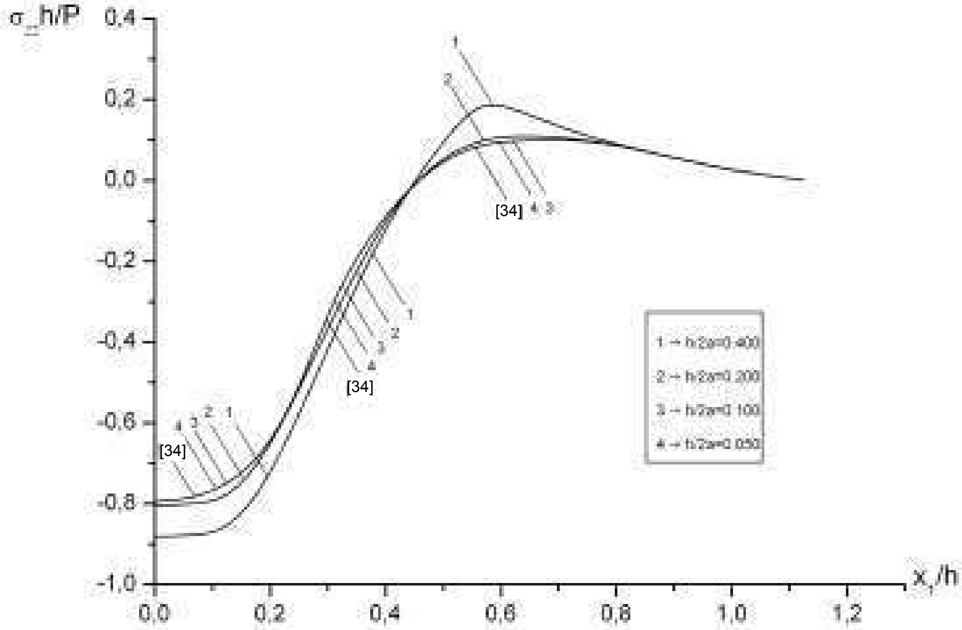
Bu alt bölümde, dördüncü bölümde ele alınan probleme ait geliştirilen algoritma yardımıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir. Probleme ait algoritma Mathematica bilgisayar yazılımı kullanılarak programlanıştır. Problem parametrelerinin (örneğin; öngerilme, katmanların elastisite modülü oranları ve uygulanan zamana-göre harmonik yükün frekansının) etkisini gösteren sayısal sonuçlar grafikler aracılığı ile verilmiş ve değerlendirilmesi yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara geçmeden önce

$$\Omega = \frac{\omega h_1}{c_2^{(1)}}, \; \eta_m = \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(m)}}, \; e = \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} \tag{4.73}$$

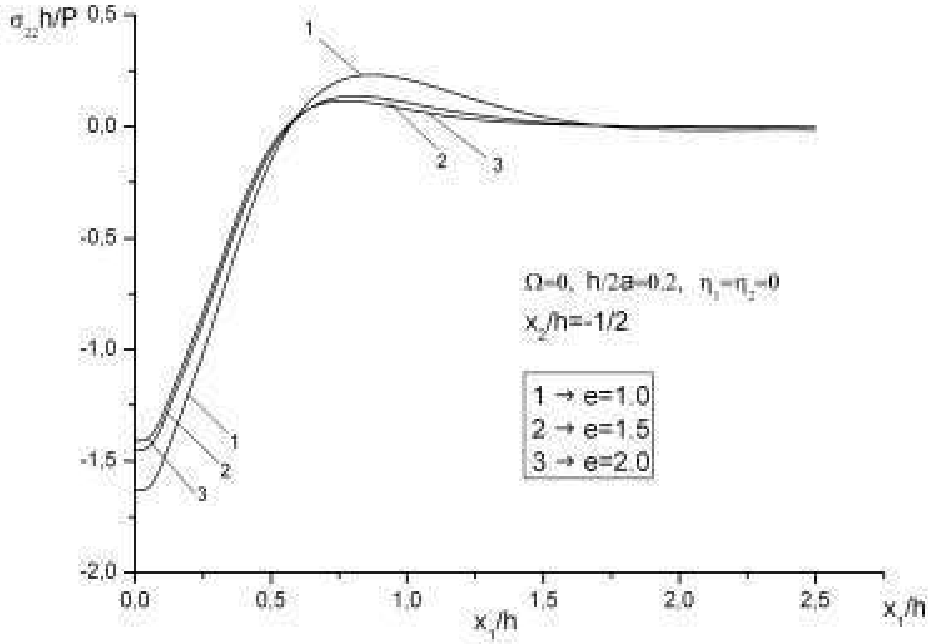
tanımları yapılacak ve $\rho^{(1)} / \rho^{(2)} = 1$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.33$ ve $h_1 = h_2 = h/2$ olarak kabul edilecektir.

