

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURAN ÖNGERİLMELİ BİR
PLAKA İÇİN DİNAMİK GERİLME ALAN PROBLEMİNİN
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ
Ahmet DAŞDEMİR**

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
**Enstitü Bilim Dalı : FONKSİYONLAR TEORİSİ VE
FONKSİYONEL ANALİZ**
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa ERÖZ

Eylül 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURAN ÖNGERİLMELİ BİR
PLAKA İÇİN DİNAMİK GERİLME ALAN PROBLEMİNİN
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE ANALİZİ**

DOKTORA TEZİ

Ahmet DAŞDEMİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 18 / 09 /2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Doç. Dr.
Yaşar BOLAT
Jüri Başkanı**

**Doç. Dr.
Sadık BAĞCI
Üye**

**Yrd. Doç. Dr.
Murat GÜZELTEPE
Üye**

**Yrd. Doç. Dr.
Mustafa ERÖZ
Üye**

**Yrd. Doç. Dr.
Kenan YILDIRIM
Üye**

TEŞEKKÜR

Tüm öğrenim hayatım boyunca en iyi şekilde yetişmem için maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve canım abime sonsuz minnetlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarımı yönlendiren, çalışmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişmeme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa ERÖZ'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
TABLolar LİSTESİ	x
ÖZET	xi
SUMMARY	xii

BÖLÜM 1.

GİRİŞ	1
-------------	---

BÖLÜM 2.

TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Bazı Matematiksel Kavramlar ve Formüller	5
2.2. Elastisite Kavramları	10
2.2.1. Malzeme özellikleri.....	10
2.2.2. Gerilme ögeleri	11
2.2.3. Yer değiştirme ve zorlanma	13
2.2.4. Hooke kanunu	13
2.2.5. Yer değiştirme ve zorlanma arasındaki ilişki	14
2.2.6. Lamé sabitleri.....	18
2.2.7. Sanal iş prensibi	21

BÖLÜM 3.

RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURMUŞ ÖNGERİLMELİ BİR CİSİMİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ.....	23
3.1. Problemin Ortaya Konulması	23

3.2. Problemin Varyasyonel Formülasyonu	28
3.3. Varyasyonel Formülasyonun Doğruluğu	34
3.4. Problemin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü.....	45
3.5. Sayısal Bulgular ve Tartışmalar	61
BÖLÜM 4.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	84
KAYNAKLAR.....	86
EKLER.....	89
ÖZGEÇMİŞ	91

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

- $a_{ik,jk}$: İlgili düğüm noktasında Ox_1 eksen yönündeki yer değiştirme
- $b_{ik,jk}$: İlgili düğüm noktasında Ox_2 eksen yönündeki yer değiştirme
- B : Cismin kartezyen koordinatlarda oluşturduğu bölge
- $B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$: Toplam potansiyel enerji fonksiyonelinin bilineer kısmı
- \mathfrak{B} : Şekil fonksiyonlarını içeren matris
- c_1 : Dalga genişleme hızı
- c_2 : Enine dalga hızı
- $d_{ik,jk}$: İlgili düğüm noktasında Ox_3 eksen yönündeki yer değiştirme
- \mathfrak{D} : Malzeme sabitlerini içeren matris
- E : Elastisite (Young) modülü
- \mathbf{f} : Sağ taraf vektörü
- $J(\mathbf{u})$: Toplam potansiyel enerji fonksiyoneli
- K : Katılık matrisi
- $l(\mathbf{v})$: Toplam potansiyel enerji fonksiyonelinin lineer kısmı
- $N_{ij}(x_1, x_2, x_3)$: Şekil fonksiyonları
- p_0 : Şerit-plağın üst yüzeyine normal doğrultuda etki eden noktasal yükün yoğunluğu
- P : Cisme uygulanan zamana göre harmonik yükün uygulandığı nokta
- P' : P noktasının rijit zemin üzerindeki izdüşümü olan nokta
- R : Rijit yarı düzlem
- SEY : Sonlu elemanlar yöntemi
- TLTEWISB : Öngerilmeli Cisimlerdeki Elastik Dalgaların Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Teorisi (Three-Dimensional Linearized

Theory of Elastic Waves in Initially Stressed Bodies)

$\mathbf{u}^{(y)}$: Sonlu eleman yaklaşık çözümü
u_1, u_2, u_3	: Sırasıyla Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 doğrultusundaki yer değiştirme
v_1, v_2, v_3	: Sırasıyla Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 doğrultusundaki test fonksiyonları
x_1, x_2, x_3	: Global Lagrange koordinatları
$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$: Boyutsuz Lagrange koordinatları
$\tilde{\mathbf{x}}$: Düğüm noktalarındaki bilinmeyen yer değiştirmeleri içeren vektör
$\delta J(\mathbf{u})$: Toplam potansiyel fonksiyonelinin birinci varyasyonu
$\delta(x_i)$: Dirac delta fonksiyonu
δ_{ij}	: Kronecker sembolü
$\boldsymbol{\varepsilon}$: Zorlanma ögelerinin oluşturduğu vektör
ε_{ij}	: Şekil değiştirme tansörü bileşenleri
Γ	: Cismin yüzeyi
$\eta_2^{(\ell)}$: Başlangıç gerilme notasyonu
λ, μ	: Lamé sabitleri
ρ	: Cismin doğal haldeki yoğunluğu
σ_{ij}	: Gerilme tansörü bileşenleri
σ_{ij}^0	: Cismin iki kenarından çekme yükü ile çekildiğinde oluşan gerilme
$\boldsymbol{\sigma}$: Gerilme ögelerinin oluşturduğu vektör
Ω	: Boyutsuz frekans

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Bölge ve sınır	8
Şekil 2.2. Gerilmenin oluşumu.....	12
Şekil 2.3. Gerilme ögeleri için indis gösterimleri	12
Şekil 2.4. Tavandan asılı çubuk	15
Şekil 2.5. Çubuğun küçük bir bölümü	15
Şekil 3.1. Problemin geometrisi	24
Şekil 3.2. Sınır bölgeleri ve doğrultu kosinüsleri.....	29
Şekil 3.3. SE bölgeleri.....	47
Şekil 3.4. Pilot eleman ve düğüm noktalarının dizilişi	56
Şekil 3.5. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_3/h=a_3/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_1/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ dağılımı	64
Şekil 3.6. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_1/h=a_1/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_3/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ dağılımı	64
Şekil 3.7. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_3/h=a_3/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_1/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ dağılımı	65
Şekil 3.8. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_1/h=a_1/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_3/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ dağılımı	65
Şekil 3.9. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_3/h=a_3/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_1/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ dağılımı	66
Şekil 3.10. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_1/h=a_1/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_3/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ dağılımı.....	66
Şekil 3.11. $E=1$, $\Omega=0$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $h/2a=0.05$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	68
Şekil 3.12. $E=1$, $\Omega=0$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $h/2a=0.1$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	68

Şekil 3.13. $E=1, \Omega=0, \nu=0.33, \eta_2=0, h/2a=0.2$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	69
Şekil 3.14. $E=1, \Omega=0, \nu=0.33, \eta_2=0, h/2a=0.4$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	69
Şekil 3.15. $E=1, \nu=0.33, \Omega=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	71
Şekil 3.16. $E=1, \nu=0.33, \Omega=0.3$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	71
Şekil 3.17. $E=1, \nu=0.33, \Omega=0.5$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	72
Şekil 3.18. $E=1, \nu=0.33, \Omega=0.8$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı.....	72
Şekil 3.19. $E=1, \nu=0.33, \eta_2=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin dağılımı.....	74
Şekil 3.20. $E=1, \nu=0.33, \eta_2=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin dağılımı.....	75
Şekil 3.21. $E=1, \nu=0.33, \eta_2=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin dağılımı.....	76
Şekil 3.22. $E=1, \nu=0.33$ ve $x_2/h=0$ durumunda Ω 'nın farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin η_2 parametresine göre dağılımı.....	78
Şekil 3.23. $E=1, \nu=0.33$ ve $x_2/h=0$ durumunda Ω 'nın farklı değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin η_2 parametresine göre dağılımı.....	78
Şekil 3.24. $E=1, \nu=0.33$ ve $x_2/h=0$ durumunda Ω 'nın farklı değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin η_2 parametresine göre dağılımı.....	79
Şekil 3.25. $E=1, \nu=0.33, \eta_2^{(3)}=0.01$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2^* 'nin farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin Ω 'ya göre dağılımı.....	82

Şekil 3.26. $E=1$, $\nu=0.33$ $\eta_2^{(3)}=0.01$, $a^*=2$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin η_2^* 'a göre dağılımı..... 83

Şekil 3.27. $E=1$, $\nu=0.33$ $\eta_2^{(3)}=0.01$, $a^*=1$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin η_2^* 'a göre dağılımı..... 83

TABLolar LİSTESİ

Tablo 3.1 $m=p=10$, $\nu=0.33$ ve $\eta_2=0$ olduğunda farklı boyutsuz frekans Ω için $\ \cdot\ _\infty$ normunun değerleri.....	62
Tablo 3.2 $m=p=20$, $\nu=0.33$ ve $\eta_2=0$ olduğunda farklı boyutsuz frekans Ω için $\ \cdot\ _\infty$ normunun değerleri.....	62
Tablo 3.3 $n=3$, $\nu=0.33$ ve $\eta_2=0$ olduğunda farklı boyutsuz frekans Ω için $\ \cdot\ _0$ normunun değerleri.....	63
Tablo Ek 1 Terimler Sözlüğü.....	89

ÖZET

Anahtar kelimeler: Öngerilme, zamana göre harmonik yük, zorlanmış titreşim, Sonlu Elemanlar Yöntemi, dinamik gerilme alanı

Bu çalışmada, öngerilmeli cisimlerde üç-boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga teorisinin temel prensiplerine göre rijit zemin üzerine oturmuş sonlu boyutlara sahip ve tek katmanlı öngerilmeli plakanın zorlanmış titreşimine karşılık gelen sınır-değer problemi incelenmiştir.

İlk olarak, rijit zemin üzerine oturmuş tek katmanlı ve üç boyutlu öngerilmeli plakanın zorlanmış titreşimine karşılık gelen sınır-değer probleminin matematiksel modeli oluşturulmuştur. Analitik çözümü olmayan bu problemin varyasyonel formülasyonu yapılmış ve bu formülasyonun doğruluğu kanıtlanmıştır. Daha sonra varyasyonel formülasyonu yapılan problemin yer değiştirmeye dayalı Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümler için hata analizi yapılmıştır. Mevcut problemin çözüm algoritması kullanılarak elde edilen sayısal sonuçların aynı varsayımlar altında bu çalışmanın özel halleri olan bazı durumlar için elde edilen sayısal sonuçlara yakınsadığı gösterilmiştir.

Öte yandan, cisimdeki başlangıç gerilmesinin şiddeti ve boyutsuz frekansın etkisi gibi problemin önemli parametrelerinin etkileri araştırılmıştır.

THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF A DYNAMIC STRESS FIELD PROBLEM FOR A PRES-STRESSED SLAB RESTING ON A RIGID FOUNDATION

SUMMARY

Key Words: Initial stress, time-harmonic load, forced vibration, Finite Element Method, dynamical stress field

In this study, the boundary-value problem correspond to the forced vibration of initially stressed slab with finite dimension and one layered resting on a rigid foundation is investigated according to the fundamental principle of the three-dimensional linearized theory of elastic waves in initially stressed bodies.

First, the mathematical modelling of the boundary-value problem correspond to the forced vibration of initially stressed slab with three dimensionless and one layered resting on a rigid foundation is constituted. The variational formulation of the problem has not the analytical solution is made, and the correctness of the formulation is proved. Then the approximation solution of the problem made the variational formulation is obtained by Finite Element Method (FEM) based on displacement. The error analysis for the obtained approxiamtion solutions is made. It is observed that the numerical results obtained by using the solution algorithm of the current problem are converged to ones in certain cases, which are special cases of the current study, under the same assumptions.

On the other hand, the effects of the important problem parameters such as the magnitude of the initial stresses in the body and the influence of the dimensionless frequency are researched.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Elastisite teorisi, mekanik ya da termal yük nedeniyle cisimlerde oluşan gerilme ve yer değiştirmelerin belirlenmesiyle ilgilendir. Bu nedenle çağımızın en önemli çalışma alanlarından ve yaygın olarak çalışılmıştır [1-3]. Elastisite teorisinin oluşturulduğu günden bu yana elastik cisimlerdeki dalga yayılımı çok sayıda araştırmacı tarafından yoğun bir biçimde çalışılmıştır. Özellikle elastodinamik problemler uygulamalı bilimlerin ve mühendisliğin hemen hemen her alanında ortaya çıkar. Bu nedenle [4-5] temel kaynakları elastodinamik dalga incelemeleri üzerine detaylıca bilgi vermektedir. Ortaya çıkan bir çok mekanik ya da fiziksel olayların matematiksel formülasyonu diferensiyel denklemlerden oluşan bir sistem ile ifade edilir. Bu olayların incelenmesi ise bu problemlerin çözülmesi ile mümkündür. Belirlenen bu fiziksel problemler başlangıç değer problemi ya da sınır değer problemi olmak üzere iki şekilde modellenir. Ancak çoğu kez problemin geometrisi, karmaşık malzeme özellikleri veya sınır koşulları gibi nedenlerle analitik çözüme sahip problem sayısı çok azdır. Dolayısıyla yaklaşık sayısal değerler üreten çözüm yöntemleri kullanmak kaçınılmazdır. Oluşturulan bu modellerin bir çoğu kısmi diferensiyel denklemlerle ilgili sınır değer problemlerinden oluşur. Bu problemler çözülürken genel olarak varyasyonel problemlere indirgenir.

Matematiksel modelleme sürecinde modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması bilgisayarda çözülmesi hedeflenen algoritmanın oluşturulmasıdır. Bu işlemin sonucunda ele alınan sınır değer probleminin incelenmesi, uygun cebirsel denklemler takımının çözülmesine indirgenir. Bu durumda, incelenen sınır değer problemi lineer ise elde edilen cebirsel denklem sistemi de lineer olur. Bunların birçok çözüm yöntemi vardır. Günümüzde diferensiyel denklemlerle ilgili modellere karşılık gelen cebirsel denklemler sisteminin oluşturulması ve bundan elde edilen algoritmanın bilgisayarda

çözülebilmesi açısından en kapsamlı ve evrensel yöntem Sonlu Elemanlar Yöntemidir (SEY). SEY gerilme analizi, ısı transferi, elektromanyetizma ve akışkanlar mekaniği gibi mühendislik problemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır [6-9].

Literatürde sayısal çözüm metotları kullanılarak incelenmiş birçok mekanik problem bulunmaktadır. Rogerson ve Sandiford simetrik 4-katmanlı basınç yapılabilir elastik lamine yapılarıdaki küçük genişlikli dalgalara öngerilmelinin etkisini incelediler [10]. Yine Rogerson ve Sandiford periyodik olarak katmanlı bir yapıda yayılan harmonik dalgalara karşılık gelen dağılma bağıntısını oluşturup onların analizini yaptılar [11]. Sergienko ve Deineka lamine malzemelerden oluşan bir bileşik cisim için yeni bir elastik dinamik problemi ele alıp yüksek doğruluk mertebesine sahip bir hesaplama algoritması geliştirmek için Sonlu Elemanlar Yönteminin süreksiz fonksiyonlar sınıfını kullandılar [12]. Nolde ve diğerleri hafif basınç yapılabilir ön deformasyona sahip elastik plakayı, plakanın elastik bağıntılarını çok daha genel olan uygun bir zorlanma enerji fonksiyonunu tanımlayarak incelediler. Farklı hallerdeki davranış tiplerini kanıtlamak için basınç yapılabilir Neo-Hookean, Varga ve Blatz-Ko zorlanma fonksiyonları gibi özel zorlanma enerji fonksiyonlarından faydalandılar [13]. Sandiford ve diğerleri sonlu kalınlıkta ve sonsuz genişlikte Bell kısıtlamasına sahip bir plakadaki harmonik dalgaların yayılımının etkilerini açıkladılar [14]. Parnell periyodik olarak dağılan iki farklı elastik parçadan oluşan bir boyutlu öngerilmeli kompozit çubukta yayılan küçük ölçekli elastik dalgaları çalıştı [15]. Wijeyewickrema ve Leungvichcharoen ön zorlanmalı üç katmanlı (sandviç) plakadaki dalga yayılımını incelediler. Bu çalışmanın temel araştırma konusu mükemmel olmayan değme koşullarının (imperfect contact conditions) dalga yayılımı üzerine etkisidir [16]. Kayestha ve Wijeyewickrema mükemmel olarak sınırlandırılmış öngerilmeli basınç yapılabilir elastik iki katmanlı plakada temel yönler boyunca yayılan zamana göre harmonik dalgaların dağılımının davranışını incelediler [17].

Geçen yüzyılın ikinci yarısından itibaren genel olarak başlangıç gerilmeli cisimlerde üç boyutlu elastik dalgaların lineerleştirilmiş teorisi (Three-dimensional Linearized

Theory of Elastic Waves in Initially Stressed Bodies-TLTEWISB) geliştirilmiş ve başlangıç gerilmeli elastik cisimlerden oluşan dinamik problemler bu teori çerçevesinde ele alınmıştır. [18-19] temel kaynakları bu konu üzerine iyi bilinen sistematik incelemeleri sunar.

TLTEWISB'nin temel prensiplerine bağlı kalarak bir çok mekanik ve fiziksel problem incelenmiştir. Zamanov üç boyutlu sürekli ortamlar mekaniğinin denklemlerini ve yerel olarak eğrilmiş yapılarla birlikte dikdörtgen kompozit plakanın uyarılmış titreşimlerine dayanan bir problemi modellemek için sürekli ortam teorisini kullandı. Bu problemi çözmek için Yarı Analitik Sonlu Eleman Metoduna (Semi Finite Element Method-SFEM) dayalı bir teknik geliştirdi [20]. Akbarov ve Ozaydın üst yüzeyine zamana göre harmonik noktasal bir kuvvet uygulanan başlangıç gerilmesine sahip bir yarım uzayı göz önüne alarak Lamb problemi adı verilen ara yüzeydeki normal ve kesme gerilmelerin değişimini incelediler [22]. Emiroğlu ve diğerleri iki yönde öngerilmeye sahip bir katmanla kaplı yarım uzay için Lamb probleminin çözümünü bulmak amacıyla yeni bir yaklaşım geliştirdiler [23]. Taşçı ve diğerleri öngerilmeli tınlama (rezonans) değerleri üzerine etkisini incelediler ve noktasal olarak yerleştirilmiş kuvvetin tınlama değerlerini belirlemeye çalıştılar [24]. Akbarov ve diğerleri [23]'deki çalışmanın özel bir hali olan Lastik(Rb)+Alüminyum(Al) çiftini ele alarak bazı sayısal sonuçlar elde ettiler [25]. Akbarov ve diğerleri rijit zemin üzerine oturan öngerilmeli iki katmanlı bir plakanın uyarılmış titreşimlerini çalıştılar [26]. Akbarov ve Güler zamana göre harmonik olan açılı kuvvetin etkisi altındaki öngerilmeli katmanla kaplı bir yarım uzaydaki gerilme alan problemini incelediler [27]. Akbarov ve diğerleri basınç yapılabılır oldukça elastik malzemedeki yapılmış başlangıç zorlanmalı sandviç plakadaki enine ve boyuna Lamb problemini incelediler [28].

Yukarıda çalışmalarda göz önünde tutulan durumlar katman(lar)ın ve yarım düzlemin birinin veya hepsinin ya sadece genişlik ya da hem uzunluğunun hem de genişliğinin sonsuz olduğu varsayımı altında incelendiğinden genel olarak Fourier dönüşümü kullanılmıştır. İlgili problemlerin sayısal çözümleri bu varsayım altında tam çözüme yakınsar. Ancak sonlu uzunluk ve genişlikte yukarıda önerilen çözüm

yöntemi uygulanamaz. Bu yüzden Akbarov ve diğçerleri sırasıyla rijit zemin üzerinde oturan sonlu uzunluklu öngerilmeli iki katmanlı plakadaki zamana göre harmonik gerilme alan problemini ve rijit zemin üzerinde oturan sonlu uzunluklu öngerilmeli tek katmanlı şerit plaka için zamana göre harmonik dinamik gerilme alan problemlerini incelediler [29-30]. Eröz eğimli ve zamana göre harmonik dış kuvvetin etkisi altında olan rijit zemin üzerine oturmuş sonlu uzunluklu öngerilmeli şerit plaka için dinamik gerilme alan problemini inceledi [31]. Ayrıca Daşdemir ve Eröz iki katmandan oluşan iki boyutlu bir cismin üst yüzeyinin orta noktasına keyfi eğimle yerleştirilmiş zamana göre harmonik kuvvetin uygulandığı durumu incelediler [32].

Bu tez çalışmasında, rijit zemin üzerine oturan zamana göre harmonik bir kuvvetin etkisi altındaki bütün uzunlukları sonlu ve öngerilmeli üç boyutlu tek katmanlı bir cismin gerilme alan problemi TLTEWISB'nin temel prensiplerine göre ele alınmaktadır. Bu probleme karşılık gelen varyasyonel problem SEY kullanılarak yaklaşık çözülecektir. [30]'da verilen referans bu çalışmanın özel bir halidir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bu çalışmayı oluşturan konularla ilgili temel oluşturacağı düşünülen bazı yararlı bilgiler sunulacaktır.

2.1. Bazı Matematiksel Kavramlar ve Formüller

Fiziksel olayların matematiksel tanımlarında ilk olarak koordinat sisteminin tanımı yapılır ve bu tanımda verilen farklı fiziksel nicelikler bu sistemde yapılan ölçümler cinsinden sunulur. Vektör ve tansör nicelikleri bu koordinat sisteminde onların ögeleri cinsinden sunulur. Örneğin üç boyutlu bir uzayda bir vektör

$$\mathbf{A} = a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2\hat{\mathbf{e}}_2 + a_3\hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.1)$$

şeklinde $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ baz vektörleri ve (a_1, a_2, a_3) skaler ögeleri cinsinden yazılabilir. Hemen belirtelim ki bu çalışma boyunca vektörler ve matrisler kalın harflerle yazılacaktır. Koordinat sisteminin baz vektörlerinin uzunluğu ve yönü sabit olduğunda bu koordinat sistemine Kartezyen koordinat sistemi denir. Genelde Kartezyen koordinat sistemi eğiktir. Kartezyen koordinat sistemi dik (ortagonal) olduğunda ise ona dikdörtgen (rectangular) Kartezyen koordinat sistemi adı verilir. Dikdörtgen Kartezyen koordinat sisteminin ögeleri

$$(x_1, x_2, x_3) \text{ ya da } (x, y, z)$$

şeklinde gösterilir. Bazı önemli avantajlar sunduğundan genelde birinci kullanım tercih edilir.

Baz vektörleri birim uzunluğa sahip olduğunda ve karşılıklı olarak dik olduklarında onlara ortanormaldir denir. Birçok durumda ortanormal bazlar hesaplamaları basitleştirir.

