T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİNİN TERİMLERİNİ İÇEREN BAZI ÖZDEŞLİKLER VE FİBONACCİ TİPİ POLİNOMLAR

DOKTORA TEZİ

Zeynep AKYÜZ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI**

Haziran 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİNİN TERİMLERİNİ İÇEREN BAZI ÖZDEŞLİKLER VE FİBONACCİ TİPİ POLİNOMLAR

DOKTORA TEZİ

Zeynep AKYÜZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 25 / 06 /2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Refik KESKİN
Jüri Başkanı

Doç. Dr. Ahmet TEKCAN
Üye

Doç. Dr. Neşe ÖMÜR
Üye

Doç. Dr. Filiz ERTUĞRAL
Üye

Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI
Üye

ÖNSÖZ

Fibonacci tarafından 1202 yılında yazılan "Liber Abaci" isimli kitapta, bir tavşan problemine yer verilmiş ve bu problemin çözümünde ilginç bir sayı örüntüsü ile karşılaşılmıştır. Daha sonra yapılan birçok çalışmada, bu sayı örüntülerinin ilginç özellikleri fark edilmiştir ve günümüzde de farklı özellikleri araştırılmaya devam edilmektedir. Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri, Fibonacci sayı dizisine benzer şekilde tanımlanan diğer bazı sayı dizileridir. Bu dizilerin bir genellemesi olan Horadam dizisi, 1965 yılında ilk kez Horadam tarafından çalışıldığı için onun adıyla bilinir. Horadam dizileri bir genelleme olduğundan, bu dizi için sağlanan birçok bağıntı, özellik ve özdeşlik, benzer tekrarlı bağıntılarla tanımlanan diğer tüm sayı dizileri için sağlanır. Bununla birlikte bu sayı dizileri diğer matematiksel yapılarla ilişkilendirilmiş ve ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Bu yapıların en önemlilerinden biri matrislerdir. Matrisler ve özelliklerinin kullanıldığı yöntemler, sayı dizileri için oldukça kullanışlı yöntemlerdir. Bu yüzden sayı dizileri ile ilgili birçok çalışmada matrislere rastlamak mümkündür.

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI'ya ve yardım ve katkılarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Refik KESKİN'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca sabırla annesinin ilgisini bekleyen oğluma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\{F_n\}$	: Fibonacci sayı dizisi
$\{L_n\}$	: Lucas sayı dizisi
$\{P_n\}$	: Pell sayı dizisi
$\{Q_n\}$	: Pell-Lucas sayı dizisi
$\{J_n\}$	: Jacobsthal sayı dizisi
$\{j_n\}$	: Jacobsthal-Lucas sayı dizisi
$F_n(x)$	: Fibonacci polinomu
$F_n(x,y)$	: İki değişkenli Fibonacci polinomu
$\{W_n\}$	: Horadam sayı dizisi
$\{U_n\}$	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n\}$	: Genelleştirilmiş Lucas dizisi

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Tekrarlı Bağıntı, Horadam Dizisi, Matris Metodları

Bu çalışmada, Horadam dizisi ve bu dizinin matrislerle ilişkisi incelendi.

Birinci bölümünde, Fibonacci, Lucas sayı dizileri ve bu diziler ile ilgili matrislerden sözedildi. Matris yaklaşımları ile ilgili literatürdeki çalışmalardan bahsedildi.

Çalışmanın ikinci bölümünde, genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri ile ilgili özdeşlikler verildi. Bir matrisin kuvveti, izi ve determinantı kullanılarak, farklı bir yaklaşım ile birçok yeni özdeşlik türetildi. Burada, elemanları Lucas dizisinin elemanları olan,

$$A=\begin{pmatrix} p^2-2q & p \\ -qp & -2q \end{pmatrix}$$

biçiminde yeni bir matris tanımlandı. Bu matris, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve genelleştirilmiş Lucas dizisi ile ilgili birçok özdeşlik elde edilmesi için kullanıldı.

Üçüncü bölümde, Fibonacci tipi bazı polinomlar ve bu polinomların kökleri incelendi.

Dördüncü bölümde, sonuç ve öneriler verildi.

IDENTITIES INVOLVING GENERALIZED FIBONACCI, LUCAS SEQUENCES AND FIBONACCI TYPE POLYNOMIALS

SUMMARY

Key Words: Recurrence Relation, Horadam Sequence, Matrix Method

This thesis consist of four sections.

In the first section, the fundamental properties of Fibonacci and Lucas sequences are given.

In the second section of this study, the relations between Horadam sequences and matrices are investigated. The trace and determinant of any matrix are used for this purpose. In addition to this, a new matrix A is given. This matrix is useful for deriving identities related to generalized Fibonacci and Lucas sequences. The following matrix A is defined as

$$A = \begin{pmatrix} p^2 - 2q & p \\ -qp & -2q \end{pmatrix},$$

where the entries of the matrix A are the terms of Lucas sequence.

In the third section, the type of Fibonacci polynomials and the roots of these polynomials are investigated.

In the last section, some conclusions and recommendations are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, 12'inci yüzyılda yaşamıştır. Babasının mesleğinden dolayı çocukluğunu Kuzey Afrika'da ve en çok da Cezayir'de geçirmiş ve ilk matematik eğitimini müslüman hocalardan almıştır. Burada öğrendiği Arap sayı sistemine, ünlü kitabı "Liber Abaci" de yer vererek, bu sayı sisteminin Avrupa'ya girmesinde büyük rol oynamıştır. Ancak Fibonacci sayılarının literatüre girmesi, daha sonraki yıllarda olmuştur. Fibonacci'nin kitabındaki bir tavşan probleminin çözümünden elde edilen sayıların özellikleri, sonraki matematikçiler tarafından fark edilmiştir. Fibonacci sayılarına ait tekrarlı bağıntı, ilk kez 17'inci yüzyılda Fransız matematikçi Albert Girard tarafından kullanılmıştır.

Fibonacci sayıları, doğa ile matematiğin ilişkisini somut olarak gösteren nadir araştırma konularından biri olmuştur. Bitkilerde (eğrelti otu, papatya, vb…), böceklerde (salyangoz, vb…) ve doğada birçok yerde bu sayılara rastlanır. Bu sayıların en önemli özelliklerinden biri de, çok eski çağlarda mimari ve resimde sıkça rastlanan "altın oran" ile olan ilişkisidir. Ardışık iki Fibonacci sayısının bölümü, altın oran olarak bilinen $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033\ldots$ sayısına yakınsar.

Daha sonra, bu sayıların birçok özelliği ve diğer farklı matematiksel yapılarla ilişkisi matematikçilerin ilgisini çekmiştir.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,… biçiminde bir sayı dizisi oluşturan Fibonacci sayılarına ait tekrarlı bağıntı $n \geq 1$ için,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

olarak verilir. Başlangıç şartları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ alınarak, diğer terimler tekrarlı bağıntıdan elde edilir [28]. Fransız matematikçi Edward Lucas, başlangıç şartlarını $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ alarak ve $n \geq 1$ için,

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

tekrarlı bağıntısını kullanarak, yeni bir sayı dizisi incelemiştir. Bu sayı dizisinin elemanları, literatürde Lucas sayıları olarak kullanılmıştır [28]. Ayrıca, Fibonacci sayı dizisi ile Lucas sayı dizisinin bağlantısı birçok çalışmaya konu olmuştur. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin tekrarlı bağıntılarına benzer başka bağıntılar yazılıp, yeni sayı dizileri türetilmiştir. Bunlardan bazıları, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileridir [28]. Bu sayı dizileri ile ilgili çalışmalar, bir süre sonra bir adım daha ileriye taşınarak, mevcut dizilerin birçok genellemesi yapıldı [14, 21, 23, 32, 39, 45, 51, 54].

Sayı dizileri ve bu diziler ile üretilen polinomların tekrarlı bağıntılarını sağlayan en genel dizi Horadam dizisidir. 1965 yılında ilk kez Horadam tarafından kullanıldığı için Horadam sayı dizisi olarak bilinir ve

$\{W_n\} = \{W_n(a,b;p,q)\}$ Horadam dizisi, $n \geq 2$ için,

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2},\ W_0 = a,\ W_1 = b$$

biçiminde tanımlanır [19]. Burada a, b, p ve q kompleks sayılar ve $q \neq 0$ dır. $\{W_n\} = \{W_n(a,b;p,q)\}$ dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - px + q = 0$$

ve bu denklemin kökleri $\alpha = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ dir.

$n \geq 0$ olmak üzere, Horadam dizisi için Binet formülü,

$$W_n = \left(\frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{b - a\alpha}{\alpha - \beta}\right)\beta^n$$

biçimindedir. Bu formül, 1843 yılında Fransız matematikçi Jacques Philipe Marie Binet tarafından bulunduğundan, literatürde Binet formülü olarak bilinir. Aslında, ilk kez 1718'de Fransız matematikçi Abraham De Moivre tarafından, üreteç fonksiyonlar kullanılarak elde edilmiştir. Horadam dizisinin iki özel durumu

$$\{U_n\} = \{W(0,1; p, q)\}$$

ve

$$\{V_n\} = \{W(2, p; p, q)\}$$

dizileridir. Genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri olarak bilinen bu diziler ilk kez Lucas tarafından 1878 yılında çalışıldı [32]. Bununla birlikte, negatif indisli genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayıları $n > 0$ için,

$$U_{-n} = -q^{-n} U_n \quad \text{ve} \quad V_{-n} = q^{-n} V_n$$

olarak tanımlanır. $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri için, Binet formülleri ise sırasıyla,

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$V_n = \alpha^n + \beta^n$$

formülleri ile verilir [32].

$\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri, p ve q sayılarının seçimine göre, iyi bilinen diğer bazı dizilere karşılık gelmektedir [30]. Örneğin $p=1$ ve $q=-1$ alındığında $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri sırasıyla, $\{F_n\}$ Fibonacci ve $\{L_n\}$ Lucas dizilerine dönüşür. Eğer $p=2$ ve $q=-1$ seçilirse, $\{U_n\}$ dizisi $\{P_n\}$ Pell dizisine ve $\{V_n\}$ dizisi de $\{Q_n\}$ Pell-Lucas dizisine dönüşür. Bununla birlikte $p=1$ ve $q=-2$ alındığında da genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri sırasıyla $\{J_n\}$ Jacobsthal ve $\{j_n\}$ Jacobsthal-Lucas dizilerine dönüşür [28].

$\{W_n\}=\{W_n(a,b;p,q)\}$ Horadam dizisi için aşağıdaki tablo, alt dizileri tanımak açısından oldukça kullanışlıdır.

Tablo 1.1. Horadam dizilerinin alt dizileri.

a	b	p	q	Dizinin gösterimi
0	1	p	q	$\{U_n\}$
2	p	p	q	$\{V_n\}$
0	1	1	-1	$\{F_n\}$
2	1	1	-1	$\{L_n\}$
0	1	2	-1	$\{P_n\}$
2	2	2	-1	$\{Q_n\}$
0	1	1	-2	$\{J_n\}$
2	1	1	-2	$\{j_n\}$

Çalışmamızın 2. bölümünde genelleştilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimlerini içeren bazı özdeşlikler verdik. Bu yüzden öncelikle benzer özdeşliklerin bulunduğu bazı çalışmalardan söz edelim. Örneğin, L. Carlitz, Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren çok sayıda özdeşlik verdi [7]. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir;

$$F_{2n} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} F_s, \quad L_{2n} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} L_s,$$

$$F_{2n+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} F_{s+k}, \quad L_{2n+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} L_{s+k},$$

$$F_{rn+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} F_r^s F_{r-1}^{n-s} F_{s+k}, \quad L_{rn+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} F_r^s F_{r-1}^{n-s} L_{s+k},$$

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} F_{2s+k} = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} F_{n+k}, & n \text{ çift} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n+k}, & n \text{ tek} \end{cases},$$

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} L_{2s+k} = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} L_{n+k}, & n \text{ çift} \\ 5^{\frac{n+1}{2}} F_{n+k}, & n \text{ tek} \end{cases}.$$

[15] de Hoggat ve Verner üreteç fonksiyonlarını kullanarak birçok özdeşlik elde etti. Bunlardan bazıları,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n},$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_k^2 = 5^n F_{2n+1},$$

$$\sum_{k=0}^{2n+2} \binom{2n+2}{k} F_k^2 = 5^n L_{2n+2},$$

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}F_{2k} = 5^n F_{2n},$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}F_{2k} = 5^n L_{2n+1}$$

olarak sıralanabilir.

[25] deki çalışmada yazarlar, L. Carlitz' in bulduğu özdeşliklerin bir kısmını genelleyerek Horadam dizisi için yazdılar. Şöyleki: c, d ve r sıfırdan farklı tamsayılar ve $n \geq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}s^k W_{dk+r} = W_{cn+r}$$

eşitliğini elde ettiler. Burada $s = \dfrac{U_c}{U_d}$, $t = q^c\dfrac{U_{d-c}}{U_d}$ dir ve U_n de n. genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

Biz de bu tezde Binet formülünü kullanarak L. Carlitz'in bulduğu bazı formülleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizisi için elde ettik.

Fibonacci sayılarının teorisine sonraki yıllarda Fibonacci Q-matrisi olarak adlandırılan özel bir matris eklenmiştir. Bu matris mevcut çalışmalarda

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formunda olup $n.$ kuvveti

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır. Q matrisinin determinantı kullanılarak, ilk kez 1753 yılında Robert Simson tarafından verilen

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

formülü elde edilmiştir. Bu formül literatürde Cassini formülü olarak bilinir [28].