4.4.1. [-a,a] aralığının h/2a→0 için genişletilerek analitik çözümlere yakınsaması

Öncelikle, geliştirilen algoritmanın geçerliliği incelenmiştir. Bunun için $\Omega = 0$, $e = 1$ ve $\eta_1 = \eta_2 = 0$ olduğu durum ele alınmıştır. Belirtilen kabuller altında farklı $h/2a$ değerleri için elde edilen grafikler şekil 4.4 te verilmiştir. Sonsuz uzunluğa sahip şerit-plak için [34] çalışmasında $\nu = 0.33$ durumu için ele alınan problem Fourier integral dönüşümü ile çözülmüş olup, şekil 4.4 te gösterilmiştir. Dikkat edilirse $h/2a$ değerleri azaldıkça elde edilen sonlu eleman çözümleri [34] çözümüne yakınlaşmaktadır. Diğer bir deyişle, $h/2a \to 0$ iken mevcut metotla elde edilen sonuçlar [34] teki sonuca yakınlaşmaktadır. Böylece geliştirilen algoritmanın geçerliliği gösterilmiş olur.



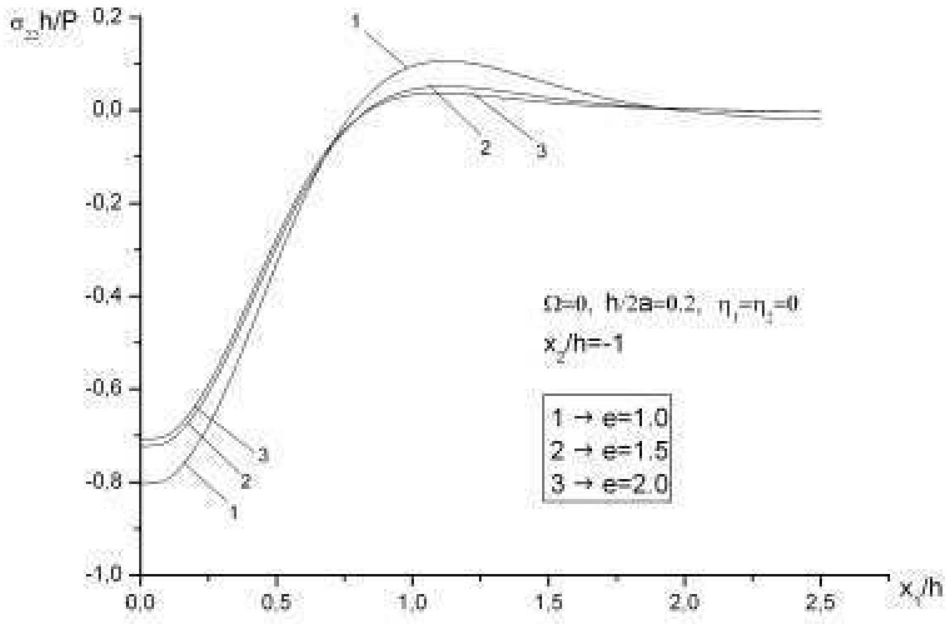
Şekil 4.4 $\Omega = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$ olduğu durumda farklı $h/2a$ değerleri için $x_2/h = -1$ yüzeyinde $\sigma_{22}h/P$ gerilme değerlerinin x_1/h ekseni boyunca dağılımı



Şekil 4.5 $\Omega = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ve $h/2a = 0.2$ olduğu durumda e -nin $x_2/h = -1/2$ de $\sigma_{22}h/P$ gerilme değerlerine etkisi

4.4.2. e=E$^{(1)}$/E$^{(2)}$ değerinin etkisi

Diğer yandan x_1/h ekseni boyunca $x_2/h=-1/2$ de $\sigma_{22}^{(1)}$ gerilme dağılımı Şekil 4.5 te ve $x_2/h=-1$ de $\sigma_{22}^{(2)}$ gerilme dağılımı Şekil 4.6 da farklı e değerleri için gösterilmiştir. Şekil 4.5 ve 4.6 daki grafikler de algoritmanın geçerli olduğunu vurgulamaktadır. Bu grafikler incelendiğinde e değeri arttıkça $x_1/h=0$ noktası civarındaki gerilme değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu gözlem [8-12,14,20] çalışmalarında elde edilen sonuçlara uygun bir durum arz etmektedir.