Tekrarlı indisin bu indisin bütün değerleri üzerinden toplama işlemine tabi tutulacağı anlamına geldiğini kabul ederek verilen bir toplamı kısaltmak oldukça faydalıdır. Buna göre

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{A}_3\hat{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{A}_i\hat{\mathbf{e}}_i$$

toplamı kısaca

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_i\hat{\mathbf{e}}_i$$

olarak yazılabilir. Tekrarlı indislere kukla indis ismi verilir. Bu indisler çoğu zaman kullanılmayan diğer birçok sembol ile yer değiştirebilir.

Baz vektörlerinin dikdörtgen Kartezyen koordinat sisteminde $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ şeklinde gösterilen “noktasal çarpımı” ve $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j$ şeklinde gösterilen “karma çarpımı” sırasıyla

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ için} \\ 1, & i = j \text{ için} \end{cases} \quad (2.2)$$

ve

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_k$$

şeklinde tanımlanır. Burada ε_{ijk} sembolü, alt indisler devirli sırada ise 1, ters devirli sırada ise -1 ve iki alt indis aynı olduğunda ise sıfır şeklinde tanımlanan alternatif tansör ya da permütasyon sembolüdür.

Koordinatlara göre vektör fonksiyonların diferensiyellenmesi modern bilimde ve mühendislikte ortak öneme sahip bir kavramdır. İşlemlerin çoğu ∇ ile gösterilen ve “del operatörü” ya da “nabla operatörü” adı verilen bir operatör yardımıyla yapılır. Dikdörtgen Kartezyen koordinat sisteminde nabla operatörü

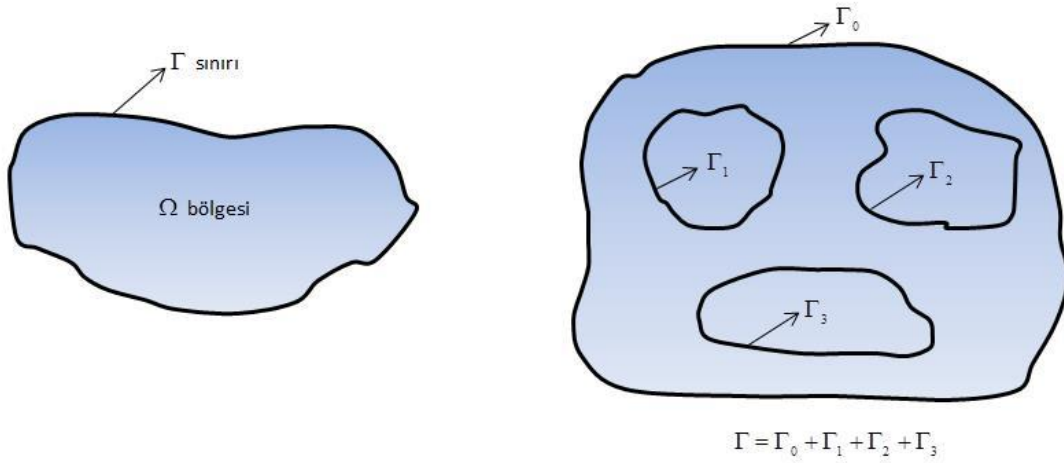
$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada hemen belirtelim ki ∇ operatörü vektörlerin bazı özelliklerine sahip olmasına rağmen onların bütün özelliklerine sahip değildir. $\nabla \times A(x)$ 'e bir A vektör fonksiyonunun *curl*'ü ya da rotasyonu denilirken $\nabla \phi(x)$ işlemine bir ϕ skaler fonksiyonunun gradiyenti denir. Ayrıca $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ operatörüne de Laplace operatörü denir. O halde üç boyutlu (3D) uzayda Laplace operatörü

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Çoğu analizin amacı bir bölge ya da alanda verilen diferensiyel denklemler kümesini ve bölgenin sınırında bazı sınır şartlarını sağlayan bağımlı değişken adı verilen bilinmeyen fonksiyonları belirlemektir. Keyfi bir bölgeyi göstermek için genelde Ω ve onun sınırını göstermek için de Γ sembolü kullanılır. Bu tanımlar Şekil 2.1'de kolaylıkla görülebilir. Bölgenin herhangi iki noktası tamamıyla onun içinde kalacak şekilde bir çizgiyle bağlanabiliyorsa o zaman bu bölgeye konveks ya da basit bağlantılı denir. Çok değişkenli bir fonksiyonun m . mertebe de dahil olmak üzere ilk m mertebeden kısmi türevleri var ve Ω bölgesinde sürekli iseler bu çok değişkenli fonksiyona Ω bölgesi üzerinde $C^m(\Omega)$ sınıfındandır denir. Böylece f , iki boyutta C^0 sınıfında ise sadece f süreklidir. Bazı durumlarda $\partial f / \partial x$ ve $\partial f / \partial y$ kısmi türevleri var olabilir fakat sürekli olmayabilir.



Şekil 2.1. Bölge ve sınır

Bir diferensiyel denklemde eğer bağımlı değişken ve onun muhtemel türevleri sınırdaki özel değerler alıyorsa bu denklemlere bir sınır değer problemi denir. Benzer şekilde bağımlı değişken ve onun muhtemel türevleri başlangıçta (örneğin $t = 0$ zamanında) belirtiliyorsa bu problemlere de başlangıç değer problemi denir.

Kısmi integrasyon formülü diferensiyel denklemlerin integral formülasyonunda sıkça kullanılmaktadır. İki ve üç boyutlu durumda kısmi integrasyon gradiyent ve diverjans teoremleri yardımıyla uygulanır. u , v ve w fonksiyonları x değişkenine göre yeterince diferensiyellenebilen fonksiyonlar olsun. O zaman kısmi integrasyon formülü adı verilen aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_a^b w \frac{dv}{dx} dx = - \int_a^b v dw + [vw]_a^b = - \int_a^b v dw + v(b)w(b) - v(a)w(a) \quad (2.4)$$

Bu ifadenin ispatı iki fonksiyonun çarpımının türevinden kolaylıkla yapılabilir. En genel anlamda bir A bölgesi üzerinde kısmi integrasyon formülü $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ ve \vec{n} dış birim normal vektör olmak üzere

$$\int_A \frac{\partial p(\vec{x})}{\partial x_k} q(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\partial A} p(\vec{x}) q(\vec{x}) \cos(\vec{n}, x_k) ds - \int_A p(\vec{x}) \frac{\partial q(\vec{x})}{\partial x_k} d\vec{x}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ∂A ile A bölgesinin sınırı gösterilmektedir.

∇ ve ∇^2 iki boyutlu (2D) dikdörtgen Kartezyen koordinat sisteminde gradiyent ve Laplace operatörü olsun. $F(x, y)$ ve $G(x, y)$ 'de iki boyutlu bir Ω bölgesinde sırasıyla $C^0(\Omega)$ sınıfından skaler fonksiyon ve vektörel iki fonksiyon olsun. Buna göre gradiyent teoremi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\int_{\Omega} \text{grad} F dx dy = \int_{\Omega} \nabla F dx dy = \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} F ds$$

ya da

$$\int_{\Omega} \left(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_x \hat{\mathbf{e}}_x + n_y \hat{\mathbf{e}}_y) F ds. \quad (2.6)$$

Diverjans teoremi ise şu şekilde ifade edilir:

$$\int_{\Omega} \text{div} G dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot G dx dy = \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot G ds$$

ya da

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y) ds. \quad (2.7)$$

Burada G_x ve G_y (n_x ve n_y) ifadeleri $\hat{\mathbf{n}}(G)$ 'nin dikdörtgensel ögeleridir. Sınır integrallerindeki çember sınırın hepsini gösterir. $\hat{\mathbf{n}}$ birim vektörünün x ve y yönlerindeki n_x ve n_y yönlü ya da doğrultu kosinüsleri sırasıyla

$$n_x = \cos(x, \hat{\mathbf{n}}_x) = \mathbf{e}_x \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{ve} \quad n_y = \cos(y, \hat{\mathbf{n}}_y) = \mathbf{e}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

şeklinde yazılır. Burada $\cos(x, \hat{\mathbf{n}})$ ifadesi pozitif x yönüyle $\hat{\mathbf{n}}$ birim vektörü arasındaki açının kosinüsünü temsil eder. Gradyent ve diverjans teoremlerini kullanarak aşağıdakiler elde edilebilir:

$$\int_{\Omega} (\nabla G) w dx dy = - \int_{\Omega} (\nabla w) G dx dy + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} w G dx dy$$

ve

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 G) w dx dy = - \int_{\Omega} \nabla w \nabla G dx dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{n}}} w dx dy.$$

Burada $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}}$ normal türev operatörünü gösterir ve şu şekilde tanımlanır[9]:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}.$$

2.2. Elastisite Kavramları

2.2.1. Malzeme özellikleri

Elastisite teorisi çerçevesinde yapılan incelemelerde kullanılan malzemenin yapısal özellikleri son derece önemlidir. Bu malzemelerin seçimi yapılan inceleminde farklı prensiplerde yapılmasını gerektirir.

Bir cismin deformasyonu oluşurken eğer dış kuvvetler belli bir limiti aşmıyorsa bu dış kuvvet çıkarıldığında deformasyon durumu ortadan kalkar. Yani cisim başlangıçtaki şekline döner. Kuvvetin çıkarılmasından sonra cisim tamamıyla başlangıç haline dönüyorsa bu cisimlere elastik cisim denir. Aksi durumda elastik olmayan deformasyon meydana gelir. Elastik olmayan deformasyon zamana bağlı değilse plastik deformasyon, zamana bağlı ise sürünme deformasyonu denir.

Bir cisimden koparılan çok küçük bir yapının fiziksel özellikleri cisimle aynı ise bu cisme homojen cisim adı verilir. Yani cismin her noktasında malzeme özellikleri aynı kalmalıdır. Aksi halde homojen olmayan cisim adı verilir. Bir ortam homojen ise zorunlu olarak sürekli olacaktır. Ayrıca bir cisimdeki elastik özellikler bütün yönler boyunca aynı ise bu cisme izotrop cisim denir. Anizotrop malzemelerde ise elastik özellikler seçilen doğrultulara göre farklılık göstermektedir [2].

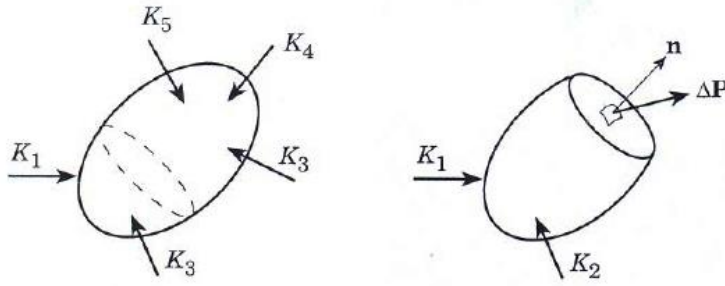
2.2.2. Gerilme ögeleri

Şekil 2.2'deki gibi bazı kuvvetlerin etkisi altında bulunan bir cisim göz önüne alınsın ve bu cisim bir yüzey ile iki parçaya bölünsün. Böylece ayırma yüzeyleri (Uzayda verilen bir bölgenin bir düzlemde ara kesiti) üzerinde, alana yayılı bir iç kuvvet bulunacaktır. Ayrılan parçalardan birinin ayırma yüzeyi üzerindeki bir A noktasında küçük bir ΔA alanı göz önüne alınsın ve bu elemana etki eden kuvvet ΔP olsun. Birim alana etki eden bu kuvvete gerilme (stress) denir ve bu tanım gereği A noktası civarındaki gerilme vektörü aşağıdaki gibi tarif edilir:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

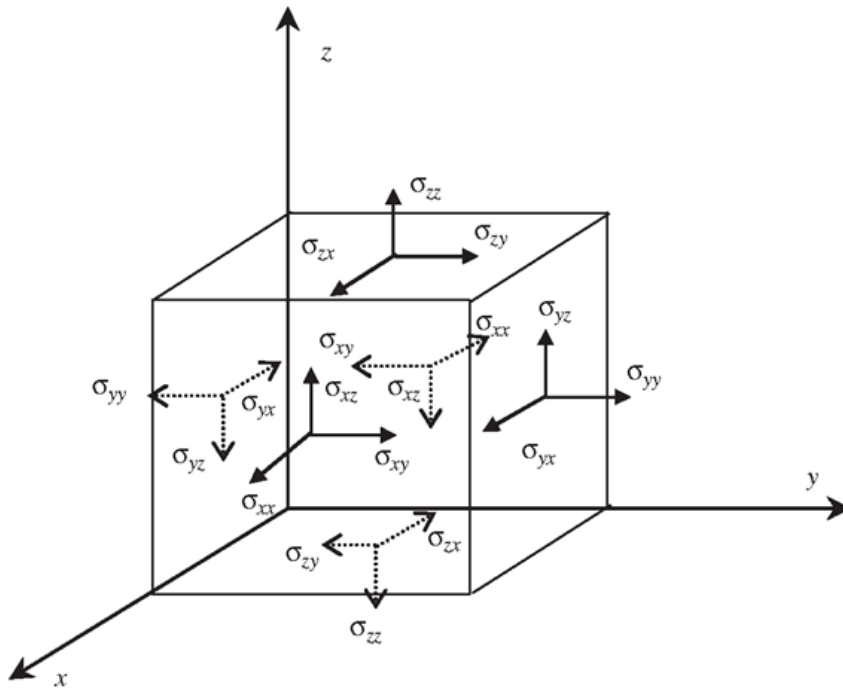
Yukarıda verilen tanımdan da görülebileceği gibi gerilmenin boyutu K/L^2 şeklindedir. Çekimsel birim sistemi kullanıldığında birim olarak kg/cm^2 , ton/mm^2 , ton/m^2 ; SI birim sistemi kullanıldığında ise birim olarak N/m^2 , kN/mm^2 kullanılır. SI sisteminde kullanılan N/m^2 birimine Pascal adı verilmekte olup Pa ile gösterilmektedir. Büyük sayısal değerlerde Pa yerine MPa veya GPa kullanılır.

Gerilme ögeleri genelde uygun alt indislerle birlikte σ sembolü ile gösterilir. Birinci alt indis onun olduğu yüzeyin dış normalinin yönünü ve ikicisi ise gerilme ögesinin yönünü gösterir. Bu kullanım Şekil 2.3'de $Oxyz$ koordinat sisteminde gösteriliyor.



Şekil 2.2. Gerilmenin oluşumu

Bu gösterimin bir sonucu olarak normal gerilmelerin (normal stress) iki aynı alt indise (Şekil 2.3'de $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$) sahip olduklarına ve gerilmelerin pozitif olduklarına dikkat edilmelidir. Şekil 2.3'de geriye kalan altı gerilme ögesi ise ($\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx}, \sigma_{xz}$) iki farklı alt indise sahiptir ve kesme gerilmeleri (shear stress) olarak isimlendirilirler. Birçok problemde kesme gerilmelerin genelde sıfır olduğu yerlerde normal gerilmeler maksimuma ulaşır. Gerilme ögeleri başka koordinat eksenlerinde de tanımlanabilir [3].



Şekil 2.3. Gerilme ögeleri için indis gösterimleri

2.2.3. Yer değiştirme ve zorlanma

Bir P parçacığının yer değiştirmesi, deformasyon boyunca P noktasının hareket ettiği mesafe olan ve P parçacığının ilk ve son pozisyonu arasındaki farkı temsil eden ve genelde \mathbf{u} ile gösterilen bir vektordur. Gerilme ögelerinde olduğu gibi \mathbf{u} vektörünün ögeleri u_x, u_y, u_z gibi uygun alt indislerle gösterilir:

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$

Ancak “rijit cisim yer değiştirmesi” denilen ve deformasyona uğramayan bir yer değiştirme sınıfı da vardır.

Zorlanma (strain) ögeleri uygun alt indislerle birlikte ϵ sembolü ile gösterilir (örneğin $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}$). Gerilme durumunda olduğu gibi, birçok temel kitapta tanımlanan bu niceliğin matematiksel elastisite teorisinde kullanılandan farklı iki indis kullanılmasına rağmen kesme zorlanmalar için hiçbir özel sembol gerekmemektedir. Bu zorlanmaların ikinci mertebeden Kartezyen Tansor yapılması bu tanımın en buyuk avantajıdır [3].

2.2.4. Hooke kanunu

Birçok katı cisim, yük ve ölçülen zorlanma arasında aynı tipte bir ilişki gösterir. Keyfi bir yük altında ölçülen zorlanmanın yükle orantılı olduğu bulunur. Bu ifade tam olarak aşağıdakileri ifade eder:

- (1) Yük arttığında ölçülen zorlanma aynı oranda artar,
- (2) Yük azaldığında ölçülen zorlanma aynı oranda azalır,
- (3) Yük sıfır olduğunda, hiçbir zorlanma ölçülemez.

Dökme metallere başka çoğu sert katının sağladığı deneysel sonuçlar gerilme ve zorlanmaların orantılılığıyla ilgili olan Genelleştirilmiş Hooke Kanununa neden olan bir sürece yol açar. Bu kanunun en genel hali aşağıdaki gibidir:

Bir cismin herhangi bir noktasında altı gerilme ögesinin her biri bu noktadaki altı zorlanma ögesinin lineer bir fonksiyonudur.

Sonuç olarak gerilmedeki bir artış, zorlanmada da orantılı bir artışa neden olur. Bu teori gerçek eğilmeleri kullanarak 1676 yılında Robert Hooke tarafından ortaya konulmuştur ve Hooke kanunu olarak bilinir. Bu ifade matematiksel olarak

$$\sigma = E\varepsilon$$

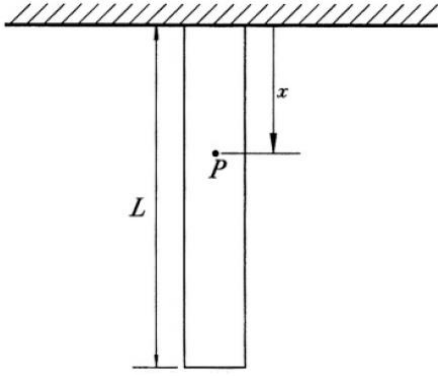
olarak sunulabilir. Burada E elastisite modülü ya da 1807 yılında bunu yayınlayan Thomas Young'ın şerefine Young modülü denilen orantı sabitini temsil eder [1].

2.2.5. Yer değiştirme ve zorlanma arasındaki ilişki

Şekil 2.4'ten asılı normal halde L uzunluğunda ve ρ yoğunluklu bir çubuğu gösteriyor. Çubuğun kendi ağırlığının yükü altında uzunluğunun ne kadar değiştiği bulunmak istensin.

Tavandan x uzaklığına sahip bir P noktasında σ_{xx} normal gerilmesinin

$$\sigma_{xx} = \rho g(L - x)$$



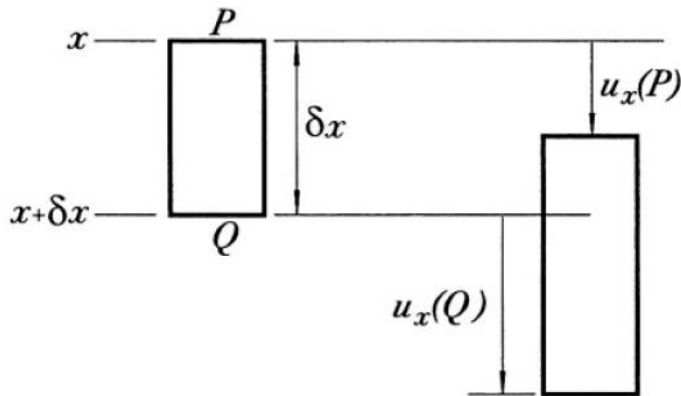
Şekil 2.4. Tavandan asılı çubuk

olduğunu görmek kolaydır. Burada g yer çekimi nedeniyle oluşan ivmedir ve bu yüzden Hooke Kanununa göre

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\rho g (L - x)}{E}$$

dır. Ancak zorlanma çubuğun uzunluğu boyunca sürekli değişir. Bu yüzden zorlanmanın makul bir dereceye kadar sabit olacak şekilde çubuğun son derece küçük bir parçası incelenirse elastisitedeki bazı tanımlar uygulanabilir.

Deformasyon x 'e bağlı olan aşağı yönlü u_x yer değiştirmesi cinsinden tanımlanabilir ve Şekil 2.5'de PQ ile gösterilen x ve $x + \delta x$ arasındaki çubuğun parçası olarak



Şekil 2.5. Çubuğun küçük bir bölümü

göz önüne alınır. Deformasyondan sonra PQ , $u_x(Q) - u_x(P)$ ile genişletilebilir ve bu yüzden cisimdeki normal zorlanmanın yerel değeri

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_x(Q) - u_x(P)}{\delta x} = \frac{u_x(x + \delta x) - u_x(x)}{\delta x}$$

dir. $\delta x \rightarrow 0$ için limit alınırsa,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

tanımı elde edilir. Bu tanım üç boyutlu problemlerde de diğer normal zorlanma ögeleri için geliştirilebilir, şöyle ki

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Bu tanımlar kullanıldığında Şekil 2.4'deki problem oldukça kolay bir hal alır. Böylece

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\rho g (L - x)}{E}$$

ve sonuç olarak

$$u_x = \frac{\rho g (2Lx - x^2)}{2E} + A$$

olur. Burada A gerilme bilgilerini ifade eden keyfi bir integrasyon sabitidir ve bu yüzden cisimdeki zorlanmaların uzaydaki yerlerini belirlemek mümkün değildir. Aslında A keyfi rijit-cisim yer değiştirmesini temsil eder. Bu durumda çubuğun üstünün rijit olan bir tavana bağlandığı varsayımını kullanmaya ihtiyaç vardır. Böylece $u_x(0) = 0$ ve sonuç olarak $A = 0$ dır.

ε_{xx} zorlanmasının iki alt indisi olan x 'in $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ tanımına karşılık geldiğine dikkat edilirse, ε_{xy} kesme zorlanması için $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ ve $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ türevlerinin biri ya da her ikisinde var olduğu bir bağıntıyı araştırmak doğaldır. ε_{xy} kesme zorlanmasını herhangi bir yerde x yönünde oluşturulan bir çizginin rotasyonu ile ilgili rijit-cisim yer değiştirmesi (ω ile gösterilir) arasındaki fark olarak tanımlanır. O halde

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

ya da tansör dilinde

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

şeklinindedir. ε_{ijk} alternatif tansörü daha önce tanımlanmıştı. ω yer değiştirmesi üç boyutlu problemlerde

$$\omega = \frac{1}{2} \text{curl} u = \frac{1}{2} \nabla \times u$$

şeklinde tanımlanan bir vektördür. Fakat iki boyutta ω , ögelerinin ikisi sıfıra eşit olan bir skaler gibi davranış gösterir. Buna göre yukarıdaki tanım gereğince

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \text{ ve } \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

dir. Böylece zorlanma-yer değiştirme bağıntıları daha uygun bir şekilde

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir [3].