1981 yılında H.W.Gould, "*A History of The Fibonacci Q- matrisi and A Higher-Dimensional Problem*" isimli çalışmasında Fibonacci Q- matrisi ile ilgili oldukça detaylı bilgi vermiştir [10]. Gould'a göre, bu matris ilk olarak, 1951 yılında *American Mathematical Monthly* dergisinin Mart sayısında 221–222 sayfalarında J. L. Brenner'in "*Lucas matrix"* adlı çalışmasının özetinde yer aldı. Daha sonra, Lucas matrisi 1960 yılında Charles H. King tarafından "*Some Further Properties of the Fibonacci Numbers"* isimli yüksek lisans tezinde ele alındı.

Matris metodları sayı dizileri için önemli aynı zamanda da oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Matris metodlarının kullanıldığı birkaç çalışmadan daha bahsedebiliriz. Örneğin, John R. Silvester matris yaklaşımı ile Fibonacci sayı dizisinin türetilebileceğini gösterdi. Yazar,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alarak, u_n, *n.* Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

olduğunu hesapladı [48] . Yine, 2004 de yaptığı çalışmasında Q^n ve

$$B_{n,r} = \begin{pmatrix} F_{n-r} & F_n \\ F_n & F_{n+r} \end{pmatrix}$$

matrislerini kullanarak ilginç birkaç eşitlik yazdı [49]. Kalman, Silverter'ın 1979' daki çalışmasını genelleyerek, $c_0, c_1, \ldots, c_k$ reel sabitler olmak üzere $a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_k a_{n+k-1}$, k terimli lineer tekrarlı bağıntı ile ilgili

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{pmatrix}$$

matrisini yazdı ve

$$A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterdi [21]. Kalman, bu çalışmasında matrisler yardımıyla genelleştirilmiş diziler için kapalı bir formül buldu.

Bununla birlikte, literatürde tekrarlı bağıntılarla Fibonacci Q-matrisi'nin bağlantısını inceleyen başka birçok çalışmaya daha rastlanabilir. Örneğin, bazı yazarlar matris yaklaşımını kullanarak Pell polinomları ile ilgili sonuçlar elde ettiler [46, 42, 53]. E. Kılıç, D.Taşcı, matris methodları kullanarak Fibonacci, Pell ve Lucas sayılarının genelleştirmelerini tanımladılar ve daha sonra Binet formülleri ve kombinatoryal gösterimlerini elde ettiler [22, 23]. Yine E. Kılıç [24] deki çalışmasında hem Fibonacci hem de Pell sayı dizisini sağlayan bir tekrarlı bağıntı tanımlayıp matris metodu ile birçok eşitlik elde etti.

Rosenbaum, $R=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini Fibonacci sayılarını içeren formülleri yazmak için kullandı fakat kuvvetlerini incelemedi [44]. Dikkat edilirse, Fibonacci Q-matrisi, Fibonacci sayı dizisinin elemanlarını içerirken, $R=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin elemanları, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olan $\{U_n\}$ dizisinin elemanları ile oluşturulmuştur. Bu matris R. S. Melham ve A. G. Shannon tarafından $M=\begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olarak kullanıldı [39]. Aynı çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için birçok özdeşlik yazıldı. Bu özdeşlikler, $\Delta = p^2-4q$ olmak üzere, aşağıdaki gibi sıralanabilir;

$$U_{n+1}-qU_{n-1}=V_n,$$
$$V_{n+1}-qV_{n-1}=\Delta U_n,$$
$$V_{2k}-2q^k=\Delta U_k^2,$$
$$U_{k+m}-q^mU_{k-m}=U_mV_k,$$
$$V_{k+m}-q^mV_{k-m}=\Delta U_mU_k,$$
$$U_{k+m}U_{k-m}-U_k^2=-q^{k-m}U_m^2,$$
$$V_{k+m}V_{k-m}-V_k^2=\Delta q^{k-m}U_m^2,$$
$$U_{n+m}U_{n_1+m}-q^mU_nU_{n_1}=U_mU_{n+n_1+m}.$$

R. S. Melham ve A. G. Shannon, M matrisinin $n.$ kuvvetini

$$M^n=\begin{pmatrix} U_{n+1} & -qU_n \\ U_n & -qU_{n-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde hesapladılar. Daha sonra M matrisini genelleştirerek

$$M_{k,m}=\begin{pmatrix} U_{k+m} & -q^mU_k \\ U_k & -q^mU_{k-m} \end{pmatrix}$$

yazdılar ve

$$M_{k,m}^{n}=U_{m}^{n-1}\begin{pmatrix} U_{nk+m} & -q^{m}U_{nk} \\ U_{nk} & -q^{m}U_{nk-m} \end{pmatrix}$$

olduğunu buldular. Yazarlar bu matrisi kullanarak birçok özdeşlik elde ettiler [39]. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$U_{(2n+j)k+m}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}q^{k(n-i)}V_{k}^{i}U_{(i+j)k+m},$$

$$V_{k}^{n}U_{nk+m}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}q^{k(n-i)}U_{2ik+m},$$

$$\Delta^{n}U_{k}^{2n}U_{2kn+m}=\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}(-1)^{i}q^{k(2n-i)}U_{2ik+m},$$

$$\Delta^{n}U_{k}^{2n}(U_{2(n+1)k+m}-q^{k}U_{2nk+m})=\sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}(-1)^{i+1}q^{k(2n+1-i)}U_{2ik+m},$$

$$\Delta^{n}U_{k}^{2n+1}V_{(2n+1)k+m}=\sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}(-1)^{i+1}q^{k(2n+1-i)}U_{2ik+m}.$$

Bununla beraber, M matrisinde $p=1$ ve $q=-1$ alındığında, bu matrisin Q-matrisine karşılık geldiği görülür.

J. Mc. Laughlin, herhangi bir 2x2 matrisin kuvvetlerinden yararlanarak birçok özdeşlik elde etti [30,31]. Yazar, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 2×2 tipinde herhangi bir matris olmak üzere, $n\geq 1$ için,

$$A^n = \begin{pmatrix} y_n - dy_{n-1} & by_{n-1} \\ cy_{n-1} & y_n - ay_{n-1} \end{pmatrix} \; ; y_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} T^{n-2i} (-D)^i$$

olduğunu gösterdi. Burada T ve D sırasıyla A matrisinin izi ve determinantıdır. J. Mc. Laughlin tarafından bulunan bazı kombinatoryal özdeşlikler,

$$\binom{n}{2j+1} = \sum_{i=j}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^{i-j} 2^{n-1-2i} \binom{i}{j} \binom{n-1-i}{i},$$

$$\binom{n-1-j}{j} = 2^{-n+1+2j} \sum_{i=j}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} \binom{i}{j}$$

ve

$$\binom{n}{t} = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-1-2m} (-1)^m 2^{n-1-2m-j} \binom{n-1-m}{m} \binom{n-1-2m}{j} \binom{m}{t-j-1}$$

biçiminde sıralanabilir.

Belbachir ve Bencherif, Laughlin'in çalışmasını genellediler [3]. Yazarlar, Laughlin tarafından alınan 2×2 tipindeki matrisi, $m \geq 2$ olmak üzere $m \times m$ tipinde aldılar ve çok daha genel özdeşlikler ve kombinatoryal gösterimler elde ettiler.

Biz de bu tezde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizisinin terimlerini içeren özdeşlikler yazdık. Bu özdeşliklerin bir kısmı Binet formülü ile ispatlanırken bir kısmının ispatı için matrislerden yararlandık. Matris metodunu kullanırken Laughlin tarafından verilen teoremi gözönüne alarak, matrislerin iz ve determinantları ile tekrarlı bağıntılar arasında önemli eşitlikler elde ettik. Tezin 2. bölümünde bu eşitlikler sırasıyla verildi. Laughlin tarafından verilen teoremi kullanırken, diğer taraftan da Melham ve Shannon tarafından çalışılan $M=\begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini dikkate aldık. Daha çok bu iki çalışmanın ışığında, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimlerini içeren özdeşlikler elde ettik. Bu özdeşliklerin bir kısmı bilinirken, bir kısmı da yenidir. Yine 2. bölümde terimleri Lucas dizisinin elemanları olan yeni bir matris tanımladık. Bu matrisin kuvvetlerini kullanarak birçok yeni özdeşlik elde ettik.

Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından 1883 yılında, Fibonacci sayı dizisinin tekrarlı bağıntısına benzer biçimde Fibonacci polinomlarını tanımladılar. 1966 yılında M. N. Swamy, Fibonacci polinomlarını geliştirdi. P. F. Bryd ise Fibonacci polinomuna benzer olarak Pell polinomunu tanımladı. Bununla birlikte, Pafnuty Chebyshev'den sonra "Chebyshev polinomları" olarak bilinen polinomlar tanımlandı.

Başlangıç şartları $F_0(x)=0$ ve $F_1(x)=1$ olan ve $n\geq 1$ için,

$$F_{n+1}(x)=xF_n(x)+F_{n-1}(x)$$

tekrarlı bağıntısını sağlayan polinomlar, Fibonacci polinomları olarak bilinir. Bunun yanında, $n\geq 2$ olmak üzere $F_0(x,y)=0$ ve $F_1(x,y)=1$ başlangıç koşulları için,

$$F_{n+1}(x,y)=xF_n(x,y)+yF_{n-1}(x,y)$$

ile tanımlanan polinomlar, iki değişkenli Fibonacci polinomlardır.

Bununla birlikte, "Fibonacci tipi polinomlar" başlığı altında, başlangıç şartları $G_0(x)=-1$, $G_1(x)=x-1$ biçiminde alınan, $n\geq 0$ için,

$$G_{n+2}(x)=xG_{n+1}(x)+G_n(x)$$

tekrarlı bağıntısı ile polinomlar tanımlanmış ve bu polinomlar "altın polinomlar (golden polynomials)" olarak isimlendirilmiştir [18, 35, 36, 37, 38, 41, 45, 55]. Dikkat edilirse, bu polinomları tek değişkenli Fibonacci polinomlarından ayıran, farklı seçilmiş olan başlangıç koşullarıdır. Bu polinomların kökleri ve köklerin sınırları da ilgi çeken konulardan olmuştur.

1993 yılında G. A. Moore ve 1996 yılında Prodinger, $G_n(x)$ polinomların maksimal reel köklerinin limitini inceledi [37, 41]. G. A. Moore, başlangıç şartları $G_0(x) = -1$, $G_1(x) = x - 1$ olmak üzere, $G_{n+2}(x) = xG_{n+1}(x) + G_n(x)$ tekrarlı bağıntısı ile verilen $G_n(x)$ polinommunun köklerinin $\frac{3}{2}$ sayısına yakınsadığını buldu [37].

Prodinger ise aynı polinomun kökleri için daha kesin bir sonuç buldu. g_n sayısı, $G_n(x)$ polinomunun maksimal reel kökü olmak üzere; $g_n \approx \frac{3}{2} + (-1)^n \frac{25}{12} 4^{-n}$ olduğunu hesapladı [41].

Hongquan Yu, Yi Wang ve Mingfeng He, yine aynı polinomu, bu kez başlangıç koşullarını,

$$G_0(x) = -a, \quad G_1(x) = x - a$$

alarak inceledi ve a pozitif bir reel sayı olmak üzere, $G_n(x)$ polinomunun maksimal reel kökünün limitini

$$\frac{a(a+2)}{a+1}$$

sayısı olarak hesapladı. Bu hesaplama ile Moore'un sonucunu genellemiş oldu [18].

P. E. Ricci, başlangıç şartları $G_0(x) = -1,\ \ G_1(x) = x - 1$ olmak üzere, $G_{n+2}(x) = xG_{n+1}(x) + G_n(x)$ tekrarlı bağıntısı ile verilen $G_n(x)$ polinomunun kompleks köklerini inceledi [45].

Matyas, önce 1997 yılında başlangıç şartlarını

$$G_0(x) = -a,\ \ G_1(x) = x \mp a\,,$$

alarak, $G_n(x)$ polinomunun maksimal reel kökünün limitini

$$g_n \approx \frac{a(a+2)}{a+1} + (-1)^n \frac{a(a^2+2a+2)^2}{(a+1)^2(a+2)}(a+1)^{-2n}$$

biçiminde genelledi ve sonra 1998 yılındaki çalışmasında başlangıç şartlarını

$$G_0(x) = a,\quad G_1(x) = x + b$$

seçerek, $G_n(x)$ polinomlarının kompleks köklerinin yerini inceledi ve mutlak değerleri için

$$|x| \le \max(|a| + |b|, 2)$$

biçiminde bir sınır buldu [36]. Bu çalışma ile P. E. Ricci tarafından yapılan çalışmayı genellemiş oldu.

2010 yılında, T. Amdeberhan, [1] deki çalışmasında daha genel bir polinom tanımladı. Başlangıç koşullarını, $G_0^{(k)}(x) = -1,\quad G_1^{(k)}(x) = x - 1$ biçiminde alarak,

$$G_{n+2}^{(k)}(x) = x^k G_{n+1}^{(k)}(x) + G_n^{(k)}(x)$$

tekrarlı bağıntısı ile tanımlanan, Fibonacci tipi polinomların maksimal reel köklerini çalıştı. T. Amdeberhan, $G_n^{(k)}(x)$ polinomunun köklerinin,

$$\xi^k - \xi^{k-1} + \xi - 2 = 0$$

denkemini sağlayan ξ sayısına yakınsadığını gösterdi [1].

S. Halıcı çalışmasında, T.Amdeberhan'ın yaptığı çalışmayı, başlangıç koşullarını $G_0(x) = a\,, G_1(x) = x + b$ seçerek genelledi ve aynı polinomun köklerinin,

$$ax^{k+1} + abx^k - x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$$

denkleminin köküne yakınsadığını buldu [13].