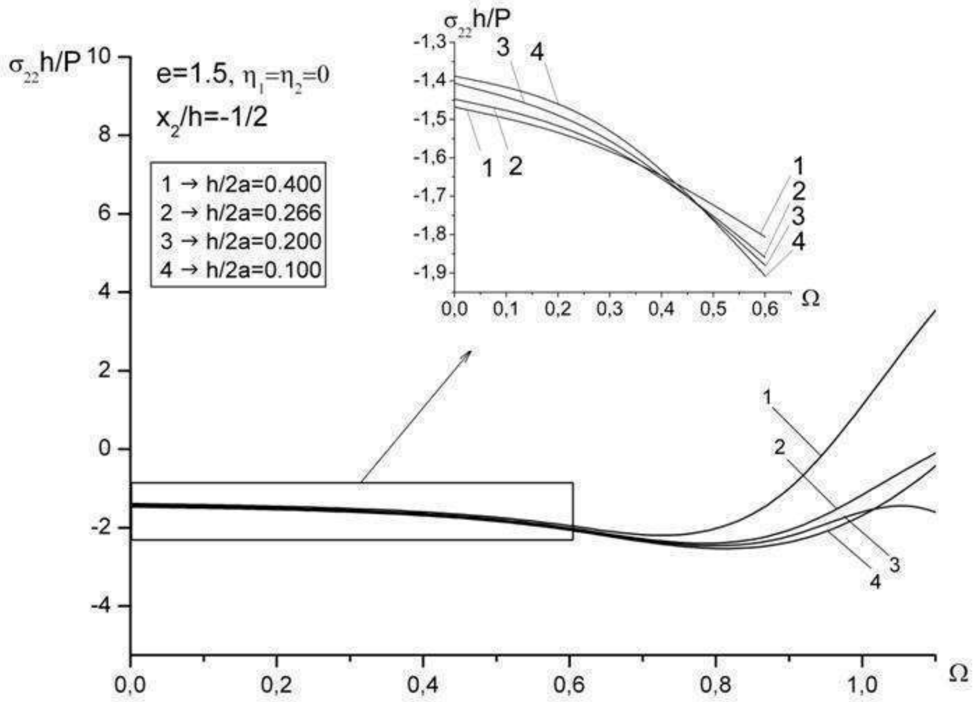
Şekil 4.6 $\Omega=0$, $\eta_1=\eta_2=0$ ve $h/2a=0.2$ olduğu durumda e -nin $x_2/h=-1$ de $\sigma_{22}h/P$ gerilme değerlerine etkisi

4.4.3. Ω boyutsuz frekansının etkisi

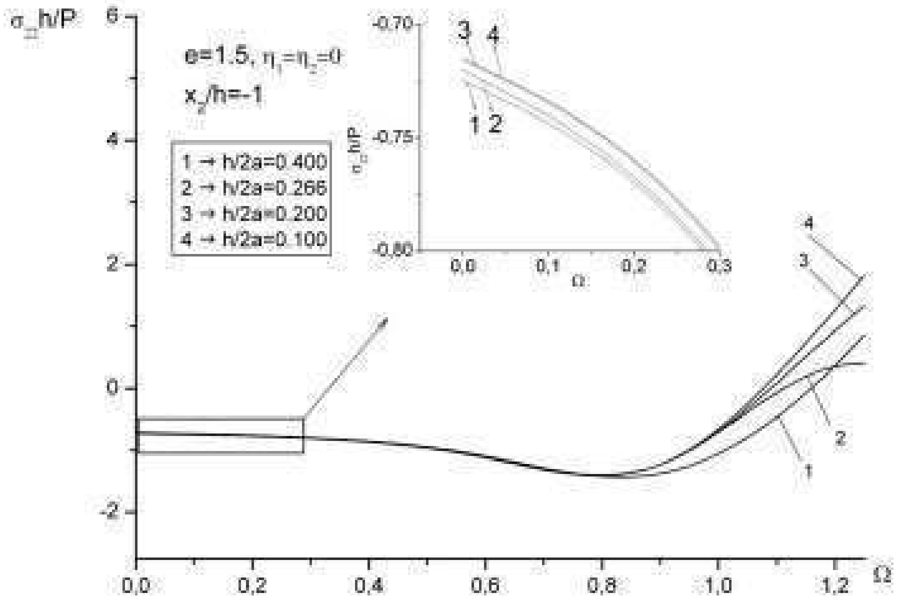
Üçüncü olarak, ele alınan problemde Ω boyutsuz frekansının etkisi incelenmiştir. Şekil 4.7 ve 4.8 de

$$\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{\substack{x_2/h=-1/2\\ x_1/h=0}} h/P \text{ ve } \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{\substack{x_2/h=-1\\ x_1/h=0}} h/P$$