2.2.6. Lamé sabitleri

Temel sabitler olarak E elastisite Modülü ve ν Poisson oranı göz önüne alınarak izotropik ortam için lineer elastik gerilme-zorlanma bağıntıları farklı şekillerde ifade edilebilir. Deneysel olarak

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E}$$

denklemleri yazılabilir. ε_{xy} ve σ_{xy} arasındaki ilişki ise dönüşüm bağıntıları kullanılarak incelenebilir. Bazı matematiksel işlemlerden sonra

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1+\nu)\sigma_{xy}}{E}$$

bulunur. Burada

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.9)$$

olarak alınırsa

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu}$$

şeklindedir. Benzer şekilde σ_{xx} gerilmesini ε_{xx} zorlanması cinsinden yazmak için yukarıdaki üç denklemi çözmek yeterlidir. O halde

$$\varepsilon_{xx} = \frac{E\nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_{xx}}{1+\nu}$$

bulunur. Daha kolay indis gösterimleriyle bu denklem

$$\sigma_{xx} = \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (2.10)$$

ve

$$\varepsilon = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak gerilme-zorlanma denklemleri daha uygun indis gösterimleri kullanılarak

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada δ_{ij} ifadesi $i = j$ için 1, $i \neq j$ için 0 şeklinde tanımlanan Kronecker deltasıdır. λ ve μ sabitleri Lamé sabiti olarak bilinir. Elastisite Modülü ve Poisson oranları

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.12)$$

ve

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.13)$$

şeklinde Lamé sabitleri cinsinden yazılabilir [3].

2.2.7. Sanal iş prensibi

Bir sistemin sanal (virtuel) yer değiştirmesi, t zamanında kuvvetler ve zorlanmalardan oluşan keyfi sonsuz küçük bir δr_i yer değiştirmesinin bir sonucu olarak sistemin konumundaki değişimine verilen isimdir.

Elastisite problemlerinin çözümünde, sanal iş prensibini kullanmak çoğu zaman büyük avantaj sağlar. Bir parçacık durumunda bu prensip aşağıdaki biçimde ifade edilir:

Eğer parçacık dengede ise, herhangi bir sanal yer değiştirmede parçacık üzerine etkiyen bütün kuvvetlerin yaptığı toplam iş sifıra eşittir.

δu , δv ve δw , sırasıyla x , y ve z yönlerinde virtüel yer değiştirme ögeleri ve $\sum X$, $\sum Y$ ve $\sum Z$ de parçacığa etki eden aynı yönlü kuvvetlerin toplamları ise sanal iş prensibine göre

$$\delta u \sum X = 0, \delta v \sum Y = 0, \delta w \sum Z = 0$$

yazılabilir [9].

BÖLÜM 3. RİJİT ZEMİN ÜZERİNE OTURMUŞ ÖNGERİLMELİ BİR CİSİMİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

Bu bölümde rijit zemin üzerine oturmuş sonlu boyutlu öngerilmeli üç boyutlu bir cismin zorlanmış titreşimine ait problem TLTEWISB'nin temel çalışma prensiplerine göre ele alınacaktır.

3.1. Problemin Ortaya Konulması

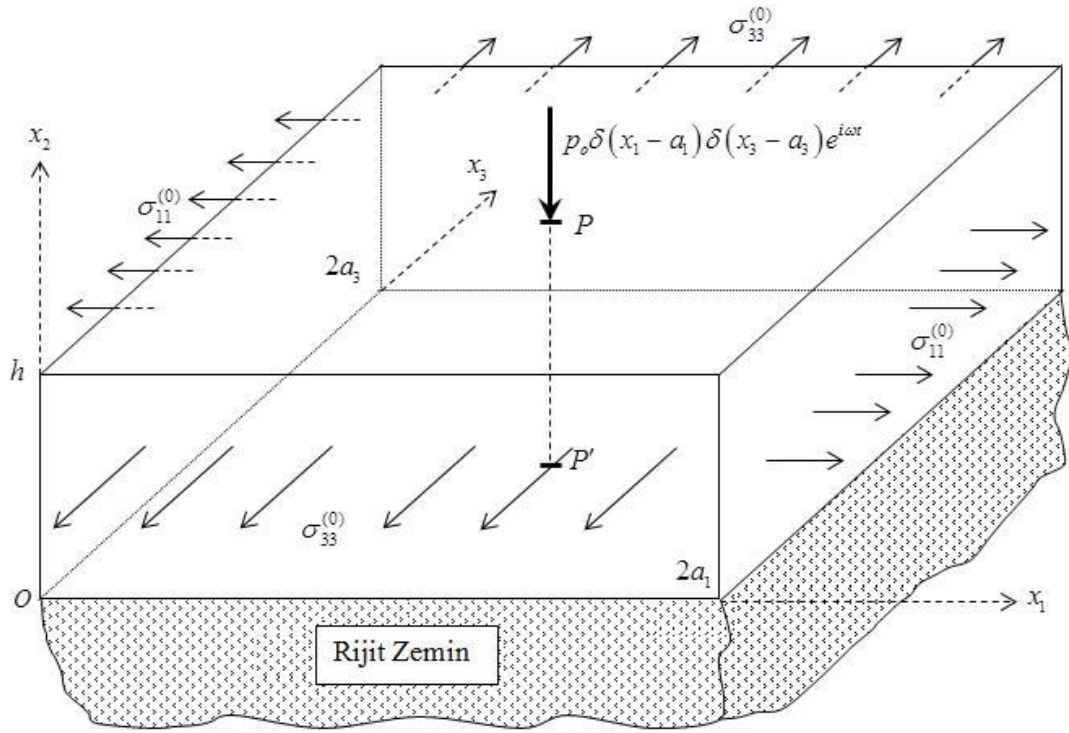
Bu alt bölümde mevcut problemin geometrisi ve hareket denklemleri incelenecektir. Şekil 3.1'de de görülebileceği gibi rijit yarı düzlem üzerine oturmuş üç boyutlu öngerilmeli bir katmanlı lineer elastik malzemedен oluşan, homojen ve izotrop bir cisim ele alınacaktır. Cismin Ox_1 eksenі yönünde her iki tarafa doğru eşit büyüklükte σ_{11}^0 öngerilmesine ve Ox_3 eksenі yönünde her iki tarafa doğru eşit büyüklükte σ_{33}^0 öngerilmesine sahip olduğu kabul edilecektir. Sonlu bir bölgeyi kaplayan cisim Kartezyen koordinatlarda

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq 2a_1, 0 \leq x_2 \leq h, 0 \leq x_3 \leq 2a_3\} \quad (3.1)$$

bölgesini ve rijit yarı düzlem ise

$$R = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty \leq x_1 \leq \infty, -\infty \leq x_2 \leq 0, -\infty \leq x_3 \leq \infty\} \quad (3.2)$$

bölgesini kapsasın.



Şekil 3.1. Problemin geometrisi

Bu cismin üst yüzeyinin orta noktasına zamana göre harmonik olan $p_0\delta(x_1 - a_1)\delta(x_3 - a_3)e^{i\omega t}$ şiddetinde noktasal bir kuvvet uygulanmaktadır. Bu nokta P ve bu noktanın Ox_1x_3 düzlemi üzerindeki izdüşümü P' olsun. Bu çalışma boyunca “ i ” ve “ j ” indisleri 1, 2 ve 3 değerlerinden birine ve “ ℓ ” indisi ise 1 ve 3 değerlerinden birine sahip olacaktır. Aksi belirtilmedikçe tekrar eden indisler üzerinden bu indisin alacağı bütün değerler için toplama işleminin yapılacağı anlaşılacaktır.

Şekil 3.1’den de görülebileceği gibi cismin öngerilmeleri normal kuvvetlerden oluştuğundan hareket denklemleri şu şekilde yazılabilir [18-19]:

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{\ell\ell}^0 u_{i,\ell\ell} = \rho \ddot{u}_i \quad (3.3)$$

Burada ρ cismin doğal durumdaki yoğunluğunu, $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ fonksiyonları Ox_i eksenleri yönündeki yer değiştirmeleri, σ_{ij} ilgili gerilme tansör ögesini göstermektedir. Bu hareket denklemlerine ek olarak aşağıdaki sınır koşulları da mevcuttur:

$$\sigma_{2\ell} \Big|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{22} \Big|_{x_2=h} = -p_o \delta(x_1 - a_1) \delta(x_3 - a_3) e^{i\omega t}, \quad (3.4)$$

$$u_i \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \left(\sigma_{\ell\ell}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} + \sigma_{\ell i} \right) \Big|_{x_\ell=0, 2a_\ell} = 0$$

Burada $\delta(\cdot)$ Delta-dirac fonksiyonudur. (3.3) ve (3.4) denklemleri birlikte incelenecek olan sınır değer problemini oluşturur.

Cismin üst yüzeyinin ortasına uygulanan noktasal kuvvetin zamana göre harmonik olması nedeniyle incelenen problemdeki bütün bağımlı değişkenlerde zamana göre harmonik olacaktır. Dolayısıyla

$$\{u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}\}(x_1, x_2, x_3, t) = \{\bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}\}(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

yazılabilir. Ayrıca yapılacak incelemeyi kolaylaştırmak için

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{h}, \quad \hat{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \quad \hat{x}_3 = \frac{x_3}{h} \quad (3.6)$$

koordinat dönüşümü yapılabilir. Bu koordinat sistemine Langrange koordinat sistemi denir. Sırasıyla (3.5) ve (3.6) dönüşümleri yapılırsa ve son olarak elde edilen hareket denklemler h^2 ile çarpılırsa, TLTEWISB'nin (3.3) hareket denklemleri

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \sigma_{\ell\ell}^0 \bar{u}_{i,\ell\ell} + \rho \omega^2 h^2 \bar{u}_i = 0 \quad (3.7)$$

ve (3.4) sınır şartları

$$\bar{\sigma}_{2\ell} \Big|_{\hat{x}_2=h} = 0, \quad \bar{\sigma}_{22} \Big|_{\hat{x}_2=h} = -p_o \delta(h(\hat{x}_1 - a_1)) \delta(h(\hat{x}_3 - a_3)), \quad (3.8)$$

$$\bar{u}_i \Big|_{\hat{x}_2=0} = 0, \quad \left(\sigma_{\ell\ell}^0 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \hat{x}_\ell} + \bar{\sigma}_{\ell i} \right) \Big|_{\hat{x}_\ell=0, 2a_\ell} = 0$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca incelenen cismin kartezyen koordinat eksenlerinde oturduğu (3.1) bölgesi yeni koordinat sisteminde

$$\hat{B} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) : 0 \leq \hat{x}_1 \leq 2a_1/h, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1, 0 \leq \hat{x}_3 \leq 2a_3/h\} \quad (3.9)$$

şeklinde oluşur. \hat{B} bölgesinin sınırları aşağıdaki altı bölgeden oluşmaktadır:

$$\hat{\Gamma}_1 = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) : \hat{x}_1 = 2a_1/h, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1, 0 \leq \hat{x}_3 \leq 2a_3/h\}$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) : 0 \leq \hat{x}_1 \leq 2a_1/h, \hat{x}_2 = 1, 0 \leq \hat{x}_3 \leq 2a_3/h\}$$

$$\hat{\Gamma}_3 = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) : \hat{x}_1 = 0, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1, 0 \leq \hat{x}_3 \leq 2a_3/h\} \quad (3.10)$$

$$\hat{\Gamma}_4 = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) : 0 \leq \hat{x}_1 \leq 2a_1/h, \hat{x}_2 = 0, 0 \leq \hat{x}_3 \leq 2a_3/h\}$$

$$\hat{\Gamma}_5 = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) : 0 \leq \hat{x}_1 \leq 2a_1/h, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1, \hat{x}_3 = 0\}$$

$$\hat{\Gamma}_6 = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) : 0 \leq \hat{x}_1 \leq 2a_1/h, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1, \hat{x}_3 = 2a_3/h\}$$

Böylece $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2 \cup \hat{\Gamma}_3 \cup \hat{\Gamma}_4 \cup \hat{\Gamma}_5 \cup \hat{\Gamma}_6$ şeklinde yazılabilir. Bundan sonra gösterim kolaylığı ve işlem sadeliği açısından “ $\bar{}$ ” ve “ $\hat{}$ ” ifadeleri ihmal edilecektir. Buna ek olarak da aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

$$a_1^* = 2a_1/h, a_3^* = 2a_3/h$$

TLTWISB'nin yer değiştirmeye bağlı (3.7) hareket denklemleri açık olarak

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right] + (\mu + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\ + \rho \omega^2 h^2 u_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} (\mu + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + (\mu + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \\ + \rho \omega^2 h^2 u_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} (\mu + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + (\lambda + 2\mu + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \\ + \rho \omega^2 h^2 u_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ve (3.8) sınır şartları

$$\sigma_{21}|_{x_2=1} = 0, \sigma_{22}|_{x_2=1} = -p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)), \sigma_{23}|_{x_2=1} = 0 \quad (3.14)$$

$$u_1|_{x_2=0} = 0, u_2|_{x_2=0} = 0, u_3|_{x_2=0} = 0 \quad (3.15)$$

$$\left(\sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{11} \right) \Big|_{x_1=0, a_1^*} = 0, \left(\sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{12} \right) \Big|_{x_1=0, a_1^*} = 0, \left(\sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{13} \right) \Big|_{x_1=0, a_1^*} = 0 \quad (3.16)$$

$$\left(\sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_3} + \sigma_{31} \right) \Big|_{x_3=0, a_3^*} = 0, \left(\sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_3} + \sigma_{32} \right) \Big|_{x_3=0, a_3^*} = 0, \left(\sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial \hat{x}_3} + \sigma_{33} \right) \Big|_{x_3=0, a_3^*} = 0 \quad (3.17)$$

biçimindedir. Böylece ele alınan problemin diferensiyel denklemleri ve sınır koşulları ortaya konulmuştur.

3.2. Problemin Varyasyonel Formülasyonu

Bu alt bölümde incelenen sınır değer probleminin toplam potansiyel enerji fonksiyoneli oluşturulacak.

Varyasyonel ifadeyi elde etmek için (3.11)-(3.13) hareket denklemleri sırasıyla $v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t)$ ve $v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t)$ test fonksiyonlarıyla çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{\ell\ell}^0 u_{i,\ell\ell} v_i + \rho \omega^2 h^2 u_i v_i = 0 \quad (3.18)$$

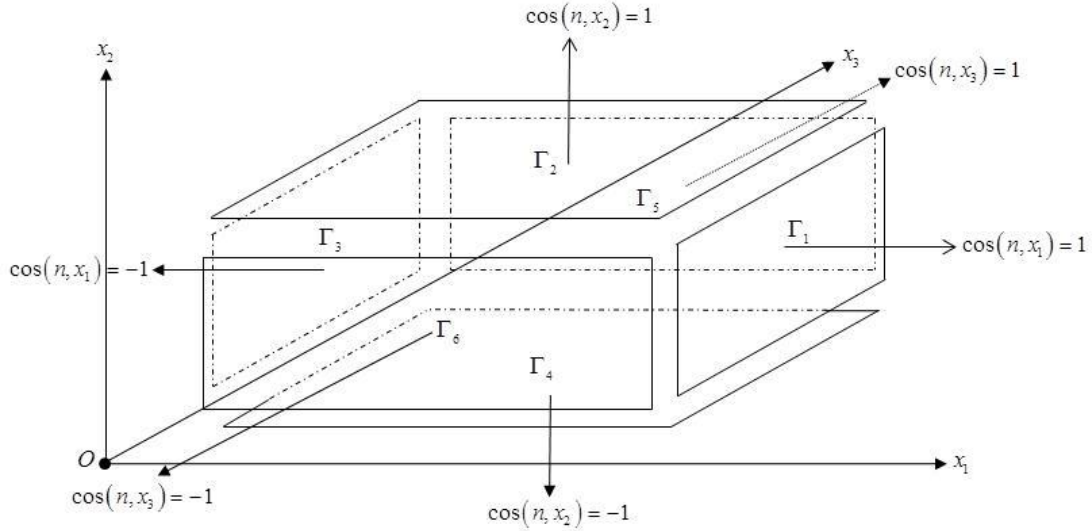
ifadesi elde edilir. Burada tekrarlı indisler üzerinden mevcut ifadenin toplama işlemine tabi tutulduğu biliniyor. (3.18) denkleminin (3.9)'daki bölge üzerinde integrali alınırsa

$$\int_0^{a_1^*} \int_0^1 \int_0^{a_3^*} [\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{\ell\ell}^0 u_{i,\ell\ell} v_i + \rho \omega^2 h^2 u_i v_i] dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir. (3.19) integraline (2.5) kısmi integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & - \int_0^{a_1^*} \int_0^1 \int_0^{a_3^*} [\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{\ell\ell}^0 u_{i,\ell\ell} v_i + \rho \omega^2 h^2 u_i v_i] dx_1 dx_2 dx_3 \\ & + \int_{\Gamma} \left[\sigma_{ij} v_i \cos(n, x_j) + \sigma_{\ell\ell}^0 v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \cos(n, x_\ell) \right] ds = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. Şekil 3.2'den de görüleceği üzere (3.20) ifadesindeki doğrultu kosinüsü adı verilen $\cos(n, x_i)$ ifadelerinin değeri tanımları gereği Ox_i eksenleri



Şekil 3.2. Sınır bölgeleri ve doğrultu kosinüsleri

boyunca 1'e, diğer eksenler boyunca 0'a eşittirler. O halde (3.20) ifadesi daha açık ve düzgün bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \left[\left\{ \left(\sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) v_1 + \left(\sigma_{21} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) v_2 + \left(\sigma_{31} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) v_3 \right\} \cos(n, x_1) \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{32} v_3 \right\} \cos(n, x_2) \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \left(\sigma_{13} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) v_1 + \left(\sigma_{23} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) v_2 + \left(\sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) v_3 \right\} \cos(n, x_3) \right] ds \\
& - \iiint_B + \mu \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \\ & + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} dA = 0 \\
& + \sigma_{11}^0 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right\} \\
& + \sigma_{33}^0 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\} \\
& - \rho \omega^2 h^2 \{ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Doğrultu kosinüsünün tanımı dikkate alındığında (3.21) denkleminin ilk terimi olan sınır integralinin integrandı bulunduğu yüzeye göre değişiklik gösterir. Buna göre Şekil 3.2 yardımıyla (3.21) ifadesinden aşağıdaki integraller elde edilir:

$$\int_{\Gamma_1} \left[\left(\sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) v_1 + \left(\sigma_{21} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) v_2 + \left(\sigma_{31} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) v_3 \right] dx_2 dx_3 \tag{3.22}$$

$$\int_{\Gamma_2} [\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2 + \sigma_{32}v_3] dx_1 dx_3 \quad (3.23)$$

$$-\int_{\Gamma_3} \left[\left(\sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) v_1 + \left(\sigma_{21} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) v_2 + \left(\sigma_{31} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) v_3 \right] dx_2 dx_3 \quad (3.24)$$

$$-\int_{\Gamma_4} [\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2 + \sigma_{32}v_3] dx_1 dx_3 \quad (3.25)$$

$$-\int_{\Gamma_5} \left[\left(\sigma_{13} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) v_1 + \left(\sigma_{23} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) v_2 + \left(\sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) v_3 \right] dx_1 dx_2 \quad (3.26)$$

$$\int_{\Gamma_6} \left[\left(\sigma_{13} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) v_1 + \left(\sigma_{23} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) v_2 + \left(\sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) v_3 \right] dx_1 dx_2 \quad (3.27)$$

(3.22) ve (3.24) yüzey integralleri (3.16) 'daki sınır koşulları, (3.26) ve (3.27) yüzey integralleri (3.17)'deki sınır koşulları ve (3.25) integrali ise (3.15)'deki sınır koşulları nedeniyle sıfıra eşittir. (3.14)'deki sınır koşulları göz önüne alınırsa (3.23) yüzey integrali

$$-\int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) v_2 dx_1 dx_3 \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.21) integrali son olarak

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right\} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\
& + \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right\} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\
& + \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right\} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\
& + \mu \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right\} \\
& \quad + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\
& + \sigma_{11}^0 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right\} + \sigma_{33}^0 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\} \\
& \quad - \rho \omega^2 h^2 \{ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \}
\end{aligned} \right] dA \tag{3.29} \\
& = - \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) v_2 dx_1 dx_3
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere (3.29) denkleminin sol tarafı $B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ile sağ tarafı da $l(\mathbf{v})$ ile gösterilirse

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = l(\mathbf{v}) \tag{3.30}$$

şeklinde bilinear ve linear forma dayalı bir denklem elde edilir. Böylece (3.30) denklemini göz önüne alınarak $J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u})$ şeklinde toplam potansiyel enerji fonksiyoneli oluşturulabilir. Bu ifade açıkça

$$\begin{aligned}
J(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \iiint_B & \left[\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \\
& + \mu \left\{ \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]^2 \right\} \\
& + 2\lambda \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \\
& + \sigma_{11}^0 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \\
& + \sigma_{33}^0 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \\
& - \rho \omega^2 h^2 \{ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \}
\end{aligned} \right] dA \\
& + \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) u_2 dx_1 dx_3
\end{aligned} \tag{3.31}$$

biçimindedir. Son olarak (3.31) denklemini μ 'ye bölünsün. Ayrıca

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{3.32}$$

dalga genişleme hızı (the speed of dilatation wave),

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{3.33}$$

enine dalga hızı (the speed of distortion wave),

$$\eta_2^{(\ell)} = \frac{\sigma_{\ell\ell}^0}{\mu} \tag{3.34}$$

başlangıç gerilme parametresi (the parameter related to the pre-stress intensity) ve

$$\Omega = \frac{\omega h}{c_2} \quad (3.35)$$

boyutsuz frekans (dimensionless frequency) ifadeleri göz önüne alındığında (3.31) ifadesi son olarak

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \\ & + 2 \frac{\lambda}{\mu} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \\ & + \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]^2 \\ & + \eta_2^{(1)} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \\ & + \eta_2^{(3)} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} - \Omega^2 \{ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \} \end{aligned} \right] dA \quad (3.36)$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \frac{P_o}{\mu} \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) u_2 dx_1 dx_3$$

şeklinde yazılabilir. (3.31) denklemi ile (3.36) denkleminin özdeş olduğu açıktır.

3.3. Varyasyonel Formülasyonun Doğruluğu

Bu alt bölümde (3.36) varyasyonel formülasyonunun doğruluğu kanıtlanacaktır. Bunu yapmak için bu denkleme özdeş olan (3.31) denkleminde mevcut problemin

hareket denklemleri ve ilgili sınır koşulları elde edilecektir. Dikkat edilirse (3.31) denklemi için yapılacak tüm işlemler kolaylıkla (3.36) içinde yapılabilir. (3.36) denklemi ile (3.31) denkleminden farkı bazı matematiksel gösterimlerin (3.31) denklemine dahil edilmiş olmasıdır.

Varyasyonel hesabın temel prensiplerinden bilindiği üzere (3.31) denklemindeki toplam potansiyel enerji fonksiyonelinin birinci varyasyonu sifira eşitlenerek (3.11)-(3.13) hareket denklemleri ile (3.14)-(3.17) sınır koşulları elde edilmelidir [33]. Bu sonuca ulaşabilmek için

$$\delta J(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.37)$$

ya da daha açık olarak

$$\delta J(\mathbf{u}) = \delta J_{u_1} + \delta J_{u_2} + \delta J_{u_3} = 0 \quad (3.38)$$

eşitliğini kullanılmalıdır.