Zeleke ve Molina, $G_n^{(k)}(x)$ polinomunda $k = 2$ ve başlangıç koşullarını $G_0(x) = -1,\ G_1(x) = x - 1$ alarak $G_n^{(2)}(x)$ polinomların köklerini çalıştı ve köklerin yakınsadığı sayıyı $\sqrt{2}$ olarak buldu [38].
Biz ise 3. Bölümde, başlangıç koşullarını $G_0(x) = -a,\ G_1(x) = x - a$ alarak $G_n^{(2)}(x)$ polinomlarının köklerini inceleyip, köklerin yakınsadığı sayı için bir formül bulduk ve böylece [38] de yazarlar tarafından bulunan sonucu genelledik.

BÖLÜM 2. SAYI DİZİLERİ VE MATRİSLER

Bu bölümde, birinci bölümde tanıtılan, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin elemanlarını içeren özdeşlikler elde edilecektir. Bu özdeşliklerden bazılarını elde etmek için Binet formülü kullanılırken, bazılarının ispatında da oldukça kullanışlı bir yöntem olan matris metodlarından faydalanılacaktır.

2.1. Binet Formülü Kullanılarak Elde Edilen Bazı Özdeşlikler

Aşağıda verilen özdeşlikler, Fibonacci ve Lucas sayıları için [7] de verildi. [25] de ise yazarlar bu çalışmada verilen özdeşlikleri genelleyen formüller elde etti. Biz burada, [7] de verilen bazı özdeşlikleri, Binet formülünden yararlanarak genelleştirimiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri için bulduk.

Teorem 2.1.1 $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ sırasıyla genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ve r, m pozitif tamasayılar ve k herhangi bir tamsayı olmak üzere,

$$U_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (-q)^{n-i} U_i , \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

$$V_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (-q)^{n-i} V_i , \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

$$U_{2n+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} p^s (-q)^{n-s} U_{s+k} , \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

$$V_{2n+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} p^s (-q)^{n-s} V_{s+k} , \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

$$U_{rn+k}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}U_r^sU_{r-1}^{n-s}(-q)^{n-s}U_{s+k}, \qquad \textbf{(2.1.5)}$$

$$V_{rn+k}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}V_r^sV_{r-1}^{n-s}(-q)^{n-s}V_{s+k}, \qquad \textbf{(2.1.6)}$$

$$U_{2mn+k}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}U_m^s(-q)^{m(n-s)}(-1)^{n-s}U_{ms+k}\ , \qquad \textbf{(2.1.7)}$$

$$V_{2mn+k}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}V_m^s(-q)^{m(n-s)}(-1)^{n-s}V_{ms+k}, \qquad \textbf{(2.1.8)}$$

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}U_{2s+k}q^{n-s}=\begin{cases}(p^2-4q)^{\frac{n}{2}}U_{n+k}\ , & n \text{ çift}\\ (p^2-4q)^{\frac{n-1}{2}}V_{n+k}\ , & n \text{ tek}\end{cases}, \qquad \textbf{(2.1.9)}$$

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}V_{2s+k}q^{n-s}=\begin{cases}(p^2-4q)^{\frac{n}{2}}V_{n+k}\ , & n \text{ çift}\\ (p^2-4q)^{\frac{n+1}{2}}U_{n+k}\ , & n \text{ tek}\end{cases} \qquad \textbf{(2.1.10)}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: <u>(2.1.1) in ispatı:</u> Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^2-px+q=0$ ve kökleri $\alpha=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $\beta=\dfrac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ olduğundan,

$$\alpha^2=\alpha p-q \ \text{ ve } \ \beta^2=\beta p-q$$

eşitlikleri sağlanır. Sırasıyla bu eşitliklerin her iki yanının $n.$ kuvveti alınırsa

$$\alpha^{2n} = (\alpha p - q)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\alpha p)^i (-q)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^i p^i (-q)^{n-i}$$

ve benzer biçimde

$$\beta^{2n} = (\beta p - q)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\beta p)^i (-q)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \beta^i p^i (-q)^{n-i}$$

yazılabilir. Binet formülünde α^{2n} ve β^{2n} yerine yazılırsa

$$U_{2n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i \alpha^i (-q)^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i \beta^i (-q)^{n-i}}{\alpha - \beta}$$

olur. Tekrar Binet formülü kullanılarak

$$U_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (-q)^{n-i} U_i$$

bulunur. Benzer işlemler ile genelleştirilmiş Lucas dizisi için de Binet formülü $V_{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n}$ yardımıyla

$$V_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (-q)^i V_i$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

<u>(2.1.3) in ispatı:</u> $\alpha^{2n} = (\alpha p - q)^n$ eşitliğinin her iki tarafı α^k ile çarpılırsa

$$\alpha^{2n+k} = (\alpha p - q)^n \alpha^k = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \alpha^s p^s (-q)^{n-s} \alpha^k = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \alpha^{s+k} p^s (-q)^{n-s}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\beta^{2n+k} = (\beta p - q)^n \beta^k = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \beta^s p^s (-q)^{n-s} \beta^k = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \beta^{s+k} p^s (-q)^{n-s}$$

bulunur. Bu eşitlikler Binet formülünde yerine yazılırsa

$$U_{2n+k} = \frac{\alpha^{2n+k} - \beta^{2n+k}}{\alpha - \beta} = \frac{\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} p^s (-q)^{n-s} \alpha^{s+k} - \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} p^s (-q)^{n-s} \beta^{s+k}}{\alpha - \beta}$$

olur. Binet formülü tekrar kullanılırsa

$$U_{2n+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} p^s (-q)^{n-s} U_{s+k}$$

ve benzer biçimde

$$V_{2n+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} p^s (-q)^{n-s} V_{s+k}$$

elde edilir.

<u>(2.1.5) in ispatı:</u> $n \geq 1$ için

$$\alpha^n = \alpha U_n - qU_{n-1} \text{ ve } \beta^n = \beta U_n - qU_{n-1}$$

eşitliklerin doğruluğu kolayca görülebilir. İlk eşitliğin *n.* kuvveti alındığında ve bulunan eşitliğin her iki yanı α^k ile çarpıldığında,

$$(\alpha^r)^n = (\alpha U_r - qU_{r-1})^n$$

ve

$$\alpha^{k}\alpha^{rn}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(\alpha U_r)^{s}(-qU_{r-1})^{n-s}\alpha^{k}$$

olur. Buradan,

$$\alpha^{rn+k}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}U_r^{s}(-qU_{r-1})^{n-s}\alpha^{k+s}$$

yazılır. Benzer biçimde, β^{rn+k} bulunur ve aşağıdaki Binet formülünde yerine yazılırsa,

$$U_{rn+k}=\frac{\alpha^{rn+k}-\beta^{rn+k}}{\alpha-\beta}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}U_r^{s}U_{r-1}^{n-s}(-q)^{n-s}U_{s+k}$$

olur. Benzer hesaplamalar ile (2.6.6) eşitliği de ispatlanabilir.

<u>(2.1.7) in ispatı:</u>

Basit bazı hesaplamalar ile,

$$\begin{aligned}\alpha^{2m}&=\alpha^{m}\alpha^{m}\\&=\alpha^{m}(\alpha^{m}+\beta^{m}-\beta^{m})\\&=\alpha^{m}(\alpha^{m}+\beta^{m})-(\alpha\beta)^{m}\end{aligned}$$

olur. Binet formülü ve $\alpha\beta=q$ eşitliği yardımyla,

$$\alpha^{2m}=\alpha^{m}V_m-q^{m}$$

ve benzer biçimde

$$\beta^{2m} = \beta^m V_m - q^m$$

elde edilir. Şimdi, yukarıdaki eşitliklerinin her iki yanının $n.$ kuvveti alınıp, sırasıyla α^k ve β^k ile çarpılırsa,

$$\alpha^{2mn+k} = (\alpha^m V_m - q^m)^n \alpha^k = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \alpha^{ms} V_m^s (-1)^{n-s} q^{m(n-s)} \alpha^k$$

ve benzer biçimde

$$\beta^{2mn+k} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \beta^{ms} V_m^s (-1)^{n-s} q^{m(n-s)} \beta^k$$

bulunur. Bulunan son eşitlikler, Binet formülünde yerine yazılırsa istenen bulunmuş olur. (2.1.8) özdeşiliğinin ispatı da benzer biçimde yapılır.

<u>(2.1.9) un ispatı:</u>

$-q = -\alpha\beta$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin her iki yanına α^2 eklediğimizde,

$$\alpha^2 - q = \alpha^2 - \alpha\beta = \alpha(\alpha - \beta) = \alpha\sqrt{p^2 - 4q}$$

bulunur. Benzer şekilde $\beta^2 - q = -\beta\sqrt{p^2 - 4q}$ elde edilir. Bulunan bu eşitliklerde her iki yanın $n.$ kuvveti alındığında,

$(\alpha^2 - q)^n = \alpha^n (p^2 - 4q)^{\frac{n}{2}}$ ve $(\beta^2 - q)^n = (-\beta)^n (p^2 - 4q)^{\frac{n}{2}}$ yazılır. Binom açılım kullanılarak,

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \alpha^{2s} (-q)^{n-s} = (p^2 - 4q)^{\frac{n}{2}} \alpha^n$$

ve

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\beta^{2s}(-q)^{n-s} = (-1)^n (p^2-4q)^{\frac{n}{2}}\beta^n$$

olur. Binet formülünden

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}U_{2s+k}(-q)^{n-s} = (p^2-4q)^{\frac{n}{2}}\frac{\alpha^{n+k}-(-1)^n\beta^{n+k}}{\alpha-\beta}$$

bulunur. Tekrar Binet formülü kullanılarak,

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}U_{2s+k}(-q)^{n-s} = \begin{cases}(p^2-4q)^{\frac{n}{2}}U_{n+k}, & n \text{ çift}\\ (p^2-4q)^{\frac{n-1}{2}}V_{n+k}, & n \text{ tek}\end{cases}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}V_{2s+k}(-q)^{n-s} = (p^2-4q)^{\frac{n}{2}}(\alpha^{n+k}+(-1)^n\beta^{n+k})$$

ve buradan

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}V_{2s+k}(-q)^{n-s} = \begin{cases}(p^2-4q)^{\frac{n}{2}}V_{n+k}, & n \text{ çift}\\ (p^2-4q)^{\frac{n+1}{2}}U_{n+k}, & n \text{ tek}\end{cases}$$

elde edilir.

2.2. Bir Matrisin Kuvvetleri ile İzi ve Determinantı Kullanılarak Elde Edilen Bazı Özdeşlikler

Bu bölümde, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biçimindeki bir matrisin izi ve determinant özelliklerini kullanarak, binomial özdeşlikler verdik. Bu özdeşlikleri özel yapan, özdeşliklerin her iki yanının Lucas veya genelleştirilmiş Lucas dizilerine karşılık gelmesidir. Teorem sonucunda elde edilen özdeşlikler, sadece Lucas dizilerini değil aynı zamanda Pell-Lucas ve Jacobsthal-Lucas dizilerini de üretmektedir.

Teorem 2.2.1 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere ve $n\geq 1$ için,

$$B^n=\begin{pmatrix} y_n-dy_{n-1} & by_{n-1} \\ cy_{n-1} & y_n-ay_{n-1} \end{pmatrix}\ ;\ y_n=\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n-i}{i}T^{n-2i}(-D)^i \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

dir [31]. Burada T ve D sırasıyla $T=\text{iz}B=a+d$ ve $D=\det B=ad-bc$ dir.

Aşağıdaki teoremde, herhangi bir matrisin kuvveti yardımıyla ve yine aynı matrisin izi ve determinantını içeren bir eşitlik verildi.

Teorem 2.2.2 $n,k\geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor}\binom{nk-i}{i}\frac{nk}{nk-i}T^{nk-2i}(-D)^i=\frac{1}{2^{nk-1}}\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor}\binom{nk}{2i}T^{nk-2i}(T^2-4D)^i \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

dir. $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere, T ve D sırasıyla, $T=\text{iz}B=a+d$ ve $D=\det B=ad-bc$ dir.

İspat: Teorem 2.2.1 kullanılarak, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$B^{nk}=\begin{pmatrix} y_{nk}-dy_{nk-1} & by_{nk-1} \\ cy_{nk-1} & y_{nk}-ay_{nk-1} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $\text{iz}B^{nk}=2y_{nk}-(a+d)y_{nk-1}$ olup, $y_n=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-i}{i}T^{n-2i}(-D)^i$ eşitliği kullanılarak,

$$\text{iz}B^{nk}=2\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{nk}{2} \rfloor}\binom{nk-i}{i}T^{nk-2i}(-D)^i-T\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{nk-1}{2} \rfloor}\binom{nk-i-1}{i}T^{nk-2i-1}(-D)^i$$

elde edilir.

$$\binom{nk-i-1}{i}=\left(\frac{nk-2i}{nk-i}\right)\binom{nk-i}{i}$$

eşitliği gözönüne alınıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\text{iz}B^{nk}=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{nk}{2} \rfloor}\binom{nk-i}{i}T^{nk-2i}(-D)^i\left(\frac{nk}{nk-i}\right) \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, B matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1=\frac{T+\sqrt{T^2-4D}}{2} \text{ ve } \lambda_2=\frac{T-\sqrt{T^2-4D}}{2}$$

dir. Bu yüzden, B^{nk} matrisinin özdeğerleri de λ_1^{nk} ve λ_2^{nk} olur. Ayrıca, B^{nk} matrisinin izi, özdeğerlerinin toplamına eşit olduğundan,

$$\mathrm{iz}B^{nk} = \lambda_1^{\ nk} + \lambda_2^{\ nk}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\mathrm{iz}B^{nk} = \left(\frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \right)^{nk} + \left(\frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \right)^{nk}$$

bulunur. Binom açılım kullanılarak,

$$\mathrm{iz}B^{nk} = \frac{1}{2^{nk-1}} \left[\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor} \binom{nk}{2i} T^{nk-2i} (T^2 - 4D)^i \right] \tag{2.2.4}$$

eşitliği elde edilir. (2.2.3) ve (2.2.4) denklemlerinin eşitliği kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.3 $n, k \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor} \binom{nk-i}{i} \frac{nk}{nk-i} p^{nk-2i} (-q)^i = \frac{1}{2^{nk-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor} \binom{nk}{2i} p^{nk-2i} (p^2 - 4q)^i \tag{2.2.5}$$

dir.