değerleri ile Ω arasındaki bağımlılık verilmiştir. Burada $e=1.5$ ve $\eta_1=\eta_2=0$ kabul edilerek farklı $h/2a$ değerleri için grafikler çizilmiştir. Şekil 4.7 ve 4.8 deki grafikler incelendiğinde gerilme değerleri ile boyutsuz frekans arasında monoton olmayan bir ilişkinin var olduğu görülür ve bu durum [8-12,14,20] çalışmaları ile uyumludur. Yani, dış kuvvetin öyle bir "rezonans" frekansı vardır ki (bu frekansa Ω_* adı verilsin), bu frekansta gerilme ve yerdeğiştirmeler mutlak değerce maksimum değerlerini alırlar. Bununla birlikte $h/2a$ değeri azaldıkça grafiklerin birbirine yaklaştığı görülmektedir. Ayrıca, şekil 4.7 den şerit-plağın $h/2a$ uzunluğunun $x_2/h=-1/2$ deki $\sigma_{22}^{(1)}$ gerilmesine etkisinin Ω boyutsuz frekansına bağlı olduğu anlaşılmaktadır. $0\le\Omega\le 0.4$ arasındaki küçük Ω değerleri için $x_1/h=0$ da $\sigma_{22}^{(1)}$ gerilme değerleri $h/2a$ arttığında artmaktadır. Ancak $\Omega>0.4$ için $x_1/h=0$ da $\sigma_{22}^{(1)}$ gerilme değerleri $h/2a$ arttığında azalmaktadır. Bu azalma $\Omega\to\Omega_*$ iken daha belirgin bir hale gelmektedir. Diğer yandan, şekil 4.8 e göre, şerit-plağın $h/2a$ uzunluğunun $x_2/h=-1$, $x_1/h=0$ daki $\sigma_{22}^{(2)}$ gerilmesine etkisinin her Ω değeri için $h/2a$ arttığında artmaktadır ve bu artış $\Omega\to\Omega_*$ iken daha belirgin bir hale gelmektedir.



Şekil 4.7 $e=1.5$, $\eta_1=\eta_2=0$ ve $x_1/h=0$ olduğu durumda farklı $h/2a$ için Ω ile $\sigma_{22}h/P$ ($x_2/h=-1/2$ de) gerilmesinin değeri arasındaki bağımlılık



Şekil 4.8 $e=1.5$, $\eta_1=\eta_2=0$ ve $x_1/h=0$ olduğu durumda farklı $h/2a$ için Ω ile $\sigma_{22}h/P$ ($x_2/h=-1$ de) gerilmesinin değeri arasındaki bağımlılık

4.4.4. Öngerilmenin etkisi

Dördüncü olarak, katmanlardaki öngerilmenin etkisi incelenmiştir. Katmanlardaki η_m öngerilmesinin x_1/h ekseni boyunca $\sigma_{22}^{(1)}|_{x_2/h=-1/2}\, h/P$ ve $\sigma_{22}^{(2)}|_{x_2/h=-1}\, h/P$ gerilme dağılımına etkisine bakılacaktır.

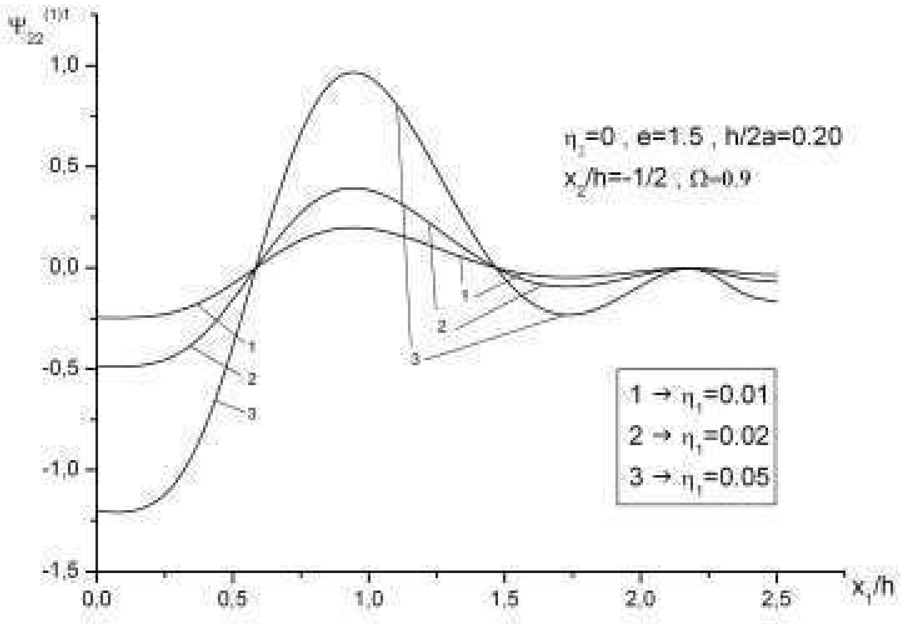
$$\Psi_{22}^{(1)1} = 10^2 \times \left(\sigma_{22}^{(1)}(x_1,-h/2)|_{\substack{\eta_1=0\\ \eta_2=0}} - \sigma_{22}^{(1)}(x_1,-h/2)|_{\substack{\eta_1>0\\ \eta_2=0}} \right) h/P$$

$$\Psi_{22}^{(2)1} = 10^2 \times \left(\sigma_{22}^{(2)}(x_1,-h)|_{\substack{\eta_1=0\\ \eta_2=0}} - \sigma_{22}^{(2)}(x_1,-h)|_{\substack{\eta_1>0\\ \eta_2=0}} \right) h/P$$