İlk olarak $\delta J_{u_1} = 0$ ifadesi ele alınsın. Bu ifadenin

$$\delta J_{u_1} = \left. \frac{d}{d\alpha} J(u_1 + \alpha\xi, u_2, u_3) \right|_{\alpha=0} = 0 \text{ anlamına geldiği biliniyor. Böylece}$$

$$\delta J_{u_1} = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + \alpha\xi) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \right. \\ & + 2\lambda \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + \alpha\xi) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + \alpha\xi) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \\ & + \mu \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (u_1 + \alpha\xi) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right]^2 \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (u_1 + \alpha\xi) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]^2 \end{aligned} \right\} \\ & + \sigma_{11}^0 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + \alpha\xi) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \\ & + \sigma_{33}^0 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (u_1 + \alpha\xi) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \\ & - \rho\omega^2 h^2 \left\{ (u_1 + \alpha\xi)^2 + u_2^2 + u_3^2 \right\} \\ & + \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) u_2 dx_1 dx_3 \end{aligned} \right\} dA \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.39)$$

şeklinde yazılabilir. (3.39) denkleminin α parametresine göre türevi alınırsa

$$\delta J_{u_1} = \iiint_B \left[\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + \alpha\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \\ & + \mu \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (u_1 + \alpha\xi) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (u_1 + \alpha\xi) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \\ & + \sigma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 + \alpha\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial}{\partial x_3} (u_1 + \alpha\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \\ & - \rho\omega^2 h^2 (u_1 + \alpha\xi) \xi \end{aligned} \right] dA \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.40) denkleminde $\alpha = 0$ alınır ve terim terime düzenlenirse

$$\delta J_{u_1} = \iint_B \left[\begin{array}{c} \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \\ + \mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \left\{ \mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \\ - \rho \omega^2 h^2 u_1 \xi \end{array} \right] dA = 0 \quad (3.41)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.41) ifadesinde ξ ögeleri üzerindeki türevler (2.5) kısmi integrasyon formülü kullanılarak yer değiştirme ögeleri üzerine aktarılır ve bazı düzenlemeler yapılırsa, bu ifade

$$\delta J_{u_1} = \int_{\Gamma} \left[\begin{array}{c} \left\{ \sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\} \cos(n, x_1) + \sigma_{12} \cos(n, x_2) \\ + \left\{ \sigma_{31} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right\} \cos(n, x_3) \end{array} \right] \xi dx_1 dx_2 \quad (3.42)$$

$$- \iint_B \left[\begin{array}{c} (\lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \\ + (\mu + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2 h^2 u_1 \end{array} \right] \xi dA = 0$$

olacaktır. (3.42) denkleminde doğrultu kosinüsleri dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
\delta J_{u_1} = & \int_{\Gamma_1} \left[\sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \xi dx_2 dx_3 - \int_{\Gamma_3} \left[\sigma_{11} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \xi dx_2 dx_3 \\
& + \int_{\Gamma_2} \sigma_{12} \xi dx_1 dx_3 - \int_{\Gamma_4} \sigma_{12} \xi dx_1 dx_3 \\
& - \int_{\Gamma_5} \left[\sigma_{31} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right] \xi dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_6} \left[\sigma_{31} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right] \xi dx_1 dx_2 \\
& - \iiint_B \left[\left(\lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \left(\mu + \sigma_{33}^0 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right. \\
& \quad \left. + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right] + \rho \omega^2 h^2 u_1 \right] \xi dA = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

yazılabilir. (3.43) denkleminin sağ tarafının sıfır olması bu ifadedeki integrallerin içindeki ifadelerin sıfır olması ile mümkündür. Böylece (3.11)'deki

$$\begin{aligned}
\left(\lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right] + \left(\mu + \sigma_{33}^0 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\
+ \rho \omega^2 h^2 u_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

hareket denkleminin ve (3.14)-(3.17)'deki sınır koşullarından

$$\sigma_{21} \Big|_{x_2=1} = 0, \left(\sigma_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{11} \right) \Big|_{x_1=0, a_1^*} = 0, \left(\sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \sigma_{31} \right) \Big|_{x_3=0, a_3^*} = 0 \tag{3.45}$$

sınır koşullarına ulaşılır.

Şimdi $\delta J_{u_2} = 0$ ifadesi ele alınsın. Bu ifadenin $\delta J_{u_2} = \frac{d}{d\beta} J(u_1, u_2 + \beta \zeta, u_3) \Big|_{\beta=0} = 0$

anlamına geldiği biliniyor. Açıkça

$$\begin{aligned}
\delta J_{u_2} = \frac{d}{d\beta} & \left\{ \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 + \beta\zeta) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \right. \\ & + 2\lambda \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 + \beta\zeta) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 + \beta\zeta) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \right. \\ & + \mu \left\{ \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_2 + \beta\zeta) \right]^2 + \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]^2 \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (u_2 + \beta\zeta) + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]^2 \right\} \right. \\ & + \sigma_{11}^0 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (u_2 + \beta\zeta) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \\ & + \sigma_{33}^0 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (u_2 + \beta\zeta) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \\ & \quad \left. - \rho\omega^2 h^2 \left\{ u_1^2 + (u_2 + \beta\zeta)^2 + u_3^2 \right\} \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) (u_2 + \beta\zeta) dx_1 dx_3 \right] dA \Bigg\}_{\beta=0} = 0 \tag{3.46}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.46) denkleminde β parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta J_{u_2} = & \left\{ \iiint_B \left[\begin{aligned} & \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 + \beta\zeta) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right. \\ & + \sigma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_2 + \beta\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial}{\partial x_3} (u_2 + \beta\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \\ & + \mu \left\{ \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_2 + \beta\zeta) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (u_2 + \beta\zeta) + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \right\} \right. \\ & \quad \left. - 2\rho\omega^2 h^2 (u_2 + \beta\zeta) \zeta \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) \zeta dx_1 dx_3 \right] dA \Bigg\}_{\beta=0} = 0 \tag{3.47}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.47) ifadesinde β yerine 0 yazılır ve terim terime düzenlenirse

$$\delta J_{u_2} = \iiint_B \left[\begin{aligned} & \left\{ \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \\ & + \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \\ & + \left\{ \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \mu \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} - \rho \omega^2 h^2 u_2 \zeta \end{aligned} \right] dA, \quad (3.48)$$

$$+ \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) \zeta dx_1 dx_3 = 0$$

elde edilir. (3.48) denkleminde ζ ögeleri üzerindeki türevler (2.5) kısmi integrasyon formülü yardımıyla yer değiştirme fonksiyonları üzerine aktarılırsa

$$\delta J_{u_2} = \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & \left\{ \sigma_{12} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} \cos(n, x_1) + \sigma_{22} \cos(n, x_2) \\ & + \left\{ \sigma_{32} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right\} \cos(n, x_3) \end{aligned} \right] \zeta dx_1 dx_2$$

$$- \iiint_B \left[\begin{aligned} & \left(\mu + \sigma_{11}^0 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \left(\mu + \sigma_{33}^0 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \\ & + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \rho \omega^2 h^2 u_2 \end{aligned} \right] \zeta dA \quad (3.49)$$

$$+ \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) \zeta dx_1 dx_3 = 0$$

elde edilir. Böylece doğrultu kosinüsleri nedeniyle (3.49) ifadesi

$$\begin{aligned}
\delta J_{u_2} = & \int_{\Gamma_1} \left[\sigma_{12} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \zeta dx_2 dx_3 - \int_{\Gamma_3} \left[\sigma_{12} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \zeta dx_2 dx_3 \\
& + \int_{\Gamma_2} \sigma_{22} \zeta dx_1 dx_3 - \int_{\Gamma_4} \sigma_{22} \zeta dx_1 dx_3 \\
& - \int_{\Gamma_5} \left[\sigma_{32} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right] \zeta dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_6} \left[\sigma_{32} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right] \zeta dx_1 dx_2 \\
& - \iiint_B \left[\left(\mu + \sigma_{11}^0 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \left(\mu + \sigma_{33}^0 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right. \\
& \quad \left. + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \rho \omega^2 h^2 u_2 \right] \zeta dA \\
& + \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) \zeta dx_1 dx_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

şeklinde yazılabilir. (3.50) denkleminin sağ tarafının sıfıra eşit olması kabulünden (3.12)'deki

$$\begin{aligned}
\left(\mu + \sigma_{11}^0 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \left(\mu + \sigma_{33}^0 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \\
+ \rho \omega^2 h^2 u_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

hareket denkleminde ve (3.14)-(3.17)'deki sınır koşullarından

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} \Big|_{x_2=1} = -p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)), \\
\left(\sigma_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \right) \Big|_{x_1=0, a_1^*} = 0, \quad \left(\sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \sigma_{32} \right) \Big|_{x_3=0, a_3^*} = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

sınır koşullarına ulaşılır.

Son olarak δJ_{u_3} ifadesi ele alınıyor. Benzer şekilde $\delta J_{u_3} = 0$ ifadesi

$$\delta J_{u_3} = \frac{d}{d\gamma} J(u_1, u_2, u_3 + \gamma\psi) \Big|_{\gamma=0} = 0 \text{ anlamına geldiğinden açıkça}$$

$$\delta J_{u_3} = \frac{d}{d\gamma} \left\{ \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 + \gamma\psi) \right)^2 \right\} \right. \\ & + 2\lambda \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 + \gamma\psi) \\ & + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 + \gamma\psi) \end{aligned} \right\} \\ & + \mu \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_3 + \gamma\psi) \right]^2 \\ & + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_3 + \gamma\psi) \right]^2 \end{aligned} \right\} \\ & + \sigma_{11}^0 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (u_3 + \gamma\psi) \right)^2 \right\} \\ & + \sigma_{33}^0 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 + \gamma\psi) \right)^2 \right\} \\ & - \rho\omega^2 h^2 \{ u_1^2 + u_2^2 + (u_3 + \gamma\psi)^2 \} \\ & + \int_{\Gamma_2} p_o \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) u_2 dx_1 dx_3 \end{aligned} \right] dA \Big|_{\gamma=0} = 0 \quad (3.53)$$

yazılır. (3.53) ifadesinde γ parametresine göre türev alınırsa

$$\delta J_{u_3} = \left\{ \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & 2(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 + \gamma\psi) \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ & + 2\lambda \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right\} \\ & + 2\mu \left\{ \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_3 + \gamma\psi) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_3 + \gamma\psi) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\} \\ & + 2\sigma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial x_1} (u_3 + \gamma\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + 2\sigma_{33}^0 \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 + \gamma\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ & - \rho\omega^2 h^2 (u_3 + \gamma\psi) \psi \end{aligned} \right] dA \right\}_{\gamma=0} = 0 \quad (3.54)$$

elde edilir ve (3.54) denkleminde γ yerine 0 yazılıp terim terime düzenlenirse

$$\delta J_{u_3} = \left\{ \iiint_B \left[\begin{aligned} & \left\{ \mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ & + \mu \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ & \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ & - \rho\omega^2 h^2 (u_3 + \gamma\psi) \psi \end{aligned} \right] dA \right\}_{\gamma=0} = 0 \quad (3.55)$$

elde edilir. (3.55) denkleminde ψ parametresi üzerindeki türevler (2.5)'deki kısmi integrasyon formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
\delta J_{u_3} = & \int_{\Gamma} \left[\left\{ \sigma_{13} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right\} \cos(n, x_1) + \sigma_{32} \cos(n, x_2) \right. \\
& \left. + \left\{ \sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \cos(n, x_3) \right] \psi dx_1 dx_2 \\
& - \iiint_B \left[(\mu + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right. \\
& \left. + (\lambda + 2\mu + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2 h^2 u_3 \right] \psi dA = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

yazabilir. Son olarak doğrultu kosinüslerinin tanımı gereği (3.56) ifadesi

$$\begin{aligned}
\delta J_{u_3} = & \int_{\Gamma_1} \left[\sigma_{13} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] \psi dx_2 dx_3 - \int_{\Gamma_3} \left[\sigma_{13} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] \psi dx_2 dx_3 \\
& + \int_{\Gamma_2} \sigma_{32} \psi dx_1 dx_3 - \int_{\Gamma_4} \sigma_{32} \psi dx_1 dx_3 \\
& - \int_{\Gamma_5} \left[\sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] \psi dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_6} \left[\sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] \psi dx_1 dx_2 \\
& - \iiint_B \left[(\mu + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right. \\
& \left. + (\lambda + 2\mu + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2 h^2 u_3 \right] \psi dA = 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

şeklinde yazılabilir. (3.57) denkleminin sağ tarafının sıfıra eşit olması kabulünden (3.13)'deki

$$\begin{aligned}
(\mu + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + (\lambda + 2\mu + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \\
+ \rho \omega^2 h^2 u_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.58}$$

hareket denklemi ve (3.14)-(3.17)'deki sınır koşullarından

$$\sigma_{23}|_{x_2=1} = 0, \left(\sigma_{11}^0 \frac{\partial u_3}{\partial \hat{x}_1} + \sigma_{13} \right) \Big|_{x_1=0, a_1^*} = 0, \left(\sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \sigma_{33} \right) \Big|_{x_3=0, a_3^*} = 0 \quad (3.59)$$

koşulları elde edilir.

Böylece δJ_{u_1} , δJ_{u_2} ve δJ_{u_3} incelemelerinden mevcut problemi oluşturan (3.11)-(3.13) hareket denklemleri ve (3.14)-(3.17) sınır koşulları elde edildi. Bu incelemelerle birlikte (3.31) dolayısıyla (3.36) toplam potansiyel enerji fonksiyonelinin doğruluğu gösterilmiştir.

3.4. Problemin Sonlu Eleman Yöntemi ile Çözümü

Bu alt bölümde Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) kullanılarak (3.11)-(3.13) hareket denklemlerinden ve (3.14)-(3.17) sınır koşullarından oluşan problemin yaklaşık çözümü aranılacaktır.

Şekil 3.1'deki cisim Sonlu Eleman (SE) adı verilen belli sayıda küçük alt bölgelere bölünüyor (Bkz. Şekil 3.3). Bu cisim Ox_1 ekseninde M tane SE, Ox_2 ekseninde N tane SE ve benzer şekilde Ox_3 ekseninde de P tane SE'na bölünüyor. SEY'nde elde edilen yaklaşık çözümün iyileştirilmesi için bazı yollar kullanılabilir. İlk yol SE'ların seçimidir. Bu SE keyfi olarak seçilebilir (küp ya da piramit gibi). Seçilen sonlu elemanın çeşidi yapılan hata miktarının değişmesine sebep olabilir. Fakat bu çalışma boyunca elde edilmeye çalışılacak Sonlu Eleman Modellemesi (SEM) için SE küp şeklinde seçilmiştir. SEM'nin çalışma prensiplerine göre SE sayısının artması elde edilecek yaklaşık çözümün iyileştirilmesinin başka bir yoludur. Yaklaşık çözümü iyileştirmenin bir başka yolu ise SEY'nde kullanılan baz

fonksiyonlarının seçimidir. Eğer baz fonksiyonlarının dereceleri artırılırsa yaklaşık çözümün hata miktarı azalacaktır. Ancak tüm bu yolların olumlu yönleri olduğu gibi olumsuz yönleri de vardır. Gerek SE seçimi, gerekse SE sayısının artırılması ya da baz fonksiyonlarının seçimi çok daha karmaşık hesaplanmaların yapılmasını gerektirebilir. Bu ise hem zaman hem de bilgisayar programının çalıştırılması için güçlü bir bellek ihtiyacı doğuracaktır. Sonuç olarak yapılan seçimler iyileştirilerek daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Bu çalışmada lineer Langrange interpolasyon baz fonksiyonları kullanılacaktır.

Söz konusu yaklaşık çözüm

$$\mathbf{u}^{(y)} = \left(u_1^{(y)}(x_1, x_2, x_3), u_2^{(y)}(x_1, x_2, x_3), u_3^{(y)}(x_1, x_2, x_3) \right) \quad (3.60)$$

şeklinde aranılacaktır. Oluşturulmaya çalışılan Sonlu Eleman Modeli (SEM) yer değiştirmeye dayalı olduğundan üzerinde çalışılan SE'nın seçilmiş düğüm noktasında elde edilen sayısal değerler bilinmeyen yer değiştirmelere tekabül edecektir. Bu nedenle yaklaşık çözümler $a_{ik,jk}$, $b_{ik,jk}$ ve $d_{ik,jk}$ katsayılarından oluşan

$$u_1^{(y)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_{ik,jk} N_{ik,jk}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.61)$$

$$u_2^{(y)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M b_{ik,jk} N_{ik,jk}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.62)$$

$$u_3^{(y)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M d_{ik,jk} N_{ik,jk}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_B & \left[\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \left\{ \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \right. \\
& + 2 \frac{\lambda}{\mu} \left\{ \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right) \right. \\
& \left. + \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right) \right. \\
& \left. + \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right) \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right) \right\} \\
& + \left[\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} + \sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right]^2 \\
& + \left[\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right]^2 \\
& + \left[\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right]^2 \\
& + \eta_2^{(1)} \left\{ \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \\
& + \eta_2^{(3)} \left\{ \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \\
& - \Omega^2 \left\{ \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} N_{ik,jk} \right)^2 + \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} N_{ik,jk} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} N_{ik,jk} \right)^2 \right\} \Big] dA \\
& + \int_{\Gamma_2} \frac{P_o}{\mu} \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) \sum \sum \sum b_{ik,jk} N_{ik,jk} dx_1 dx_3
\end{aligned} \tag{3.65}$$

elde edilir. Dügüm noktalarındaki yaklaşık çözümleri elde etmek için (3.65) denklemini sırasıyla $a_{ik,jk}$, $b_{ik,jk}$ ve $d_{ik,jk}$ parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenir. Bu yolla $J(\mathbf{u})$ toplam potansiyel enerji fonksiyonelinin minimumu araştırılmış olur. Burada bahsedilen ifadeler açıkça şu şekildedir:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a_{ik,jk}} \tilde{J}(a_{ik,jk}, b_{ik,jk}, d_{ik,jk}) \\ &= \frac{\partial}{\partial a_{ik,jk}} J(\sum \sum \sum a_{ik,jk} N_{ik,jk}, \sum \sum \sum b_{ik,jk} N_{ik,jk}, \sum \sum \sum d_{ik,jk} N_{ik,jk}) = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial b_{ik,jk}} \tilde{J}(a_{ik,jk}, b_{ik,jk}, d_{ik,jk}) \\ &= \frac{\partial}{\partial b_{ik,jk}} J(\sum \sum \sum a_{ik,jk} N_{ik,jk}, \sum \sum \sum b_{ik,jk} N_{ik,jk}, \sum \sum \sum d_{ik,jk} N_{ik,jk}) = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial d_{ik,jk}} \tilde{J}(a_{ik,jk}, b_{ik,jk}, d_{ik,jk}) \\ &= \frac{\partial}{\partial d_{ik,jk}} J(\sum \sum \sum a_{ik,jk} N_{ik,jk}, \sum \sum \sum b_{ik,jk} N_{ik,jk}, \sum \sum \sum d_{ik,jk} N_{ik,jk}) = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

İlk olarak $\frac{\partial}{\partial a_{ik,jk}} \tilde{J}(a_{ik,jk}, b_{ik,jk}, d_{ik,jk})$ ifadesi ele alınsın. Buna göre (3.65)

denkleminin $a_{ik,jk}$ parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial a_{ik,jk}} \tilde{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \\ & + 2 \frac{\lambda}{\mu} \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \\ & + 2 \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} + \sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \\ & + 2 \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \\ & + 2 \eta_2^{(1)} \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \\ & + 2 \eta_2^{(3)} \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \\ & - 2 \Omega^2 \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} N_{ik,jk} \right) N_{hl,ql} \end{aligned} \right] dA$$

ya da $a_{ik,jk}$, $b_{ik,jk}$ ve $d_{ik,jk}$ katsayılarına göre gruplandırılırsa daha düzgün bir şekilde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{ik,jk}} \tilde{J}(\mathbf{u}) &= \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 + \eta_2^{(1)} \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\eta_2^{(3)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} - \Omega^2 N_{ik,jk} N_{hl,ql} \right] dA \right\} a_{ik,jk} \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dA \right\} b_{ik,jk} \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dA \right\} d_{ik,jk} \end{aligned} \quad (3.69)$$

olarak elde edilir. Şimdi (3.64) denkleminin $b_{ik,jk}$ 'ya göre türevi alınır

$$\frac{\partial}{\partial b_{ik,jk}} \tilde{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \\ & + 2 \frac{\lambda}{\mu} \left\{ \sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right\} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \\ & + 2 \left[\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} + \sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right] \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \\ & + 2 \left[\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right] \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \\ & + 2 \eta_2^{(1)} \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \\ & + 2 \eta_2^{(3)} \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \\ & - 2 \Omega^2 \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} N_{ik,jk} \right) N_{hl,ql} \end{aligned} \right] dA \\ + \int_{\Gamma_2} \frac{P_o}{\mu} \delta(h(x_1 - a_1)) \delta(h(x_3 - a_3)) N_{hl,ql} dx_1 dx_3$$

ve bu son ifade $a_{ik,jk}$, $b_{ik,jk}$ ve $d_{ik,jk}$ katsayılarına göre gruplandırılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_{ik,jk}} \tilde{J}(\mathbf{u}) &= \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dA \right\} a_{ik,jk} \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\begin{aligned} & \left(\eta_2^{(1)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} + \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \\ & + \left(\eta_2^{(3)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} - \Omega^2 N_{ik,jk} N_{hl,ql} \end{aligned} \right] dA \right\} b_{ik,jk} \quad (3.70) \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \right] dA \right\} d_{ik,jk} \\ &+ \frac{P_o}{\mu} N_{hl,ql} \Big|_{x_1=a_1/h, x_2=1} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.65) denkleminin $d_{ik,jk}$ 'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial d_{ik,jk}} \tilde{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_B \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \\ & + 2 \frac{\lambda}{\mu} \left\{ \left(\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) + \left(\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right) \right\} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \\ & + 2 \left[\sum \sum \sum a_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right] \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \\ & + 2 \left[\sum \sum \sum b_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} + \sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \right] \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \\ & + 2 \eta_2^{(1)} \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \\ & + 2 \eta_2^{(3)} \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \right) \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \\ & - 2 \Omega^2 \left(\sum \sum \sum d_{ik,jk} N_{ik,jk} \right) N_{hl,ql} \end{aligned} \right] dA$$

ve elde edilen ifade $a_{ik,jk}$, $b_{ik,jk}$ ve $d_{ik,jk}$ katsayılarına göre gruplandırılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d_{ik,jk}} \tilde{J}(\mathbf{u}) &= \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dA \right\} a_{ik,jk} \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \right] dA \right\} b_{ik,jk} \\ &+ \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \iiint_B \left[\left(\eta_2^{(1)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 + \eta_2^{(3)} \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} - \Omega^2 N_{ik,jk} N_{hl,ql} \right] dA \right\} d_{ik,jk} \end{aligned} \quad (3.71)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.69), (3.70) ve (3.71) denklemlerinde $a_{ik,jk}$, $b_{ik,jk}$ ve $d_{ik,jk}$ bilinmeyenleri