İspat: Teorem 2.2.2 deki B matrisi $B = \begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olarak alınırsa, bu durumda

$$B^{nk} = \begin{pmatrix} y_{nk} & -qy_{nk-1} \\ y_{nk-1} & y_{nk} - py_{nk-1} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $\text{iz}B^{nk} = 2y_{nk} - py_{nk-1}$ olup, $y_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} T^{n-2i}(-D)^i$ eşitliği kullanılarak,

$$\text{iz}B^{nk} = 2\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{nk}{2} \rfloor} \binom{nk-i}{i} p^{nk-2i}(-q)^i - p\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{nk-1}{2} \rfloor} \binom{nk-i-1}{i} p^{nk-2i-1}(-q)^i$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\text{iz}B^{nk} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{nk}{2} \rfloor} \binom{nk-i}{i} p^{nk-2i}(-q)^i \left(\frac{nk}{nk-i}\right) \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan, B matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

dir. B^{nk} matrisinin özdeğerleri ise λ_1^{nk} ve λ_2^{nk} dir. Ayrıca, B^{nk} matrisinin izi, özdeğerlerinin toplamına eşit olduğundan,

$$\text{iz}B^{nk} = \lambda_1^{nk} + \lambda_2^{nk}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\text{iz}B^{nk} = \left(\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^{nk} + \left(\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^{nk}$$

bulunur. Binom açılım kullanılarak,

$$\text{iz}B^{nk} = \frac{1}{2^{nk-1}}\left[\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor}\binom{nk}{2i}p^{nk-2i}(p^2-4q)^i\right] \tag{2.2.7}$$

eşitliği bulunur ve (2.2.6) ve (2.2.7) denklemlerinin eşitliğinden

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor}\binom{nk-i}{i}\frac{nk}{nk-i}p^{nk-2i}(-q)^i = \frac{1}{2^{nk-1}}\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor}\binom{nk}{2i}p^{nk-2i}(p^2-4q)^i$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremin yardımıyla yeni bir özdeşlik daha yazabiliriz;

Teorem 2.2.4 $n,k \geq 1$ olmak üzere, $0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ olacak şekilde her i tamsayısı için,

$$\frac{1}{2^{n-2i-1}}\left(\sum_{k=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{k}{i}p^{n-2k}(-q)^k\right) = \binom{n-i}{i}\frac{n}{n-i}p^{n-2i}(-q)^i \tag{2.2.8}$$

dir.

İspat: Teorem 2.2.3 ün ifadesinde $k=1$ alınırsa ve i yerine k yazılırsa,

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2k}p^{n-2k}(p^2-4q)^k = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k}p^{n-2k}(-q)^k$$

yazılabilir. Eşitliğin sol tarafında $(p^2-4q)^k$ için binom açılım yapılırsa

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}p^{n-2k}(p^2-4q)^k=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}p^{n-2k}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(p^2)^{k-i}(-4q)^i\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\sum_{k=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{k}{i}p^{n-2k}(p^2)^{k-i}(-4q)^i\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\sum_{k=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{k}{i}p^{n-2i}2^{2i}(-q)^i\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n-2i-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\sum_{k=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{k}{i}p^{n-2i}(-q)^i\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{2^{n-2i-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\sum_{k=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{k}{i}p^{n-2i}(-q)^i\right)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k}\,p^{n-2k}(-q)^k$$

bulunur. Böylece de

$$\frac{1}{2^{n-2i-1}}\left(\sum_{k=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{k}{i}p^{n-2k}(-q)^k\right)=\binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k}\,p^{n-2k}(-q)^k$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Bu teoremde özel olarak $p=-q=1$ alınırsa, aşağıdaki sonuç yazılabilir;

Sonuç 2.2.1 $n\geq 1$ ve her i tamsayısı için, $0\leq i\leq \lfloor n/2\rfloor$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2^{n-2i-1}}\sum_{k=i}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{k}{i}=\binom{n-i}{i}\frac{n}{n-i} \qquad \textbf{(2.2.9)}$$

sonucu elde edilir ki bu eşitlik [31] de J. Mc. Laughlin tarafından verildi.

Teorem 2.2.3 de verilen eşitliğin her iki yanını literatürde ayrı ayrı görmek mümkündür [9, 43]. Ancak burada, bu özdeşliğin önemi her iki yanının da ayrı ayrı genelleştirilmiş Lucas dizisinin terimlerini vermesidir. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuçta eşitliğin her iki tarafının genelleştirilmiş Lucas dizisi olan $\{V_{nk}\}$ dizisine karşılık geldiği gösterilecektir.

Teorem 2.2.5 $\{V_{nk}\}$ genelleştirilmiş Lucas dizisi olmak üzere, $n, k \geq 1$ için,

$$V_{nk}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor}\binom{nk-i}{i}\frac{nk}{nk-i}\,p^{nk-2i}(-q)^{i} \qquad \textbf{(2.2.10)}$$

ve

$$V_{nk}=\frac{1}{2^{nk-1}}\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor}\binom{nk}{2i}p^{nk-2i}(p^{2}-4q)^{i} \qquad \textbf{(2.2.11)}$$

dır.

İspat: $\{V_{nk}\}$ genelleştirilmiş Lucas dizisi için Binet formülü,

$$V_{nk}=\alpha^{nk}+\beta^{nk}$$

dir. Burada $\alpha=\dfrac{p+\sqrt{p^{2}-4q}}{2}$ ve $\beta=\dfrac{p-\sqrt{p^{2}-4q}}{2}$ dir. Dikkat edilirse bu α ve β sayıları aynı zamanda $B=\begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerleridir. Dolayısıyla α ve β

sayıları Binet formülünde yerine yazılırsa (2.2.10) daki eşitlik gösterilmiş olur. (2.2.5) eşitliğinden dolayı da ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.5 deki (2.2.10) ve (2.2.11) eşitliklerinde $p=-q=k=1$ alınırsa aşağıdaki iyi bilinen sonuçlar yazılabilir [43].

Sonuç 2.2.2 $n \geq 0$ olmak üzere,

$$L_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} \frac{n}{n-i}$$

ve

$$L_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i} 5^i$$

dir [43].

Ayrıca aynı sonuç Pell-Lucas ve Jacobsthal- Lucas sayıları için de aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$Q_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} \frac{n}{n-i} 2^{n-2i},$$

$$Q_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i} 2^{1+i},$$

$$j_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} \frac{n}{n-i} 2^i,$$

$$j_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} 9^i .$$

2.3. Bir Matrisin Kuvvetleri ve Bu Matrisle Elde Edilen Bazı Özdeşlikler

Bu kısımda, tanımladığımız yeni bir matrisin kuvvetleri incelenecektir. Bu matris ve kuvvetleri kullanılarak birçok iyi bilinen veya ilk kez yazılacak olan özdeşlikler türetilecektir. Kullandığımız metodu diğerlerinden ayıran, tanımladığımız matrisin yeni olması ve kuvvetlerinin ilk kez incelenmesidir. Elemanlarını $\{V_n\}$ dizisinden alan,

$$A = \begin{pmatrix} p^2 - 2q & p \\ -qp & -2q \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

matrisini alalım. Ayrıca, A matrisinin tersi, $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$ olmak üzere,

$$A^{-1} = \frac{1}{-q\Delta} \begin{pmatrix} -2q & -p \\ qp & p^2 - 2q \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

dır. A matrisinin determinantı $D = 4q^2 - qp^2 = -q\Delta$ ve izi $T = p^2 - 4q$ olmak üzere, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.1 $\{U_n\} = \{W_n(0,1; p, q)\}$ ve $\{V_n\} = \{W_n(2, p; p, q)\}$ olmak üzere, her n tamsayısı için,

$$A^n = \begin{cases} (p^2 - 4q)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ -qV_n & -qV_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \\ \\ (p^2 - 4q)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} U_{n+1} & U_n \\ -qU_n & -qU_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispat kolayca görülebilir. $n=0$ için teoremin ifadesi doğrudur. Şimdi öncelikle $n \geq 1$ durumunu inceleyelim; $n=1$ olsun. Bu durumda $A=\left(p^2-4q\right)^0 \begin{pmatrix} V_2 & V_1 \\ -qV_1 & -qV_0 \end{pmatrix}$ olur. Burada $V_0=2$, $V_1=p$ ve $V_2=p^2-2q$ olduğundan,

$$A=\begin{pmatrix} p^2-2q & p \\ -qp & -2q \end{pmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla, $n=1$ için eşitlik doğrudur. Şimdi, $n=k$ için eşitlik doğru olsun. Yani,

$$A^k=\begin{cases} (p^2-4q)^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{k+1} & V_k \\ -qV_k & -qV_{k-1} \end{pmatrix}, & k \text{ tek} \\ \\ (p^2-4q)^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} U_{k+1} & U_k \\ -qU_k & -qU_{k-1} \end{pmatrix}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

olsun. Şimdi de $n=k+1$ için teoremin doğruluğunu gösterelim; önce k tek olsun

$$A^{k+1}=A^k A=(p^2-4q)^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{k+1} & V_k \\ -qV_k & -qV_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2-2q & p \\ -qp & -2q \end{pmatrix}$$

olur ve buradan

$$A^{k+1}=(p^2-4q)^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} (p^2-2q)V_{k+1}-qpV_k & pV_{k+1}-2qV_k \\ -q(p^2-2q)V_k+q^2pV_{k-1} & -qpV_k+2q^2V_{k-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. V_n için tekrarlı bağıntı ve [39] da verilen $V_{k+1}-qV_{k-1}=(p^2-4q)U_k$ eşitliği yardımıyla, bu matrisin elemanlarını sırasıyla incelersek, örneğin (1,1) elemanı

$$
\begin{aligned}
(p^2-2q)V_{k+1}-qpV_k &= p^2V_{k+1}-qV_{k+1}-qV_{k+1}-qpV_k \\
&= p(pV_{k+1}-qV_k)-qV_{k+1}-qV_{k+1} \\
&= pV_{k+2}-qV_{k+1}-qV_{k+1} \\
&= V_{k+3}-qV_{k+1}=(p^2-4q)U_{k+2}
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani,

$$(p^2-2q)V_{k+1}-qpV_k=(p^2-4q)U_{k+2}$$

elde edilir. Matrisin (1,2) elemanı,

$$
\begin{aligned}
pV_{k+1}-2qV_k &= pV_{k+1}-qV_k-qV_k \\
&= V_{k+2}-qV_k=(p^2-4q)U_{k+1}
\end{aligned}
$$

olur. Matrisin (2,1) elemanı,

$$
\begin{aligned}
-q(p^2-2q)V_k+q^2pV_{k-1} &= -qp^2V_k+2q^2V_k+q^2pV_{k-1} \\
&= -qp(pV_k-qV_{k-1})+q^2V_k+q^2V_k \\
&= -qpV_{k+1}+q^2V_k+q^2V_k \\
&= -q(pV_{k+1}-qV_k)+q^2V_k \\
&= -qV_{k+2}+q^2V_k \\
&= -q(V_{k+2}-qV_k)=-qU_{k+1}
\end{aligned}
$$

bulunur. Son olarak (2,2) elemanı,

$$
\begin{aligned}
-qpV_k+2q^2V_{k-1} &= -qpV_k+q^2V_{k-1}+q^2V_{k-1} \\
&= -q(pV_k-qV_{k-1})+q^2V_{k-1} \\
&= -qV_{k+1}+q^2V_{k-1} \\
&= -q(V_{k+1}-qV_{k-1})=-q(p^2-4q)U_k
\end{aligned}
$$

biçiminde bulunur. Bu elemanları A^{k+1} matrisinde yerine yazarsak

$$A^{k+1} = (p^2 - 4q)^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} (p^2 - 4q)U_{k+2} & (p^2 - 4q)U_{k+1} \\ -q(p^2 - 4q)U_{k+1} & -q(p^2 - 4q)U_k \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

$$A^{k+1} = (p^2 - 4q)^{\frac{k+1}{2}} \begin{pmatrix} U_{k+2} & U_{k+1} \\ -qU_{k+1} & -qU_k \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece $n = k + 1$ için k 'nın tek olma durumunda teorem ispatlanmış olur. Şimdi de k çift olsun. Bu durumda

$$A^{k+1} = A^k A = (p^2 - 4q)^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} U_{k+1} & U_k \\ -qU_k & -qU_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 - 2q & p \\ -qp & -2q \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$A^{k+1} = (p^2 - 4q)^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} (p^2 - 2q)U_{k+1} - qpU_k & pU_{k+1} - 2qU_k \\ -q(p^2 - 2q)U_k + q^2 pU_{k-1} & -qpU_k + 2q^2 U_{k-1} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. k 'nın tek olma durumuna benzer şekilde, U_n için tekrarlı bağıntı ve [39] da verilen

$$U_{k+1} - qU_{k-1} = V_k$$

eşitliği kullanılarak $n \geq 1$ için ispat tamamlanır. Şimdi $n > 0$ olsun. Kolay bir hesaplama ile A^n matrisinin tersini

$$A^{-n}=\begin{cases} -q^{-n}(p^2-4q)^{-\frac{n+1}{2}}\begin{pmatrix} -qV_{n-1} & -V_n \\ qV_n & V_{n+1}\end{pmatrix}, & n \text{ tek} \\ \\ q^{-n}(p^2-4q)^{-\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} -qU_{n-1} & -U_n \\ qU_n & U_{n+1}\end{pmatrix}, & n \text{ çift}\end{cases}$$

biçiminde elde ederiz. Yukarıdaki matrislerde $n>0$ için,

$$U_{-n}=-q^{-n}U_n \quad \text{ve} \quad V_{-n}=q^{-n}V_n$$

olduğu kullanılırsa,

$$A^{-n}=\begin{cases} (p^2-4q)^{\frac{-n-1}{2}}\begin{pmatrix} V_{-n+1} & V_{-n} \\ -qV_{-n} & -qV_{-n-1}\end{pmatrix}, & n \text{ tek} \\ \\ (p^2-4q)^{-\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} U_{-n+1} & U_{-n} \\ -qU_{-n} & -qU_{-n-1}\end{pmatrix}, & n \text{ çift}\end{cases}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla her n tamsayısı için ispat tamamlanmış olur.