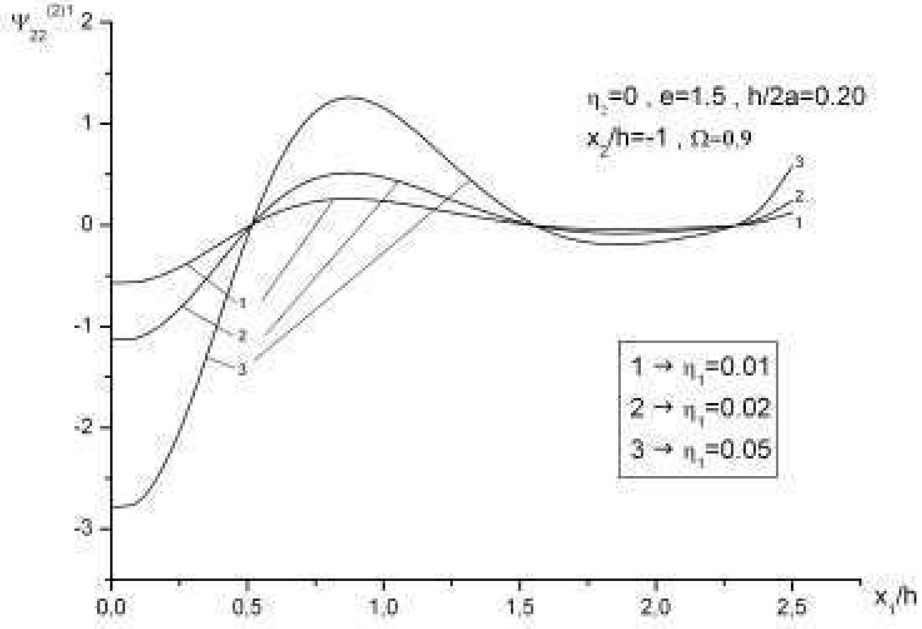
$$\Psi_{22}^{(1)2} = 10^2 \times \left(\sigma_{22}^{(1)}(x_1,-h/2)|_{\substack{\eta_1=0\\ \eta_2=0}} - \sigma_{22}^{(1)}(x_1,-h/2)|_{\substack{\eta_1=0\\ \eta_2>0}} \right) h/P$$

$$\Psi_{22}^{(2)2} = 10^2 \times \left(\sigma_{22}^{(2)}(x_1,-h)|_{\substack{\eta_1=0\\ \eta_2=0}} - \sigma_{22}^{(2)}(x_1,-h)|_{\substack{\eta_1=0\\ \eta_2>0}} \right) h/P \qquad (4.74)$$

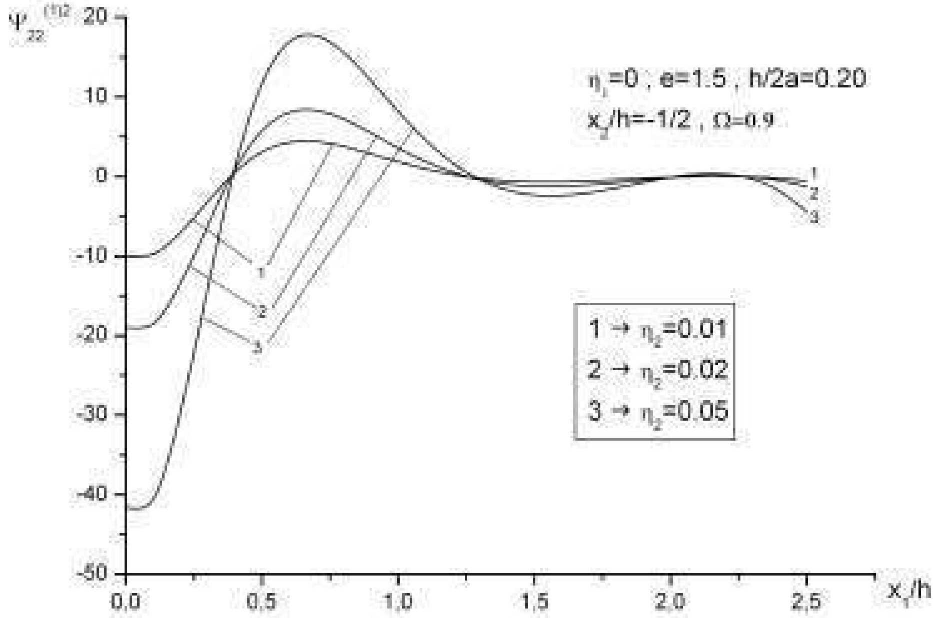
olsun. $e=1.5$, $\Omega=0.9$ ve $h/2a=0.2$ durumu için $\Psi_{22}^{(1)1}$, $\Psi_{22}^{(2)1}$, $\Psi_{22}^{(1)2}$, $\Psi_{22}^{(2)2}$ ile x_1/h arasında çizilen grafikler, sırasıyla, şekil 4.9, 4.10, 4.11 ve 4.12 de verilmiştir. Şekillerdeki grafikler göz önüne alındığında katmanlardaki öngerilmenin etkisinin incelenen noktaya göre farklılık arz ettiği görülecektir. Yine bu grafikler incelendiğinde, $x_1/h=0$ noktasında daha kayda değer bir etkinin varlığı ve öngerilmenin artması ile $x_1/h=0$ noktasında gerilmenin azaldığı görülecektir. Ayrıca, birinci katmana göre ikinci katmanın öngerilmesinin $\sigma_{22}^{(2)}$ gerilme değerine daha fazla etkiye sahip olduğu görülmektedir (şekil 4.10 ve 4.12).