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \left\{ \left[a_{ik,jk} \right], \left[b_{ik,jk} \right], \left[d_{ik,jk} \right] \right\}^T \\ &= \left\{ a_{11,11} \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{MP,NP} \quad b_{11,11} \quad \cdot \quad \cdot \quad b_{MP,NP} \quad d_{11,11} \quad \cdot \quad \cdot \quad d_{MP,NP} \right\}^T\end{aligned}\quad (3.72)$$

şeklinde gruplandırılarak bir vektöre yerleştirilirse bilinmeyenlerin katsayılarını içeren matris

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix}\quad (3.73)$$

ve sağ taraf vektörü de

$$\mathbf{f} = \{ [f_1], [f_2], [f_3] \}^T\quad (3.74)$$

olmak üzere

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\quad (3.75)$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilmiş olur. Burada \mathbf{K} matrisine global katılık matrisi (stiffness matrix), $\tilde{\mathbf{x}}$ vektörüne bilinmeyen sütun vektörü (unknown column vector) ve \mathbf{f} vektörüne de kuvvet vektörü (force vector) adı verilir. (3.73)'deki global katılık matrisinin elemanları açıkça şu şekildedir:

$$[K_{11}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 + \eta_2^{(1)} \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \right. \\ \left. + \left(\eta_2^{(3)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} - \Omega^2 N_{ik,jk} N_{hl,ql} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.76)$$

$$[K_{12}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.77)$$

$$[K_{13}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.78)$$

$$[K_{21}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.79)$$

$$[K_{22}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\left(\eta_2^{(1)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} + \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \right. \\ \left. + \left(\eta_2^{(3)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} - \Omega^2 N_{ik,jk} N_{hl,ql} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.80)$$

$$[K_{23}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.81)$$

$$[K_{31}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.82)$$

$$[K_{32}] = \int_0^{a_3^*} \int_0^1 \int_0^{a_1^*} \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.83)$$

$$[K_{33}] = \int_0^{a_3} \int_0^1 \int_0^{a_1} \left[\begin{aligned} & \left(\eta_2^{(1)} + 1 \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_1} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_2} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_2} \\ & + \left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 + \eta_2^{(3)} \right) \frac{\partial N_{ik,jk}}{\partial x_3} \frac{\partial N_{hl,ql}}{\partial x_3} - \Omega^2 N_{ik,jk} N_{hl,ql} \end{aligned} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.84)$$

Sınır şartları nedeniyle (3.74)'deki \mathbf{f} kuvvet vektörünün tek elemanı sıfırdan farklıdır ve bu eleman şu şekildedir:

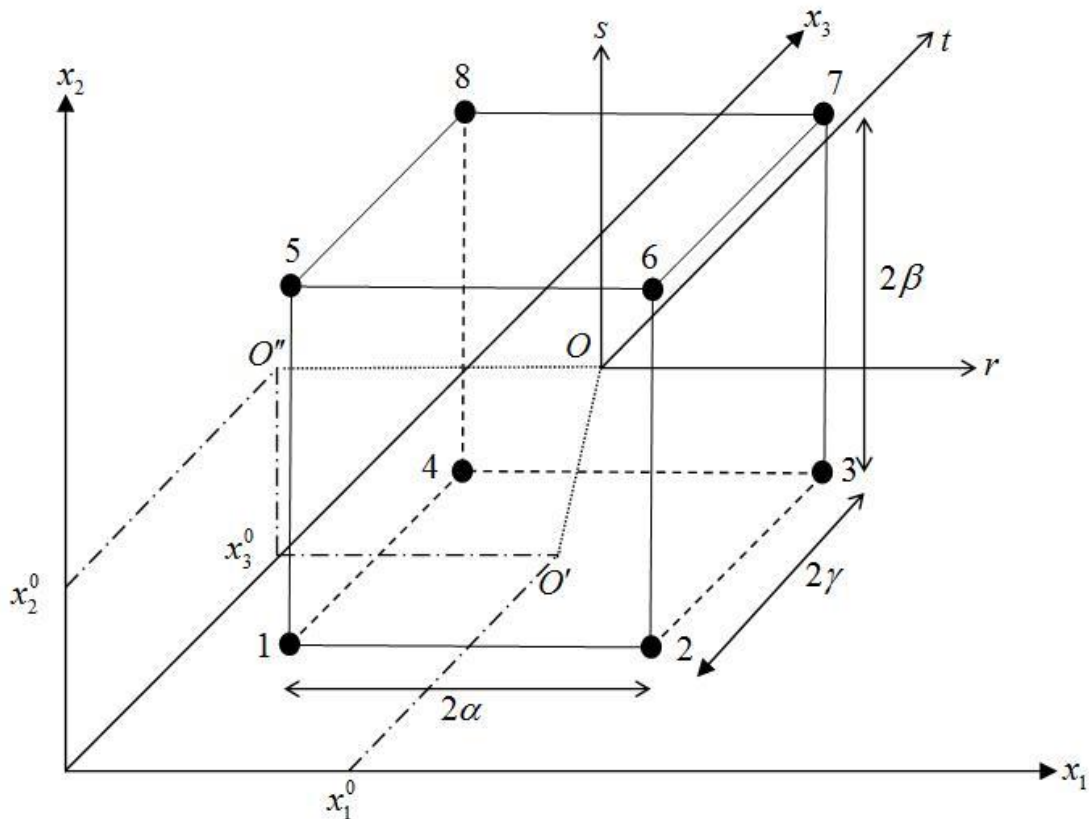
$$f_2 = -\frac{P_o}{\mu} N_{hl,ql} \Big|_{x_i=a_i/h, x_2=1} \quad (3.85)$$

SEY'nin genel çalışma prensiplerine göre (3.76)-(3.84) integrallerini her bir SE için tek tek hesaplamak yerine bu integraller $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ koordinatlarına sahip pilot bölge adı verilen küp üzerinde hesaplanır. Daha sonra pilot bölge üzerinde yapılan hesaplamalar bağlantı matrisi (connectivity matrix) adı verilen bir matris yardımıyla bütün düğüm noktalarına dağıtılır. Ayrıca hesaplamalar pilot eleman üzerinde yapılacağından karmaşık indis gösterimlerine de gerek yoktur. Buna göre ilk olarak koordinat dönüşümü yardımıyla keyfi olarak seçilen bir e sonlu eleman $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ pilot elemana taşınmalıdır. Bu işleme koordinatları normalize etme denir. Şekil 3.4'deki $Orst$ normalize edilmiş koordinat sistemi göz önüne alınsın. Pilot elemandaki koordinat ekseninin orijini pilot elemanın ortasında olacak şekilde seçiliyor. Orijin noktası O ile gösteriliyor. Bu noktanın Ox_1x_3 düzlemine iz düşümü O' ve Ox_2x_3 düzlemi üzerine iz düşümü de O'' ile gösteriliyor. Dikkat edilirse düğüm noktalarının dizilişi saat yönünün tersi istikametinde ve aşağıdan yukarıya şeklindedir. Pilot bölgenin Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 eksenleri istikametindeki uzunlukları sırasıyla 2α , 2β ve 2γ 'dir. Böylece üç boyutlu (x_1, x_2, x_3) yerel koordinatları ile (r, s, t) pilot eleman arasında

$$r = \frac{x_1 - x_1^0}{\alpha}, \quad s = \frac{x_2 - x_2^0}{\beta}, \quad t = \frac{x_3 - x_3^0}{\gamma} \quad (3.86)$$

dönüşümü yapılmalıdır. Şekil 3.4'de açıkça gösterilen pilot eleman ve düğüm noktalarının dizilişi için şekil fonksiyonları şu şekildedir [8]:

$$\begin{aligned} N_1(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) & N_2(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) \\ N_3(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) & N_4(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) \\ N_5(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) & N_6(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \\ N_7(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) & N_8(r,s,t) &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \end{aligned} \quad (3.87)$$



Şekil 3.4. Pilot eleman ve düğüm noktalarının dizilişi

(3.86)'daki koordinat dönüşümünden sonra Jakobenin $|J| = \alpha\beta\gamma$ olduğunu hesaplamak kolaydır. Böylece (3.76)-(3.84) integralleri (3.86) koordinat dönüşümünden sonra

$$[K_{11}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 + \eta_2^{(1)} \right) \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + (\eta_2^{(3)} + 1) \frac{\beta\alpha}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} - \Omega^2 \alpha\beta\gamma N_{ij} N_{hq} \right] dr ds dt, \quad (3.88)$$

$$[K_{12}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right] \gamma dr ds dt, \quad (3.89)$$

$$[K_{13}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right] \beta dr ds dt, \quad (3.90)$$

$$[K_{21}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right] \gamma dr ds dt, \quad (3.91)$$

$$[K_{22}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(\eta_2^{(1)} + 1) \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{\alpha\gamma}{\beta} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + (\eta_2^{(3)} + 1) \frac{\beta\alpha}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} - \Omega^2 \alpha\beta\gamma N_{ij} N_{hq} \right] dr ds dt, \quad (3.92)$$

$$[K_{23}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} \right] \alpha dr ds dt, \quad (3.93)$$

$$[K_{31}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right] \beta dr ds dt, \quad (3.94)$$

$$[K_{32}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} \right] \alpha dr ds dt, \quad (3.95)$$

ve

$$[K_{33}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\begin{aligned} & \left(\eta_2^{(1)} + 1 \right) \frac{\beta \gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \frac{\alpha \gamma}{\beta} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} \\ & + \left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 + \eta_2^{(3)} \right) \frac{\alpha \beta}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} - \Omega^2 \alpha \beta \gamma N_{ij} N_{hq} \end{aligned} \right] dr ds dt \quad (3.96)$$

şeklinde elde edilir. Böylece seçilmiş e elemanı üzerindeki yerel katılık matrisi

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} [K_{11}]^e & [K_{12}]^e & [K_{13}]^e \\ [K_{21}]^e & [K_{22}]^e & [K_{23}]^e \\ [K_{31}]^e & [K_{32}]^e & [K_{33}]^e \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

olup global katılık matrisi

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{MNP} \mathbf{K}^k \quad (3.98)$$

biçiminde elde edilir.

(3.88)-(3.96) integralleri yardımıyla elde edilen (3.97) yerel katılık matrisi kullanılarak (3.98) global katılık matrisi oluşturulur. Böylece (3.75) denklemi çözülebilir. Sonuç olarak $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$ şeklinde bilinmeyenler elde edilmiş olur. Elde edilen bu sayısal sonuçlar ilgili düğüm noktalarına karşılık gelen yer değiştirme ögeleridir.

Gerilme-yer değiştirme bağıntıları kullanılarak düğüm noktalarındaki gerilme değerleri hesaplanabilir. (2.11) denklemi göz önüne alınırsa

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{11} + 2\mu\varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \quad (3.99)$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{22} + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \quad (3.100)$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{33} + 2\mu\varepsilon_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} \quad (3.101)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} \quad (3.102)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2\mu\varepsilon_{13} \quad (3.103)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu\varepsilon_{23} \quad (3.104)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.12) ve (2.13)'deki E Elastisite Modülü ve ν Poisson oranları göz önüne alındığında bu eşitlikler

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}, \quad (3.105)$$

$$\mathbb{D} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

ve

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.108)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Ayrıca (2.8) yer değiştirme-zorlanma bağıntısı ve Şekil 3.4'de dizilimi açıkça gösterilen sekiz düğüm noktalı sonlu eleman için

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial r} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial t} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial s} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial r} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial t} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial r} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial t} & \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

olmak üzere matris formundaki (3.108) denklemi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{D}\mathcal{B}\mathbf{x} \quad (3.110)$$

şeklinde yazabilir.

3.5. Sayısal Bulgular ve Tartışmalar

Bu alt bölümde mevcut problem için Mathematica bilgisayar programında geliştirilen algoritma kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar sunuluyor. Bu çalışma boyunca bütün sayısal incelemeler cismin alt yüzeyinde yapılacaktır. Ox_1 eksenini istikametindeki sonlu eleman sayısı m , Ox_2 eksenini istikametindeki sonlu eleman sayısı n ve Ox_3 eksenini istikametindeki sonlu eleman sayısı p ile gösterilecektir.

İlk olarak bu çalışma için geliştirilecek algoritmanın doğruluğu kontrol edilecektir. İncelenen cismin aynı genişlik ve derinliğe sahip olduğu kabul edilecek, ancak cismin uzunluğu ile genişliğinin oranı $1/5$ 'e eşit alınacaktır. Bundan sonra aksi belirtilene kadar $\eta_2^{(1)} = \eta_2^{(3)} = \eta_2$ 'dir. Ayrıca $\nu = 0.33$ ve $\eta_2 = 0$ olduğu varsayılıyor.

Yakınsaklık hesabı için aşağıdaki norm ele alınıyor:

$$\|f - g\|_{\infty} = \max \{ |f(x_{\ell}) - g(x_{\ell})| : 0 \leq x_{\ell} \leq 2a_{\ell} / h \} \quad (3.111)$$

Burada $f, g \in L_2[0, a_1^*] \times [0, a_3^*]$ 'dir. $L_2[0, a_1^*] \times [0, a_3^*]$ Lebesgue uzayının elemanları

$$\int_0^{a_3^*} \int_0^{a_1^*} |h(x_1, x_3)| dx_1 dx_3 < +\infty$$

koşulunu sağlayan $h(x_1, x_3)$ fonksiyonlarıdır.

Tablo 1 ve 2 farklı SE sayısı ve farklı boyutsuz frekans Ω değerleri için $\|\sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{22}^{(8)}\|_{\infty}$ normunun değerlerini gösteriyor. Burada “ (n) ” üst indisi Ox_2 eksenini istikametindeki SE sayısını göstermektedir. Bu tablolardan boyutsuz frekans Ω değerleri arttığında normun değerlerinin de arttığı görülebilir. Ox_{ℓ} eksenleri

istikametindeki eleman sayıları sabit ve Ox_2 yönündeki eleman sayısı arttığında normun değerleri azalıyor. Benzer şekilde Ox_2 eksenini yönündeki eleman sayısı sabit ve Ox_1 eksenleri yönündeki eleman sayıları arttıkça normun değeri azalıyor. Sonuç olarak SE sayılarının artması hatayı azaltıyor. Bu beklenen bir sonuçtur. SE sayısı arttıkça elde edilen sayısal değerlerin doğruluğunun artacağından daha önce bahsedilmişti.

Tablo 3.1. $m = p = 10$, $\nu = 0.33$ ve $\eta_2 = 0$ olduğunda farklı boyutsuz frekans Ω için $\|\cdot\|_\infty$ normunun değerleri

$m = p = 10$	$n = 6$	$n = 4$	$n = 2$
$\Omega = 0.0$	0.012320649	0.018539441	0.055710768
$\Omega = 0.1$	0,012948431	0,018573903	0,063505392
$\Omega = 0.3$	0.015545570	0.022338030	0.091985952

Tablo 3.2. $m = p = 20$, $\nu = 0.33$ ve $\eta_2 = 0$ olduğunda farklı boyutsuz frekans Ω için $\|\cdot\|_\infty$ normunun değerleri

$m = p = 20$	$n = 6$	$n = 4$	$n = 2$
$\Omega = 0.0$	0.002748073	0.011571412	0.053570444
$\Omega = 0.1$	0,002800934	0,011765392	0,054093983
$\Omega = 0.3$	0.003277899	0.013495730	0.058754563

Yakınsaklık analizi için şimdi de aşağıdaki norm göz önüne alınıyor:

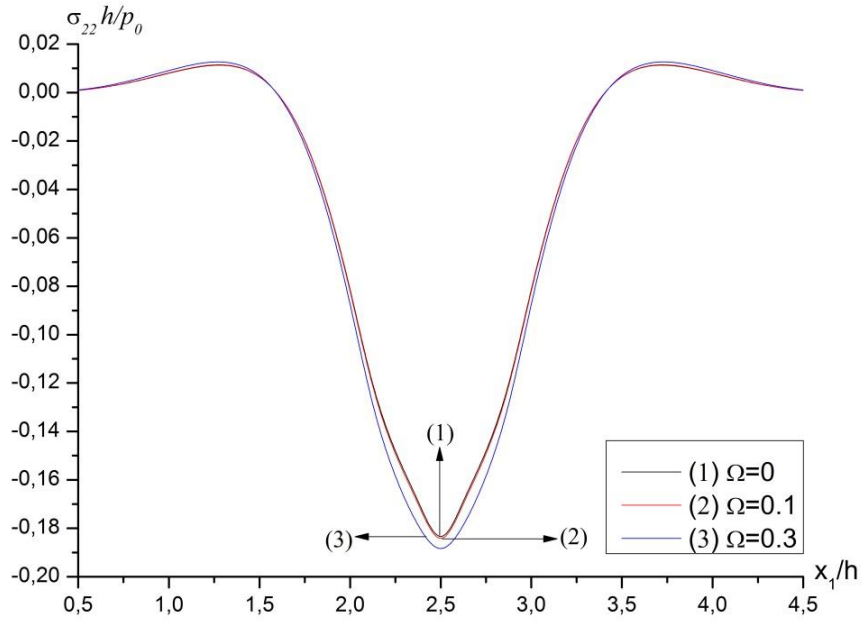
$$\|f - g\|_0 = \sqrt{\sum_{j=1}^N \|f_j - g_j\|_0^2} \quad (3.112)$$

Burada $L_2[0, a_1^*] \times [0, a_3^*]$ 'dir. O zaman $\|\sigma_{22}^{(k,3,k)} - \sigma_{22}^{(50,3,50)}\|_0$ normunun değerleri incelenebilir. Burada “ (m,n,p) ” üst indisinin ögeleri sırasıyla Ox_i eksenleri yönündeki SE sayılarını temsil ediyor. Tablo 3, Ox_i eksenleri istikametindeki SE sayısının etkisini inceleme fırsatı sunuyor. Tablo 3’den Ox_i eksenleri istikametindeki SE sayıları arttığında ve Ox_2 eksen yönündeki SE sayısı sabit tutulduğunda $\|\cdot\|_0$ normuna göre yapılan hatanın azaldığı görülür. Bütün yönlerde SE sayıları sabit iken normun değerleri boyutsuz frekans Ω ile birlikte azalıyor. Açıkçası bu sonuçlar Tablo 1 ve 2’dekilerle çakışmaktadır.

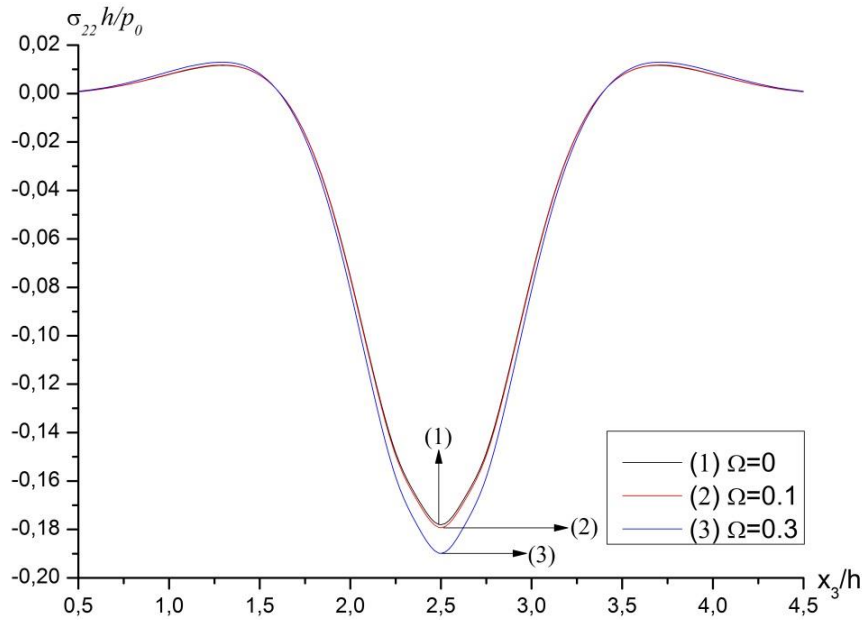
Tablo 3.3. $n=3$, $\nu=0.33$ ve $\eta_2=0$ olduğunda farklı boyutsuz frekans Ω için $\|\cdot\|_0$ normunun değerleri

$n=3$	$m=p=40$	$m=p=20$	$m=p=10$
$\Omega=0.0$	$5,11299 \times 10^{-8}$	$5,62361 \times 10^{-6}$	$1,11706 \times 10^{-3}$
$\Omega=0.1$	$5,23537 \times 10^{-8}$	$5,69228 \times 10^{-6}$	$1,20311 \times 10^{-3}$
$\Omega=0.3$	$6,35329 \times 10^{-8}$	$6,32071 \times 10^{-6}$	$2,60557 \times 10^{-3}$

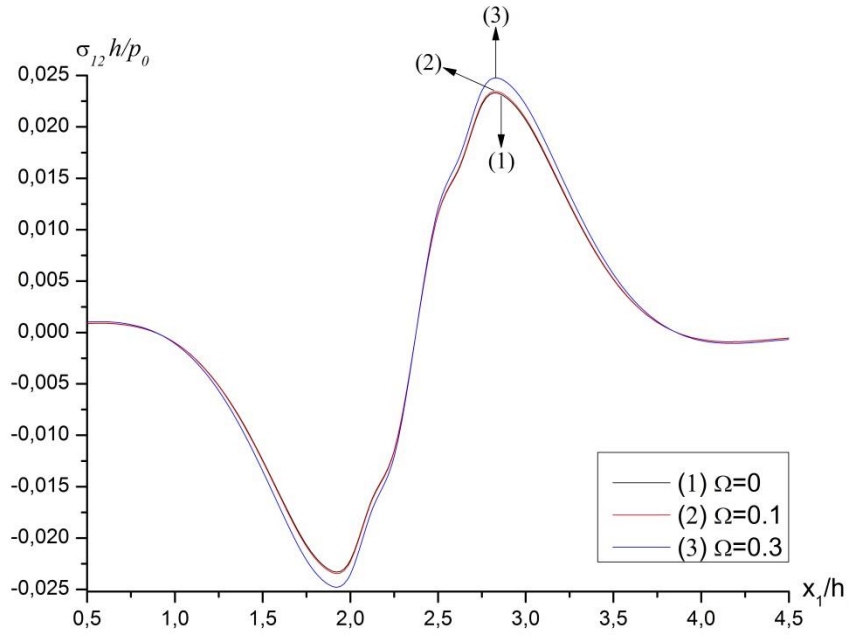
Mevcut algoritmanın doğruluğunu kontrol etmenin başka bir yolu daha ele alınıyor. Şekil 3.5’de $(m,n,p)=(40,4,40)$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$ ve $x_3/h=a_3/h$ durumunda farklı boyutsuz frekans Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin x_1/h ’a göre dağılımı sergileniyor. Benzer şekilde bu kez Şekil 3.6’da aynı varsayımlar altında $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin x_3/h ’a göre dağılımı $x_1/h=a_1/h$ durumu için sergileniyor. Kullanılan malzemenin homojen ve izotropik özelliği nedeniyle her iki şekilde de $x_i/h \cong 2.5$ hattına göre simetrikliğin olması önerilen algoritmanın doğruluğunu birkez daha gösterir. Her iki şekilde de $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin $x_i/h \cong 2.5$ noktasında maksimum noktasına ulaştığı hemen söylenebilir. Beklenildiği gibi bu nokta kuvvetin uygulandığı noktadır. Dahası hem Şekil 3.5’de hem de Şekil 3.6’da $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω değerleri ile birlikte artıyor.