A matrisinin özel durumları incelenirse, Lucas, Pell-Lucas ve Jacobsthal-Lucas dizilerine ait matrisler elde edilir. A matrisinde; $p=1$ ve $q=-1$ yazılırsa $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. Benzer biçimde $p=2$ ve $q=-1$ alınırsa, $D=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$ matrisi ve $p=1$ ve $q=-2$ alınırsa, $E=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4\end{pmatrix}$ matrisi yazılır. Bu matrisler gözönüne alınarak, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$\{F_n\}$ ve $\{L_n\}$ dizileri Fibonacci ve Lucas dizileri olmak üzere, $n\geq 0$ için C matrisinin $n.$ kuvveti,

$$C^n = \begin{cases} 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}, & n \ \text{tek} \\ \\ 5^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, & n \ \text{çift} \end{cases} \tag{2.3.4}$$

olur. Bu eşitlik, Köken ve Bozkurt tarafından verildi [29]. Dikkat edilirse teorem 2.3.1. bu sonucu genellemektedir.

Benzer şekilde Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri için de matrisler ve kuvvetleri yazılabilir.

Aşağıdaki teoremde verilen eşitlikler [39] da R. S. Melham ve A. G. Shannon tarafından verildi. Ancak biz burada Teorem 2.3.1 de verdiğimiz yeni matrisi kullanarak, bu eşitlikleri tekrar elde ettik.

Teorem 2.3.2 (Cassini Formülü) $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci Lucas dizileri olmak üzere,

$$V_{n+1}V_{n-1} - V_n^2 = q^{n-1}(p^2 - 4q) \tag{2.3.5}$$

ve

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = -q^{n-1} \tag{2.3.6}$$

dir.

İspat: A matrisinin determinantı yardımıyla

$$\det A^n = (\det A)^n = (-q\Delta)^n = \begin{cases} -q^n\Delta^n, & n \ \text{tek} \\ q^n\Delta^n, & n \ \text{çift} \end{cases}$$

olduğu kolayca görülebilir. A^n matrisi kullanılarak (2.3.5) ve (2.3.6) eşitlikleri yazılır.

Bununla beraber $p=1$ ve $q=-1$ alınırsa $L_{n+1}L_{n-1}-L_n^2=5(-1)^{n-1}$ ve $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ bulunur [28].

A^n ve A^{-n} matrisleri kullanılarak, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin elemanlarını içeren bazı eşitlikler aşağıdaki teoremde verilebilir.

Teorem 2.3.3 $m,\ n\in\mathbb{Z}$ ve $\Delta=p^2-4q\neq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler sağlanır;

$$U_{m+n}=U_{m+1}U_n-qU_mU_{n-1},\qquad U_{m+n}=\frac{1}{\Delta}(V_{m+1}V_n-qV_mV_{n-1}) \tag{2.3.7}$$

$$V_{m+n}=U_{m+1}V_n-qU_mV_{n-1},\qquad V_{m+n}=V_{m+1}U_n-qV_mU_{n-1}\ . \tag{2.3.8}$$

İspat: Önce (2.3.7) de verilen özdeşlikleri ispatlayalım; Teorem 2.3.1 den

$$A^{m+n}=(p^2-4q)^{\frac{m+n-1}{2}}\begin{pmatrix} V_{m+n+1} & V_{m+n} \\ -qV_{m+n} & -qV_{m+n-1}\end{pmatrix},\ m+n\ \text{ tek}, \tag{2.3.9}$$

$$A^{m+n}=(p^2-4q)^{\frac{m+n}{2}}\begin{pmatrix} U_{m+n+1} & U_{m+n} \\ -qU_{m+n} & -qU_{m+n-1}\end{pmatrix},\ m+n\ \text{ çift} \tag{2.3.10}$$

yazılabilir.

Hem m sayısı hem de n sayısı tek olsun. Bu durumda $m+n$ çift olur. Matrislerin çarpımından,

$$A^{m+n}=A^mA^n=(p^2-4q)^{\frac{m+n-2}{2}}\begin{pmatrix} V_{m+1}V_{n+1}-qV_mV_n & V_{n+1}V_n-qV_mV_{n-1} \\ -qV_mV_{n+1}+q^2V_{m-1}V_n & -qV_mV_n+q^2V_{m-1}V_{n-1}\end{pmatrix} \quad \textbf{(2.3.11)}$$

olup, (2.3.10) ve (2.3.11) matrisleri karşılıklı eşitlendiğinde, (1,1) elemanlarının eşitliğinden

$$(p^2-4q)^{\frac{m+n}{2}}U_{m+n+1}=(p^2-4q)^{\frac{m+n-2}{2}}(V_{m+1}V_{n+1}-qV_mV_n)$$

$$(p^2-4q)U_{m+n+1}=V_{m+1}V_{n+1}-qV_mV_n$$

bulunur. (1,2) elemanlarının eşitliğinden

$$(p^2-4q)^{\frac{m+n}{2}}U_{m+n}=(p^2-4q)^{\frac{m+n-2}{2}}(V_{m+1}V_n-qV_mV_{n-1})$$

$$(p^2-4q)U_{m+n}=V_{m+1}V_n-qV_mV_{n-1}$$

elde edilir. (2,1) elemanlarının eşitliğinden

$$(p^2-4q)^{\frac{m+n}{2}}(-q)U_{m+n}=(p^2-4q)^{\frac{m+n-2}{2}}(-q)(V_mV_{n+1}-qV_{m-1}V_n)$$

$$(p^2-4q)U_{m+n}=V_mV_{n+1}-qV_{m-1}V_n$$

elde edilir. (2,2) elemanlarının eşitliğinden

$$(p^2-4q)^{\frac{m+n}{2}}(-q)U_{m+n-1}=(p^2-4q)^{\frac{m+n-2}{2}}(-q)(V_mV_{n+1}-qV_{m-1}V_n)$$

$$(p^2-4q)U_{m+n}=V_mV_{n+1}-qV_{m-1}V_n$$

elde edilir. Böylece, ispatın başında hem m hem de n sayısının tek sayı seçilmesine rağmen (2.3.7) deki özdeşliklerden ikincisinin m ve n sayılarının tüm değerleri için doğru olduğu gösterilmiş oldu.

Benzer biçimde, hem m hem de n sayıları çift tamsayılar olduğunda;

$$A^{m+n} = (p^2 - 4q)^{\frac{m+n}{2}} \begin{pmatrix} U_{m+1}U_{n+1} - qU_mU_n & U_{m+1}U_n - qU_mU_{n-1} \\ -qU_mU_{n+1} + q^2U_{m-1}U_n & -qU_mU_n + q^2U_{m-1}U_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.3.12)}$$

olur. Tekrar (2.3.10) ve (2.3.12) matrisleri karşılıklı eşitlendiğinde, (2.3.7) deki ilk özdeşlik

$$U_{m+n} = U_{m+1}U_n - qU_mU_{n-1}$$

kolayca elde edilir. Benzer biçimde, (2.3.8) de verilen diğer özdeşlikler de ispatlanabilir.

Bu teoremde, özel olarak eğer $p = 1$ ve $q = -1$ yazılırsa $m, n \in \mathbb{Z}$, $\{F_n\}$ ve $\{L_n\}$ dizileri için,

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \; F_{m+n} = \frac{1}{5}(L_{m+1}L_n + L_mL_{n-1})$$

ve

$$L_{m+n} = F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1}, \quad L_{m+n} = L_{\mathrm{m}+1}F_n + L_mF_{n-1} \; .$$

özdeşlikleri elde edilir [28].

Teorem 2.3.4 $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

$$U_{m-n} = q^{-n}(U_m U_{n+1} - U_{m+1} U_n), \quad U_{m-n} = \frac{q^{-n}}{\Delta}(V_{m+1} V_n - V_m V_{n+1}) \tag{2.3.13}$$

$$V_{m-n} = q^{-n}(V_m U_{n+1} - V_{m+1} U_n), \qquad V_{m-n} = q^{-n}(U_{m+1} V_n - U_m V_{n+1}) \tag{2.3.14}$$

İspat: A^{m-n} matrisini kullanarak (2.3.13) de verilen özdeşlikleri ispatlayalım. Hem m sayısı hem de n sayısı tek olsun. Bu durumda $m-n$ sayısı çift olur. Böylece

$$A^{m-n} = (p^2 - 4q)^{\frac{m-n}{2}} \begin{pmatrix} U_{m-n+1} & U_{m-n} \\ -qU_{m-n} & -qU_{m-n-1} \end{pmatrix} \tag{2.3.15}$$

yazılır. Ayrıca matrislerin çarpımından

$$A^{m-n} = A^m A^{-n} = -q^{-n}(p^2 - 4q)^{\frac{m-n-2}{2}} \begin{pmatrix} -qV_{m+1}V_{n-1} + qV_m V_n & -V_{m+1}V_n + V_m V_{n+1} \\ q^2 V_m V_{n-1} - q^2 V_{m-1} V_n & qV_m V_n - qV_{m-1} V_{n+1} \end{pmatrix} \tag{2.3.16}$$

yazılabilir. (2.3.15) ve (2.3.16) eşitliklerindeki matrisler karşılıklı eşitlendiğinde, (1,1) elemanlarının eşitliğinden,

$$(p^2 - 4q)^{\frac{m-n}{2}} U_{m-n+1} = -q^{-n}(p^2 - 4q)^{\frac{m-n-2}{2}}(-qV_{m+1}V_{n-1} + qV_m V_n)$$

$$(p^2 - 4q)U_{m-n+1} = q^{-n+1}(V_{m+1}V_{n-1} - V_m V_n)$$

$$U_{m-(n-1)} = \frac{q^{-(n-1)}}{(p^2 - 4q)}(V_{m+1}V_{n-1} - V_m V_n)$$

elde edilir. (1,2) elemanlarının eşitliğinden,

$$(p^2-4q)^{\frac{m-n}{2}}U_{m-n}=-q^{-n}(p^2-4q)^{\frac{m-n-2}{2}}(-V_{m+1}V_n+V_mV_{n+1})$$

$$(p^2-4q)U_{m-n}=q^{-n}(V_{m+1}V_n-V_mV_{n+1})$$

$$U_{m-n}=\frac{q^{-n}}{(p^2-4q)}(V_{m+1}V_n-V_mV_{n+1})$$

bulunur. (2,1) elemanlarının eşitliğinden

$$-q(p^2-4q)^{\frac{m-n}{2}}U_{m-n}=-q^{-n}(p^2-4q)^{\frac{m-n-2}{2}}(q^2V_{m+1}V_n-q^2V_mV_{n+1})$$

$$-q(p^2-4q)U_{m-n}=-q^{-n}q^2(V_mV_{n-1}-V_{m-1}V_n)$$

$$(p^2-4q)U_{m-n}=q^{-n+1}(V_mV_{n-1}-V_{m-1}V_n)$$

$$U_{m-1-(n-1)}=\frac{q^{-(n-1)}}{p^2-4q}(V_mV_{n-1}-V_{m-1}V_n)$$

olur. Son olarak (2,2) elemanlarının eşitliğinden

$$-q(p^2-4q)^{\frac{m-n}{2}}U_{m-n-1}=-q^{-n}(p^2-4q)^{\frac{m-n-2}{2}}(qV_mV_n-qV_{m-1}V_{n+1})$$

$$(p^2-4q)U_{m-n-1}=q^{-n}(V_mV_n-V_{m-1}V_{n+1})$$

$$U_{(m-1)-n}=\frac{q^{-n}}{(p^2-4q)}(V_mV_n-V_{m-1}V_{n+1})$$

elde edilir. Böylece (2.3.13) de verilen özdeşliğin ikinci kısmının tüm m ve n sayıları için sağlandığını göstermiş olduk. Benzer biçimde hem m sayısı hem de n sayısı çift alınarak diğer özdeşlik de ispatlanabilir. Bununla birlikte m ve n

sayılarının sırasıyla tek ve çift durumları incelendiğinde de (2.3.14) deki özdeşlikler bulunur.

Eğer yukarıdaki teoremde $p=1$ ve $q=-1$ yazılırsa, $m,\ n\in\mathbb{Z}$ için,

$$F_{m-n}=(-1)^n(F_mF_{n+1}-F_{m+1}F_n),\quad F_{m-n}=\frac{(-1)^n}{5}(L_{m+1}L_n-L_mL_{n+1})$$

ve

$$L_{m-n}=(-1)^n(L_mF_{n+1}-L_{m+1}F_n),\quad L_{m-n}=(-1)^n(F_{m+1}L_n-F_mL_{n+1})$$

özdeşlikleri elde edilir [28].