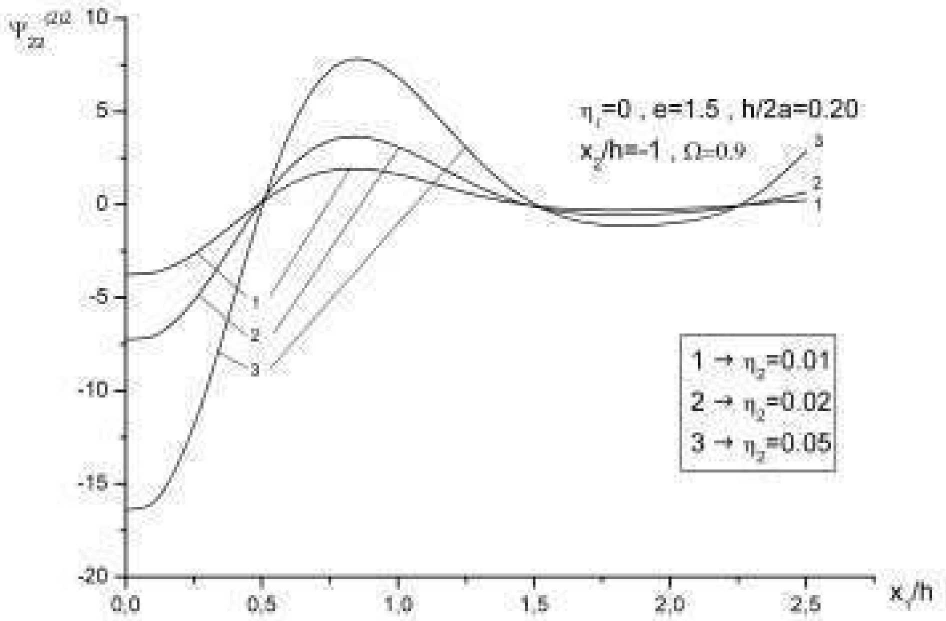
Şekil 4.9 $e = 1.5$, $\Omega = 0.9$, $h/2a = 0.2$ için birinci katmandaki öngerilmenin $x_2/h = -1/2$ de $\sigma_{22}h/P$ değerine etkisi ($\eta_2 = 0$)



Şekil 4.10 $e = 1.5$, $\Omega = 0.9$, $h/2a = 0.2$ için birinci katmandaki öngerilmenin $x_2/h = -1$ de $\sigma_{22}h/P$ değerine etkisi ($\eta_2 = 0$)



Şekil 4.11 $e = 1.5$, $\Omega = 0.9$, $h/2a = 0.2$ için ikinci katmandaki öngerilmenin $x_2 / h = -1/2$ de $\sigma_{22}h/P$ değerine etkisi ($\eta_1 = 0$)



Şekil 4.12 $e = 1.5$, $\Omega = 0.9$, $h/2a = 0.2$ için ikinci katmandaki öngerilmenin $x_2 / h = -1$ de $\sigma_{22}h/P$ değerine etkisi ($\eta_1 = 0$)

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Elastodinamiğin öngerilmeli cisimleri içeren problemleri lineer olmayan problemlere bir örnek olup, elastodinamiğin klasik lineer teorisi çerçevesinde çözülmesi mümkün değildir. Uygulamalı ve sayısal matematiğin önemli bir çalışma konusu olan elastik ortamlar dinamiğinde lineer olmayan bir problem ele alınarak matematik modeli kurulmuş ve sayısal çözümleme için de sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Ele alınan lineer olmayan problemin klasik lineer teori çerçevesinde çözülmesi mümkün değildir. Bu çalışma Öngerilmeli Cisimlerdeki Elastik Dalgaların Üç boyutlu Doğrusallaştırılmış Teorisi çerçevesinde gerçekleştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında önce sonlu boyutlara sahip bir katmanlı şerit-plak için daha sonra iki katmanlı durum için matematik model geliştirilmiş ve ilgili matematik modelin kurulması ardından sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm önerisinde bulunularak elde edilen yaklaşık çözümler ile problem parametrelerinin değişiminin etkisi ortaya konulmaya çalışılmıştır.