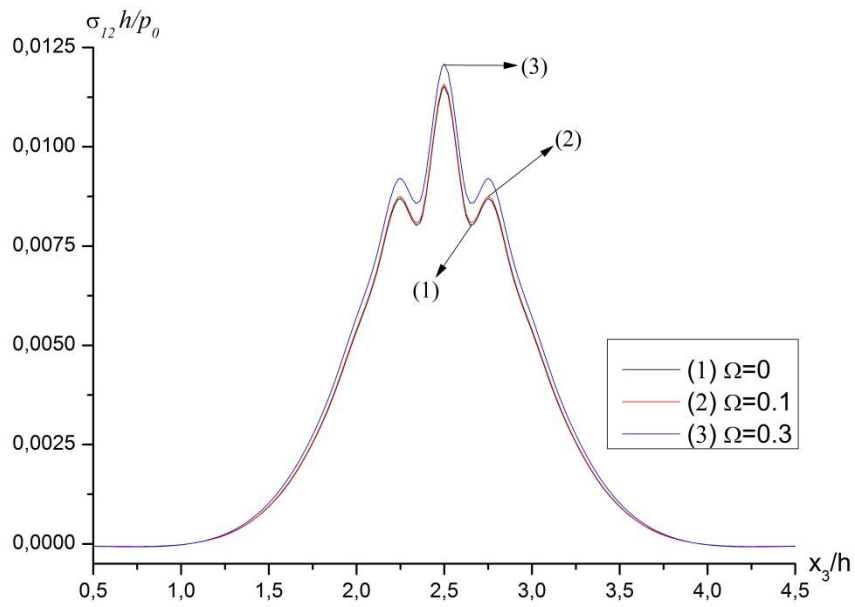
Şekil 3.5. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_3/h=a_3/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_1/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ dağılımı



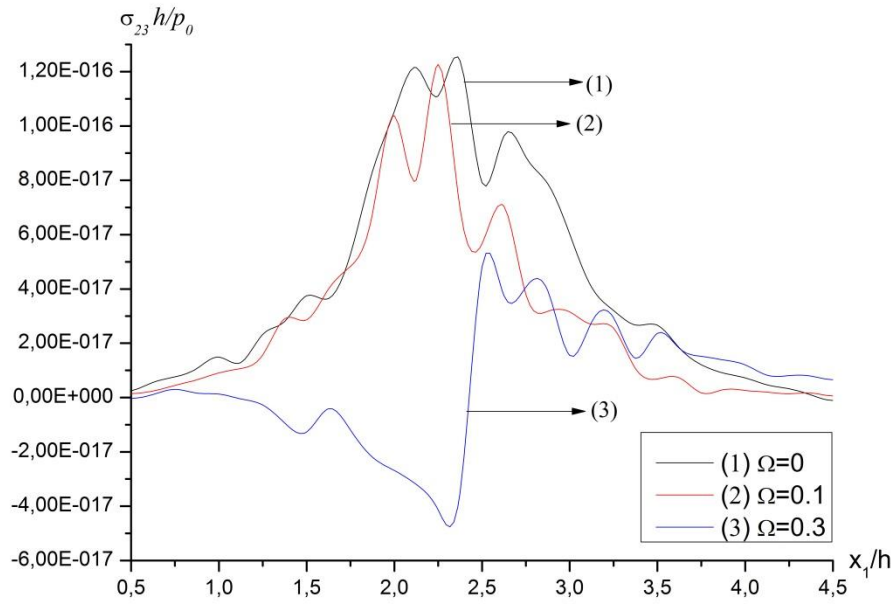
Şekil 3.6. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_1/h=a_1/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_3/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ dağılımı



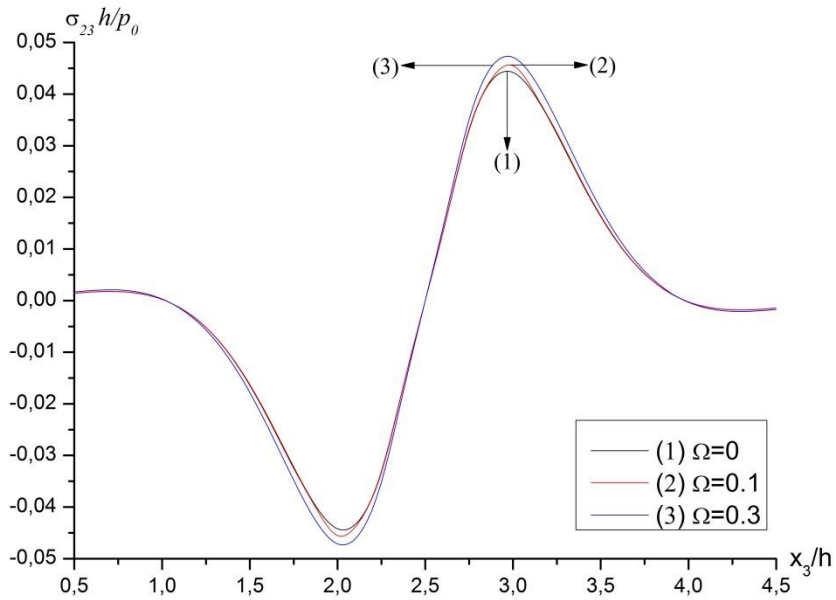
Şekil 3.7. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_3/h=a_3/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_1/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ dağılımı



Şekil 3.8. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_1/h=a_1/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_3/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ dağılımı



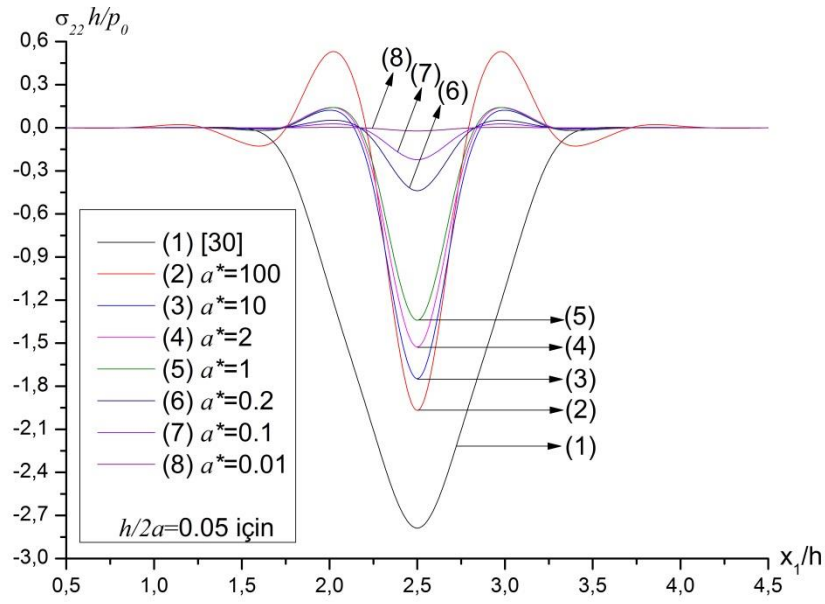
Şekil 3.9. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_3/h=a_3/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_1/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ dağılımı



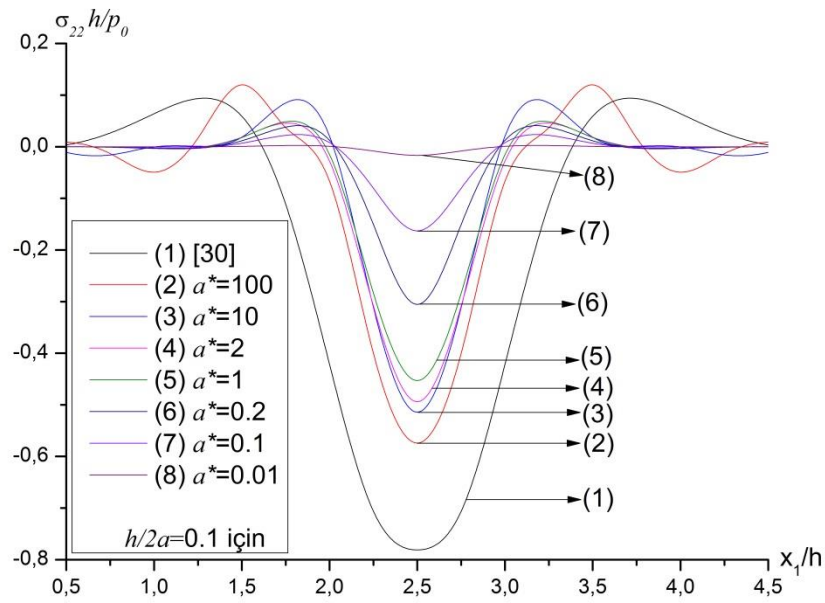
Şekil 3.10. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $x_1/h=a_1/h$ ve $x_2/h=0$ durumunda x_3/h 'a göre farklı Ω değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ dağılımı

Şekil 3.7, 3.8, 3.9 ve 3.10, Şekil 3.5'deki aynı varsayımlar altında x_l / h hattına göre $\sigma_{12}h / p_0$ ve $\sigma_{23}h / p_0$ gerilmelerinin değişimini gösteriyor. Hem Şekil 3.7 hem de Şekil 3.8 $x_l / h \cong 2.5$ 'a göre simetriktir. Her iki şekilden de görülebileceği gibi $\sigma_{12}h / p_0$ gerilmesinin mutlak maksimum değeri $x_1 / h \cong 1.75$, $x_1 / h \cong 2.75$ ve $x_3 / h \cong 2.5$ hatlarında oluşabilir. Ayrıca Şekil 3.9'da $\sigma_{23}h / p_0$ gerilmesinin mutlak değeri sıfıra yaklaşıyor ve kararsız bir karakter sergiliyor. Şekil 3.9 ve 3.10'dan $\sigma_{23}h / p_0$ gerilmesi maksimum değerini muhtemelen $x_1 / h \cong 2.25$, $x_3 / h \cong 2.0$ ve $x_3 / h \cong 3.0$ hatları üzerinde alır.

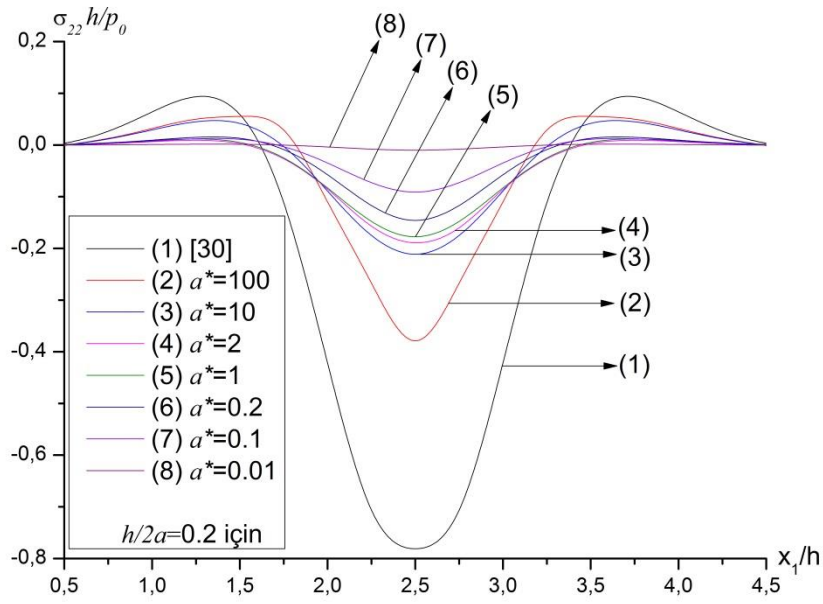
Mevcut algoritma kullanılarak elde edilen sayısal sonuçları önceden yapılan çalışmalardakilerle karşılaştırmak için cismin genişliği ve derinliğinin oranını gösteren a^* parametresi tanımlanıyor. Açıkcası $a^* = a_1 / a_3$ olsun. Cismin genişliği sabit iken derinliği değişiyor. Şekil 3.11, 3.12, 3.13 ve 3.14 a^* parametresinin ve $h / 2a$ oranının farklı değerleri için x_1 / h hattında $\sigma_{22}h / p_0$ normal gerilmesinin nasıl dağıldığını gösteriyor. Bu şekillerde [30] ile gösterilen grafik [30] no'lu referansta ulaşılan sayısal sonuçları gösteriyor. Şekil 3.11, 3.12, 3.13 ve 3.14 göz önüne alındığında mevcut algoritmayı kullanarak elde edilen sayısal sonuçlar $a^* \rightarrow \infty$ olduğunda [30]'daki çalışmada elde edilen sayısal sonuçlara yaklaşmaktadır. Ayrıca $\sigma_{22}h / p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri cismin yüksekliği arttıkça azalmaktadır. Bu yolla kullanılan algoritmanın doğruluğu ve güvenilirliği bir kez daha kanıtlanmış oldu.



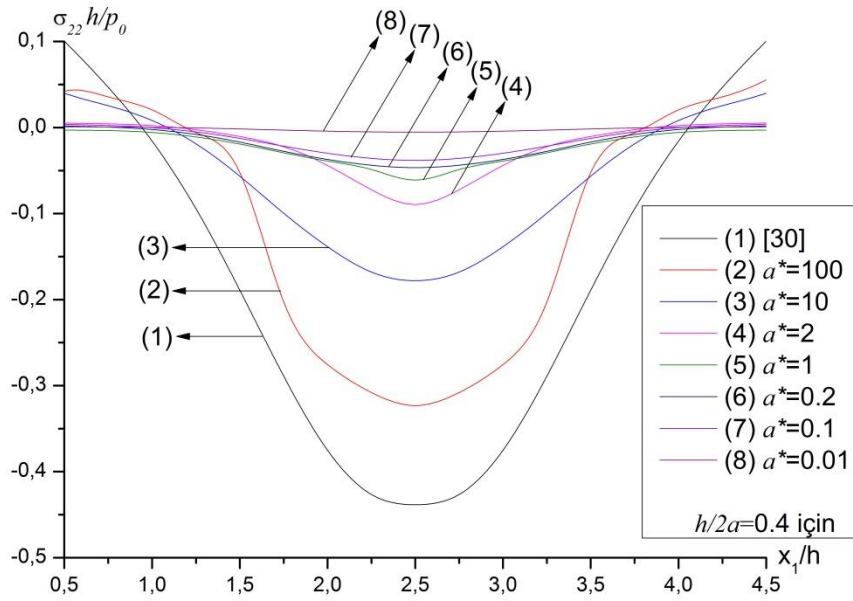
Şekil 3.11. $E=1$, $\Omega=0$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $h/2a=0.05$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı



Şekil 3.12. $E=1$, $\Omega=0$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$, $h/2a=0.1$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı



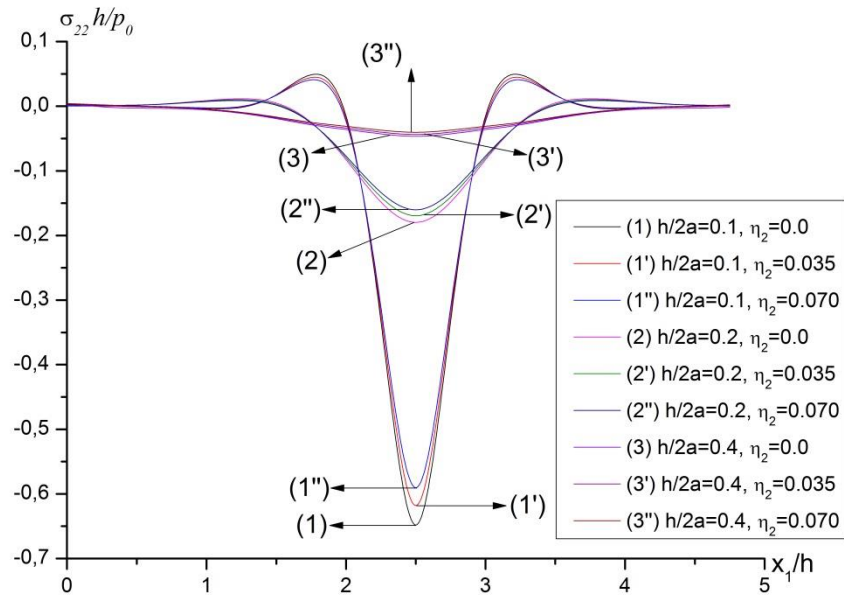
Şekil 3.13. $E=1$, $\Omega=0$, $\nu=0,33$, $\eta_2=0$, $h/2a=0,2$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı



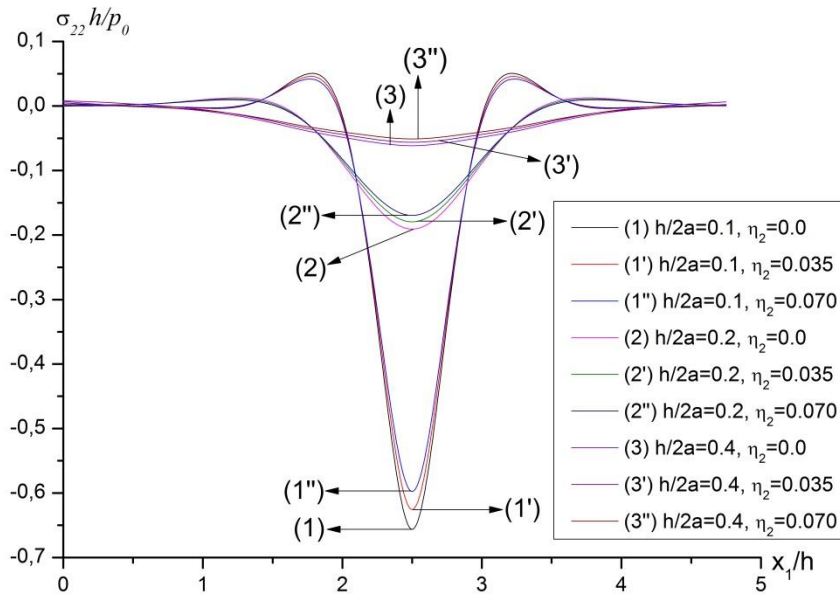
Şekil 3.14. $E=1$, $\Omega=0$, $\nu=0,33$, $\eta_2=0$, $h/2a=0,4$ ve $x_2/h=0$ durumunda a^* oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı

Şimdi göz önüne alınan problemin içinde var olan bazı önemli parametrelerle ilgili sayısal sonuçlar sunuluyor. Her şeyden önce bu çalışma boyunca mevcut cisim Ox_1 eksenleri istikametinde 20 eşit uzunluklu parçaya ve Ox_2 eksenini yönünde 4 eşit uzunluklu parçaya bölünüyor. Ayrıca aksi belirtilmedikçe $E = 1$, $\nu = 0.33$, $\Omega = 0$, $\eta_2 = 0$ ve $x_2 / h = 0$ olduğu varsayılıyor.

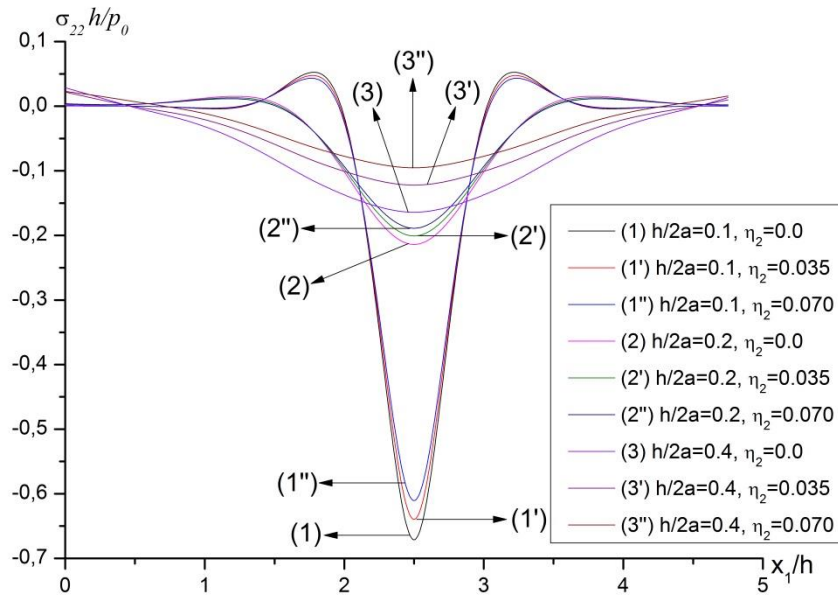
Şekil 3.15, 3.16, 3.17 ve 3.18 cismin yüksekliği $h/2a$, η_2 başlangıç gerilme parametresi ve boyutsuz frekans Ω 'nın farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımını sergileme görevini yerine getiriyor. Bu şekillerden η_2 başlangıç gerilme parametresinin ve boyutsuz frekans Ω 'nın sabit değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri cismin yüksekliğinin artmasıyla birlikte azalmaktadır. Cismin yüksekliği ve boyutsuz frekans Ω 'nın sabit değerleri için η_2 başlangıç gerilme parametresi arttıkça $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri azalıyor. Ayrıca $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri cismin yüksekliğinin ve η_2 başlangıç gerilme parametresinin sabit değerleri için boyutsuz frekans Ω değerleri ile birlikte artıyor. Dahası Şekil 3.15, 3.16, 3.17 ve 3.18'de verilen sayısal sonuçlardan cismin yüksekliği arttıkça $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin dağılımının salınım karakterinin yok olduğu söylenebilir.