Teorem 2.3.5 $m,\ n\in\mathbb{Z}$ ve $\Delta=p^2-4q$ olmak üzere;

$$U_{m+n}+(-q)^nU_{m-n}=\begin{cases}V_mU_n, & n \text{ tek}\\ U_mV_n, & n \text{ çift}\end{cases} \qquad \textbf{(2.3.17)}$$

ve

$$V_{m+n}+(-q)^nV_{m-n}=\begin{cases}\Delta U_mU_n, & n \text{ tek}\\ V_mV_n, & n \text{ çift}\end{cases} \qquad \textbf{(2.3.18)}$$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat: (2.3.7) ve (2.3.13) de verilen özdeşlikler ile birlikte $U_{n+1}-qU_{n-1}=V_n$ ve $V_{n+1}-qV_{n-1}=\Delta U_n$ özdeşlikleri de kullanılarak, (2.3.17) de verilen özdeşlğin ispatı kolayca yapılabilir; n çift sayı olsun. Bu durumda,

$$U_{m+n}+(-q)^n U_{m-n}=U_{m+1}U_n-qU_mU_{n-1}+(-q)^n q^{-n}\left(U_mU_{n+1}-U_{m+1}U_n\right)$$

$$=U_m(U_{n+1}-qU_{n-1})=U_mV_n$$

bulunur. n tek sayı olsun. Bu durumda,

$$U_{m+n}+(-q)^n U_{m-n}=\frac{1}{\Delta}(V_{m+1}V_n-qV_mV_{n-1})+(-q)^n\frac{q^{-n}}{\Delta}(V_{m+1}V_n-V_mV_{n+1})$$

$$=\frac{V_m}{\Delta}(V_{n+1}-qV_{n-1})=\frac{V_m}{\Delta}\Delta U_n=V_mU_n$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (2.3.18) özdeşliğinin ispatı, (2.3.8) ve (2.3.14) da verilen özdeşlikler, $U_{n+1}-qU_{n-1}=V_n$ ve $V_{n+1}-qV_{n-1}=\Delta U_n$ özdeşlikleri kullanılarak kolayca yapılabilir; n çift sayı olsun. Bu durumda,

$$V_{m+n}+(-q)^n V_{m-n}=V_{m+1}U_n-qV_mU_{n-1}+(-q)^n q^{-n}(V_mU_{n+1}-V_{m+1}U_n)$$

$$=V_m(U_{n+1}-qU_{n-1})=V_mV_n$$

olur. Şimdi de n tek sayı olsun.

$$V_{m+n}+(-q)^n V_{m-n}=U_{m+1}V_n-qU_mV_{n-1}+(-q)^n q^{-n}(U_{m+1}V_n-U_mV_{n+1})$$

$$=U_m(V_{n+1}-qV_{n-1})=\Delta U_mU_n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yine burada $p=1$ ve $q=-1$ yazılırsa, Koshy tarafından verilen

$$F_{m+n}+F_{m-n}=\begin{cases} L_mF_n\,, & n \text{ tek} \\ F_mL_n\,, & n \text{ çift}\end{cases}\quad,\qquad L_{m+n}+L_{m-n}=\begin{cases} 5F_mF_n\,, & n \text{ tek} \\ L_mL_n\,, & n \text{ çift}\end{cases}$$

özdeşlikleri elde edilir [28].

Benzer olarak, Teorem 2.3.3, Teorem 2.3.4 ve Teorem 2.3.5 de, $p=2$ ve $q=-1$ alınırsa, Pell ve Pell-Lucas dizilerinin elemanlarını içeren özdeşlikler ve $p=1$, $q=-2$ alınırsa, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin elemanlarını içeren özdeşlikler elde edilir.

Aşağıdaki lemma, C matrisi ile birim matrisin ilgisini vermektedir ve daha sonra bazı genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili özdeşlikler elde edilmesinde kullanılacaktır.

Lemma 2.3.1 $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ ve $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\mathrm{I}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{k-n}C^{n-2k} \qquad \textbf{(2.3.19)}$$

olur.

İspat: $C+5C^{-1}=5\mathrm{I}$ eşitliğinin her iki yanının n. kuvveti alınırsa ispat kolayca görülebilir.

Teorem 2.3.6 n tek ise,

$$V_n=\Delta^{\frac{n-1}{2}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}q^{k-1}py_{k-1} \qquad \textbf{(2.3.20)}$$

ve n çift ise,

$$U_n = \Delta^{\frac{n-2}{2}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^{k-1} p y_{k-1} \tag{2.3.21}$$

dır.

Burada, $\Delta = p^2 - 4q$, $y_k = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} T^{k-2i} (-D)^i$ dir ve ayrıca $T = \text{iz} A^{-1}$ ve $D = \det A^{-1} = -\dfrac{1}{q\Delta}$ dir.

İspat: $A = \Delta\left(\mathrm{I} + qA^{-1}\right)$ eşitliği kolayca görülebilir. Binom açılım yardımıyla,

$$A^n = \Delta^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k A^{-k} \tag{2.3.22}$$

elde edilir. $A^{-1} = \dfrac{1}{-q\Delta} \begin{pmatrix} -2q & -p \\ qp & p^2 - 2q \end{pmatrix}$ olduğundan, $A^{-k} = (A^{-1})^k$ ve Teorem 2.2.1 kullanılarak A^{-1} matrisinin k. kuvveti,

$$(A^{-1})^k = \begin{pmatrix} y_k - \left(\dfrac{p^2 - 2q}{-q\Delta}\right) y_{k-1} & \dfrac{p}{q\Delta} y_{k-1} \\ \dfrac{-p}{\Delta} y_{k-1} & y_k + \dfrac{2}{\Delta} y_{k-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır.

$A^n = \Delta^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k A^{-k}$ eşitliğinde, A^{-k} yerine yazılırsa

$$A^n = \Delta^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k \begin{pmatrix} y_k - \left(\dfrac{p^2-2q}{q\Delta}\right) y_{k-1} & \dfrac{p}{q\Delta} y_{k-1} \\ \\ \dfrac{-p}{\Delta} y_{k-1} & y_k + \dfrac{2}{\Delta} y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{2.3.23}$$

bulunur. (2.3.3) denkleminde n tek olduğunda, A^n matrisinin (1, 2) elemanı ve (2.3.23) matrisindeki (1,2) elemanı eşitlenirse,

$$\left(p^2-4q\right)^{\frac{n-1}{2}} V_n = \Delta^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^k \frac{p}{q\Delta} y_{k-1} = \Delta^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^{k-1} p y_{k-1}$$

bulunur. Böylece,

$$V_n = \Delta^{\frac{n-1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^{k-1} p y_{k-1}$$

elde edilir. Benzer biçimde, (2.3.3) denkleminde n çift iken, A^n matrisinin (1, 2) elemanı ve (2.3.23) deki matrisin (1, 2) elemanı eşitlenirse,

$$(p^2-4q)^{\frac{n}{2}} U_n = \Delta^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^k \frac{p}{q\Delta} y_{k-1}$$

ve

$$U_n = \Delta^{\frac{n-2}{2}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^{k-1} p y_{k-1}$$

bulunur.

Şimdi, Teorem 2.3.1 de verilen (2.3.3) matrisini kullanarak $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri için yeni birkaç özdeşlik daha verelim;

Teorem 2.3.7 n tek ve k çift tamsayı, $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere,

$$U_{nk} = V_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} \Delta^{\frac{k-2i-2}{2}} U_n^{\,k-1-2i} q^{ni} \tag{2.3.24}$$

dir.

İspat: Teorem 2.3.1 kullanılırsa n tek olduğunda

$$A^n = (p^2 - 4q)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ -qV_n & -qV_{n-1} \end{pmatrix}$$

olur. k çift olsun. Bu durumda

$$A^{nk} = (p^2 - 4q)^{\frac{nk}{2}} \begin{pmatrix} U_{nk+1} & U_{nk} \\ -qU_{nk} & -qU_{nk-1} \end{pmatrix} \tag{2.3.25}$$

yazılır. Şimdi, A^n matrisinin $k.$ kuvvetini Teorem 2.2.1'i kullanarak tekrar yazalım: $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere,

$$(A^n)^k = \left(\Delta^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ -qV_n & -qV_{n-1} \end{pmatrix} \right)^k = \begin{pmatrix} y_k + q\Delta^{\frac{n-1}{2}} V_{n-1} y_{k-1} & \Delta^{\frac{n-1}{2}} V_n y_{k-1} \\ -q\Delta^{\frac{n-1}{2}} V_n y_{k-1} & y_k - \Delta^{\frac{n-1}{2}} V_{n+1} y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{2.3.26}$$

olur. Buradaki y_k değerini, $A^n = \Delta^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ -qV_n & -qV_{n-1} \end{pmatrix}$ matrisine bağlı olarak yazmak için önce bu matrisin iz ve determinantını yazmak gerekir. Yani,

$$T = \text{iz}A^n = \Delta^{\frac{n-1}{2}} (V_{n+1} - qV_{n-1}) = \Delta^{\frac{n-1}{2}} \Delta U_n = \Delta^{\frac{n+1}{2}} U_n$$

$$D=\det A^{n}=\Delta^{n-1}(-qV_{n+1}V_{n-1}+qV_{n}^{2})=-q\Delta^{n-1}(V_{n+1}V_{n-1}-V_{n}^{2})$$

olur ve $V_{n+1}V_{n-1}-V_{n}^{2}=q^{n-1}\Delta$ olduğu kullanılırsa,

$$D=\det A^{n}=-q^{n}\Delta^{n}$$

bulunur. Buradan

$$y_{k-1}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}\binom{k-1-i}{i}T^{k-1-2i}(-D)^{i}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}\binom{k-1-i}{i}(\Delta^{\frac{n+1}{2}}U)^{k-1-2i}(q^{n}\Delta^{n})^{i}$$

elde edilir. Şimdi (2.3.25) ve (2.3.26) de verilen matrislerin eşitliğinden,

$$\Delta^{\frac{nk}{2}}U_{nk}=\Delta^{\frac{n-1}{2}}V_{n}y_{k-1}=\Delta^{\frac{n-1}{2}}V_{n}\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{k-}{2}\right\rfloor}\binom{k-1-i}{i}(\Delta^{\frac{n+1}{2}}U)^{k-1-2i}(q^{n}\Delta^{n})^{i}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\Delta^{\frac{nk}{2}}U_{nk}=\Delta^{\frac{nk+k}{2}}V_{n}\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{k-}{2}\right\rfloor}\binom{k-1-i}{i}\Delta^{\frac{-2i-2}{2}}U_{n}^{\,k-1-2i}(q^{n}\Delta^{n})^{i}$$

ve buradan

$$U_{nk}=\Delta^{\frac{k}{2}}V_{n}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}\binom{k-1-i}{i}\Delta^{-(i+1)}U_{n}^{\,k-1-2i}q^{ni}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. Şimdi de n tamsayısının çift olma durumunu irdeleyen aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 2.3.8 n çift ve k herhengi bir tamsayı ve $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere,

$$U_{nk} = U_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} V_n^{\,k-1-2i} q^{ni} (-1)^i \qquad \textbf{(2.3.27)}$$

dir.

İspat: Teorem 2.3.1 e göre n çift olduğunda,

$$A^n = (p^2 - 4q)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} U_{n+1} & U_n \\ -qU_n & -qU_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. k hangi tamsayı olursa olsun nk çift olacaktır. Bu durumda yine

$$A^{nk} = (p^2 - 4q)^{\frac{nk}{2}} \begin{pmatrix} U_{nk+1} & U_{nk} \\ -qU_{nk} & -qU_{nk-1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.3.28)}$$

yazılır. Şimdi A^n matrisinin k. kuvvetini Teorem 2.2.1 deki eşitlikleri kullanarak yazalım: $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere,

$$(A^n)^k = \left(\Delta^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} U_{n+1} & U_n \\ -qU_n & -qU_{n-1} \end{pmatrix} \right)^k = \begin{pmatrix} y_k + q\Delta^{\frac{n}{2}} U_{n-1} y_{k-1} & \Delta^{\frac{n}{2}} U_n y_{k-1} \\ -q\Delta^{\frac{n}{2}} U_n y_{k-1} & y_k - \Delta^{\frac{n}{2}} U_{n+1} y_{k-1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.3.29)}$$

olur. Buradaki y_k, $A^n = \Delta^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} U_{n+1} & U_n \\ -qU_n & -qU_{n-1} \end{pmatrix}$ matrisine bağlıdır ve önce bu matrisin iz ve determinantı hesaplanmalıdır. Basit bir hesaplama ile

$$T = \text{iz}A^n = \Delta^{\frac{n}{2}} (U_{n+1} - qU_{n-1}) = \Delta^{\frac{n}{2}} V_n$$

ve

$$D = \det A^n = \Delta^n(-qU_{n+1}U_{n-1} + qU_n^2) = -q\Delta^n(U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2)$$

olur ve Cassini formülü kullanılırsa,

$$D = \det A^n = q^n \Delta^n$$

bulunur. Buradan

$$y_{k-1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} T^{k-1-2i}(-D)^i = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} (\Delta^{\frac{n}{2}} V_n)^{k-1-2i}(-q^n \Delta^n)^i$$

elde edilir. Şimdi (2.3.28) ve (2.3.29) da verilen matrislerin eşitliğinden,

$$\Delta^{\frac{nk}{2}} U_{nk} = \Delta^{\frac{n}{2}} U_n y_{k-1} = \Delta^{\frac{n}{2}} U_n \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} (\Delta^{\frac{n}{2}} V_n)^{k-1-2i}(-q^n \Delta^n)^i$$

bulunur. Gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\Delta^{\frac{nk}{2}} U_{nk} == \Delta^{\frac{nk}{2}} U_n \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} V_n^{k-1-2i} q^{ni}(-1)^i$$

ve buradan

$$U_{nk} = U_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} V_n^{k-1-2i} q^{ni}(-1)^i$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. İncelenmesi gereken bir durum da n ve k sayılarının ikisininde tek tamsayı olma durumudur. Bu durum için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 2.3.9 n ve k tek tamsayı ve $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere,

$$V_{nk} = V_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} U_n^{k-1-2i} \Delta^{\frac{k-1-2i}{2}} q^{ni} \tag{2.3.30}$$

dir.