Bu çalışma kapsamında elde edilen sayısal sonuçlar ve değerlendirilmeleri aşağıdaki biçimde verilebilir:

— Bu tez çalışmasında önce rijit zemin üzerine oturan sonlu boyutlara sahip homojen, izotrop ve lineer elastik malzemeden yapılmış bir katmanlı şerit-plak için matematik model geliştirilmiştir. Şerit-plaktaki öngerilmenin homojen olduğu ve şerit-plak kenarlarında etki gösteren düzgün yayılı normal yükleme sonucunda oluştuğu varsayılmıştır.

— Daha sonra iki katmanlı durum için matematik model geliştirilmiştir.

— Modeli kurulan ve analitik çözümü mümkün olmayan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü sonlu elemanlar yöntemi ile, gerekli bilgisayar algoritmaları tarafımızdan hazırlanarak, elde edilmiştir.

— Her iki durum için problem parametrelerinin değişiminin, öngerilmenin ve uygulanan yükün frekansının etkisi incelenmiştir.

— Elde edilen sayısal sonuçların doğruluğu özel durumlar için literatürde elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak test edilmiştir.

— Bir katmanlı halde şerit-plağın uzunluğu azaldıkça boyutsuz frekans ve gerilmenin "rezonans" değeri artmaktadır.

— İki katmanlı durumda $x_1/h=0$ ve $x_2/h=-1$ de bütün Ω boyutsuz frekans değerleri için katman uzunluklarının azalması σ_{22} gerilme değerinin artmasına neden olmaktadır. Bununla birlikte $x_1/h=0$ ve $x_2/h=-1/2$ de $\Omega \to 0$ iken katman uzunluklarının azalması σ_{22} gerilme değerinin artmasına, $\Omega \to \Omega_*$ iken katman uzunluklarının azalması σ_{22} gerilme değerinin de azalmasına neden olmaktadır.

— Şerit-plağın katmanlarındaki öngerilmenin artışı zemin ile plak arasındaki yüzeyde oluşan gerilmenin azalmasına neden olmaktadır.

— İki katmanlı durum için birinci katmana göre ikinci katmanın öngerilmesinin σ_{22} gerilme değerine daha fazla etkiye sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca katmanlardaki öngerilmenin etkisi $x_1/h=0$ civarında daha belirgin olup, öngerilme arttıkça bu nokta civarında σ_{22} gerilme değerleri azalmaktadır.

— Bu çalışma sonlu boyutlara sahip öngerilmeli cisimler için pek çok açıdan ilk teşebbüsleri ortaya koymaktadır.

Bu tez kapsamında önerilen algoritmalar öngerilmeli ortamlarda bir ve iki katmanlı durum için farklı yükleme ve sınır koşulları kullanılarak geliştirilebilirdir. Ayrıca ele alınan problem üç boyutlu durum için, yine farklı yükleme ve sınır koşulları kullanılarak incelenebilir. Bu açıdan bakıldığında yapılan çalışmanın önemi görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] GUZ, A.N., Elastic Waves in a Body with Initial Stresses, I. General Theory, Naukova Dumka, Kiev, 1986 (in Russian).

[2] GUZ, A.N., Elastic Waves in a Body with Initial Stresses, II. Propagation Laws, Naukova Dumka, Kiev, 1986 (in Russian).

[3] GUZ, A.N., Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses, "A.S.K", Kiev, 2004 (in Russian).

[4] GUZ, A.N., Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, International Applied Mechanics, 2002, 38(1), 35-78.

[5] AKBAROV, S.D., GUZ, A.N., Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders, International Journal of Engineering Science, 2004, 42, 769-791.

[6] AKBAROV, S.D., OZISIK, M., The influence of the third order elastic constants on the generalized Rayleigh wave dispersionin a pre-stressed stratified half-plane, International Journal of Engineering Science, 2004, 41(17), 2047-2061.

[7] AKBAROV, S.D., OZISIK, M., Dynamic interaction of pre-stressed nonlinear elastic layer and half-plane, International Applied Mechanics, 2004, 40(9), 1056-1063.

[8] AKBAROV, S.D., EMIROGLU, I., TASCI, F., The Lamb's problem for a half-space covered with the pre-stretched, International Journal of Mechanical Sciences, 2005, 47, 1326-1349.

[9] AKBAROV, S.D., ZAMANOV, A.D., SULEIMANOV, T.R., Forced vibration of a prestretched two-layer slab on a rigid foundation, Mechanics of Composite Materials, 2005, 41(3), 229-240.

[10] AKBAROV, S.D., On the dynamical axisymmetric stress field in a finite pre-stretched bilayered slab resting on a rigid foundation, Journal of Sound and Vibration, 2006, 294(1-2), 221-237.