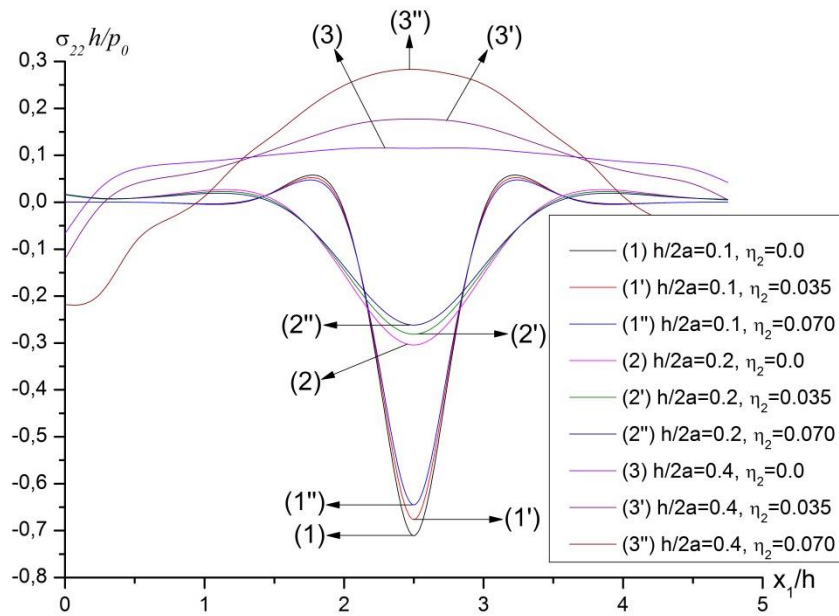
Şekil 3.15. $E=1$, $\nu=0.33$, $\Omega=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı



Şekil 3.16. $E=1$, $\nu=0.33$, $\Omega=0.3$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı



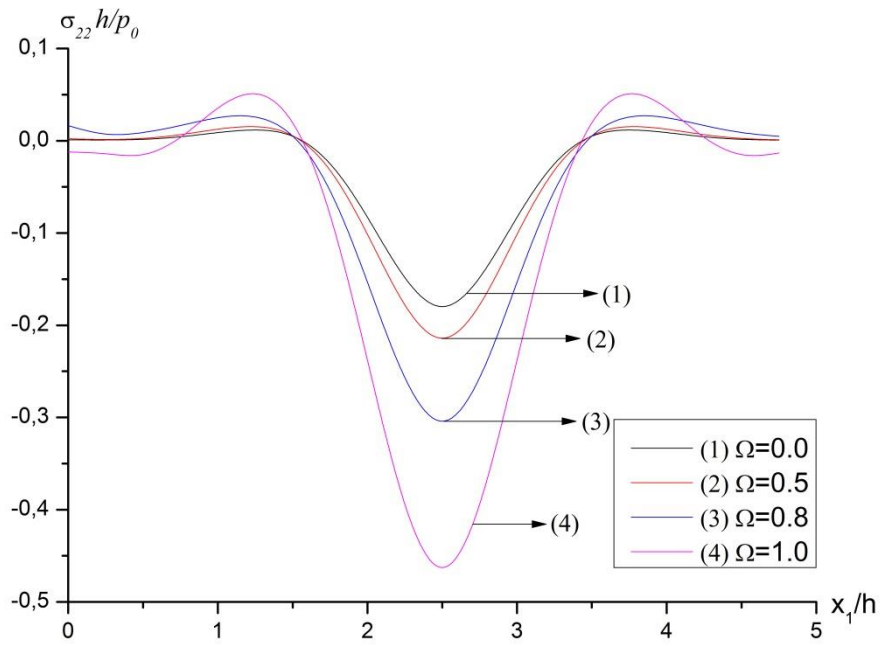
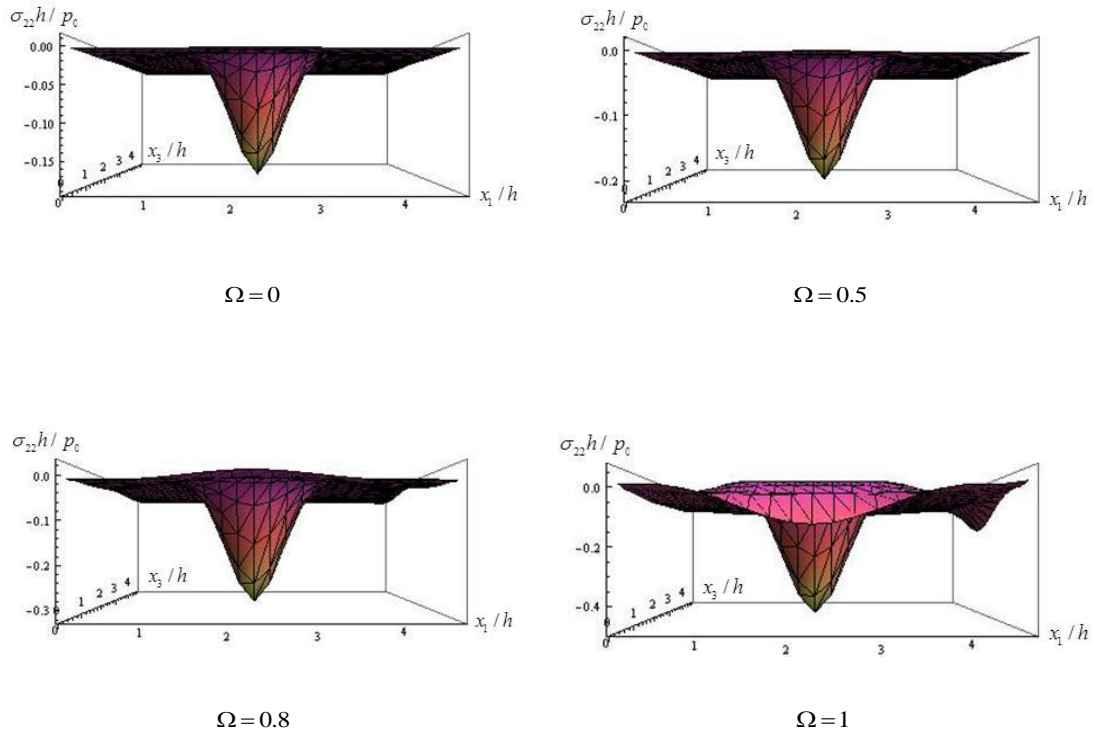
Şekil 3.17. $E=1$, $\nu=0.33$, $\Omega=0.5$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı



Şekil 3.18. $E=1$, $\nu=0.33$, $\Omega=0.8$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2 parametresinin ve $h/2a$ oranının farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h hattına göre dağılımı

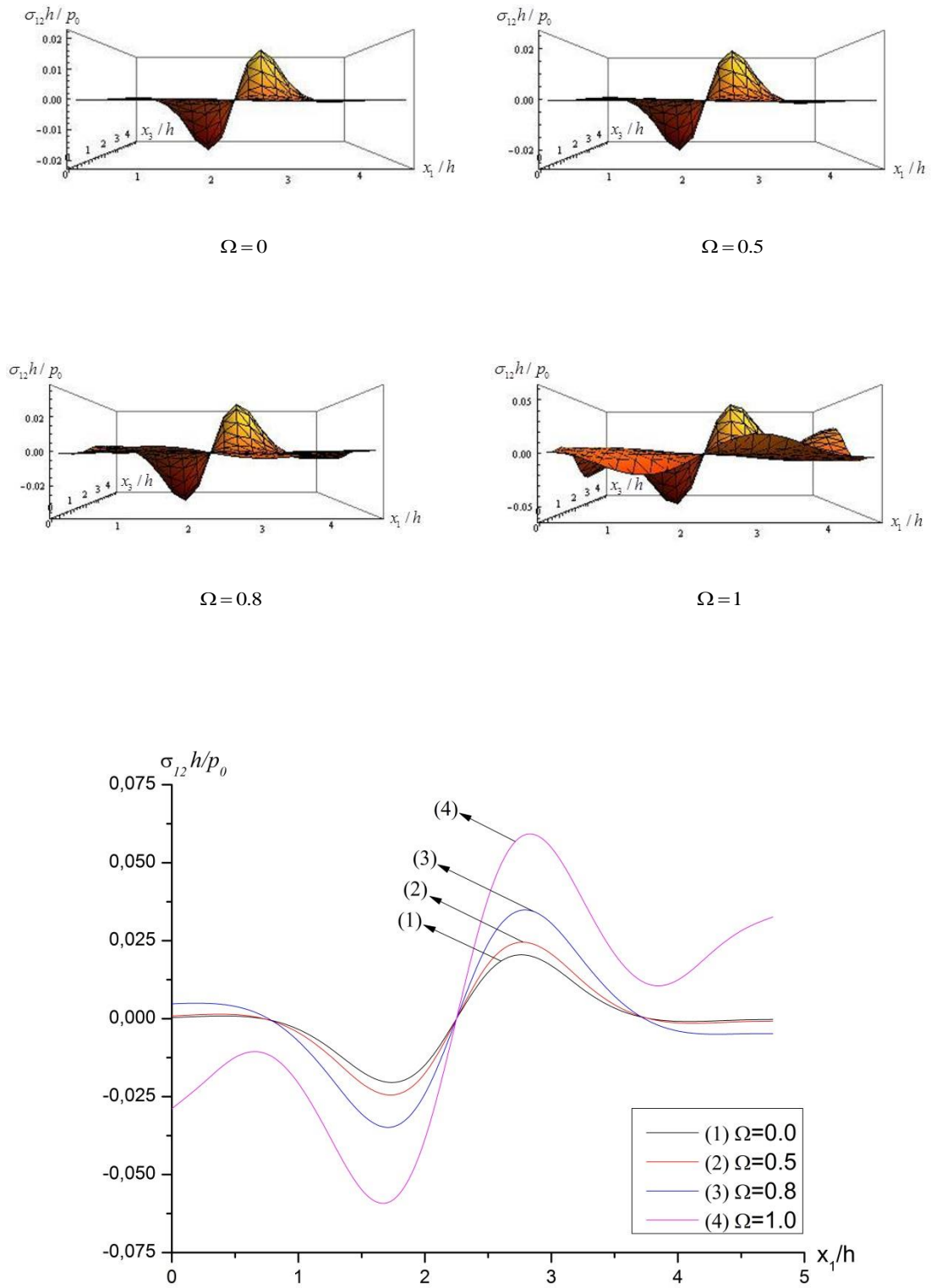
Uygulanan zamana göre harmonik kuvvetin etkisiyle cisim üzerinde oluşan değişimleri daha iyi anlamak için $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin üç boyutlu grafiği inceleniyor. Şekil 3.19'daki grafikler boyutsuz frekans Ω 'nın farklı değerleri için Ox_1x_3 düzleminde $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin nasıl dağıldığını gösteriyor. Bu grafiklerden ilgili hatlar boyunca $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω değerleri ile birlikte azaldığı kolaylıkla görülebilir. Bu sonuç nicel anlamda [32] no'lu referansta verilenlere benzerdir. Bu grafiklerden görülür ki maksimum normal gerilme P' noktasında meydana geliyor. $\Omega=1$ için normal gerilmenin salınım karakteri dalgalanmaya başlıyor. Çünkü boyutsuz frekans Ω 'nın bu değeri "tınılama değeri (resonance value)" adı verilen bir değere yakındır. Gerçekten de bu hipotez [32] no'lu referanstaki problem için sunulan sayısal sonuçlar tarafından desteklenir. Böylece bu problem için yazılan algoritmanın doğruluğu Şekil 3.19 ile bir kez daha denetlenmiş olur.

Şekil 3.20'de farklı boyutsuz frekans Ω değerleri için Ox_1x_3 düzleminde $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin dağılımı veriliyor. Bu grafiklerden $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri Ω boyutsuz frekans değerleri ile birlikte artmaktadır. $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri P' noktasında gözden kayboluyor. Ayrıca $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin maksimal mutlak değeri $(x_1/h, x_3/h) \approx (1.75, 2.5)$ ve $(x_1/h, x_3/h) \approx (2.75, 2.5)$ noktaları civarında aldığı görülebilir.



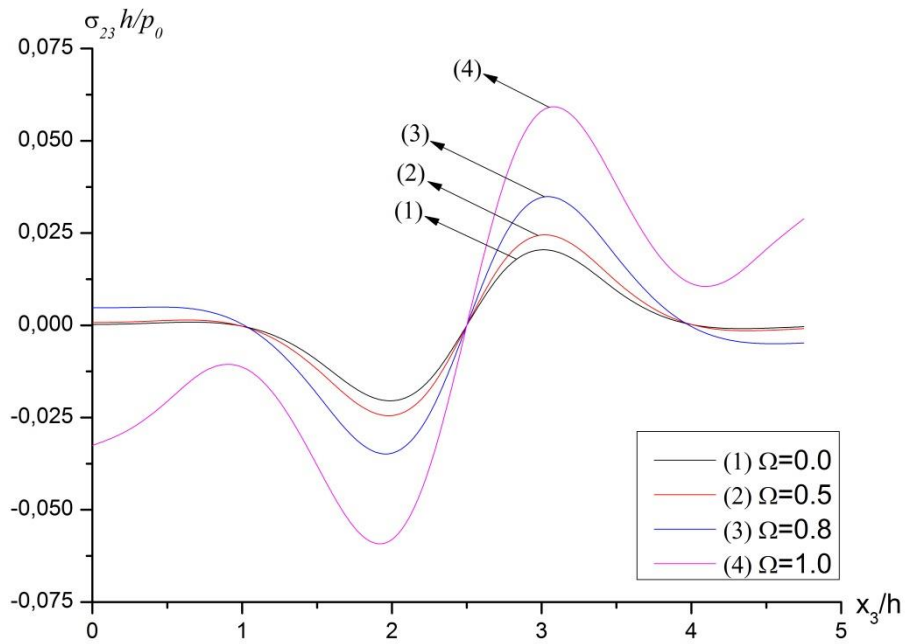
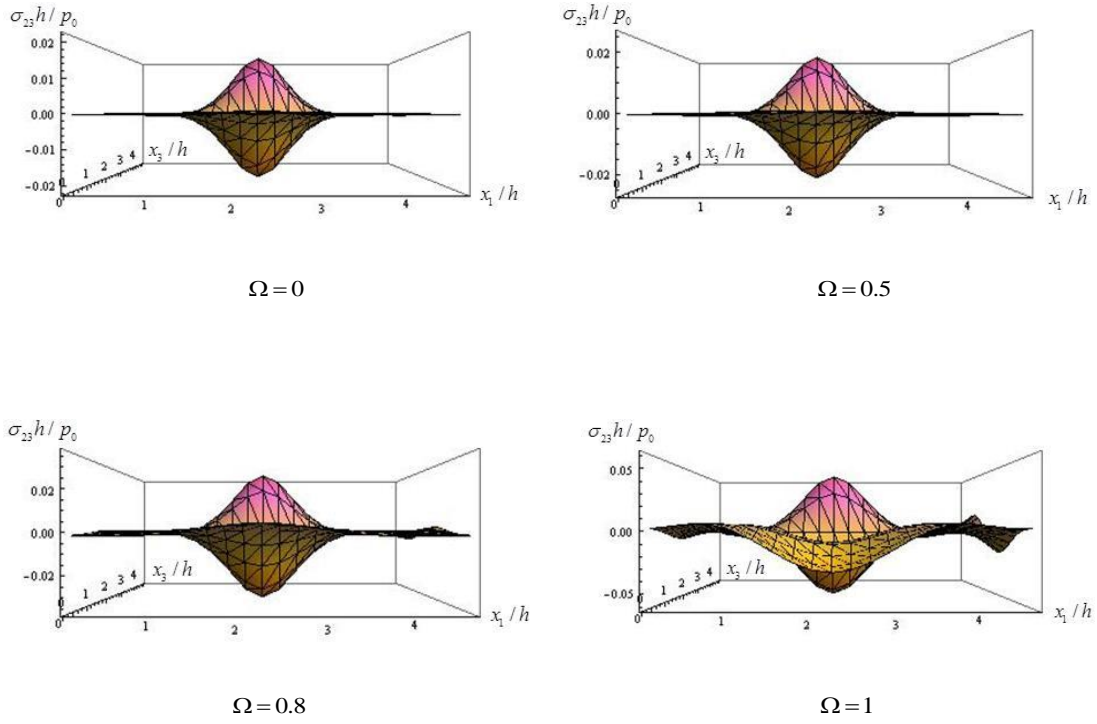
$x_3/h = a_3/h$ 'da $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h 'a göre dağılımı

Şekil 3.19. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin dağılımı



$x_3/h = a_3/h$ 'da $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h 'a göre dağılımı

Şekil 3.20. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin dağılımı



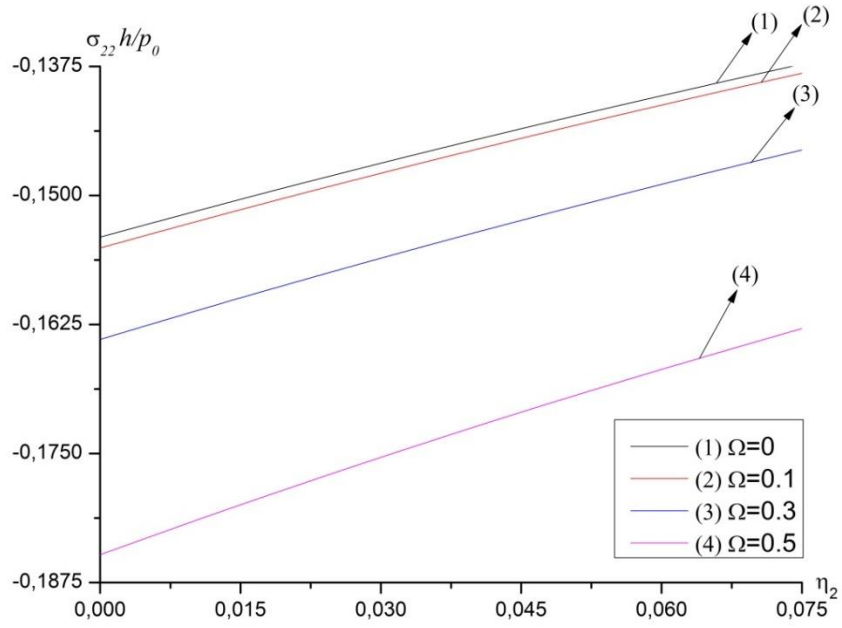
$x_3/h = a_3/h$ 'da $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin x_1/h 'a göre dağılımı

Şekil 3.21. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2=0$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin dağılımı

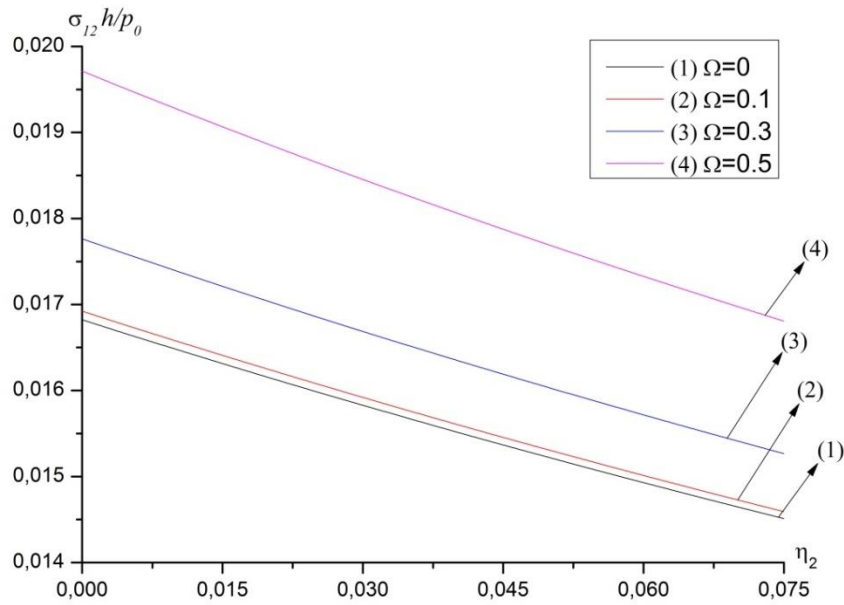
Şekil 3.21 $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin Ox_1x_3 düzlemindeki dağılımını Şekil 3.19 ve 3.20'deki varsayımlar altında sergiliyor. $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesi maksimal mutlak değerine $(x_1/h, x_3/h) \approx (2.25, 2)$ ve $(x_1/h, x_3/h) \approx (2.25, 3)$ noktaları civarında ulaştığı görülebilir. Bu sonuçtan daha öncede bahsedilmiştir. Şekil 3.20 ve 3.21'den görülebileceği gibi $\sigma_{12}h/p_0$ ve $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmeleri benzer karakter sergiliyorlar. $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri P' noktasında yok oluyor. Normal gerilmelerin maksimum değerine ulaştığı noktalarda kesme gerilmelerinin genelde sıfır olduğu klasik elastisite teorisinden bilinmektedir (Bkz Bölüm 2.2.2.) [3].

Yukarıda elde edilen sonuçlardan da görülebileceği gibi en büyük yer değiştirme P' noktasında meydana geldiğinden mevcut probleme ait en önemli olaylar bu noktada gerçekleşir. Bu nedenle bundan sonraki incelemeler bu noktada yapılacaktır. Şekil 3.22 incelenen cismin başlangıç gerilmesinin $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesi üzerine etkisini incelemek için kullanılabilir. Şekil 3.22'de boyutsuz frekans Ω 'nın farklı değerleri için η_2 başlangıç gerilme parametresinin değerlerine göre $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin dağılımı veriliyor. Bu şekilden $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri artan η_2 başlangıç gerilme parametresiyle birlikte azalıyor. Boyutsuz frekans Ω değerleri arttığında ise sabit η_2 başlangıç gerilme parametresi için $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri artıyor. Açıkçası bu sonuç Şekil 3.19'dakilerle aynıdır.

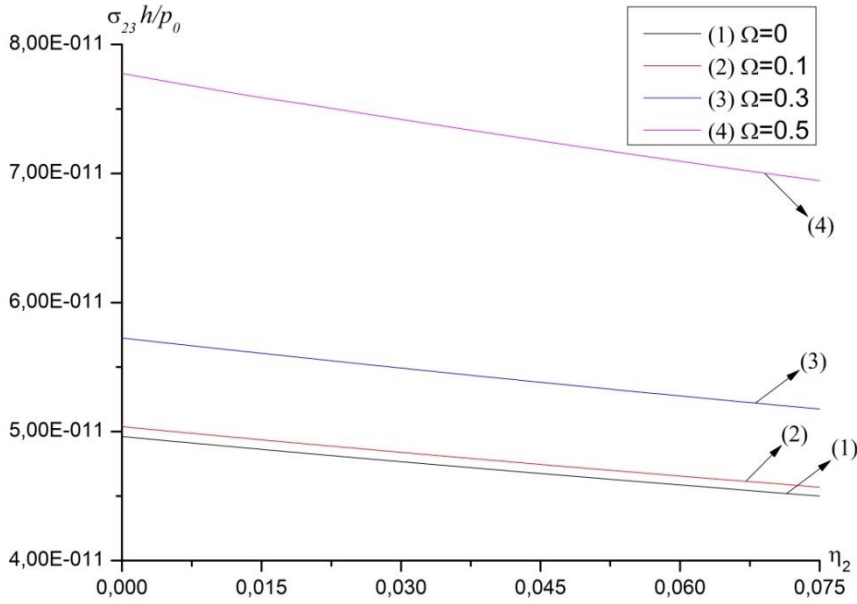
Şekil 3.23 ve 3.24'de Şekil 3.22'deki varsayımlar altında farklı Ω değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ ve $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmelerinin η_2 değerlerine göre dağılımı gösteriliyor. Şekil 3.23'den $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω ile birlikte azalıyor. Ayrıca η_2 başlangıç gerilme parametresi arttığında $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri azalmaktadır. Şekil 3.24 göz önüne alındığında $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesi $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesiyle benzer karakter sergilemektedir. $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesi boyutsuz frekans Ω ve artan η_2 başlangıç gerilme parametresiyle azalmaktadır.