İspat: Teorem 2.3.1 den n tek olduğunda,

$$A^n = (p^2 - 4q)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ -qV_n & -qV_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. nk sayısı tek olacağından,

$$A^{nk} = (p^2 - 4q)^{\frac{nk-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{nk+1} & V_{nk} \\ -qV_{nk} & -qV_{nk-1} \end{pmatrix} \tag{2.3.31}$$

yazılır. Şimdi A^n matrisinin k. kuvvetini Teorem 2.2.1 deki eşitlikleri kullanarak yazalım: $\Delta = p^2 - 4q$ olmak üzere

$$(A^n)^k = \left(\Delta^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ -qV_n & -qV_{n-1} \end{pmatrix} \right)^k = \begin{pmatrix} y_k + q\Delta^{\frac{n-1}{2}} V_{n-1} y_{k-1} & \Delta^{\frac{n-1}{2}} V_n y_{k-1} \\ -q\Delta^{\frac{n-1}{2}} V_n y_{k-1} & y_k - \Delta^{\frac{n-1}{2}} V_{n+1} y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{2.3.32}$$

olur. Buradaki y_k, $A^n = \Delta^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & V_n \\ -qV_n & -qV_{n-1} \end{pmatrix}$ matrisinin iz ve determinantına bağlı olarak,

$$y_{k-1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} T^{k-1-2i} (-D)^i = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} (\Delta^{\frac{n+1}{2}} U_n)^{k-1-2i} (q^n \Delta^n)^i$$

biçiminde yazılır. Şimdi (2.3.31) ve (2.3.32) de verilen matrislerin eşitliğinden,

$$\Delta^{\frac{nk}{2}} V_{nk} = \Delta^{\frac{n-1}{2}} V_n y_{k-1} = \Delta^{\frac{n-1}{2}} V_n \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} (\Delta^{\frac{n+1}{2}} U_n)^{k-1-2i} (q^n \Delta^n)^i$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$V_{nk} = V_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{k-1-i}{i} U_n{}^{k-1-2i} \Delta^{\frac{k-1-2i}{2}} q^{ni}$$

elde edilir.

Yukarıda verilen son üç teoremde $n = k$ alınırsa

$$U_{n^2} = U_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} V_n{}^{n-1-2i} q^{ni} (-1)^i \quad ; \quad n \text{ çift}$$

$$V_{n^2} = V_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} U_n{}^{n-1-2i} \Delta^{\frac{n-1-2i}{2}} q^{ni} \quad ; \quad n \text{ tek}$$

özdeşlikleri elde edilir. Ayrıca, eğer bu özdeşliklerde $p = 1$ ve $q = -1$ yazılırsa $\{F_n\}$ ve $\{L_n\}$ dizileri için de aşağıdaki yeni özdeşlikler türetilmiş olur;

$$F_{n^2} = F_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} L_n{}^{n-1-2i} (-1)^{ni+i} \quad ; \quad n \text{ çift}$$

$$L_{n^2} = L_n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} F_n{}^{n-1-2i} 5^{\frac{n-1-2i}{2}} (-1)^{ni} \quad ; \quad n \text{ tek} .$$

Bununla birlikte, bu özdeşlikler p ve q sayılarının seçimlerine göre Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri için de kolaylıkla yazılabilir.

Şimdi, Bölüm 2.3 de tanımladığımız A matrisinin özel hali olan, $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ matrisi ile literatürde daha önce kullanılan $R=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ matrisi arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki sonucu yazalım.

Sonuç 2.3.3 C ve R matrisleri için,

$$R^{n+1}C^{n} = 5^{n}\begin{pmatrix}L_{n+1} & L_{n}\\ L_{n} & L_{n+1}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.3.33)}$$

olur.

İspat: $RC=5Q$ ve $CR=5Q$ olduğu görülebilir. Buradaki $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ Fibonacci matrisi olup $(RC)^{n}=(5Q)^{n}$ yazılırsa, buradan $R^{n}C^{n}=5^{n}Q^{n}$ bulunur. Bu eşitlikte, her iki taraf R ile çarpılarak $R^{n+1}C^{n}=5^{n}RQ^{n}$ elde edilir. Ayrıca,

$$RQ^{n} = \begin{pmatrix}L_{n+1} & L_{n}\\ L_{n} & L_{n+1}\end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$R^{n+1}C^{n} = 5^{n}\begin{pmatrix}L_{n+1} & L_{n}\\ L_{n} & L_{n+1}\end{pmatrix}$$

bulunur. R^{n} matrisi yazılırsa,

$$R^n = \begin{cases} 5^{\frac{n-1}{2}} R, & n \text{ tek} \\ 5^{\frac{n}{2}} I, & n \text{ çift} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece, R matrisi ile C matrisi arasında bir ilişki kurulmuş olur [28].

BÖLÜM 3. FİBONACCİ TİPİ POLİNOMLARIN KÖKLERİ

Giriş bölümünde, başlangıç koşullarını, $G_0^{(k)}(x) = -1$, $G_1^{(k)}(x) = x - 1$ biçiminde olan ve $G_{n+2}^{(k)}(x) = x^k G_{n+1}^{(k)}(x) + G_n^{(k)}(x)$ tekrarlı bağıntısı ile tanımlanan, Fibonacci tipi polinomlardan bahsedildi. Bu bölümde ise, $G_n^{(k)}(x)$ polinomlarının $k = 2$ özel durumunu göz önüne alacağız. Başlangıç koşullarını, a pozitif bir reel sayı olmak üzere, $G_0^{(2)}(x) = -a$, $G_1^{(2)}(x) = x - a$ alarak, $G_n^{(2)}(x)$ polinomlarının köklerini inceleyeceğiz. $n \geq 0$ için,

$$G_{n+2}^{(2)}(x) = x^2 G_{n+1}^{(2)}(x) + G_n^{(2)}(x) \tag{3.1}$$

tekrarlı bağıntısı yazalım. (3.1) denkleminde verilen tekrarlı bağıntının karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - x^2\lambda - 1 = 0$$

olup, kökleri ise

$$\alpha(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 4}}{2} \tag{3.2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^4 + 4}}{2} \tag{3.3}$$

dir.

$G_n^{(2)}(x)$ polinomlarını,

$G_1^{(2)}(x) = x - a$,

$G_2^{(2)}(x) = x^3 - ax^2 - a$,

$G_3^{(2)}(x) = x^5 - ax^4 - ax^2 + x - a$,

$G_4^{(2)}(x) = x^7 - ax^6 - ax^4 + 2x^3 - 2ax^2 - a$.

$\vdots$

olarak sıralayabiliriz. Dikkat edilirse, $G_n^{(2)}(x)$ polinomlarının her biri monik polinomdur ve sabit terimleri $-a$ dır. $G_n^{(2)}(x)$ polinomlarında $x = a$ yazılırsa,

$G_1^{(2)}(a) = 0$,

$G_2^{(2)}(a) = -a < 0$,

$G_3^{(2)}(a) = -a^3 = a^2 G_2^{(2)}(a) < 0$,

$G_4^{(2)}(a) = -a^5 - a \leq -a^5 = a^2 G_3^{(2)}(a) < 0$,

elde edilir. Tümevarım yardımıyla, $k \geq 2$ için, $G_k^{(2)}(a) \leq a^2 G_{k-1}^{(2)}(a) < 0$ olur ve tekrarlı bağıntı kullanılırsa,

$$G_{k+1}^{(2)}(a) = a^2 G_k^{(2)}(a) + G_{k-1}^{(2)}(a) < 0$$

elde edilir. Buradan $n \geq 2$ için $G_n^{(2)}(x) < 0$ olduğu görülür. Benzer şekilde, eğer $x = a + 1$ yazılırsa, $n \geq 2$ için,

$$G_n^{(2)}(x) > 0$$

elde edilir. Böylece, $n \geq 2$ için $G_n^{(2)}(x)$ polinomlarının $(a, a+1)$ aralığında en az bir köke sahip olduğu söylenebilir.

Şimdi de daha sonra kullanmak üzere, aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1 Pozitif katsayılı f fonksiyonunun maximal reel kökü r ise, $x > r$ için $f(x) > 0$ dır. Buna karşın, $x \geq t$ için $f(x) > 0$ ise, $r < t$ dır. Eğer, $f(s) < 0$ ise, $s < r$ dır [37].

$G_n^{(2)}(x)$ polinomunun tek ve çift indisli kökleri sırasıyla $\{g_{2n-1}\}$ ve $\{g_{2n}\}$ olsun. Köklerle ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1 g_n , $G_n^{(2)}(x)$ polinomunun maksimal reel kökü olmak üzere, $\{g_{2n-1}\}$ monoton artan ve $\{g_{2n}\}$ ise monoton azalan bir dizidir.

İspat: Önce, tek indisli $G_n^{(2)}(x)$ polinomlarını dikkate alalım. Kolay bir hesaplama ile $G_3^{(2)}(a) = -a^3 < 0$; $g_3 > a$ dir. Ayrıca, $G_1^{(2)}(x)$ polinomunun kökü $g_1 = 1$ olduğundan $g_3 > g_1 = a = 1$ yazabiliriz. Şimdi, $g_1 < g_3 < g_5 < \cdots < g_{2k-3} < g_{2k-1}$ olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 kullanılarak, $G_{2k-3}^{(2)}(g_{2k-1}) > 0$ olduğunu yazabiliriz**.** Ayrıca, $G_{n+k}^{(2)}(g_n) = (-1)^{k+1} G_{n-k}^{(2)}(g_n)$ olduğunu görmek zor değildir. Son yazdığımız formül kullanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$G_{2k+1}^{(2)}(g_{2k-1}) = G_{(2k-1)+2}^{(2)}(g_{2k-1}) = -G_{(2k-1)-2}^{(2)}(g_{2k-1}) = -G_{2k-3}^{(2)}(g_{2k-1}) .$$

Dolayısıyla, $G_{2k+1}^{(2)}(g_{2k-1}) < 0$ elde edilir.

Lemma 3.1 den, $G_{2k+1}^{(2)}(x)$ polinomlarının g_{2k-1}den daha büyük bir köke sahip olduğu görülebilir. Böylece, $g_{2k+1} > g_{2k-1}$ yazmak mümkündür.

Şimdi, çift indisli $G_n^{(2)}(x)$ polinomlarını inceleyelim. Tekrarlı bağıntı kullanılırsa aşağıdaki

$$G_{2k+1}^{(2)}(g_{2k-1}) = g_{2k-1}^2 G_{2k}^{(2)}(g_{2k-1}) + G_{2k-1}^{(2)}(g_{2k-1})$$

eşitliği bulunur. $G_{2k-1}^{(2)}(g_{2k-1})=0$ ve $G_{2k+1}^{(2)}(g_{2k-1})<0$ olduğundan, $G_{2k}^{(2)}(g_{2k-1})<0$ yazılabilir. Lemma 3.1 kullanılarak;

$$g_{2k-1}<g_{2k}$$

olduğu görülebilir. Tekrar Lemma 3.1 yardımıyla, $G_{2k-1}^{(2)}(g_{2k})>0$ eşitsizliği elde edilir.

Benzer biçimde tekrarlı bağıntı yardımıyla,

$$G_{2k}^{(2)}(g_{2k})=g_{2k}^2 G_{2k-1}^{(2)}(g_{2k})+G_{2k-2}^{(2)}(g_{2k})$$

eşitliği yazılabilir. Buradan, $-g_{2k}^2 G_{2k-1}^{(2)}(g_{2k})=G_{2k-2}^{(2)}(g_{2k})<0$ yazılabilir. Böylece,

$$g_{2k}<g_{2k-2}$$

olur.

Dolayısıyla, $\{g_{2n-1}\}$ dizisinin monoton artan ve üstten $a+1$ ile sınırlı olduğu, benzer biçimde $\{g_{2n}\}$ dizisinin monoton azalan ve alttan a ile sınırlı olduğu elde edilmiş olur.

Teorem 3.2 $\{g_{2n-1}\}$ ve $\{g_{2n}\}$ dizileri aşağıdaki

$$\frac{\sqrt{(1-a^2)^2+8a^2}-(1-a^2)}{2a} \tag{3.4}$$

sayısına yakınsar.

İspat: (3.1) de verilen tekrarlı bağıntı için Binet formülü yazılırsa,

$$G_n^{(2)}(x)=A(x)\alpha^n(x)+B(x)\beta^n(x)$$

olup

$$A(x)=\frac{2(x-a)+ax^2-a\sqrt{x^4+4}}{2\sqrt{x^4+4}}$$

ve

$$B(x)=\frac{-2(x-a)-ax^2-a\sqrt{x^4+4}}{2\sqrt{x^4+4}}$$

yazılabilir. Her $x\in[a,a+1]$ için, (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak $\alpha(x)\geq\alpha(a)>1$ ve $|\beta(x)|=\dfrac{1}{\alpha(x)}\leq\dfrac{1}{\alpha(a)}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n(x)=+\infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\beta^n(x)=0$$

elde edilir. Eğer Binet formülünde, $n=2k-1,\ x=g_{2k-1}$ alınır ve kök bulmak için $G_n^{(2)}(x)=0$ olduğu kullanılırsa,

$$A(g_{2k-1})\alpha^{2k-1}(g_{2k-1})+B(g_{2k-1})\beta^{2k-1}(g_{2k-1})=0$$

elde edilir. Böylece,

$$A(g_{2k-1})=-B(g_{2k-1})\left(\frac{\beta^{2k-1}(g_{2k-1})}{\alpha^{2k-1}(g_{2k-1})}\right)$$

bulunur. $A(x)$ ve $B(x)$ sayıları $[a,a+1]$ aralığında süreklidir. Bu ise şunu gösterir: $|A(x)|$ ve $|B(x)|$, $[a,a+1]$ aralığı üzerinde alttan ve üstten sınırlıdır, ayrıca $\lim_{k\to\infty}A(g_{2k-1})=0$ dir. Binet formülü yardımıyla,

$$\lim_{k\to\infty} g_{2k-1} = \frac{\sqrt{(1-a^2)^2+8a^2}-(1-a^2)}{2a}$$

elde edilir.