[11] AKBAROV, S.D., The influence of the third order elastic constants on the dynamical interface stress field in a half-space covered with a pre-stretched layer, International Journal of Non-Linear Mechanics, 2006, 41(3), 417-

425.

[12] AKBAROV, S.D., Dynamical (time-harmonic) axisymmetric interface stress field in the finite pre-strained half-space covered with the finite pre-stretched layer, International Journal of Engineering Science, 2006, 44(1-2), 93-112.

[13] AKBAROV, S.D., Frequency response of the axisymmetrically finite pre-stretched slab from incompressible functionally graded material on a rigid foundation, International Journal of Engineering Science, 2006, 44(8-9), 484-500.

[14] AKBAROV, S.D., Axisymmetric Lamb's problem for the finite pre-strained half-space covered with the finite pre-stressed layer, International Applied Mechanics, 2007, 43(3), 132-143.

[15] AKBAROV, S.D., GULER, C., On the stress field in a half-plane covered by the pre-stretched layer under the action of arbitrary linearly located time-harmonic forces, Applied Mathematical Modelling, 2007, 31, 2375-2390.

[16] ZHUK, Ya.A., GUZ, I.A., Influence of prestress on the velocities of plane waves propagating normally to the layers of nanocomposites, International Applied Mechanics, 2006, 42(7), 729-743.

[17] Ya.A. Zhuk, I.A. Guz, Features of propagation of plane waves along to the layers of an initially stressed nanocomposite material, International Applied Mechanics, 2007, 43(4), 3-26.

[18] GUZ, A.N., Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies, Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork: Springer, 1999.

[19] AKBAROV, S.D., Recent investigations on the dynamical problems of the elastic body with initial (residual) stresses (review), Int. Appl. Mech., 43, No.12, 3-27 (2007).

[20] YAHNIOGLU, N., On the stress distribution in the pre-strained simply supported strip containing two neighbouring circular holes under forced vibration, Int. Appl. Mech., 43, No.10, 135-140 (2007).

[21] ZHUK, Yu.A., GUZ, I.A., Features of plane wave propagation along the layers of a pre-strained nanocomposite, Int. Appl. Mech., 43, No.3, 361-379 (2007).

[22] ROGERSON, G.A., SANDIFORD, K.J., The effect of finite primary deformations on harmonic waves in layered elastic media, Int. J. Solid. Struct., 37, 2059-2087 (2000).

[23] GUZ, A.N., RUSHCHITSKY, J.J., GUZ, I.A., Establishing fundamentals of the mechanics of nanocomposites, Int. Appl. Mech., 43, No.3, 247-271 (2007).

[24] CHAKRABORTY, A., GOPALAKRISHNAN, S.A., A spectral formulated finite element for wave propagation analysis in layered composite media, International Journal for Solids and Structures, 2004, 41(12), 5155-5183.

[25] CHAKRABORTY, A., GOPALAKRISHNAN, S.A., Thermoelastic wave propagation in anisotropic layered media: a spectral element formulation, International Journal for Computational Methods, 2004, 1(3), 535-567.

[26] RIZZI, S.A., DOYLE, J.F., A spectral element approach to wave motion in layered solids, Journal of Vibration and Acoustics, 1992, 114, 568-77.

[27] THOMSON, W.T., Theory of Vibration, 4th Ed., Kluwer Academic, 1999.

[28] DOWLING, N.E., Mechanical Behaviour of Materials, 2nd Ed., Prentice Hall, 1999.

[29] POPOV, E.P., Engineering Mechanics of Solids, 2nd Ed., Prentice Hall, 1999.

[30] CRAIG, R.R., Mechanics of Materials, JohnWiley&Sons, 1996.

[31] JOHN, F., Partial Differential Equations, 4th Ed., Springer, 1982.

[32] CHERKAEV, A., CHERKAEV, E., Calculus of Variations and applications, Lecture Notes, 2003.

[33] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., The Finite Element Method, 4th. Ed. Vol.1, Basic formulation and linear problems, MacGraw-Hill Book Company, London, 1989.

[34] UFLYAND, Ya S., Integral Transformations in the Theory of Elasticity, Nauka, Moscow-Leningrad, 1963.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa ERÖZ, 19 Ağustos 1976 da Sakarya'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Ahmet Akkoç İlkokulu ve Sakarya Anadolu Lisesi'nde tamamladıktan sonra 1994 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik öğretmenliği bölümüne girdi. 1998 yılında mezun olduktan sonra 1998-2003 yılları arasında MEB da ve SAÜ Vakfı Özel Lisesi'nde matematik öğretmenliği yaptı. 2003-2005 yılları arasında Sakarya Üniversitesi'nde yüksek lisans eğitimini tamamladı. Halen 2003 yılında başladığı araştırma görevliliğini Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde sürdürmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.