Şekil 3.22 $E=1$, $\nu=0.33$ ve $x_2/h=0$ durumunda Ω 'nın farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin η_2 parametresine göre dağılımı



Şekil 3.23. $E=1$, $\nu=0.33$ ve $x_2/h=0$ durumunda Ω 'nın farklı değerleri için $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin η_2 parametresine göre dağılımı



Şekil 3.24 $E=1$, $\nu=0.33$ ve $x_2/h=0$ durumunda Ω 'nın farklı değerleri için $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin η_2 parametresine göre dağılımı

Şimdi mevcut çalışmaya farklı bir bakış açısı getiriliyor. Bu amaç için genişliği ve derinliğinin oranı 1/2 ve genişliği ile yüksekliğinin oranı 1/5 olan bir cisim ele alınıyor. Açıkçası $a_3/a_1=1/2$ ve $h/2a_1=1/5$ şeklindedir. Gerilme dağılımı üzerine başlangıç gerilmesinin etkisinin anlaşılması için $\eta_2^{(1)}$ ve $\eta_2^{(3)}$ parametreleri düşünülebilir. Ox_1 eksen istikametindeki $\eta_2^{(1)}$ başlangıç gerilme parametresi ile Ox_3 eksen yönündeki $\eta_2^{(3)}$ başlangıç gerilme parametresinin oranı η_2^* ile gösteriliyor (açıkçası $\eta_2^* = \eta_2^{(1)} / \eta_2^{(3)}$). $\eta_2^{(3)} = 0.01$ şeklinde sabit olduğu ve $\eta_2^{(1)}$ başlangıç gerilme parametresinin düzenli olarak küçük değerlerle değiştiği varsayılıyor. (3.32)-(3.35)'deki parametreler göz önüne alınarak (3.36)'daki $J(\mathbf{u})$ toplam potansiyel enerji fonksiyoneli oluşturulurken bazı matematiksel değişiklikler yapılırsa (3.88)-(3.96) denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[K_{11}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} \\ & + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} - \Omega^2 \alpha\beta\gamma N_{ij} N_{hq} \\ & + \eta_2^* \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \right] dr ds dt \quad (3.113)$$

$$[K_{12}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right\} \right] \gamma dr ds dt \quad (3.114)$$

$$[K_{13}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right\} \right] \beta dr ds dt \quad (3.115)$$

$$[K_{21}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right\} \right] \gamma dr ds dt \quad (3.116)$$

$$[K_{22}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{\alpha\gamma}{\beta} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} \\ & + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} - \Omega^2 \alpha\beta\gamma N_{ij} N_{hq} \\ & + \eta_2^* \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \right] dr ds dt \quad (3.117)$$

$$[K_{23}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} \right\} \right] \alpha dr ds dt \quad (3.118)$$

$$[K_{31}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} \right\} \right] \beta dr ds dt \quad (3.119)$$

$$[K_{32}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} \right\} \right] \alpha dr ds dt \quad (3.120)$$

$$[K_{33}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta_2^{(3)}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} \frac{\partial N_{ij}}{\partial s} \frac{\partial N_{hq}}{\partial s} \\ & + \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} - \Omega^2 \alpha\beta\gamma N_{ij} N_{hq} \\ & + \eta_2^* \frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial N_{ij}}{\partial r} \frac{\partial N_{hq}}{\partial r} + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\partial N_{ij}}{\partial t} \frac{\partial N_{hq}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \right] dr ds dt \quad (3.121)$$

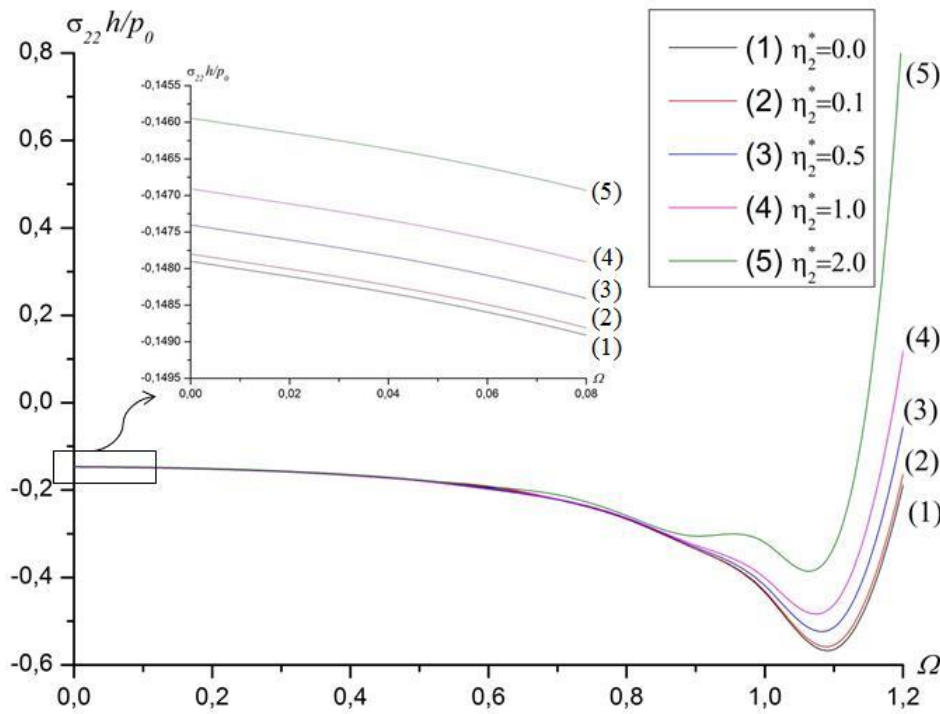
Böylece Alt Bölüm 3.3’de doğruluğu kanıtlanan algoritma yeni duruma göre yeniden üretilmiş oldu. Ancak yapılan değişiklikler sadece matematiksel olduğu için yeni algoritmanın doğruluğunu göstermeye gerek yoktur. Ancak bu yeni algoritmanın öngörülmesiz ortamlarda anlamsız bir hale geldiğine dikkat edilmelidir.

Şekil 3.25’de yeni tanımlanan η_2^* başlangıç gerilme parametresinin $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesine etkisi farklı boyutsuz frekans Ω değerleri için veriliyor. $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω ’nın sabit değerleri için η_2^* başlangıç gerilme parametresiyle birlikte azalıyor. İlgili gerilmelerin ve yer değiştirmelerin maksimum değerlerini aldığı yerlerde dış kuvvetin ”tınlama (rezonans-resonance)” değeri denilen bir değerin var olduğu biliniyor. Şekil 3.25 böyle bir noktanın varlığını gösteriyor. $\Omega > 1.1$ için gerilme-boyutsuz frekans eğrisinin salınım karakteri kararsız bir görüntü gösteriyor. Bunun nedeni $\Omega = 1.1$ değerinin tınlama değerine çok yakın olmasıdır. Bu sonuçtan [32]’de önceden bahsedilmişti.

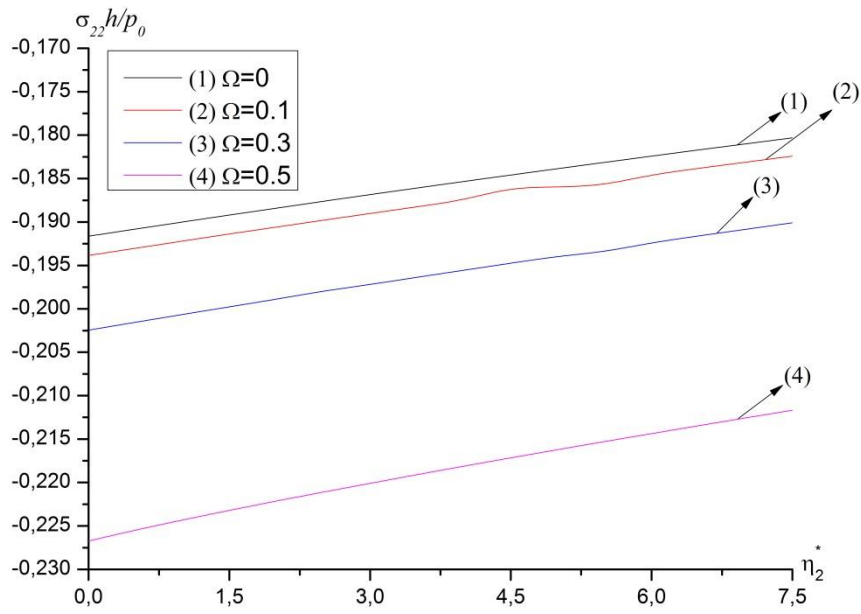
Şekil 3.26’da Şekil 3.25’deki aynı varsayımlar altında farklı boyutsuz frekans Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin η_2^* başlangıç gerilme parametresine göre değişimi görülüyor. Şekil 3.26’dan $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak

değerleri önceden de gösterildiği gibi artan η_2^* başlangıç gerilme parametresiyle birlikte azalıyor. Sabit η_2^* başlangıç gerilme parametresi için $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω değerleri ile birlikte artıyor.

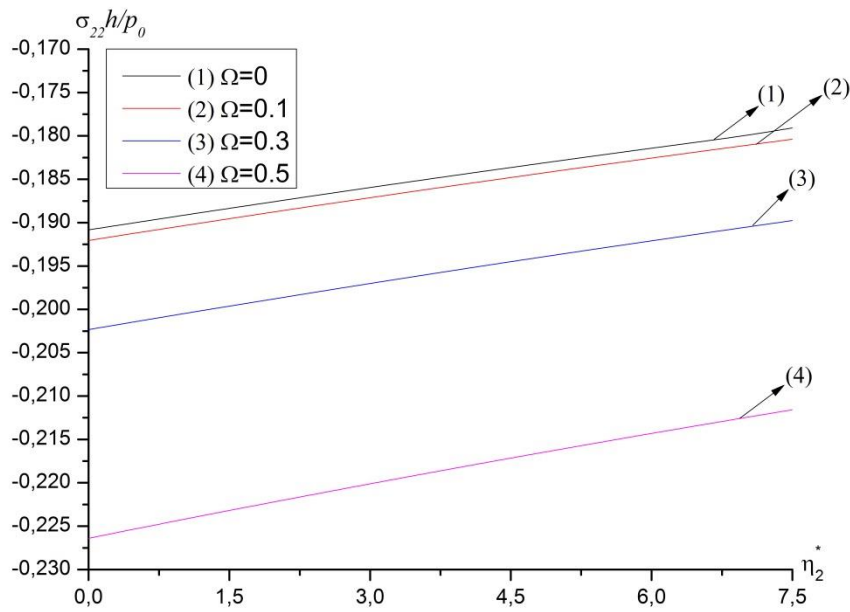
Şimdide cismin boyutlarının değişiminin $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesine etkisi ele alınıyor. Bu amaçla Şekil 3.27, Şekil 3.26'daki aynı varsayımlar altında fakat aynı genişlik ve derinliğe sahip cisim için çiziliyor. Şekil 3.27'den görüldüğü gibi nicel anlamda Şekil 3.26 ile benzerdir. Bu yüzden Şekil 3.26 için elde edilen bütün sayısal sonuçlar doğal olarak Şekil 3.27 içinde geçerlidir. İlave olarak cismin derinliğindeki artış $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin azalmasına neden oluyor. Bu sonuç Şekil 3.12'de de elde edilmişti.



Şekil 3.25. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2^{(3)}=0.01$ ve $x_2/h=0$ durumunda η_2^* 'nin farklı değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin Ω 'ya göre dağılımı



Şekil 3.26. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2^{(3)}=0.01$, $a^*=2$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin η_2^* 'a göre dağılımı



Şekil 3.27. $E=1$, $\nu=0.33$, $\eta_2^{(3)}=0.01$, $a^*=1$ ve $x_2/h=0$ durumunda farklı Ω değerleri için $\sigma_{22}h/p_0$ gerilmesinin η_2^* 'a göre dağılımı

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Elastodinamik problemler uygulamalı bilimlerin ve mühendisliğin hemen hemen her alanında ortaya çıkar. Bu nedenle elastodinamik teoriye önem verilmiştir. Mühendisliğin ve uygulamalı matematiğin önemli araştırma konusu olan bir başka problem grubunda öngörülen cisimlerde üç-boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga teorisidir (TLTEWISB) ve bu teorinin temel prensiplerine göre ele alınan problemlerin matematiksel modeli oluşturularak Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) yardımıyla sayısal çözümü yapılmıştır.

Bu çalışmada rijit zemin üzerine oturan ve boş yüzeyinin ortasına uygulanan zamana göre harmonik bir normal kuvvetin etkisi altındaki sonlu uzunluğa sahip üç boyutlu öngörülen bir cisim için dinamik gerilme alan problemi incelenmiştir. Bu problem için yer değiştirmeye dayalı üç boyutlu SEY kullanılarak bir çözüm algoritması geliştirilmiştir. Bu algoritmanın doğruluğu gösterilerek $\sigma_{2i}h / p_0$ gerilmeleri için bazı sayısal sonuçlar sunulmuştur. Problem parametrelerinin değişiminin etkisi ele alınmıştır.

Bütün elde edilen sayısal sonuçlardan ve tartışmalardan aşağıdaki bilgilere ulaşılmıştır:

- $\sigma_{22}h / p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω değerleri ile birlikte azalmaktadır.
- $\sigma_{22}h / p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri artan başlangıç gerilme parametresi η_2 ile birlikte azalmaktadır.

- $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin maksimum mutlak değerleri P' noktasında meydana gelmiştir.
- $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω değerleri ile birlikte azalmaktadır.
- $\sigma_{12}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri artan başlangıç gerilme parametresi η_2 ile birlikte azalmaktadır.
- $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri boyutsuz frekans Ω değerleri ile birlikte azalmaktadır.
- $\sigma_{23}h/p_0$ gerilmesinin mutlak değerleri artan başlangıç gerilme parametresi η_2 ile birlikte azalmaktadır.
- $\sigma_{22}h/p_0$ normal gerilmesinin mutlak değerleri artan başlangıç gerilme parametresi η_2^* ile birlikte azalmaktadır.

Bu çalışmada incelenen problemin çözümü için geliştirilen çözüm algoritması öngörülen ortamlarda farklı yük ve sınır koşulları altında incelenebilir. Ayrıca ele alınan problem Anizotrop gibi farklı ortamlarda da incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] LOVE, A.E.H, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press Warehouse, London, 1906.
- [2] TIMESHENKO, S.P., GOODIER, J.N., Theory of Elasticity, McGraw Hill, Singapore, 1970.
- [3] BARBER, J.R., Elasticity, Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.
- [4] ERINGEN, A. C., ŞUHUBİ, E.S., Elastodynamics, Finite Motion, vol. I, Academic Press, New York, 1975.
- [5] ERINGEN, A. C., ŞUHUBİ, E.S., Elastodynamics, Linear Theory, vol. II, Academic Press, New York, 1975.
- [6] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., The Finite Element Method, 4th. Ed. Vol.1, Basic formulation and linear problems, MacGraw-Hill Book Company, London, 1989.
- [7] MOAVENI, S., Finite Element Analysis Theory and Application with Ansys, Minnesota State University, Mankato, 1999.
- [8] HUTTON, D.V., Fundamentals of Finite Element Analysis, McGraw-Hill, London, 2004.
- [9] REDDY, J.N., An Introduction to the Finite Element Method, Mc-Graw Hill, New York, 2006.
- [10] ROGERSON, G.A., SANDIFORD, K.J., The effect of finite primary deformations on harmonic waves in layered elastic media, International Journal of Solids and Structures, 37:2059-2087, 2000.
- [11] ROGERSON, G.A., SANDIFORD, K.J., Some Comments on the Dispersion Relation for Periodically Layered Pre-stressed Elastic Media, International Journal of Engineering Sciences, 40:23-49, 2002.
- [12] SEGIENKO, I.V., DEINEKA, V.S., Numerical solution of the dynamic problem of elasticity for bodies with concentrated masses, International Applied Mechanics 40(12):1360-1370, 2004.
- [13] NOLDE, E.V., PRIKAZCHIKOVA, L.A., ROGERSON, G.A., Dispersion

- of small amplitude waves in a pre-stressed, compressible elastic plate, *Journal of Elasticity* 75:1-29, 2004.
- [14] ROGERSON, G.A., SANDIFORD, K.J., MURPHY, J.G., Two-dimensional motion in a Bell-constrained plate, *International Journal of Engineering Science* 44:379–394, 2006.
- [15] PARNELL, W.J., Effective wave propagation in a prestressed nonlinear elastic composite bar, *IMA J. Appl. Math.* 72(2):223–244, 2007.
- [16] WIJEYEWICKREMA, A.C., LEUNGVICHCHAROEN S., Wave propagation in prestressed imperfectly bonded compressible elastic layered composites, *Mechanics of Materials* 41:1192-1203, 2009.
- [17] KAYESTHA, P., WIJEYEWICKREMA, A.C., Time-harmonic wave propagation in a pre-stressed compressible elastic bi-material laminate. *European Journal of Mechanics A/Solids* 29:143-151, 2010.
- [18] GUZ, A.N., *Elastic Waves in a Body Initial Stresses, I. General Theory*, Naukova Dumka, Kiev, 1986 (in Russian).
- [19] GUZ, A.N., *Elastic Waves in a Body Initial Stresses, II. Propagation Laws*, Naukova Dumka, Kiev, 1986 (in Russian).
- [20] ZAMANOV, A.D., Stress Distribution in a Rigidly Clamped Composite Plate with Locally Curved Structures under Forced Vibration, *International Applied Mechanics* 37(9):1189-1195, 2001.
- [21] AKBAROV, S.D., OZAYDIN, O., The Effect of Initial Stresses on Harmonic Stress Fields within the Stratified Half Plane, *Eur. J. Mech. A/Solids* 20:385–396, 2001.
- [22] AKBAROV, S.D., OZAYDIN, O., Lamb’s Problem For an Initially Stressed Stratified Half-Plane, *International Applied Mechanics* 37(10):1363-1367, 2001.
- [23] EMIROGLU, I., TASCI, F., AKBAROV, S.D., Lamb problem for a half-space covered with a two-axially prestretched layer, *Mechanics of Composite Materials*, 40(3):227-236, 2004.
- [24] TASCI, F., EMIROGLU, I., AKBAROV, S.D., On the “Resonance” Values of the Dynamical stress in the System Comprises Two-axially Prestretched Layer and Half-Space, 7th Int. Conf. on Vibration Problems, ICOVP-2005, Isik University, Sile, Turkey, September 5–9, 2005.
- [25] AKBAROV, S.D., EMIROGLU, I., TASCI, F., The Lamb’s problem for a half-space covered with the pre-stretched layer, *International Journal of Mechanical Sciences* 47: 1326–1349, 2005.

- [26] AKBAROV, S.D., ZAMANOV, A.D., T. R. Suleimanov, Forced Vibration of a Prestretched Two-layer Slab On a Rigid Foundation, *Mechanics of Composite Materials*, 41(3):229-240, 2005.
- [27] AKBAROV, S.D., GULER, C., On the stress field in a half-plane covered by the pre-stretched layer under the action of arbitrary linearly located time-harmonic forces, *Applied Mathematical Modelling* 31:2375–2390, 2007.
- [28] AKBAROV, S.D., AGASIYEV, E.R., ZAMANOV, A.D., Wave propagation in a pre-strained compressible elastic sandwich plate, *European Journal of Mechanics A/Solids* 30:409-422, 2011.
- [29] AKBAROV, S.D., YILDIZ, A., EROZ, M., Forced vibration of the pre-stressed bi-layered plate-strip with finite length resting on a rigid foundation, *Applied Mathematical Modelling* 35:250-256, 2011.
- [30] AKBAROV, S.D., YILDIZ, A., ERÖZ, M., FEM modelling of the time-harmonic dynamical stress field problem for a pre-stressed plate-strip resting on a rigid foundation, *Applied Mathematical Modelling* 35:952-964, 2011.
- [31] ERÖZ, M., The stress field problem for a pre-stressed plate-strip with finite length under the action of the arbitrary time-harmonic forces, *Applied Mathematical Modelling* 36:5283–5292, 2012.
- [32] DAŞDEMİR, A., ERÖZ, M., Mathematical Modeling of dynamical stress field problem for a pre-stressed bi-layered plate-strip (Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society’de kabul edildi.)
- [33] CHERKAEV, A., CHERKAEV, E., *Calculus of Variations and applications*, Lecture Notes, 2003.

EKLER

Tablo Ek 1 Terimler Sözlüğü

Türkçe-İngilizce Terimler Sözlüğü	
algoritma	:algorithm
başlangıç gerilme parametresi	:parameter related tot he pre-stess intensity
bilinmeyen sütun vektörü	:unknown column vector
boyutsuz frekans	:dimensionless frequency
bölge	:region
dalga genişleme hızı	:speed of dilatation wave
deformasyon	:deformation
delta-dirac fonksiyonu	:Dirac delta function
doğrultu kosinüsü	:direction cosine
düğüm noktası	:node
elastisite modülü	:modulus of elasticity
enine dalga hızı	:speed of distortion wave
gerilme	:stress
global katılık matrisi	:global stiffness matrix
Homojen cisim	:homogeneous body
Hooke kanunu	:Hooke's law
izotropik cisim	:isotropic body
katılık matrisi	:stifness matrix
kesme gerilme	:shear stress
kesme zorlanma	:shear strain
Kronecker deltası	:Kronecker's delta
kuvvet vektörü	:force vector
Lamé sabitleri	:Lamé' constants
Laplace operatörü	:Laplace operator
lineer elastik cisim	:linear elastic body
lokal katılık matrisi	:local stiffness matrix
nabla operatörü	:nabla operator
normal gerilme	:normal stress

normal zorlanma	:normal strain
öngerilme	:pre-stress
Poisson oranı	:Poisson's ratio
rijit zemin	:rijit foundation
sanal iş prensibi	:principle of virtual work
şekil fonksiyonu	:shape function
sınır	:boundary
sınır değer problemi	:boundary value problem
sonlu elemanlar yöntemi (SEY)	:finite element method (FEM)
sürekli fonksiyon	:continuous function
test fonksiyonu	:test function
tınlama değeri	:resonance value
toplam potansiyel enerji fonksiyoneli	:total potential energy functional
varyasyonel formülasyon	:variational formulation
yaklaşık çözüm	:approximation solution
yer değiştirme	:displacement
yerel katlık matrisi	:local stiffness matrix
Young modülü	:Young's modulus
zamana göre harmonik yük	:time harmonic load
zorlanmış titreşim	:forced vibration

Bu tablonun hazırlanmasında Prof. Dr. Erdoğan Tekin tarafından hazırlanan “İngilizce-Türkçe Metalbilim Ve Gereçbilim Karşılıklar Sözlüğü-Erdemir yayınları Ankara 2006” yayınından yararlanılmıştır.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Daşdemir, 05.08.1986'da Kastamonu Tosya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Tosya'da tamamladıktan sonra 2003 yılında başladığı Cumhuriyet Üniversitesi(CÜ)'den yatay geçiş yaparak Atatürk Üniversitesi(AÜ) Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2007'de yılında mezun oldu. 2008-2010 yılları arasında Sakarya Üniversitesi'nde yüksek lisans eğitimini tamamladı. Halen 2011 yılından bu yana Aksaray Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.