$n=2k$, $x=g_{2k}$ alınırsa, benzer olarak aşağıdaki formül bulunur;

$$\lim_{k\to\infty} g_{2k} = \frac{\sqrt{(1-a^2)^2+8a^2}-(1-a^2)}{2a}.$$

BÖLÜM 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bazı sayı dizileri ve bu dizilerin terimlerini içeren özdeşlikler yazıldı. Herhangi 2×2 tipinde bir matrisin iz ve determinantından yararlanılarak özdeşlikler türetildi. $n,k\geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2}\right\rfloor}\binom{nk-i}{i}\frac{nk}{nk-i}T^{nk-2i}(-D)^{i}=\frac{1}{2^{nk-1}}\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{nk}{2}\right\rfloor}\binom{nk}{2i}T^{nk-2i}(T^{2}-4D)^{i}$$

eşitliği elde edildi. Burada $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere, T ve D sırasıyla, $T=\mathrm{iz}B=a+d$ ve $D=\det B=ad-bc$ dir. Bu kısımda verilen özdeşlikler, 2012 yılında “Ankara Matematik Günlerinde” bildiri olarak sunulmuştur.

Ayrıca elemanları $n\geq 2$ için, $V_n = pV_{n-1}-qV_{n-2}$, $V_0=2$, $V_1=p$ biçiminde tanımlanan genelleştirilmiş Lucas dizisinin terimleri olan

$$A=\begin{pmatrix} p^{2}-2q & p \\ -qp & -2q \end{pmatrix}$$

matrisi tanımlandı ve kuvvetleri incelendi. Burada a, b, p ve q kompleks sayılar ve $q\neq 0$ dır. Bu matrisin tek ve çift kuvvetlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizisinin terimleri ile ilişkili olduğu görüldü. Bu matrisle ilgili çalışmamız ise, 2012 de Advances In Difference Equations adlı dergide yayımlandı.

Tanımladığımız matrisi kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili birçok özdeşlik elde ettik. Bu özdeşlikler yine aynı matris kullanılarak daha da genelleştirilebilir. Örneğin; genelleştirilmiş Lucas dizisi olan V_{nk} için yazdığımız özdeşikler, V_{nk+r} için de yazılabilir. Ayrıca, 2×2 tipinde yazılan matris daha büyük boyutlu oluşturulup farklı özdeşlikler de türetilebilir.

Çalışmamızın son bölümünde "altın polinomların" köklerini inceledik. Altın polinomlar,

$$G_{n+2}^{(2)}(x) = x^2 G_{n+1}^{(2)}(x) + G_n^{(2)}(x)$$

tekrarlı bağıntısı ile verilir. Literatürde başlangıç koşulları $G_0^{(2)}(x) = -1$, $G_1^{(2)}(x) = x-1$ alınarak, bu polinomların kökleri incelendi ve [38] de bu köklerin $\sqrt{2}$ sayısına yakınsadığı verildi. Biz burada başlangıç koşullarını $G_0^{(2)}(x) = -a$, $G_1^{(2)}(x) = x-a$ alarak, aynı polinomların köklerinin

$$\frac{\sqrt{(1-a^2)^2 + 8a^2} - (1-a^2)}{2a}$$

sayısına yakınsadığını gösterdik. Köklerle ilgili yapılan çalışma "Journal of Inequalities and Applications" adlı dergide basılmak üzere kabul edilmiştir. Literatürdeki çalışmalar dikkate alınarak, çalışma bir adım daha ileriye taşınıp, bu polinomların köklerinin sınırları incelenebilir [18, 35, 36, 37, 38, 41, 55]. Bununla birlikte, $k \geq 3$ seçilerek, $G_n^{(k)}(x)$ polinomlarının köklerinin davranışı da bir problem olarak ortaya konulabilir.

KAYNAKLAR

[1] AMDEBERHAN, T., “ A Note on Fibonacci-Type Polynomials” Integers, 10, 13-18, 2010.

[2] BASIN, S., L., HOGGATT, V., E., “A Primer on the Fibonacci Sequence”, Part II, The Fibonacci Quarterly, 1, No: 2, 61-68, 1963.

[3] BELBACHIR, H., BENCHERİF, F., “Linear Recurrent Sequences and Powers of a Sequare Matrix” Integer: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 1-17, 2006.

[4] BOZKURT, S., B., YILMAZ, F., BOZKURT, D., “On the Complex Factorization of the Lucas Sequences” Applied Mathematics Letters, 24, 1317-1321, 2011.

[5] BRENNER, J., L., “Lucas Matrix”, Amer. Math. Monthly, 58, 220-221, Abstract No. 1, 1951.

[6] CAHILL, N., D., D’ERRICO, J., R., SPENCE, J., P., “Complex Factorizations of the Fibonacci and Lucas Numbers” The Fibonacci Quarterly, 41, 13-19, 2003.

[7] CARLITZ, L., FERNS, H., H., “Some Fibonacci and Lucas Identities”, The Fibonacci Qarterly, 8, 61-73, 1970.

[8] CATALANI, M., “Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials”, arxiv. math/021136v2 [math.CO].

[9] FILIPPONI, R., “Some Binomial Fibonacci Identities” The Fibonacci Quarterly, 33(3), 251-257, 1995.

[10] GOULD, H., W., “A History of the Fibonacci Q-Matrix and a Higher-Dimensional Problem”, The Fibonacci Quarterly, 19(3): 250-257, 1981.

[11] HALICI, S., AKYUZ, Z., “On Sum Formulae for Bivariate Pell Polynomials”, Far East Journal of Applied Mathematics, 41(2), 101-110, 2010.

[12] HALICI, S., AKYUZ, Z., “Some Identities Deriving From the *nth* Power of Special Matrix”, Advances in Difference Equations. doi:10.1186/1687-1847-2012-223, 2010.

[13] HALICI, S., “On Some Fibonacci-Type Polynomials” Applied Mathematica Sciences, 6(22), 1089-1093, 2012.

[14] HOGGATT, JR., VERNER, E., “Fibonacci and Lucas Numbers”, Houghton-Mifflin, 92p, Palo Alto, California.

[15] HOGGATT, JR., VERNER, E., “Some Special Fibonacci and Lucas Generating Functions”, The Fibonacci Quarterly, 9(2), 121-133, 1971.

[16] HOGGATT, JR., VERNER, E., BICKNELL, M., “Roots of Fibonacci Polynomials” The Fibonacci Quarterly, 11(3), 271-274, 1973.

[17] HOGGATT, JR., V., E., LONG, C., “Divisibility Properties of Generalized Fibonacci Polynomials”, The Fibonacci Quarterly, 12(2), 113-120, 1974.

[18] HONGQUAN Yu, Yi WANG and MINGFENG He, “On the Limit of Generalized Golden Numbers”, The Fibonacci Quarterly, 34 (4), 320–322, 1996.

[19] HORADAM, A., F., “Basic Properties of A Certain Generalized Sequence of Numbers”, The Fibonacci Quarterly, 3(2), 161-176, 1965.

[20] HORADAM, A., F., “Tschebyscheff and Other Functions Associated with the Sequence $W_n(a,b;p,q)$ ”, The Fibonacci Quarterly, 7(1), 14-22, 1969.

[21] KALMAN, D., ”Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Methods”, The Fibonacci Quarterly, 20(1),73-76, 1982.

[22] KILIC, E., TASCI, D., “On The Generalized Order-k Fibonacci and Lucas Numbers”, Rocky Mount. J. Math, 36(6), 1915-1926, 2006.

[23] KILIC, E., TASCI, D., “The Generalized Binet Formula, Representation and Sums of The Generalized Order-k Pell Numbers”, Taiwanese J. Math., 10(6), 1661-1670, 2006.

[24] KILIC, E., “The Generalized Order-k Fibonacci-Pell Sequence by Matrix Methods”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 209, 133-145, 2007.

[25] KILIC, E., TAN, E., “On Binomial Sums for the General Second Order Linear Recurrence” Integer, 10, 801-806, 2010.

[26] KILIC, E., STANICA, P., “Factorizations and Representations of Binary Polynomial Recurrences by Matrix Methods”, Rocky Mount. J. Math., 41(1), 1247-1264, 2011.

[27] KING, C., H., “Some Properties of the Fibonacci Numbers”, Master's Thesis, San Jose State College, June 1960.

[28] KOSHY, T., “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications”, A.Wiley-Interscience Publication, 2001.

[29] KÖKEN, F., BOZKURT, D., “On Lucas Numbers by the Matrix Method”, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(4), 471-475, 2010.

[30] LAUGHLIN, J., “Combinatorial Identities Deriving From the nth Power of a 2×2 Matrix”, Integer : Electronic J. of Combinatorial Number Theory 4, 1-15, 2004.

[31] LAUGHLIN, J., Wyshinski, N., “Further Combinatorial Identities Deriving From the nth Power of a 2×2 Matrix”, Discrete Applied Mathematics, 154 , 1301-1308, 2006.

[32] LUCAS, E., “Theories des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques”, American Journal of Math., 189-240, 1978.

[33] LUPAS, A., “A Guide of Fibonacci and Lucas Polynomials”, Math. Magazine, 7(1), 2-12, 1999.

[34] MAHON, J., M., HORADAM, A., F., “Matrix and Other Summation Techniques for Pell Polynomials”, The Fibonacci Quarterly, 24(4), 290-309, 1986.

[35] MATYAS, F., “The Asymtotic Behavior of the Real Roots of Fibonacci-Like Polynomials” Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat., 24, 55-61, 1997.

[36] MATYAS, F., “Bounds for the Zeros of Fibonacci-Like Polynomials”, Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.(N.S), 25, 15-20, 1998.

[37] MOORE, G., A., “The Limit of the Golden Numbers Is $3/2$”, The Fibonacci Quarterly, 32(3), 211-17, 1993.

[38] MOLINA, R., ZELEKE, A., “On the Convergence of the Maximum Roots of Fibonacci-Type Polynomial Sequence” Congressus Numerantium, 184, 121-128, 2007.

[39] MELHAM, R., S., SHANNON A., G., “Some Summation Identities Using Generalized Q –Matrices”, The Fibonacci Quarterly, 33(1), 64-73, 1995.

[40] NALLI, A., HAUKKANEN, P., “On Generalizing Fibonacci and Lucas Polynomials”, Chaos, Solitions and Fractals, 42, 3179-3186, 10 April, 2009.

[41] PRODINGER, H., “The Asymptotic Behavıor of the Golden Numbers” The Fibonacci Quarterly, 34(3), 224-225, 1996.

[42] ROBBINS, N., “Beginnig Number Theory” , Wm. C. Brown Publishers, Oxford, 1993.

[43] ROBBINS, N., “A New Formula for Lucas Numbers” The Fibonacci Quarterly, 29(4), 362-363, 1991.

[44] ROSENBAUM, R., A., “An Application of Matrices to Linear Rucursion Relations” Amer. Math. Mountly, 66, 792-793, 1959.

[45] RICCI, P., E., “Generalized Lucas Polynomials and Fibonacci Polynomials” Rivista di Math. Univ. Parma, (4), 137-146, 1995.

[46] SHANNON, A., G., HORADAM, A.,F., “Some Properties of Third-Order Recurrence Relations” The Fibonacci Quarterly, 10(2), 135-145, 1972.

[47] SEIBERT, J., TROJOVSKY, P., “Circulants and the Factorization of Fibonacci-Like Numbers”, Acta Matematica Universitatis Ostraviensis, 14(1), 63-70, 2006.

[48] SILVESTER, J., R., “Fibonacci Properties by Matrix Methods”, Mathematical Gazette, 63,188-191, 1979.

[49] SILVESTER, J., R., “The r-subsequences of the Fibonacci sequence”, Maths Gazette, 90, 263-266, 2004.

[50] UDREA, G., “Catalan’s Identity and Chebyshev Polynomials of the Second Kind”, Portugaliae Mathematica, 1995.

[51] UDREA , G., “A Note on the Sequence $\{W_n\}$, $n \geq 0$ of A. F. Horadam”, Portugaliae Mathematica, 1996.

[52] WADDIL M., E., SACKS L., “Another Generalized Fibonacci Sequence” The Fibonacci Quarterly, 5(3), 209-222, 1967.

[53] WADDIL M., E., “Using Matrix Techniques to Establish Properties of a Generalized Tribonacci Sequence”, In Applications of Fibonacci Numbers, 4, 299-308, 1991.

[54] VAJDA, S., “Fibonacci and Lucas Numbers , The Golden Section Theory and Applications”, Ellis Horwood Limited, 1989.

[55] Yi WANG, MINGFENG He, “Zeros of a Class of Fibonacci-Type Polynomials”, The Fibonacci Quarterly, 42(4), 341-349, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep Akyüz, 28.04.1980 de Gümüşhane’ de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul’da tamamladı. 1997 yılında Kadıköy Kız Lisesinden mezun oldu. 1997 yılında başladığı İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü 2001 yılında bitirdi. 2004 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümüne girdi ve 2007 yılında mezun oldu. 2002 yılında Adapazarı Merkez Atatürk İlköğretim Okulunda matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2006 yılında Adapazarı Ahmet Akkoç İlköğretim Okuluna atandı. Halen bu okulda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.